수학 영역 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ④ (출제자 : 20 최연조)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 간단한 계산을 할 수 있는가?

[해설]
지수법칙에 의해 $3^{\sqrt{6}} \times 3^{2-\sqrt{6}} = 3^{\sqrt{6}+2-\sqrt{6}} = 3^2 = 9$ 이므로
구하고자 하는 값은 9 이다.

2) [정답] ③ (출제자 : 20 김태희)

[출제의도] 간단한 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}(x^2+6x+7)\,dx &= \int_{-3}^{3}(x^2+7)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{3}(x^2+7)\,dx \\ &= 2\times\left[\frac{1}{3}x^3+7x\right]_0^3 \\ &= 60\end{aligned}$$

3) [정답] ① (출제자 : 21 김민성)

[출제의도] 로그함수의 점근선과 지수함수의 교점을 구할 수 있는가?

[해설]
곡선 $y=\log_2(x-3)$ 의 점근선의 방정식은 $x=3$ 이다.
함수 $y=3^{x-2}+1$ 에 $x=3$ 을 대입하면 y 좌표는 4 이다.

4) [정답] ④ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 간단한 부정형 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]
$\lim_{x\to 0+} f(x) = 2$ 이고 $\lim_{x\to -1-} f(x) = 0$ 이므로
$\lim_{x\to 0+} f(x) + \lim_{x\to -1-} f(x) = 2+0 = 2$ 이다.

5) [정답] ③ (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]
$f'(x) = 12x^2-6$ 의 양변을 적분하면
$f(x) = 4x^3 - 6x + C_1$ (C_1 은 적분상수)이다.
여기서 한 번 더 양변을 적분하면
$F(x) = x^4-3x^2+C_1x+C_2$ (C_2 는 적분상수)이다.
$F(1) = -5$ 이고 $F(2) = 6$ 이므로
$1-3+C_1+C_2 = -5$, $16-12+2C_1+C_2 = 6$ 이다.
두 식을 연립하면 $C_1 = 5$, $C_2 = -8$ 이다.
$f(x) = 4x^3-6x+5$ 이므로
$f(1) = 3$ 이다.

[별해]
$f'(x) = 12x^2-6$ 의 양변을 적분하면
$f(x) = 4x^3-6x+C$ (C는 적분상수)이다.
$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2)-F(1) = 11$ 이므로 $C=5$ 이다.
$f(x) = 4x^3-6x+5$ 이므로 $f(1)=3$ 이다.

6) [정답] ① (출제자 : 20 김동해)

[출제의도] 함수의 연속과 미분가능성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]
$f(1) = 0$ 이므로 $1+c=0$, $c=-1$ 이다.
함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$ 이다.
$f(1)=0$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = a+b$ 이므로 $a+b=0$ 이다.
함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 이다.
$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1+} x = 1$,
$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{ax-a}{x-1} = a$ 이므로 $a=1$, $b=-1$ 이다.
따라서 $f(-1) = -a+b = -2$ 이다.

7) [정답] ③ (출제자 : 20 김동해)

[출제의도] 주어진 조건을 만족하는 등비수열의 공비를 구할 수 있는가?

[해설]
등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자.
공비가 r 이므로 $a_n = ar^{n-1}$ 이다.
등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비가 6 이므로
$b_n = 3^n \times a_n = 3^n \times ar^{n-1} = 3a\times(3r)^{n-1}$ 이다.
그러므로 $r=2$ 이다.
$a_2+a_4 = ar+ar^3 = 2a+8a = 5$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n = \frac{3}{2} \times 6^{n-1}$ 이고 $b_2 = 9$ 이다.

따라서 $r + b_2 = 11$ 이다.

8) [정답] ④ (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 미분계수와 접선의 방정식을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

곡선 $y = f(x)$ 가 점 $\mathrm{A}(1, 4)$ 를 지나므로 $f(1) = a + b = 4$ 이다.

이 때, $b = -a + 4$ 이므로 $f(x) = x^3 - x^2 + ax - a + 4$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 - 2x + a$ 이고, $f'(1) = a + 1$ 이므로 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = (a+1)(x-1) + 4 = (a+1)x - a + 3$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 그래프와 위 접선의 교점의 x 좌표는

$x^3 - x^2 + ax - a + 4 = (a+1)x - a + 3$ 에서

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, $x = -1$ 또는 $x = 1$ 이다.

이때, 점 A 의 x 좌표가 1 이므로, 점 B 의 x 좌표는 -1 이다.

점 B 에서의 접선의 기울기가 6 이므로

$f'(-1) = 3 + 2 + a = 6$, $a = 1$ 이다.

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + x + 3$ 이고 $f(2) = 9$ 이다.

[별해]

곡선 $y = f(x)$ 의 점 A 에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$ 라 하면

$f(x) - g(x) = (x-1)^2(x-c)$ (c 는 상수)

이 때 $g(x)$ 는 일차 이하의 다항함수이므로,

$f(x) - g(x)$ 의 이차항의 계수는 $f(x)$ 와 동일한 -1 이다.

$(x-1)^2(x-c)$ 에서 이차항의 계수는 $-2-c$ 이므로

$-2 - c = -1$, $c = -1$

즉, 점 B 의 x 좌표는 -1 이다.

(이하 생략)

9) [정답] ② (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

조건 (가)에서 $x \to a$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이다.

즉, $f(a) + g(a) = 0$ ⋯㉠

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}+\{g(x)-g(a)\}}{x-a} = 4$$

즉, $f'(a) + g'(a) = 4$ ⋯㉡

조건 (나)에서 $x \to a$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이다.

즉, $f(a) - g(a) - 2f(2) = 0$ ⋯㉢

㉠과 ㉢에서 $2f(a) - 2f(2) = 0$, $f(a) = f(2)$ 이다.

이때, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

그러므로 $a = 2$ 이다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)-2f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2} = 6$$

즉, $f'(2) - g'(2) = 6$ ⋯㉣

㉡과 ㉣에서 $f'(2) = 5$, $g'(2) = -1$ 이다.

따라서 $a \times f'(a) \times g'(a) = 2 \times 5 \times (-1) = -10$ 이다.

10) [정답] ② (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 속도를 통해 움직인 거리를 구할 수 있는가?

[해설]

시각 t 에서의 점 P 의 위치를 $x_1(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = \int (3t^2 - 16t + 10)\,dt$$

$$= t^3 - 8t^2 + 10t + C_1 \ (C_1 \text{ 은 적분상수})\text{이고,}$$

시각 t 에서의 점 Q 의 위치를 $x_2(t)$ 라 하면

$$x_2(t) = \int (2t + 16)\,dt = t^2 + 16t + C_2 \ (C_2 \text{ 는 적분상수})\text{이다.}$$

시각 t 에서 수직선 위를 움직이는 점 R 의 위치를 $x_3(t)$ 라 하면

$$x_3(t) = \frac{2x_1(t) + x_2(t)}{1+2}$$

$$= \frac{2(t^3 - 8t^2 + 10t + C_1) + (t^2 + 16t + C_2)}{3}$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 5t^2 + 12t + C_3 \ (C_3 \text{ 은 상수})\text{이다.}$$

시각 t 에서의 점 R 의 속도를 $v_3(t)$ 라 하면

$v_3(t) = 2t^2 - 10t + 12 = 2(t-2)(t-3)$ 이므로

점 R 는 $t = 2$ 일 때와 $t = 3$ 일 때 움직이는 방향이 바뀐다.

$v_3(t) = 2(t-2)(t-3)$ 이므로 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $v_3(t) \geq 0$ 이고,

닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 $v_3(t) \leq 0$ 이다.

따라서 점 R 가 움직이는 방향이 두 번 바뀔 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_3(t)|\,dt = \int_0^3 |2t^2 - 10t + 12|\,dt$$

$$= \int_0^2 (2t^2 - 10t + 12)\,dt + \int_2^3 (-2t^2 + 10t - 12)\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 - 5t^2 + 12t\right]_0^2 + \left[-\frac{2}{3}t^3 + 5t^2 - 12t\right]_2^3$$

$$= \frac{28}{3} + \frac{1}{3} = \frac{29}{3} \text{ 이다.}$$

11) [정답] ⑤ (출제자 : 20 김동해)

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $y = |a\sin(bx - c) + 1|$ 의 그래프에서

$-2 \leq a\sin(bx-c) + 1 \leq 4$ 이므로 $-3 \leq a\sin(bx-c) \leq 3$ 이다.

그러므로 $a = 3$ 또는 $a = -3$ 이다.

또한, 함수 $y = a\sin(bx-c) + 1$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{|b|} = \pi$ 이므로

$b = 2$ 또는 $b = -2$ 이다.

그림에서 함수 $y = |a\sin(bx-c) + 1|$ 의 그래프는

$x = \frac{\pi}{2}$ 에서 함숫값 4 를 갖는다.

$-2 \leq a\sin(bx-c) + 1 \leq 4$ 이므로

함수 $y=a\sin(bx-c)+1$ 는 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 함숫값 -4 를 가질 수 없다.
따라서 함수 $y=a\sin(bx-c)+1$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\,4\right)$ 를 지난다.

한편 $0<c<2\pi$ 이므로 abc 가 최대인 상황은 $ab>0$ 인 경우이므로
다음과 같이 경우를 나누자.

i) $a=3$, $b=2$ 인 경우

함수 $y=3\sin(2x-c)+1$ 이 점 $\left(\frac{\pi}{2},\,4\right)$ 를 지나므로
$3\sin(\pi-c)+1=4$ 에서 $\sin c=1$ 이다.
이를 만족시키는 c 의 값은 $\frac{\pi}{2}$ 이다. $(\because 0<c<2\pi)$
이 경우 $abc=3\times2\times\frac{\pi}{2}=3\pi$ 이다.

ii) $a=-3$, $b=-2$ 인 경우

함수 $y=-3\sin(-2x-c)+1$ 이 점 $\left(\frac{\pi}{2},\,4\right)$ 를 지나므로
$-3\sin(-\pi-c)+1=4$ 에서 $\sin(c)=-1$ 이다.
이를 만족시키는 c 의 값은 $\frac{3}{2}\pi$ 이다. $(\because 0<c<2\pi)$
이 경우 $abc=(-3)\times(-2)\times\frac{3}{2}\pi=9\pi$ 이다.

위의 i), ii)에 의하여 abc 의 최댓값은 9π 이다.

12) [정답] ④ (출제자 : 20 최인환)
[출제의도] 함수의 특징을 파악하여 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]
모든 자연수 n 에 대하여 점 Q_n 의 좌표를 $\left(a_n,\,2(a_n)^2\right)$ 이라 하면
직선 OQ_n 의 기울기는 $2a_n$ 이므로 점 Q_n 을 지나면서
직선 OQ_n 과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2a_n}$ 이다.
따라서 직선 l 의 방정식은 $y=-\frac{1}{2a_n}(x-a_n)+2(a_n)^2$ 이다.

직선 l 이 y 축과 만나는 점이 P_{n+1} 이므로 점 P_{n+1} 의 좌표는
$\left(0,\,2(a_n)^2+\frac{1}{2}\right)$ 임을 알 수 있다.
즉, 삼각형 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ 의 밑변의 길이는 $\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}$ 이고
높이는 점 Q_{n+1} 과 점 Q_n 의 y 좌표의 차인 $2(a_{n+1})^2-2(a_n)^2$ 이므로
넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}\times2\left\{(a_{n+1})^2-(a_n)^2\right\}$ 이다.

이때 점 Q_{n+1} 의 y 좌표는 점 P_{n+1} 의 y 좌표와 같으므로
$2(a_{n+1})^2=2(a_n)^2+\frac{1}{2}$ 이다.
그러므로 $A_n=\frac{1}{2}\times a_{n+1}\times\frac{1}{2}=\frac{a_{n+1}}{\boxed{4}}$ 이다.

점 Q_n 의 좌표는 $\left(a_n,\,2(a_n)^2\right)$ 이고 y 축과 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 은 수직이므로
점 P_n 의 좌표는 $\left(0,\,2(a_n)^2\right)$ 이다.
점 Q_{n+1} 의 x 좌표는 a_{n+1} 이므로 $B_n=(a_n)^2a_{n+1}$ 이다.
그러므로 $\frac{B_n}{A_n}=\boxed{4}\times(a_n)^2$ 이다.

이때, 수열 $\left\{(a_n)^2\right\}$ 은 식 $2(a_{n+1})^2=2(a_n)^2+\frac{1}{2}$ 에서
첫째항이 $(a_1)^2=\frac{1}{4}\times\frac{B_1}{A_1}=\frac{3}{8}$ 이고 공차가 $\frac{1}{4}$ 인 등차수열이므로
$(a_n)^2=\frac{n-1}{4}+(a_1)^2=\frac{2n+1}{8}$ 이다.

따라서 $\frac{B_n}{A_n}=\boxed{\frac{2n+1}{2}}$ 이다.
$p=4$, $f(n)=\frac{2n+1}{2}$ 이므로 $p\times f(4)=4\times\frac{8+1}{2}=18$

13) [정답] ② (출제자 : 21 서연수)
[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 삼차함수의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설]
삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하자. (단, $a\neq0$)
삼차함수 $f(x)$ 의 일차항의 계수가 0 이므로
함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 의 상수항이 0 이다.
즉, $f'(0)=0$ 이다.

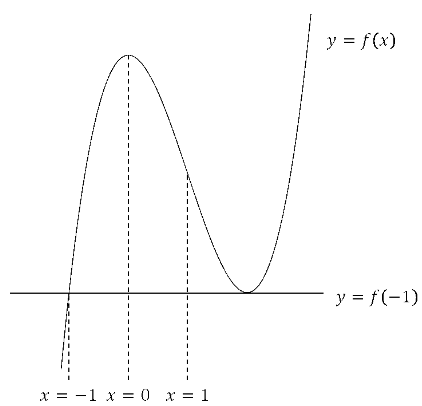
이때, 조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$ 는 극값을 가지므로
함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 갖는다.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=f(-1)$ 에 접해야 한다.
이때, 조건 (나)에 의해 $f'(-1)\neq0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서
극값을 갖지 않고 극값 중 하나는 $f(-1)$ 과 같다.

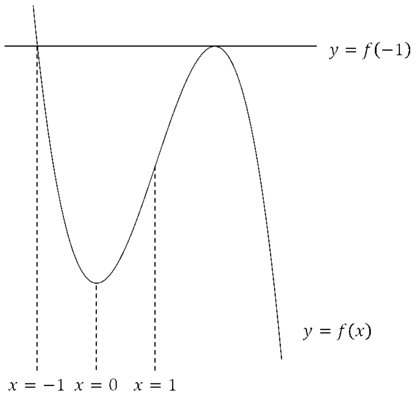
함수 $f(x)$ 의 극값이 $f(-1)$ 과 같으려면
$a>0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 근방에서 증가하고
$a<0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 근방에서 감소해야 한다.

따라서 조건 (나)에 의해
$a>0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 근방에서 감소하고
$a<0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 근방에서 증가해야 한다.

이를 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.
i) $a>0$ 일 때



ii) $a<0$ 일 때



함수 $f(x)$ 와 직선 $y=f(-1)$ 의 접점의 x 좌표를 $k\,(k>1)$라 하면
$f(x)=a(x+1)(x-k)^2+f(-1)$ 이라 할 수 있다.

함수 $f(x)$ 의 일차항의 계수가 0 이므로 일차항의 계수만 보면
$a(k^2-2k)=0$ 이다.
$a \neq 0$, $k>1$ 이므로 $k=2$ 이다.

$f(x)=a(x+1)(x-2)^2+f(-1)$ 에서
$f(-1)=f(2)$ 이므로 $f(-1)f(2)=\{f(2)\}^2=\{f(1)\}^2$ 이다.
이때, $f(1)\neq f(2)$ 이므로 $f(1)=-f(2)$ 이다.

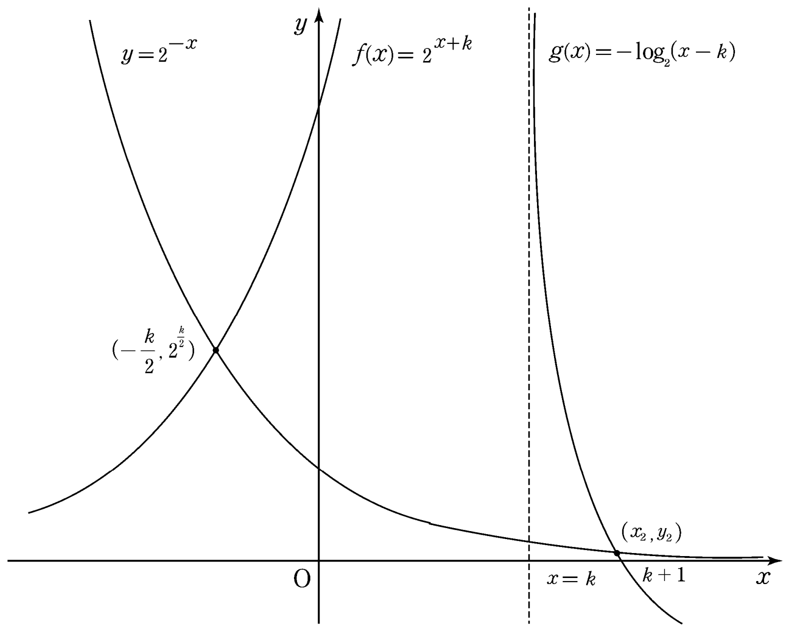
앞서 구한 $f(x)$ 에 $x=1$ 을 대입하여 비교하면
$f(1)=2a+f(-1)=2a+f(2)=-f(2)$ 이다.
그러므로 $f(2)=-a$, $f(x)=a(x+1)(x-2)^2-a$ 이다.

따라서 $\dfrac{f(-2)}{f(2)}=\dfrac{-17a}{-a}=17$ 이다.

14) [정답] ⑤ (출제자 : 21 박창수)

[출제의도] 지수함수와 로그함수 그래프의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

[해설]



ㄱ. x_2 의 값은 곡선 $g(x)$ 의 점근선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표인 k 보다 크고, 곡선 $y=g(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표인 $k+1$ 보다 작으므로 $k<x_2<k+1$ 이다. (참)

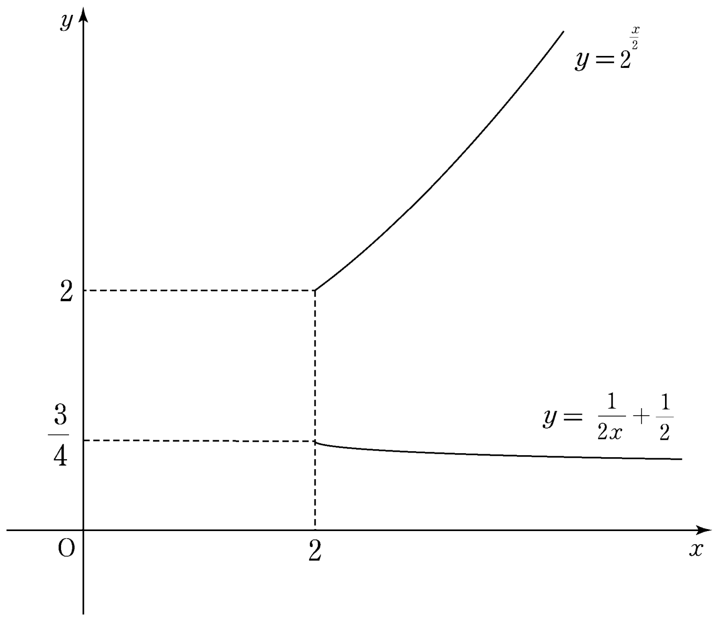
ㄴ. $k\geq 2$ 일 때 $2^{-k}\leq 2^{-2}$ 이고 $k<x_2$ 이므로 $2^{-x_2}<2^{-k}$ 이다.
$y_2=2^{-x_2}$ 이므로 $y_2<2^{-k}\leq \dfrac{1}{4}$ 이다. (참)

ㄷ. 두 곡선 $y=2^{-x}$ 와 $y=2^{x+k}$ 에 대하여 방정식 $2^{-x}=2^{x+k}$ 의 실근은 $x=-\dfrac{k}{2}$ 이므로 $x_1=-\dfrac{k}{2}$ 이고 $y_1=2^{\frac{k}{2}}$ 이다.

또한, ㄱ과 ㄴ에서 $x_2<k+1$ 이고 $y_2<\dfrac{1}{4}$ 이므로
$x_2y_2<\dfrac{1}{4}(k+1)$ $(\because x_2>0,\ y_2>0)$ 이고
$x_1y_1+x_2y_2<\left(-\dfrac{k}{2}\right)\times 2^{\frac{k}{2}}+\dfrac{1}{4}(k+1)$ 이다.

위 부등식에서 우변 $\left(-\dfrac{k}{2}\right)\times 2^{\frac{k}{2}}+\dfrac{1}{4}(k+1)$ 의 범위를 살펴보자.
$\dfrac{k+1}{4}-\dfrac{k}{2}\times 2^{\frac{k}{2}}=\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{k+1}{2k}-2^{\frac{k}{2}}\right)$ 에서 $x\geq 2$ 일 때,

두 곡선 $y=2^{\frac{x}{2}}$ 와 $y=\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}$ 의 그래프는 다음과 같다.



$x\geq 2$ 일 때, $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}<2^{\frac{x}{2}}$ 이므로 양변에 $\dfrac{x}{2}$ 를 곱하면
$\dfrac{1}{4}(x+1)<\dfrac{x}{2}\times 2^{\frac{x}{2}}$ 이다.
따라서 $k\geq 2$ 일 때, $\dfrac{1}{4}(k+1)<\dfrac{k}{2}\times 2^{\frac{k}{2}}$ 이고
$\left(-\dfrac{k}{2}\right)\times 2^{\frac{k}{2}}+\dfrac{1}{4}(k+1)<0$ 이다.
따라서 $k\geq 2$ 일 때
$x_1y_1+x_2y_2<\left(-\dfrac{k}{2}\right)\times 2^{\frac{k}{2}}+\dfrac{1}{4}(k+1)<0$ 이다. (참)

15) [정답] ① (출제자 : 20 최인환, 19 황주영)

[출제의도] 정적분의 기하적 의미를 이용하여 삼차함수의 값을 찾아낼 수 있는가?

[해설]
조건 (가)에 의해 $f(x)=x(x-k)(x-\alpha)+f(0)$ 이다.
조건 (나)의 식을 계산하면
$\displaystyle\int_0^k f(t)\,dt=\int_0^k\{t^3-(\alpha+k)t^2+k\alpha t+f(0)\}\,dt$

$$= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{(\alpha+k)t^3}{3} + \frac{k\alpha t^2}{2} + f(0)t \right]_0^k$$
$$= \frac{k^4}{4} - \frac{(\alpha+k)k^3}{3} + \frac{\alpha k^3}{2} + kf(0)$$
$= kf(0)$ 이다.

$\frac{k^4}{4} - \frac{(\alpha+k)k^3}{3} + \frac{\alpha k^3}{2} = 0$ 에서 $\alpha = \frac{k}{2}$ 이므로
$f(x) = x\left(x - \frac{k}{2}\right)(x-k) + f(0)$ 이다.

주어진 관계식 $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt - x^2$ 의
양변을 x 에 대하여 미분하면
$$g'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt - xf(x) - 2x$$
$= \int_0^x f(t)\,dt - 2x$ 이다.

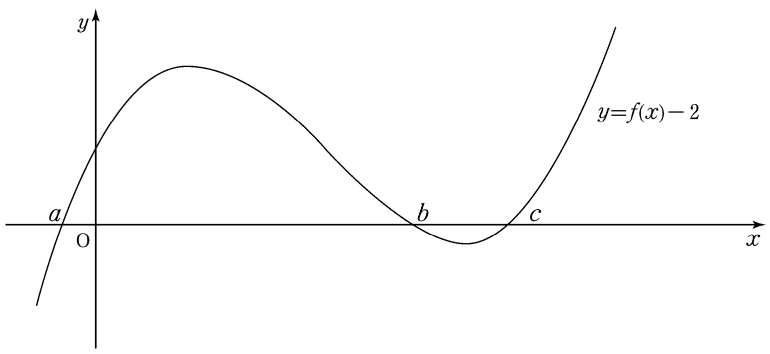
이때, 함수 $g'(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로
$g'(x)$ 의 부호가 양수에서 음수로 바뀌는 구간이 존재하면
$g'(x)$ 의 부호가 음수에서 양수로 바뀌는 구간이 반드시 존재한다.
따라서 함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면
실수 전체의 집합에서 $g'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$g'(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 2x \geq 0$ 에서
함수 $h(x)$ 를 $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 라 하면 $h(x) \geq 2x$ 이다.
이때, $h(0) = 0$ 에서 곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = 2x$ 가 원점에서 만나므로
실수 전체의 집합에서 $h(x) \geq 2x$ 이려면 $h'(0) = 2$ 이어야 한다.
즉, $f(0) = 2$ 이므로 $f(x) = x\left(x - \frac{k}{2}\right)(x-k) + 2$ 이다.
따라서 $f(1) = \left(1 - \frac{k}{2}\right)(1-k) + 2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{8}$ 이므로
$f(1)$ 의 최솟값은 $\frac{15}{8}$ 이다.

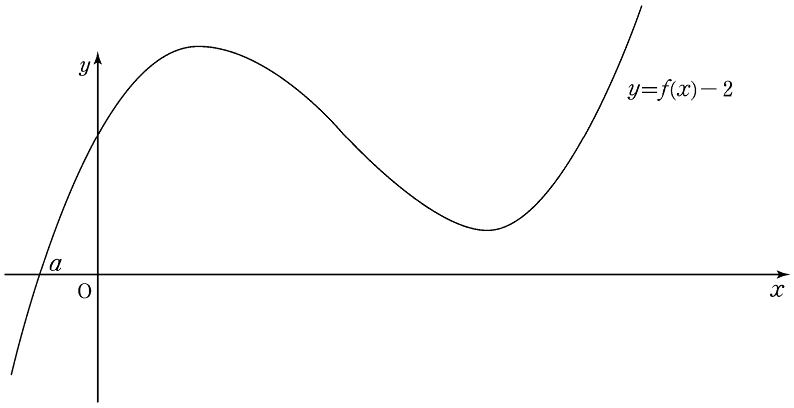
[별해]
$$g'(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 2x = \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x 2\,dt$$
$= \int_0^x \{f(t) - 2\}\,dt$ 로 나타낼 수 있다.

함수 $g(x)$ 가 극솟값을 가지지 않으려면
x 값이 증가할 때 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt$ 의 부호가 음수에서 양수로
바뀌는 구간이 없어야 하므로 $f(0)$ 의 값에 따라 경우를 나누면
다음과 같다.

i) $f(0) - 2 > 0$ 일 때

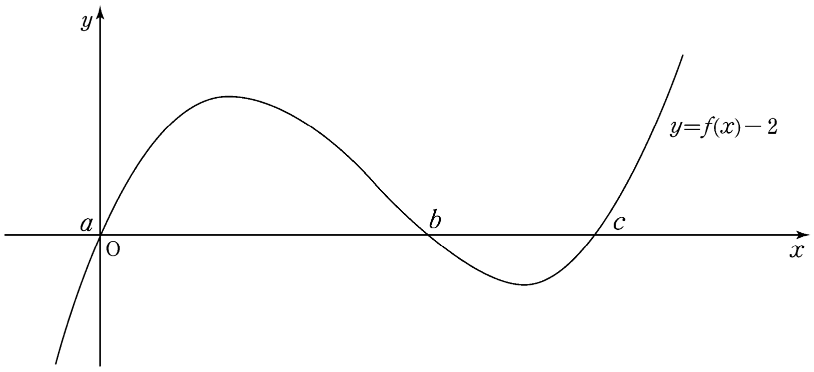


$f(x) - 2 = 0$ 의 실근을 순서대로 a, b, c 라 하자.
$a < x < 0$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt < 0$,
$x \geq 0$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt \geq 0$ 이므로
함수 $g(x)$ 는 항상 극솟값을 갖는다.



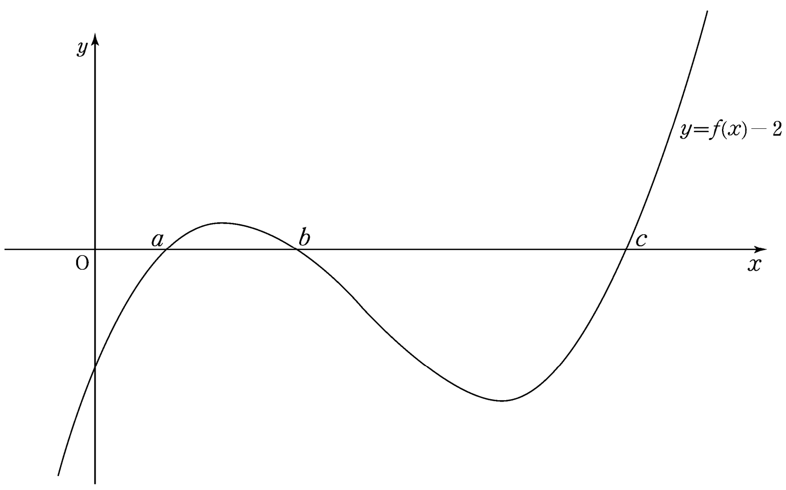
$f(x) - 2 = 0$ 의 실근을 a 라 하자.
$a < x < 0$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt < 0$,
$x \geq 0$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt \geq 0$ 이므로
함수 $g(x)$ 는 항상 극솟값을 갖는다.

ii) $f(0) - 2 = 0$ 일 때



$f(x) - 2 = 0$ 의 실근을 순서대로 a, b, c 라 하자.
$x = a$, $x = c$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt = 0$,
$x < a$, $a < x < c$, $x > c$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt > 0$ 이므로
함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

iii) $f(0) - 2 < 0$ 일 때

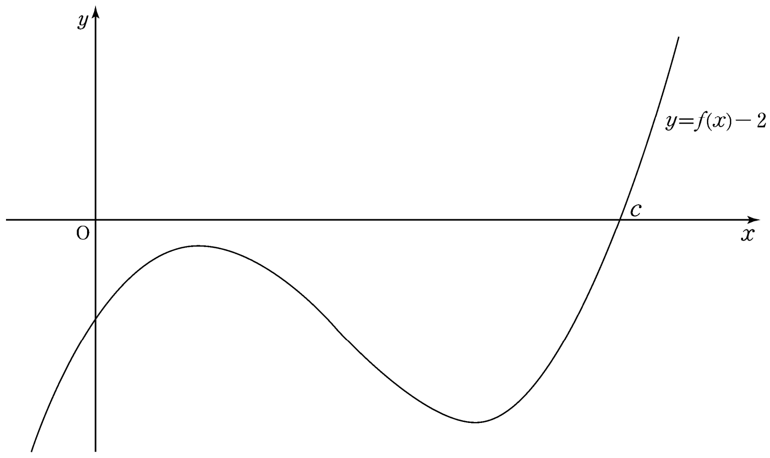


$f(x) - 2 = 0$ 의 실근을 순서대로 a, b, c 라 하자.

$b < x < c$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt < 0$ 인 x 가 존재하고

$x \ge c$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt \ge 0$ 인 x 가 존재하므로

함수 $g(x)$ 는 항상 극솟값을 갖는다.



$f(x)-2=0$ 의 실근을 c 라 하자.

$0 < x < c$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt < 0$,

$x \ge c$ 에서 $g'(x) = \int_0^x \{f(t)-2\}\,dt \ge 0$ 인 x 가 존재하므로

함수 $g(x)$ 는 항상 극솟값을 갖는다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $f(0)=2$ 이므로 $f(x)=x\left(x-\frac{k}{2}\right)(x-k)+2$ 이다.

따라서 $f(1)=\left(1-\frac{k}{2}\right)(1-k)+2=\frac{1}{2}\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{8}$ 이므로

$f(1)$ 의 최솟값은 $\frac{15}{8}$ 이다.

16) [정답] 8 (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 주어진 식을 통해 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_1+a_2=2a+d=4$ 이고, $a_3=a+2d=4$ 이므로

두 식을 연립하면 $a=d=\frac{4}{3}$ 이다.

따라서 $a_6=a+5d=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$ 이다.

17) [정답] 6 (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)g(x)=\left(x^2-4x+6\right)g(x)$ 이므로 양변을 미분하면

곱의 미분법에 의해

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=(2x-4)g(x)+\left(x^2-4x+6\right)g'(x)$ 이다.

$x=2$ 를 대입하면

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=0+2g'(2)=2g'(2)$ 이다.

따라서 $g'(2)=3$ 을 대입하면 $x=2$ 에서의 미분계수는 $2\times 3=6$ 이다.

18) [정답] 4 (출제자 : 21 황민수)

[출제의도] 로그의 밑 변환 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

로그의 밑 변환 공식에 의해 $\log_a b=\frac{\log b}{\log a}$,

$\frac{\log a}{\log b}=\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ 이므로 $\log_a b-\frac{2}{\log_a b}=1$ 이다.

위의 식 양변에 $\log_a b$ 를 곱하고 식을 정리하면

$(\log_a b)^2-\log_a b-2=0$ 이다.

그러므로 $\log_a b$ 의 값은 2 또는 -1 이다.

a 와 b 가 1 보다 큰 상수이므로 $\log_a b>0$ 이다.

따라서 $\log_a b=2$ 이므로 $(\log_a b)^2=4$ 이다.

19) [정답] 220 (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\sin\theta+2\cos\theta=-\frac{2}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta=\frac{4}{25}$ …㉠

$2\sin\theta-\cos\theta=k$ 의 양변을 제곱하면

$4\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=k^2$ …㉡

㉠과 ㉡을 더하면 $5\sin^2\theta+5\cos^2\theta=5=\frac{4}{25}+k^2$

$k^2=\frac{121}{25}$ 이고 $k=\pm\frac{11}{5}$ 이다.

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 일 때 $\sin\theta>0$ 이고 $\cos\theta<0$ 이므로 $2\sin\theta-\cos\theta>0$

따라서 $k>0$ 이므로 $k=\frac{11}{5}$ 이고, $100k=220$ 이다.

20) [정답] 5 (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 삼차함수의 그래프의 개형을 추론하고 이에 따른 경우를 비교하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

조건 (가)에 의해 $f'(x)$ 를 $f'(x)=3x(x-a)$ ($a>0$ 인 상수)로 나타낼 수 있다.

조건 (나)에서 방정식 $(f'\circ f)(x)=3f(x)$ 의 실근의 개수는 방정식 $3f(x)\{f(x)-a\}=3f(x)$ 의 실근의 개수와 같으므로

방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수와 방정식 $f(x)=a+1$ 의 실근의 개수를 더한 값이다.

그 값이 5 이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가 2 인 경우와 3 인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

ⅰ) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가 2 일 때

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 $f(0)=4$ 이므로

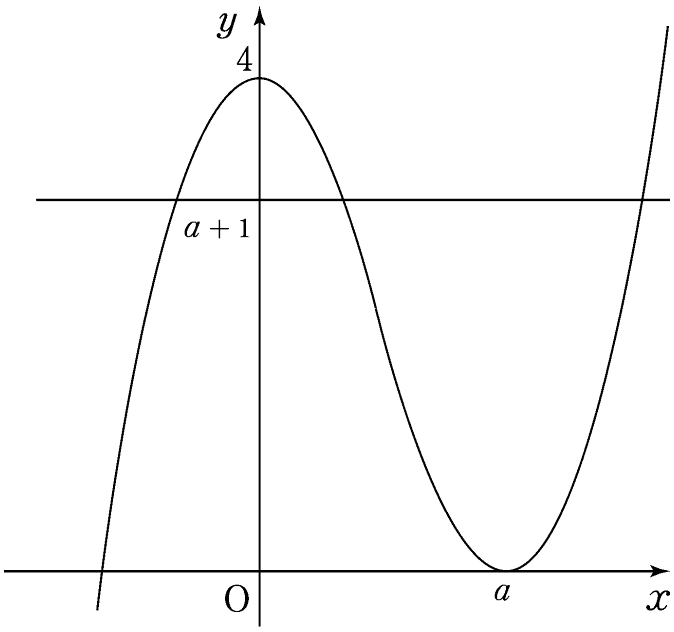
방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가 2 이려면 함수 $f(x)$ 의 극솟값인 $f(a)$ 의 값이 0 이 되어야 한다.

$f'(x)=3x(x-a)=3x^2-3ax$, $f(0)=4$ 에서

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+4$ 이므로 $f(a)=4-\frac{1}{2}a^3=0$ 이다.

그러므로 $a=2$ 이다.

이때 방정식 $f(x)=2+1=3$ 의 실근의 개수가 3 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

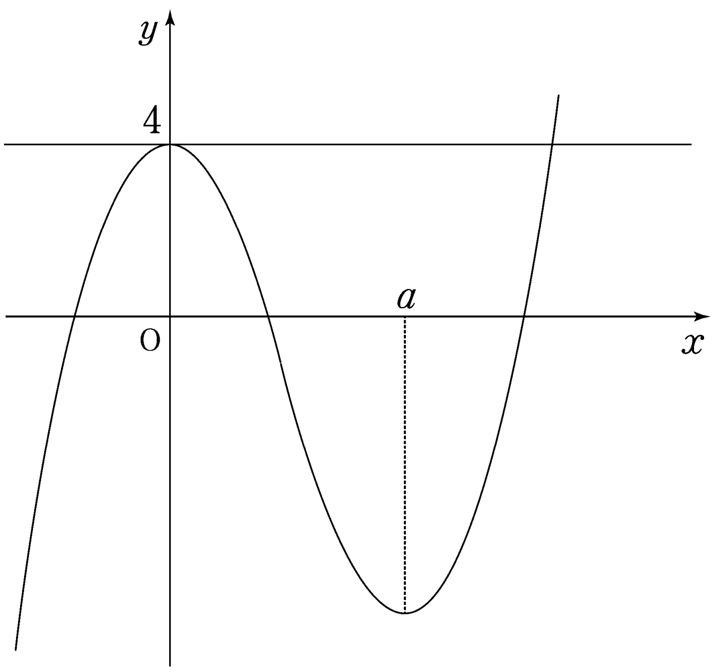


ii) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가 3 일 때

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 $f(0)=4$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수가 3 이려면 함수 $f(x)$ 의 극솟값인 $f(a)$ 의 값이 0 보다 작아야 한다.
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2+4$ 이므로 $f(a)=4-\frac{1}{2}a^3<0$ 이어야 한다.

그러므로 $a>2$ 이고 방정식 $f(x)=a+1$ 의 실근의 개수가 2 이므로 이를 만족시키는 $a+1$ 의 값은 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 되어야 한다.

따라서 $a+1=4$ 이므로 $a=3$ 이 모든 조건을 만족시킨다.

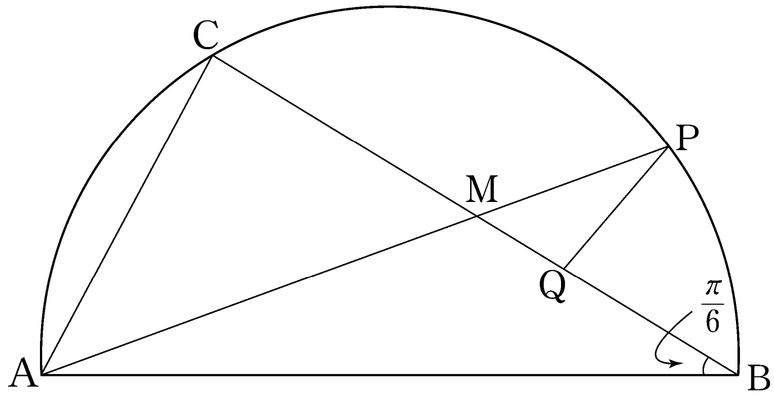


i), ii)에서 a 의 값이 될 수 있는 수는 2 와 3 이므로 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은 $2+3=5$ 이다.

21) [정답] 10 (출제자 : 20 정원철)

[출제의도] 주어진 조건에 따라 사인법칙과 코사인법칙을 이용할 수 있는가?

[해설]



삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}=4$ 이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{BC}=2\sqrt{3}$ 이다.
$\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$ 이고
$\angle MCA=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{AM}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CM}^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$ 이다.

$\angle AMC=\theta$ 라 하면 삼각형 AMC 에서
$\cos\theta=\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 이다.

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$ 이다.
또한, $\angle PMQ=\angle AMC=\theta$ 이고 $\angle BPM=\frac{\pi}{2}$ 이므로
$\overline{MP}=\overline{BM}\times\cos\theta=\frac{3\sqrt{7}}{7}$ 이다.

$\overline{MQ}=\frac{1}{3}\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 코사인법칙에 의해
$\overline{PQ}^2=\frac{9}{7}+\frac{1}{3}-2\times\frac{3\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{16}{21}$,
$\overline{PQ}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$ 이다.

$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{4}{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 이므로
삼각형 MQP 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면
사인법칙에 의해 $2R=\frac{\overline{PQ}}{\sin\theta}=\frac{\frac{4\sqrt{21}}{21}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

따라서 삼각형 MQP 의 외접원의 넓이는 $\pi R^2=\frac{\pi}{3}$ 이므로
$p^2+q^2=10$ 이다.

22) [정답] 66 (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 수열의 합과 일반항의 관계를 이용해 주어진 수열을 추론할 수 있는가?

[해설]
조건 (가)에서
$a_na_{n+1}=(S_{n+1})^2-(S_n)^2=(S_{n+1}+S_n)(S_{n+1}-S_n)$ 이고
모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 이므로,

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=0$ 또는 $a_n=S_{n+1}+S_n$이다.

이때 $a_{n+1}=0$이면 $S_n=S_{n+1}$이고,
2 이상의 자연수 n에 대하여
$a_n=S_n-S_{n-1}$을 $a_n=S_{n+1}+S_n$에 대입하면
$S_{n-1}+S_{n+1}=0$이다.
따라서 수열 $\{S_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여
$S_n=S_{n+1}$ … ㉠ 또는 $S_n+S_{n+2}=0$ … ㉡ 을 만족시킨다.
(이때 ㉡의 식은 유도된 식 $a_n=S_{n+1}+S_n$와 함께 고려할 수 있다.)

$a_1=a$라 할 때, $a=0$이면 $S_1=0$이다.
㉠ 또는 ㉡ ($a_n=S_{n+1}+S_n$)에 $n=1$을 대입하면 $S_2=0$이다.
$S_1=0$, $S_2=0$에서 수열 $\{S_n\}$은 ㉠ 또는 ㉡을 만족시켜야 하므로
모든 자연수 n에 대하여 $S_n=0$이다.
이는 조건 (나)에 모순이므로 $a\neq 0$이다.

$S_1=a$이므로 ㉠ 또는 ㉡ ($a_n=S_{n+1}+S_n$)에서
S_2의 값은 a 또는 0이다.
이때 ㉠ 또는 ㉡에서 3 이상의 자연수 n에 대하여 S_n의 값은
S_{n-1} 또는 $-S_{n-2}$이므로 S_n의 값은 반드시 $-a$, 0, a중 하나이다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $S_n\in\{-a, 0, a\}$이다.

$a_n=S_{n+1}+S_n$에서
$S_{n+1}+S_n$의 값은 반드시 $-2a$, $-a$, 0, a, $2a$중 하나이므로
모든 자연수 n에 대하여 $a_n\in\{-2a, -a, 0, a, 2a\}$이다.
따라서 조건 $\left|\dfrac{a_5}{a_3}\right|=2$에서 $a_5=\pm 2a$, $a_3=\pm a$이다.

$S_2=a$인 경우, $a_3=\pm a$이므로 $S_3=S_2+a_3$의 값은 $2a$ 또는 0이다.
이 두 값은 ㉠과 ㉡ 모두에 모순이므로 $S_2=0$이다.
$S_2=0$에서 $a_3=\pm a$이므로 $S_3=S_2+a_3$의 값은 a 또는 $-a$이다.
이 중 ㉠ 또는 ㉡에서 S_3으로 가능한 값은 ㉡일 때인 $-a$이다.

n	1	2	3	4	5	6	7
S_n	a	0	$-a$				

위의 표와 ㉠과 ㉡에서 S_4의 값은 $-a$ 또는 0이다.
$S_4=0$인 경우, $a_5=\pm 2a$이므로
$S_5=S_4+a_5$로 가능한 값은 $2a$ 또는 $-2a$이다.
이 두 값은 ㉠과 ㉡ 모두에 모순이므로 $S_4=-a$이다.
$S_4=-a$에서 $a_5=\pm 2a$이므로 $S_5=S_4+a_5$의 값은 a만 가능하다.

n	1	2	3	4	5	6	7
S_n	a	0	$-a$	$-a$	a		

위의 표에서 ㉠과 ㉡ 모두에 상관없이 S_6의 값은 a이다.
위의 표와 $S_6=a$, ㉠과 ㉡에서 S_7의 값은 a 또는 $-a$이다.

n	1	2	3	4	5	6	7
S_n	a	0	$-a$	$-a$	a	a	$\pm a$

이때 $S_7=-a$이면 $\sum_{k=1}^{7}S_k=0$이므로 조건 (나)에 모순이다.

따라서 $S_7=a$이므로 $\sum_{k=1}^{7}S_k=2a$, $a=6$이다.

지금까지 알아낸 정보와 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$을 이용하여
두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$의 항을 표로 정리하면 다음과 같다.
(이때 지금까지 a로 이루어진 표를 사용해왔으니 그대로 사용하자.)

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	a	$-a$	$-a$	0	$2a$	0	0
S_n	a	0	$-a$	$-a$	a	a	a

위의 표를 이용하여 수열 $b_n=|a_n+S_{n+1}|$에 대하여
수열 $\{b_n\}$의 항을 표로 정리하면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	a	$-a$	$-a$	0	$2a$	0	0
S_{n+1}	0	$-a$	$-a$	a	a	a	
b_n	a	$2a$	$2a$	a	$3a$	a	

b_7의 값을 구하기 위해 S_8의 값을 구하자.
위의 표와 ㉠과 ㉡에서 S_8의 값은 a 또는 $-a$이다.
이때 이 두 값에 상관없이 $b_7=|a_7+S_8|=|0\pm a|=a$이므로
$\sum_{k=1}^{7}|a_k+S_{k+1}|=11a=66$이다.

수학 영역(확률과 통계) 해설지

정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자: 21 류은수)

[출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 표준편차를 구할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=16\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=4$이다.

따라서 X의 표준편차는 $\sqrt{4}=2$이다.

24) [정답] ⑤ (출제자: 20 이선우)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

다항식 $(ax-2)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4\mathrm{C}_r(-2)^{4-r}(ax)^r$이다.

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로

${}_4\mathrm{C}_2 4a^2=24a^2=54$

$a^2=\frac{9}{4}$이므로 양수 a의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

25) [정답] ④ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]

만들어진 세 자리의 자연수가 짝수인 사건을 A,
세 자리의 자연수 중 적어도 한 자리의 숫자가 소수인 사건을 B라 하자.

세 자리의 자연수가 짝수이므로 일의 자리에 들어갈 수 있는 수는 2, 4, 6, 8이다.

일의 자리의 수를 선택하는 경우의 수는 4이고 나머지 두 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{P}_2=7\times6=42$이므로 세 자리의 자연수가 짝수인 경우의 수는 $4\times42=168$이다.

그 중 적어도 한 자리의 숫자가 소수일 확률을 여사건을 이용하여 구해보자.

1부터 8까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7이다. 소수를 제외하고 세 자리의 짝수를 만들어보면 다음과 같다.

일의 자리의 수를 선택하는 경우의 수는 3이고 나머지 두 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$이므로 소수가 포함되지 않은 세 자리의 짝수의 개수는 $3\times6=18$이다.

따라서 $\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{18}{168}=\frac{3}{28}$이므로

여사건의 확률을 적용하면

구하고자 하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$ 이다.

26) [정답] ③ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 표준정규분포표를 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(X\geq60)+\mathrm{P}(Y\geq30)=1$이므로 이를 표준화하면

$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{60-m_1}{10}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{30-m_2}{10}\right)=1$이다.

$\frac{60-m_1}{10}=-\frac{30-m_2}{10}$이므로 식을 정리하면, $m_1+m_2=90$이다.

$\mathrm{P}\left(X\geq\frac{k}{2}\right)=\mathrm{P}(Y\geq2k)=0.0228$이므로

이를 표준화하면 $\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{\frac{k}{2}-m_1}{10}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{2k-m_2}{10}\right)=0.0228$이다.

이때, $\mathrm{P}(Z\geq2)=0.0228$이므로

$\frac{\frac{k}{2}-m_1}{10}=2$, $\frac{2k-m_2}{10}=2$이다.

위의 두 식을 더하면 $\frac{5}{2}k-(m_1+m_2)=40$이므로 $m_1+m_2=90$을 대입하면 $k=52$이다.

27) [정답] ② (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

3개의 상자 중 적어도 하나의 상자에서 파란 공이 더 많이 나오므로 1개의 상자에서 파란 공이 적어도 3개 나와야 한다. 그러므로 3개의 상자에서 나오는 파란 공의 개수는 $(0,\ 0,\ 4)$이거나 $(0,\ 1,\ 3)$이어야 한다.

ⅰ) 3개의 상자에서 나오는 파란 공의 개수가 $(0,\ 0,\ 4)$일 때

파란 공이 4개 나오는 상자를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$이고
파란 공이 나오는 상자에서 4개의 파란 공과 1개의 빨간 공이 나오는 순서를 결정하는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}$이므로

구하고자 하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{5!}{4!}=15$이다.

ⅱ) 3개의 상자에서 나오는 파란 공의 개수가 $(0,\ 1,\ 3)$일 때

서로 다른 3개의 상자에서 나오는 파란 공의 개수를 정하는 경우의 수는 $3!$이고 1개의 파란 공과 4개의 빨간 공이 나오는 순서를 결정하는 경우의

수는 $\frac{5!}{4!}$ 이다. 3 개의 파란 공과 2 개의 빨간 공이 나오는 순서를 결정하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!\times 2!}$ 이므로

구하고자 하는 경우의 수는 $3!\times\frac{5!}{4!}\times\frac{5!}{3!\times 2!}=300$ 이다.

따라서 3 개의 상자 중 조건을 만족시키면서 적어도 하나의 상자에서 파란 공이 더 많이 나오는 경우의 수는 315 이다.

28) [정답] ③ (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 조건을 만족시킬 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 를 결정짓는 전체 경우의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$ 이다.

(가) 조건을 만족시키는 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_3\times 4=80$ 이다.

(가) 조건을 만족시키면서 $x_1\times x_2\times x_3=8$ 인 사건을 A,

(가) 조건을 만족시키면서 $x_2\times x_3\times x_4=8$ 인 사건을 B라 하자.

구하고자 하는 확률은 $\frac{80-n(A\cup B)}{256}$ 이다.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 이므로 $n(A),\ n(B)$, $n(A\cap B)$ 를 구해보자.

$n=1,\ 2$ 에 대하여 $x_n\times x_{n+1}\times x_{n+2}=8$ 을 만족시키려면 $x_n,\ x_{n+1}$, x_{n+2} 는 $(1,\ 1,\ 8),\ (1,\ 2,\ 4),\ (2,\ 2,\ 2)$ 중 하나의 값으로 구성되어야 한다.

ⅰ) $n(A)$

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 가 $(1,\ 1,\ 8)$ 인 경우 4 가지, $(1,\ 2,\ 4)$ 인 경우 4 가지, $(2,\ 2,\ 2)$ 인 경우 4 가지이므로 $n(A)=4+4+4=12$ 이다.

ⅱ) $n(B)$

순서쌍 $(x_2,\ x_3,\ x_4)$ 가 $(1,\ 1,\ 8)$ 또는 $(1,\ 8,\ 1)$ 인 경우 각각 1 가지, $(1,\ 2,\ 4)$ 또는 $(1,\ 4,\ 2)$ 인 경우 각각 1 가지, $(2,\ 4,\ 1)$ 인 경우 2 가지, $(2,\ 2,\ 2)$ 인 경우 2 가지이므로 $n(B)=2+2+2+2=8$ 이다.

ⅲ) $n(A\cap B)$

순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 가 $(1,\ 1,\ 8,\ 1)$ 인 경우 1 가지, $(1,\ 2,\ 4,\ 1)$ 인 경우 1 가지, $(2,\ 2,\ 2,\ 2)$ 인 경우 1 가지이므로

$n(A\cap B)=1+1+1=3$ 이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+8-3=17$ 이다.

그러므로 (가) 조건과 (나) 조건을 만족시키는 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 의 개수는 $80-n(A\cup B)=80-17=63$ 이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{63}{256}$ 이다.

29) [정답] 91 (출제자 : 21 김서원)

[출제의도] 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

A 에서 A 로의 모든 함수 f 의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4$ 이다.

함수 f 의 치역을 B, $f\circ f$ 의 치역을 C라고 하고

$n(B)>n(C)$ 인 사건을 X라고 하자.

이때 $C\subset B$이므로 함수 f 의 치역의 원소의 개수보다 $f\circ f$ 의 치역의 원소의 개수가 더 많을 수는 없다.

사건 X 의 여사건은 $n(B)=n(C)$ 즉, $B=C$인 사건이다.

여사건의 경우의 수를 구하면

ⅰ) $n(B)=4$ 인 경우의 수

함수 f 가 일대일대응이므로 $f\circ f$ 의 치역의 원소의 개수도 항상 4 이다.

그러므로 구하고자 하는 경우의 수는 $4!=24$ 이다.

나머지 상황에서는 함수 f 가 일대일대응이 아니다.

이러한 경우 B에서 B로 가는 함수가 일대일대응일 때

$n(B)=n(C)$ 이다.

그러므로 4 개의 원소 중에서 B의 원소를 정하고, B에서 C로 일대일대응을 시킨 후, 남은 원소의 함숫값을 정해야 한다.

구하는 경우의 수는 다음과 같다.

ⅱ) $n(B)=3$ 인 경우의 수

${}_4\mathrm{C}_3\times 3!\times {}_3\Pi_1=72$

ⅲ) $n(B)=2$ 인 경우의 수

${}_4\mathrm{C}_2\times 2!\times {}_2\Pi_2=48$

ⅳ) $n(B)=1$ 인 경우의 수

${}_4\mathrm{C}_1=4$

그러므로 $n(B)=n(C)$ 일 확률은 $\frac{148}{4^4}=\frac{37}{64}$ 이다.

따라서 함수 f 의 치역의 원소의 개수보다 $f\circ f$ 의 치역의 원소의 개수가 더 적을 확률은 $1-\frac{37}{64}=\frac{27}{64}$ 이므로 $p+q=91$ 이다.

30) [정답] 528 (출제자 : 21 심현재)

[출제의도] 중복순열을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

문자 카드를 180° 회전하면 문자 카드의 회전하기 전과 후의 문자열이 일치하는 경우와 일치하지 않는 경우가 있다.

ⅰ) 문자 카드의 180° 회전 전과 후의 문자열이 일치할 때

네 번째와 다섯 번째 자리의 문자는 각각 첫 번째와 두 번째 자리의 문자에 따라 결정되므로 첫 번째, 두 번째, 세 번째 자리의 문자만 택하면 된다.

첫 번째와 두 번째 자리에 올 수 있는 문자는 I, M, O, W이다.

이때, M과 W는 회전하면 각각 W와 M이 되어 세 번째 자리에 올 수 없으므로 세 번째 자리에 올 수 있는 문자는 I, O이다.

따라서 경우의 수는 $4\times 4\times 2=32$ 이다.

ⅱ) 문자 카드의 180° 회전 전과 후의 문자열이 일치하지 않을 때

4 개의 문자에서 5 개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_4\Pi_5=4^5=1024$ 이다.

문자 카드의 180° 회전 전과 후의 문자열이 일치하지 않는 경우,
회전하기 전과 후의 문자 카드를 하나의 문자 카드로 본다.
그러므로 경우의 수는 $\dfrac{1024-32}{2}=496$ 이다.

따라서 구하는 문자 카드의 개수는
$496+32=528$ 이다.

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 21 박주원)

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^4+3n^3+8}{(2n^2+4)(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^4+3n^3+8}{8n^4+8n^3+18n^2+16n+4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{3}{n}+\frac{8}{n^4}}{8+\frac{8}{n}+\frac{18}{n^2}+\frac{16}{n^3}+\frac{4}{n^4}}$$
$$=1$$

24) [정답] ② (출제자 : 21 황민수)

[출제의도] 급수와 수열의 일반항 사이의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n^2}{n^2+2n}\right)$ 이 수렴하므로, 급수와 수열의 일반항 사이의 관계에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n^2}{n^2+2n}\right)=0$ 이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+2n}=2$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n^2}{n^2+2n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+2n}=2$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+4n}{a_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6a_n}{n}+4}{\frac{a_n}{n}+2}=4$ 이다.

25) [정답] ③ (출제자 : 21 서연수)

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[해설]

$ye^{kx}+\ln(y+1)=e$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$kye^{kx}+\frac{dy}{dx}e^{kx}+\frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx}=0$ 이다.

이 식을 $\frac{dy}{dx}$ 에 대하여 정리하면

$kye^{kx}+\left(e^{kx}+\frac{1}{y+1}\right)\frac{dy}{dx}=0$

$\left(e^{kx}+\frac{1}{y+1}\right)\frac{dy}{dx}=-kye^{kx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-kye^{kx}}{e^{kx}+\frac{1}{y+1}}$ 이다.

위 식에 $\frac{dy}{dx}=-1$, $x=0$, $y=e-1$ 을 대입하면

$\frac{-k(e-1)\times e^0}{e^0+\frac{1}{(e-1)+1}}=-1$ 이므로 $k=\frac{e+1}{e^2-e}$ 이다.

26) [정답] ⑤ (출제자 : 21 김예찬)

[출제의도] 등비급수의 합을 이용하여 도형의 넓이에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

점 O_1 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H, $\angle ABC=\theta$ 라 하자.

삼각형 AHB 에서 $\overline{AB}=10$, $\overline{BH}=\frac{5}{2}$ 이므로

$\cos\theta=\frac{1}{4}$ 이고, $\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

삼각형 ABC 의 넓이를 이용하여 선분 B_1O_1 의 길이를 구해보자.

삼각형 ABC 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times10\times5\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{25\sqrt{15}}{4}$ 이다.

선분 B_1O_1 은 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름이므로

삼각형 ABC 의 넓이를

$\frac{1}{2}\times\overline{B_1O_1}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\frac{25}{2}\times\overline{B_1O_1}$ 으로 표현할 수 있다.

$\frac{25\sqrt{15}}{4}=\frac{25}{2}\times\overline{B_1O_1}$ 이므로 $\overline{B_1O_1}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ 이다.

또한, 삼각형 AB_1O_1 과 삼각형 AHB 는 닮음이므로

$\angle AO_1B_1=\angle ABH=\theta$ 이고 $\angle AO_1B_1=\angle AO_1C_1$ 이다.

그러므로 $\angle B_1O_1C_1=2\theta$ 이다.

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 이므로

삼각형 $O_1B_1C_1$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{B_1O_1}\times\overline{C_1O_1}\times\sin2\theta$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{8}$$
$$=\frac{15\sqrt{15}}{64}$$ 이다.

$\overline{B_1B}=\overline{BH}$ 이므로 $\overline{AB_1}=10-\frac{5}{2}$ 이고, $\overline{AB}:\overline{AB_1}=4:3$ 이므로

삼각형 $O_1B_1C_1$ 과 삼각형 $O_2B_2C_2$ 의 넓이의 비는 $16:9$ 이다.

따라서 그림 R_2 에서 새롭게 색칠되는 부분의 넓이는

그림 R_1 에서 색칠되는 부분의 넓이의 $\frac{9}{16}$ 이므로

수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{15\sqrt{15}}{64}$ 이고 공비가 $\frac{9}{16}$ 인 등비수열의 합이다.

따라서 구하고자 하는 값은 $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{15\sqrt{15}}{64}}{1-\frac{9}{16}} = \dfrac{15\sqrt{15}}{28}$ 이다.

27) [정답] ④ (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

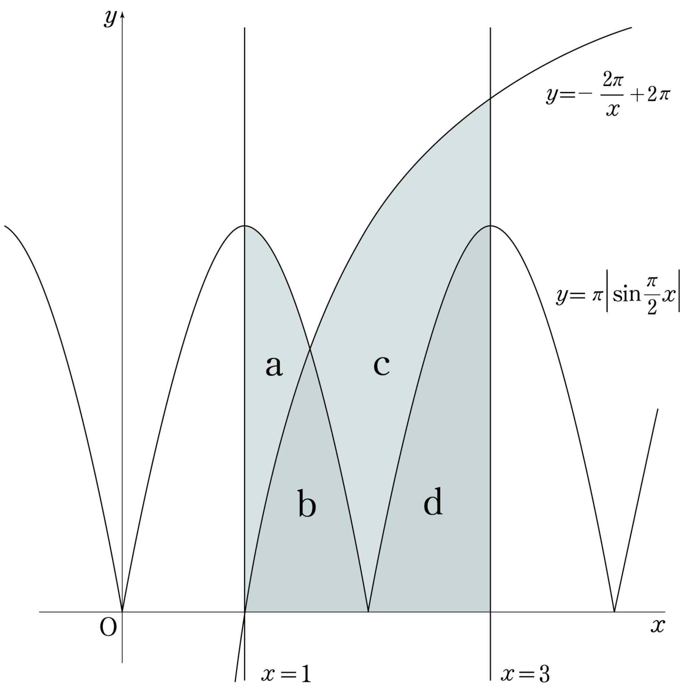
[해설]

$f(x) = -\dfrac{2\pi}{x}+2\pi$, $g(x)=\pi\left|\sin\dfrac{\pi}{2}x\right|$ 라 하자.

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표를 $\alpha\,(1<\alpha<3)$ 라 하면

$$\begin{aligned}S_2-S_1 &= \int_\alpha^3 \{f(x)-g(x)\}dx - \int_1^\alpha \{g(x)-f(x)\}dx \\ &= \int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx \\ &= \int_1^3\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi-\pi\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|\right)dx \\ &= \int_1^2\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi-\pi\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx \\ &\quad+\int_2^3\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi+\pi\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx \\ &= \int_1^3\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi\right)dx+\int_1^2\left(-\pi\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx \\ &\quad+\int_2^3\left(\pi\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx \\ &= \left[-2\pi\ln x+2\pi x\right]_1^3+\left[2\cos\frac{\pi}{2}x\right]_1^2+\left[-2\cos\frac{\pi}{2}x\right]_2^3 \\ &= (4-2\ln 3)\pi-4\end{aligned}$$ 이다.

[별해]



위 그림에서 $\displaystyle\int_1^3\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi\right)dx = b+c+d$ 이고

$\displaystyle\int_1^3 \pi\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|dx = a+b+d$ 이므로

$\displaystyle\int_1^3\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi-\pi\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|\right)dx = c-a = S_2-S_1$ 이다.

즉, $\displaystyle S_2-S_1=\int_1^3\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi-\pi\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|\right)dx$

$$= \int_1^2\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi-\pi\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_2^3\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi+\pi\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$= \int_1^3\left(-\frac{2\pi}{x}+2\pi\right)dx+\int_1^2\left(-\pi\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_2^3\left(\pi\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

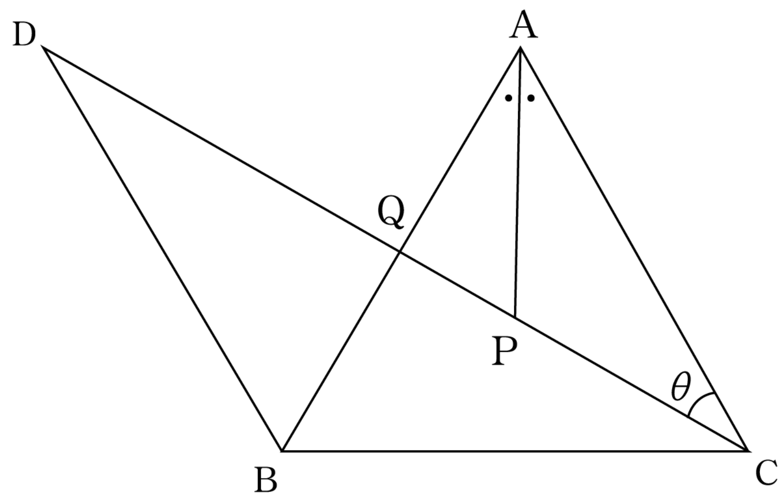
$$= \left[-2\pi\ln x+2\pi x\right]_1^3+\left[2\cos\frac{\pi}{2}x\right]_1^2+\left[-2\cos\frac{\pi}{2}x\right]_2^3$$

$$= (4-2\ln 3)\pi-4$$

28) [정답] ① (출제자 : 21 김예찬)

[출제의도] 도형에서 여러 가지 조건을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]



삼각형 ACP 가 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{PAC}=\theta$ 이다.

점 P 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{\mathrm{CH}}=2$ 이고

삼각형 AHC 는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{2}{\sin\theta}$ 이다.

점 P 에서 선분 $\overline{\mathrm{AC}}$ 에 내린 수선의 발을 H′ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}\times\cos\theta=\overline{\mathrm{AH'}}$ 이고 $\overline{\mathrm{AH'}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{\sin\theta}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ 이다.

$\angle\mathrm{PAQ}=\theta$ 이고 $\angle\mathrm{APQ}=2\theta$ 이므로 $\angle\mathrm{AQP}=\pi-3\theta$ 이다.

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle\mathrm{PAQ})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin(\angle\mathrm{AQP})}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{\sin3\theta\cos\theta}$ 이다.

$\therefore f(\theta)=\dfrac{1}{\sin3\theta\cos\theta}$

$\overline{\mathrm{BD}}\,//\,\overline{\mathrm{AC}}$ 이므로 $\angle\mathrm{QAC}=\angle\mathrm{QBD}$ ($\because$ 엇각)이고

$\angle\mathrm{QCA}=\angle\mathrm{QDB}$ ($\because$ 엇각)이다.

그러므로 삼각형 QAC 와 삼각형 QBD 는 닮음이다.

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BDC})}=\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BCD})}$,

$\dfrac{4}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{4\cos2\theta}{\sin\theta}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{2}{\sin\theta}$ 이고 삼각형 QAC 와 삼각형 QBD 는 닮음이므로

닮음비는 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{2}{\sin\theta}:\dfrac{4\cos2\theta}{\sin\theta}=1:2\cos2\theta$ 이다.

그러므로 넓이의 비는 $1:4\cos^2 2\theta$ 이다.

$$\triangle\mathrm{QAC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QC}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\left(\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PC}}\right)\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\sin3\theta\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)\times\frac{2}{\sin\theta}\times\sin\theta$$

$$= \frac{1}{\sin 3\theta \cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$\triangle \mathrm{QBD} = \left(\frac{1}{\sin 3\theta\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) \times 4\cos^2 2\theta$ 이다.

$$g(\theta) = \frac{4\cos^2 2\theta(\sin 3\theta + \sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta\sin 3\theta}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{4\cos^2 2\theta(\sin 3\theta+\sin\theta)}$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{1}{4\cos^2 2\theta} \times \frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{3\sin 3\theta}{3\theta} + \frac{\sin\theta}{\theta}}\right) \text{이다.}$$

$\therefore \displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{1}{16}$

[별해1]

삼각형 QAC 와 삼각형 QBD 가 닮음임을 이용하여 $f(\theta)$ 를 구해보자.
$2\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{BAC}$ 이고 선분 BC 를 공유하므로
삼각형 BCD 는 중심이 점 A 인 원에 내접한다.

원의 반지름을 R 라 할 때, 사인법칙에 의해
$2\mathrm{R} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BDC})}$ 이고, $\mathrm{R} = \dfrac{2}{\sin\theta}$ 이다.

즉, 삼각형 BCD 는 중심이 점 A 이고 반지름이 $\dfrac{2}{\sin\theta}$ 인 원에 내접한다.

사인법칙에 의해 $2\mathrm{R} = \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BCD})}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}} = \dfrac{4\cos 2\theta}{\sin\theta}$ 이다.

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle\mathrm{PAQ})} = \dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin(\angle\mathrm{AQP})}$ 이고,

$\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{1}{\sin 3\theta\cos\theta}$ 이다.

$\therefore f(\theta) = \dfrac{1}{\sin 3\theta\cos\theta}$

이하 풀이는 위와 같다.
따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{1}{16}$ 이다.

[별해2]
삼각형 APC 가 이등변삼각형이기 때문에 선분 AC 의 수직이등분선이
선분 BC 의 수직이등분선 위의 점 P 를 지난다.

즉, 삼각형 ABC 는 점 P 를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{\mathrm{AP}}$ 인 원에 내접한다.
그러므로 사인법칙에 의해 $2\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BAC})}$ 이다.

이하 풀이는 위와 같다.
따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{1}{16}$ 이다.

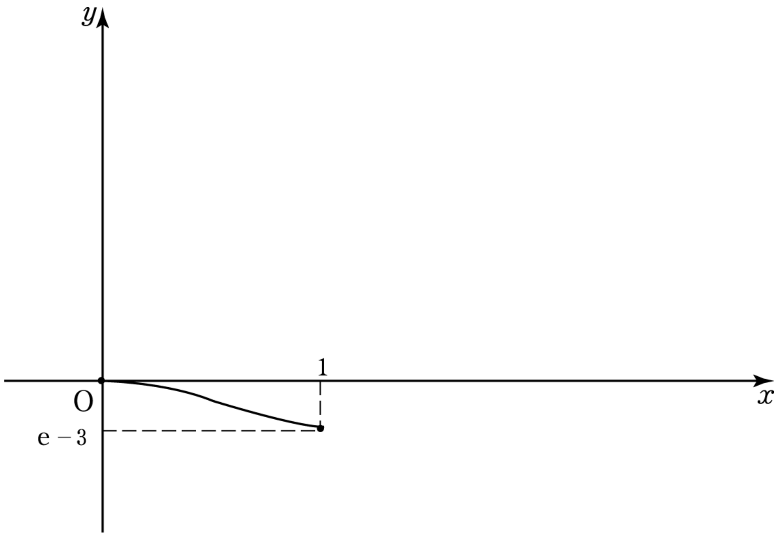
29) [정답] 43 (출제자 : 21 김민성)
[출제의도] 주어진 조건을 바탕으로 함수의 그래프의 특징을 파악하고 미분과 적분을 할 수 있는가?

[해설]
(가) 조건에서 $0 \le x < 1$ 일 때, $f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x - 3$ 이다.
이때 실수 전체의 집합에서 정의된 함수
$g(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x - 3$ 에 대하여
$g'(x) = (x^2 - x)e^x$ 이다.

그러므로 곡선 $y = g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값 0 을 가지고,
$x = 1$ 에서 극솟값 $e - 3$ 을 갖는다.

또한, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x = 1$ 에서 연속이다. 즉, $f(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1-} g(x) = e - 3$ 이다.

따라서 $0 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는
닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 다음과 같다.

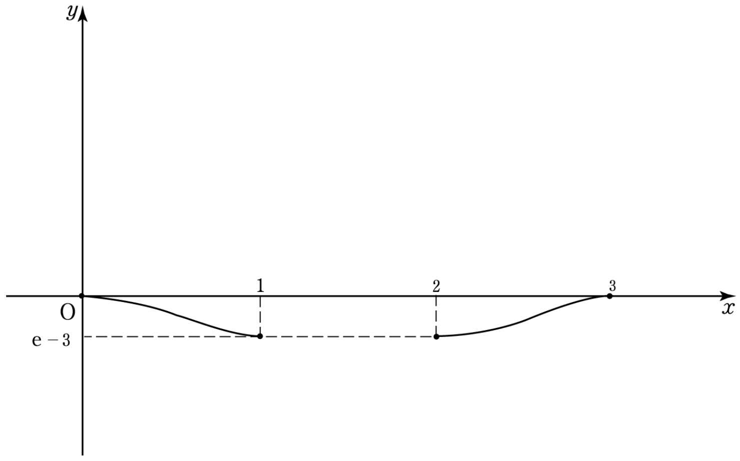


(나) 조건에서 $f(x+2) = -f(x) + f(5)$, $f(x) + f(x+2) = f(5)$ 이고
함수 $f(x)$ 가 $f(x) + f(x+2) = f(5)$ 를 만족시키면
함수 $f(x)$ 는 $f(x+2) + f(x+4) = f(5)$ 도 만족시킨다.

두 식 $f(x) + f(x+2) = f(5)$, $f(x+2) + f(x+4) = f(5)$ 를 연립하면
$f(x) = f(x+4)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 주기가 4 인 주기함수이다.
즉 $f(5) = f(1)$ 이고, $f(x) + f(x+2) = f(5) = f(1) = e - 3$ 이다.

위에서 얻은 식 $f(x+2) = -f(x) + f(1)$ 에서
$2 \le x \le 3$ 일 때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
$0 \le x \le 1$ 일 때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를
x 축에 대하여 대칭이동하고 y 축의 방향으로
$e - 3$ 만큼 평행이동한 그래프와 같다.

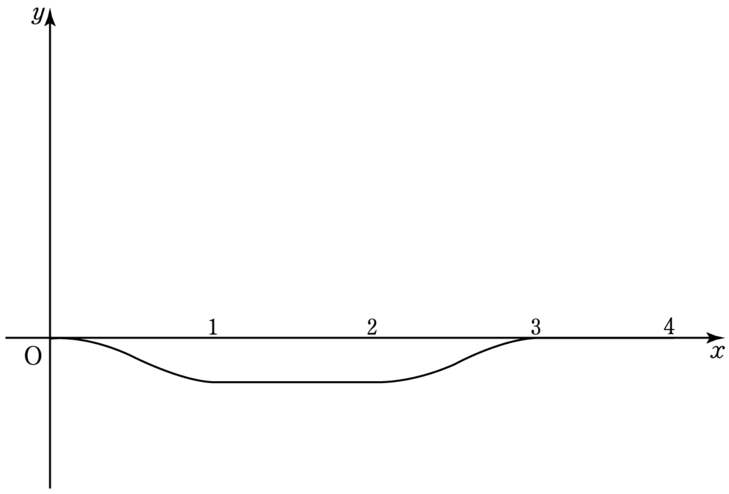
따라서 지금까지 알아낸 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$1 \le x \le 2$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 그래프를 추론하자.
주어진 조건에서 $1 < x < 2$ 일 때 $f'(x) \ge 0$ 이다.

이때 위 그림에서 $f(1)=f(2)$ 이므로
어떤 실수 $a\,(1<a<2)$ 가 $f'(a)>0$ 을 만족시키면
$f'(b)<0$ 을 만족시키는 실수 $b\,(1<b<2)$ 가 존재해야 한다.
이는 위 조건에 모순이므로 $1\le x\le 2$ 일 때 $f'(x)=0$ 이다.

즉 $1\le x\le 2$ 일 때 $f(x)=e-3$ 이고,
$2\le x\le 3$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 그래프를 구한 것과 같은 방식으로
$3\le x\le 4$ 일 때 $f(x)=0$ 임을 알 수 있다.
따라서 $0\le x\le 4$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 는 주기가 4 인 주기함수이므로
$\int_0^{14} f(x)\,dx = 3\int_0^4 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx$ 이다.

이때 위의 그림에서
$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 1\times f(1) = e-3$ 이고
$\int_1^2 f(x)\,dx = 1\times f(1) = e-3$ 이므로
$\int_0^4 f(x)\,dx = 2f(1) = 2e-6$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \{(x^2-3x+3)e^x-3\}\,dx\\ &= \left[(x^2-3x+3)e^x-(2x-3)e^x+2e^x-3x\right]_0^1\\ &= 4e-11\end{aligned}$$

$\int_0^2 f(x)\,dx = (4e-11)+(e-3) = 5e-14$ 이므로
$\int_0^{14} f(x)\,dx = 3(2e-6)+(5e-14) = 11e-32$ 이다.
따라서 $a+b=43$ 이다.

[별해]
위의 과정에서 $\int_0^4 f(x)\,dx$ 의 값을 다른 방식으로도 구할 수 있다.
$f(x)+f(x+2)=f(1)$ 의 양변을 0 부터 1 까지 적분하면
$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 1\times f(1) = \int_1^2 f(x)\,dx$ 이므로
$\int_0^4 f(x)\,dx = 2f(1) = 2e-6$ 이다.

30) [정답] 108 (출제자 : 21 김민성)
[출제의도] 절댓값으로 정의된 함수의 미분가능성을 파악하고 미분을 통해 함수를 해석할 수 있는가?

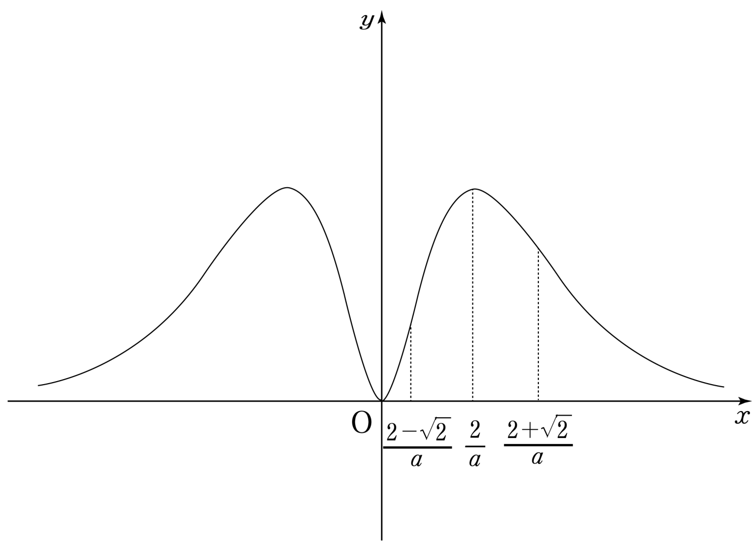
[해설]
식 $f(x)+tf'(t)-f(t)-xf'(t)$ 를 정리하면
$$\begin{aligned}f(x)+tf'(t)-f(t)-xf'(t) &= f(x)-f'(t)(x-t)-f(t)\\ &= f(x)-\{f'(t)(x-t)+f(t)\}\end{aligned}$$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\,f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$ 라 하면
$|f(x)+tf'(t)-f(t)-xf'(t)| = |f(x)-h(x)|$ 이므로
곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=h(x)$ 와 만나는 점 중
곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=h(x)$ 에 접하지 않는 점이 존재할 때
함수 $|f(x)-h(x)|$ 는 그 점에서 미분가능하지 않고
이를 만족시키는 모든 점의 개수가 $g(t)$ 이다.

이제 함수 $y=f(x)$ 의 개형을 파악하자.
모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이므로
$x\ge 0$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 개형을 먼저 파악하자.

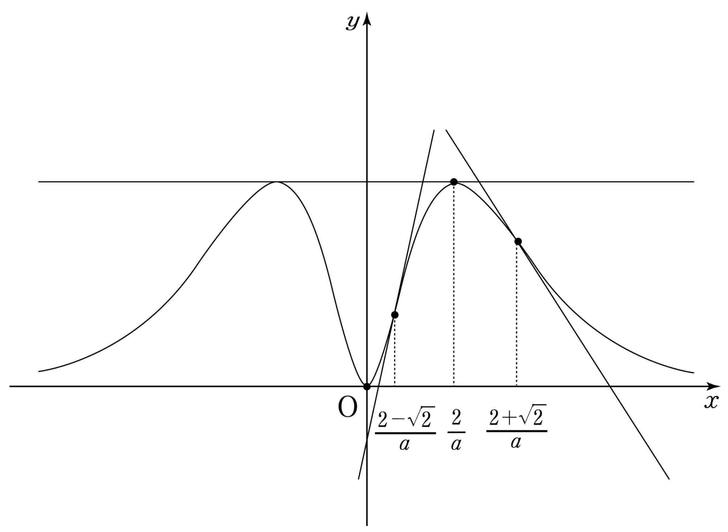
$x\ge 0$ 일 때, $f(x)=x^2e^{-ax+2}$ 에서
$f'(x)=(-ax^2+2x)e^{-ax+2}$,
$f''(x)=(a^2x^2-4ax+2)e^{-ax+2}=\{(ax-2)^2-2\}e^{-ax+2}$ 이다.

$x\ge 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=0$, $x=\frac{2}{a}$ 에서 극값을 갖고
곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표는 $\frac{2-\sqrt{2}}{a}$, $\frac{2+\sqrt{2}}{a}$ 이다.
또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



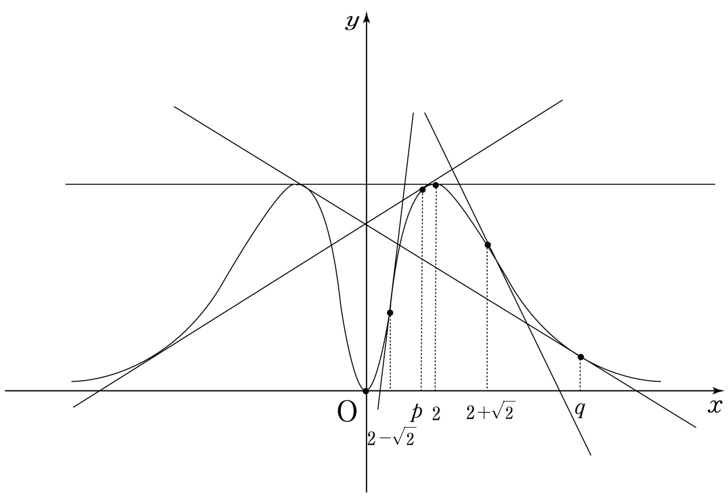
위의 그림에서 $g(t)=0$,
즉 함수 $|f(x)-h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는
곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=h(x)$ 와 만나는 모든 점에서
곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=h(x)$ 에 접해야 한다.

직선 $y=h(x)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\,f(t))$ 에서의
접선의 방정식임을 이용해 $g(t)=0$ 을 만족시키는
모든 t 의 값을 $t\ge 0$ 에서 관찰하면
다음과 같이 $t=0$, $\frac{2-\sqrt{2}}{a}$, $\frac{2}{a}$, $\frac{2+\sqrt{2}}{a}$ 이다.



즉, 함수 $f(x)$가 $x=t$에서 극값을 갖거나
곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 t일 때 $g(t)=0$이므로
$t_1=\dfrac{2+\sqrt{2}}{a}$, $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이기 때문에 $t_2=-\dfrac{2}{a}$이다.
$t_1+t_2=\dfrac{\sqrt{2}}{a}$에서 $t_1+t_2=\sqrt{2}$이므로 $a=1$이다.

이제 함수 $g(t)$가 불연속인 점의 개수를 파악하자.
위와 같은 방식으로 함수 $g(t)$가 불연속인
모든 t의 값을 $t\geq 0$에서 관찰하면 다음과 같다.



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=h(x)$와
서로 다른 세 점에서 만나고
그 중 두 점에서 접하도록 하는 양수 t의 값을
각각 p, q $(p<q)$라 할 때,
함수 $g(t)$가 불연속인 모든 양수 t의 개수가 5이므로
함수 $g(t)$가 불연속인 모든 음수 t의 개수도 5이다.
따라서 함수 $g(t)$가 불연속인 점의 개수는 $5+1+5=11$이므로
$n=11$이다.

이제 위에서 관찰한 t의 값을 기준으로
함수 $g(t)$의 값을 $t\geq 0$에서 관찰하자.

이때 위 그림에서
$t=0$, $t=2-\sqrt{2}$, $t=2$, $t=2+\sqrt{2}$일 때 $g(t)=0$,
$t=p$, $t=q$일 때 $g(t)=1$이다.
즉, 함수 $g(t)$가 불연속인 모든 t에 대하여
$g(t)$의 값을 알고 있으므로
위에 포함되지 않는 t에 대하여
$g(t)$의 값을 관찰하면 다음과 같다.

i) $0<t<2-\sqrt{2}$일 때, $g(t)=1$

ii) $2-\sqrt{2}<t<p$일 때, $g(t)=1$

iii) $p<t<2$일 때, $g(t)=3$

iv) $2<t<2+\sqrt{2}$일 때, $g(t)=1$

v) $2+\sqrt{2}<t<q$일 때, $g(t)=1$

vi) $t>q$일 때, $g(t)=3$

이제 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} g(2^{k-2})=g\left(\frac{1}{2}\right)+g(1)+g(2)+g(4)+g(8)+g(16)$
의 값을 구하자.

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값에 대하여
$0<\dfrac{1}{2}<2-\sqrt{2}$이므로 i)에 의하여 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$이다.

$g(1)$의 값에 대하여 $2-\sqrt{2}<1<2$이다.
하지만 p의 값을 알 수 없으므로
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식을 직접 세워보자.

$x\geq 0$일 때 $f(x)=x^2e^{-x+2}$, $f'(x)=(-x^2+2x)e^{-x+2}$이므로
$f(1)=e$, $f'(1)=e$, 즉 $y=ex$이다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 원점을 지나므로
$2-\sqrt{2}<1<p$임을 알 수 있다. 따라서 ii)에 의하여 $g(1)=1$이다.

$g(2)$의 값이 0임을 이미 관찰했으므로 $g(2)=0$이다.

$g(4)$, $g(8)$, $g(16)$의 값에 대하여
$2+\sqrt{2}<4<8<16$이고 q의 값을 알 수 없다.
하지만 주어진 조건 $g(6)\neq g(7)$에 의하여 $6<q<7$이므로
v)에 의하여 $g(4)=1$, vi)에 의하여 $g(8)=g(16)=3$이다.

따라서 구하는 값은
$$(a+n)\sum_{k=1}^{6} g(2^{k-2})=(1+11)\times(1+1+0+1+3+3)$$
$$=12\times 9=108$$ 이다.

2022학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(가형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 20 김유진)

[출제의도] 공간좌표에서의 대칭이동을 이용하여 간단한 계산을 할 수 있는가?

[해설]

좌표공간의 점 $\mathrm{P}(2a-2,\ b-4,\ 2)$를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2a-2,\ -b+4,\ 2)$이다.

$2a-2=2$이고 $-b+4=3$이므로 $a=2$, $b=1$이다.

따라서 $a+b=3$이다.

24) [정답] ⑤ (출제자 : 20 정원철)

[출제의도] 타원의 성질을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 한 변의 길이는 4이다.

타원의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=2|a|=8$이므로 $a^2=16$이다.

타원의 한 초점 F의 좌표가 $(2,\ 0)$이므로

$b^2=a^2-4=16-4=12$이다.

따라서 $a^2+b^2=28$이다.

25) [정답] ② (출제자 : 19 황주영)

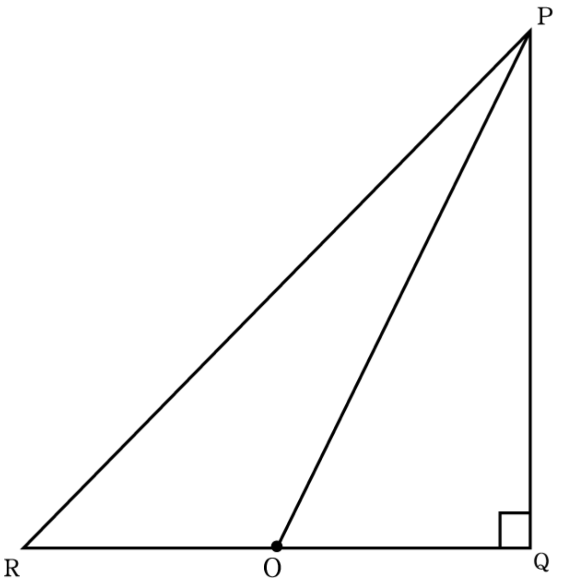
[출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

원과 직선 l의 접점을 R라 하자. $\overline{\mathrm{OR}}\perp l$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}\perp l$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{PR}}\perp l$이고,

$\angle\mathrm{PRQ}$는 점 P와 직선 l을 지나는 평면과 평면 α가 이루는 각이다.



위 그림에서 $\overline{\mathrm{QR}}=6$이고 $\angle\mathrm{PRQ}=45^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=6$이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}=3$이므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{OP}}=3\sqrt{5}$이다.

*점 Q가 직선 l과 원의 접점에 위치하는 경우는

점 P와 직선 l을 지나는 평면과 평면 α가 수직이므로 생각하지 않는다.

26) [정답] ① (출제자 : 20 정원철)

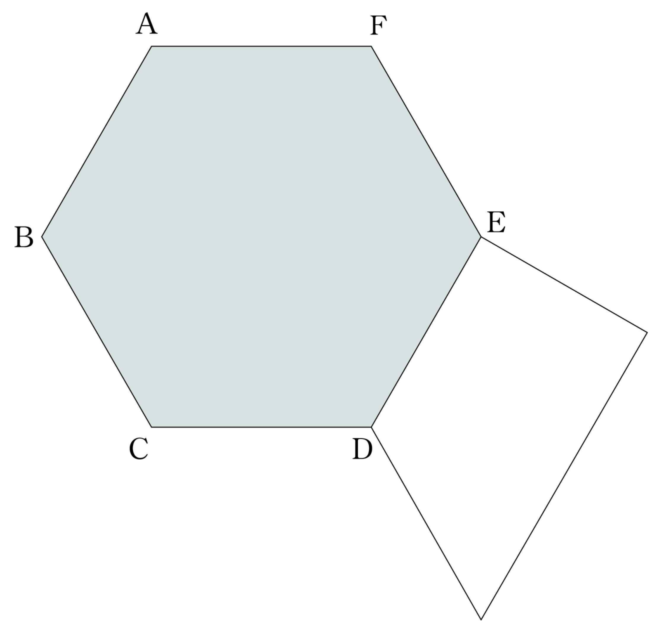
[출제의도] 평면벡터의 내적으로 표현된 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

점 P가 선분 BC 위를 움직이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\le|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\le|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$이다.

그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\le\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\le|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 30^\circ$이고

$1\le\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\le\dfrac{3}{2}$이다.



$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$가 나타내는 영역은 위 그림과 같다.

따라서 점 X가 나타내는 영역은 윗변의 길이가 1, 아랫변의 길이가 $\dfrac{3}{2}$,

높이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$인 사다리꼴이므로 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{3}{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$이다.

27) [정답] ③ (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 $kx-\dfrac{2\sqrt{6}}{a^2}y=1$이고

x 절편은 $\dfrac{1}{k}$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{k}$ 이다.

한편, $l_2 - l_1 = (\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}}) + (\overline{\mathrm{QF'}} - \overline{\mathrm{QF}}) = \dfrac{8}{3}$ 에서

주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 2 이므로

$(\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}}) + (\overline{\mathrm{QF'}} - \overline{\mathrm{QF}}) = 2 + (\overline{\mathrm{QF'}} - \overline{\mathrm{QF}}) = \dfrac{8}{3}$ 이다.

즉, $\overline{\mathrm{QF'}} - \overline{\mathrm{QF}} = \dfrac{2}{3}$ 이다.

이때, $\overline{\mathrm{QF'}} - \overline{\mathrm{QF}} = (\overline{\mathrm{OF'}} + \overline{\mathrm{OQ}}) - (\overline{\mathrm{OF}} - \overline{\mathrm{OQ}}) = 2\overline{\mathrm{OQ}} = \dfrac{2}{k} = \dfrac{2}{3}$

이므로 $k = 3$ 이다.

점 $\mathrm{P}(3,\ 2\sqrt{6})$ 을 쌍곡선의 방정식에 대입하면 $a^2 = 3$ 이므로

주어진 쌍곡선의 방정식은 $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$ 이다.

두 초점 F , F′ 의 좌표가 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{FF'}} = 4$, $\overline{\mathrm{FP}} = 5$, $\overline{\mathrm{F'P}} = 7$ 이다.

따라서 삼각형 FPF′ 의 둘레의 길이는 16 이다.

28) [정답] ④ (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 평면벡터의 내적을 이용하여 구하고자 하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{b}$ 라 놓으면 $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$,

$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \dfrac{3}{4}\vec{b}$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ $(0 < t < 1$, t 는 실수)이고

$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = s\overrightarrow{\mathrm{BG}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ $(0 < s < 1$, s 는 실수)이므로

$t\overrightarrow{\mathrm{BD}} = s\overrightarrow{\mathrm{BG}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ 이다.

$\dfrac{t}{3}\vec{a} + \dfrac{2t}{3}\vec{b} = s\left(\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}\right) + (1-s)\left(\dfrac{3}{4}\vec{b}\right)$ 에서

$\dfrac{t}{3} = \dfrac{s}{3}$, $\dfrac{2t}{3} = \dfrac{s}{3} + \dfrac{3-3s}{4}$ 이므로 $t = s = \dfrac{9}{13}$ 이다.

그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \dfrac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \dfrac{3}{13}\vec{a} + \dfrac{6}{13}\vec{b}$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{BF}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\dfrac{10}{13}\vec{a} + \dfrac{6}{13}\vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} &= \left(-\frac{10}{13}\vec{a} + \frac{6}{13}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\
&= \frac{2}{39} \times (5\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\
&= \frac{2}{39} \times \{5|\vec{a}|^2 - 6|\vec{b}|^2 + 7(\vec{a} \cdot \vec{b})\} \\
&= \frac{2}{39} \times \{45 - 78 + 7(\vec{a} \cdot \vec{b})\} \\
&= \frac{20}{13} \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

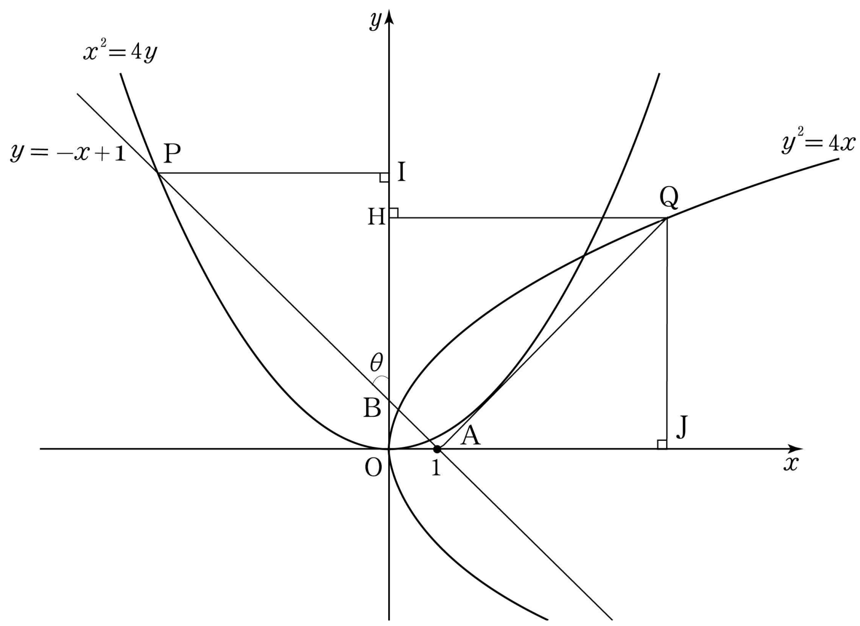
따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$, $\cos(\angle \mathrm{ABC}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{9}{3 \times \sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

이다.

29) [정답] 19 (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 포물선의 정의와 두 포물선 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]



점 $(0,\ 1)$ 을 B 라 하자.

포물선 $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ 의 준선은 각각 $x = -1$, $y = -1$ 이다.

$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{AB}}$ 이고 점 A 는 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점이므로

포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{QA}} = \overline{\mathrm{QH}} + 1$ 이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{PA}} - \overline{\mathrm{QH}} = (\overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{AB}}) - (\overline{\mathrm{QA}} - 1) = 1 + \sqrt{2}$ 이고

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{QA}}$ 이다.

한편, 점 P 에서 y 축에 내린 수선의 발을 I , 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 J 라 하자.

점 B 는 포물선 $x^2 = 4y$ 의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{BI}} = \overline{\mathrm{PB}} - 2$, $\overline{\mathrm{AJ}} = \overline{\mathrm{QA}} - 2$ 이고 $\overline{\mathrm{BI}} = \overline{\mathrm{AJ}}$ 이다.

즉, 삼각형 PBI 와 삼각형 QAJ 는 RHS 합동이다.

$\angle \mathrm{PBI} = \theta$ 라 하자. 점 O 를 원점이라 하면 맞꼭지각의 성질에 의해

$\angle \mathrm{ABO} = \theta$ 이므로 $\angle \mathrm{BAO} = 90^\circ - \theta$ 이다.

또한, $\angle \mathrm{QAJ} = \theta$ 이므로 $\angle \mathrm{PAQ} = 90^\circ$ 이다.

즉, 삼각형 PQA 는 직각삼각형이고 이 삼각형의 외접원의 지름은 선분 PQ 이다.

점 P 의 좌표는 $(-2-2\sqrt{2}\ ,\ 3+2\sqrt{2})$ 이고 포물선의 정의를 이용하면

$\overline{\mathrm{PB}} = 4 + 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

즉, $\overline{\mathrm{PA}} = 4 + 3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{QA}} = 4 + 2\sqrt{2}$ 이고, 삼각형 PQA 의

외접원의 넓이는 $\left(\dfrac{\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{QA}}^2}{4}\right)\pi = \left(\dfrac{29}{2} + 10\sqrt{2}\right)\pi$ 이다.

따라서 $a = \dfrac{29}{2}$, $b = 10$ 이므로 $2a - b = 19$ 이다.

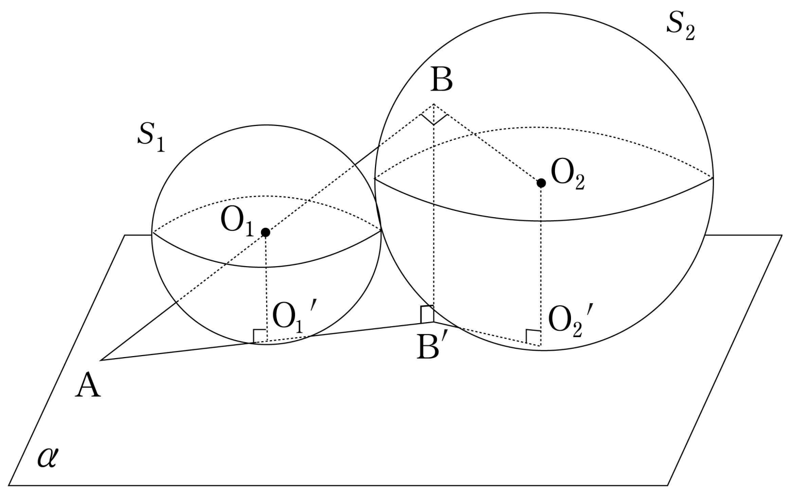
[별해] – 삼각형 PQA 가 직각삼각형임을 보이는 또 다른 방법

포물선 $x^2 = 4y$ 는 포물선 $y^2 = 4x$ 을 원점을 중심으로 반시계 방향으로 90° 회전시켜서 생긴 포물선이다. 이 회전으로 인하여 선분 QA 는 선분 PB 로 옮겨지고, 두 선분의 연장선이 이루는 각의 크기는 90° 이다. 따라서 삼각형 PQA 는 직각삼각형이다.

30) [정답] 26 (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 공간도형에서의 구의 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

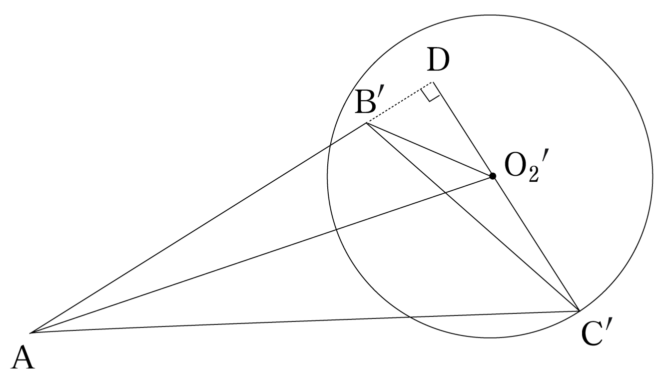


점 O_1 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 $O_1{}'$,
점 O_2 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 $O_2{}'$,
점 B 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 B′ 이라 하자.

직선 AB 와 평면 α 와 이루는 각은 $\angle BAB'$ 이므로 $\angle BAB' = 30^\circ$ 이다.
$\overline{O_1O_1{}'} = 2$, $\angle O_1AO_1{}' = 30^\circ$ 이므로
$\overline{O_1A} = \dfrac{2}{\sin 30^\circ} = 4$ 이다.

직선 BO_1 이 구 S_2 와 한 점에서 만나므로 접하고, 삼각형 BO_1O_2 는 직각삼각형이고 $\overline{O_1O_2} = 5$, $\overline{BO_2} = 3$ 이므로 $\overline{BO_1} = 4$ 이다.
그러므로 $\overline{AB} = 8$ 이고 $\overline{BB'} = \overline{AB} \times \sin 30^\circ = 4$ 이다.

점 C 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 C′ 이라 하자.
점 C 는 구 S_2 위의 점이므로 점 C′ 은 중심이 점 $O_2{}'$ 이고
반지름의 길이가 3 인 원의 내부와 경계에 존재할 수 있다.
그러므로 삼각형 ABC 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되려면 아래 그림과 같이 점 C′ 과 직선 AB′ 사이의 거리가 최대가 되어야 한다.
이때 직선 $C'O_2{}'$ 과 직선 AB′ 의 교점을 D 라 하자.



구하고자 하는 값은 $\dfrac{1}{2} \times \overline{AB'} \times \overline{C'D}$ 이다.
그러므로 $\overline{AB'}$ 과 $\overline{O_2{}'D}$ 의 값을 구해야 한다.
$\overline{AB'} = \overline{AB} \times \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$ 이다.
$\overline{O_2{}'D}$ 의 값을 구하기 위해 두 삼각형 $O_2{}'B'D$ 와 $O_2{}'AD$ 를 살펴보자.

$\overline{AO_2{}'}^2 = \overline{AO_2}^2 - \overline{O_2O_2{}'}^2 = \overline{AO_2}^2 - \overline{O_2B}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로
$\overline{AO_2{}'} = 8$ 이다.
$\overline{B'O_2{}'}^2 = \overline{BO_2}^2 - \left(\overline{BB'} - \overline{O_2O_2{}'}\right)^2 = 9 - 1 = 8$ 이므로
$\overline{B'O_2{}'} = 2\sqrt{2}$ 이다.
$\overline{O_2{}'D} = k$ 라 하면, $\overline{B'D} = \sqrt{8-k^2}$ 이고 $\overline{AO_2{}'}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{O_2{}'D}^2$
이므로 $64 = \left(4\sqrt{3} + \sqrt{8-k^2}\right)^2 + k^2$ 이다.
이 식을 풀면 $64 = 48 + 8\sqrt{24-3k^2} + 8 - k^2 + k^2$ 이므로
$\sqrt{24-3k^2} = 1$, $\overline{O_2{}'D} = k = \dfrac{\sqrt{69}}{3}$ 이다.

따라서 삼각형 ABC 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은
$\dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times \left(\dfrac{\sqrt{69}}{3} + 3\right) = 2\sqrt{23} + 6\sqrt{3}$ 이고,
$p + q = 23 + 3 = 26$ 이다.