

수학 영역 (기하)

성명

수험번호

- 자신이 선택한 유형(확률과 통계/미적분/기하)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

헤맨다고 길을 잃는 것은 아니리

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2021년 8월 14일 시행 Epsilon 모의고사 1회

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

19학번 : 황주영

20학번 : 김동연, 김동해, 송문주, 이도윤
이선우, 정원철, 최인환

21학번 : 김민성, 김서원, 김예찬, 박창수
서연수, 심현재, 황민수

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회

20학번 : 김유진, 김태희, 최연조

21학번 : 류은수, 박주원

자문 :

장지원 (성균관대학교 수학교육과 19)

정재훈 (성균관대학교 수학교육과 19)

검토위원 :

서희수 (성균관대학교 수학교육과 16)

김동현 (성균관대학교 수학교육과 18)

안동우 (성균관대학교 수학교육과 18)

강중우 (성균관대학교 수학교육과 19)

전재완 (성균관대학교 수학교육과 20)

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관하여 문의 사항이 있으신 경우 dongyeon0101@naver.com으로 연락 주시기 바랍니다.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $3^{\sqrt{6}} \times 3^{2-\sqrt{6}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $3\sqrt{3}$ ④ 9 ⑤ $9\sqrt{3}$

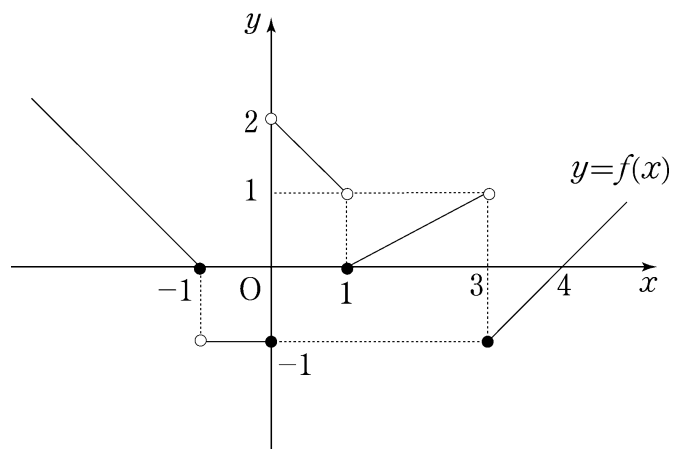
2. $\int_{-3}^3 (x^2 + 6x + 7) dx$ 의 값은? [2점]

- ① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

3. 곡선 $y = \log_2(x-3)$ 의 점근선과 곡선 $y = 3^{x-2} + 1$ 의 교점의 y 좌표는? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

5. 다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = 12x^2 - 6$ 이다.
함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 가 $F(1) = -5$, $F(2) = 6$ 을
만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & (x < 1) \\ x^2+cx & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f(1) = 0$ 일 때, $f(-1)$ 의
값은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 공비가 각각 $r, 6$ 인 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수
 n 에 대하여

$$b_n = 3^n \times a_n$$

을 만족시킨다. $a_2 + a_4 = 5$ 일 때, $r + b_2$ 의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

8. 함수 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ 의 그래프 위의 점 $A(1, 4)$ 에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B 라 하자. 점 B 에서의 접선의 기울기가 6일 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

9. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{x - a} = 4$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 2f(2) - g(x)}{x - a} = 6$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 일 때, $a \times f'(a) \times g'(a)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

10. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v_1(t), v_2(t)$ 가 각각

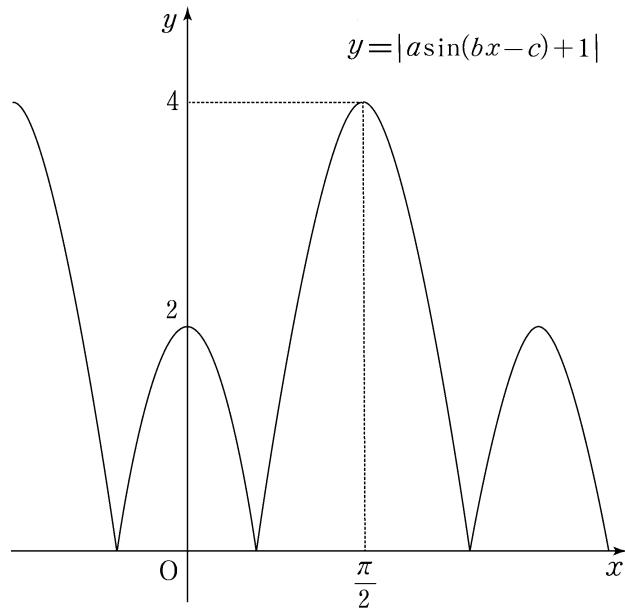
$$v_1(t) = 3t^2 - 16t + 10, \quad v_2(t) = 2t + 16$$

이다. 선분 PQ 를 1:2로 내분하는 점을 R 라 할 때, 점 R 가 시각 $t=0$ 일 때부터 움직이는 방향이 두 번 바뀔 때까지 움직인 거리는? (단, 점 P 와 점 Q 는 만나지 않는다.) [4점]

- ① $\frac{28}{3}$ ② $\frac{29}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{31}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

11. 세 상수 a, b, c 에 대하여 함수 $y = |a \sin(bx - c) + 1|$ 의 그래프가 그림과 같을 때, abc 의 최댓값은? (단, $0 < c < 2\pi$)

[4점]

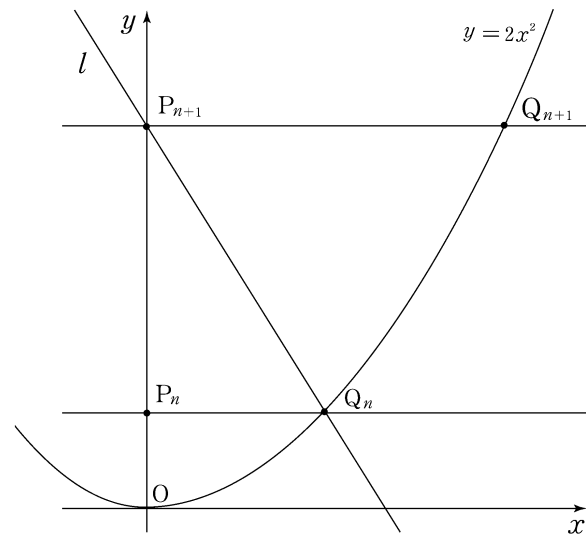


- ① π ② 3π ③ 5π ④ 7π ⑤ 9π

12. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 y 축 위의 점 P_n 과 제1사분면에 있는 곡선 $y = 2x^2$ 위의 점 Q_n 이 있다.

- 직선 $P_n Q_n$ 은 y 축에 수직이다.
- 직선 OQ_n 과 직선 $P_{n+1} Q_n$ 이 서로 수직이다.

두 삼각형 $P_{n+1} Q_n Q_{n+1}$, $OP_n Q_{n+1}$ 의 넓이를 각각 A_n , B_n 이라 하자. 다음은 $\frac{B_1}{A_1} = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{B_n}{A_n}$ 을 구하는 과정이다. (단, O 는 원점이다.)



모든 자연수 n 에 대하여 점 Q_n 의 x 좌표를 a_n 이라 하면 직선 OQ_n 의 기울기는 $2a_n$ 이다.

점 Q_n 을 지나면서 직선 OQ_n 과 수직인 직선을 l 이라 할 때, 직선 l 의 방정식은 $y = -\frac{1}{2a_n}(x - a_n) + 2(a_n)^2$ 이다.

직선 l 이 y 축과 만나는 점이 P_{n+1} 이므로 점 P_{n+1} 의 좌표는 $(0, 2(a_n)^2 + \frac{1}{2})$ 이고, 점 Q_{n+1} 의 y 좌표가

$2(a_{n+1})^2$ 이므로 $A_n = \frac{a_{n+1}}{\text{(가)}}$ 이다.

점 P_n 의 좌표가 $(0, 2(a_n)^2)$ 이고 점 Q_{n+1} 의 x 좌표가 a_{n+1} 이므로 $B_n = (a_n)^2 \times a_{n+1}$ 이다.

따라서 $\frac{B_n}{A_n} = \text{(가)} \times (a_n)^2$ 이고,

$\frac{B_1}{A_1} = \frac{3}{2}$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{B_n}{A_n} = \text{(나)}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $p \times f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

13. 일차항의 계수가 0인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x) = f(-1)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
 (나) $f'(-1) \times f'(1) < 0$

$f(-1) \times f(2) = \{f(1)\}^2$ 일 때, $\frac{f(-2)}{f(2)}$ 의 값은? [4점]

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

14. $k \geq 2$ 인 실수 k 에 대하여 곡선 $y = 2^{-x}$ 이 두 곡선

$y = 2^{x+k}$, $y = -\log_2(x-k)$ 와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k < x_2 < k+1$

ㄴ. $y_2 < \frac{1}{4}$

ㄷ. $x_1y_1 + x_2y_2 < 0$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 양수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(0) = f(k)$$

$$(나) \int_0^k f(t) dt = kf(0)$$

함수 $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt - x^2$ 이 극솟값을 갖지 않을 때,

$f(1)$ 의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{15}{8}$ ② $\frac{31}{16}$ ③ 2 ④ $\frac{33}{16}$ ⑤ $\frac{17}{8}$

단답형

16. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 = 4$, $a_3 = 4$ 일 때, a_6 의 값을 구하십시오. [3점]

17. 두 다항함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6$ 과 $g(x)$ 에 대하여 $g'(2) = 3$ 일 때, 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 미분계수를 구하십시오. [3점]

18. 1보다 큰 두 실수 a, b 에 대하여

$$\frac{\log b}{\log a} - \frac{2\log a}{\log b} = 1$$

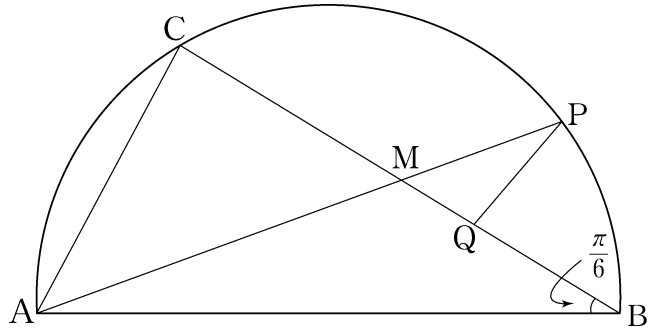
이 성립할 때, $(\log_a b)^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin\theta + 2\cos\theta = -\frac{2}{5}$ 일 때,
 $2\sin\theta - \cos\theta$ 의 값은 k 이다. $100k$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오. [4점]

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 4를 갖는다.
 (나) 방정식 $(f' \circ f)(x) = 3f(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

21. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 잡는다. 호 BC 위의 점 P에 대하여 선분 AP가 선분 BC의 중점 M을 지난다. 선분 BM을 2:1로 내분하는 점 Q에 대하여 삼각형 PMQ의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



22. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{S_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n \times a_{n+1} = (S_{n+1})^2 - (S_n)^2 \text{ 이다.}$$

(나) $\sum_{k=1}^7 S_k = 12$

$\left| \frac{a_5}{a_3} \right| = 2$ 일 때, $\sum_{k=1}^7 |a_k + S_{k+1}|$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

Epsilon

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. 좌표공간의 점 $P(2a-2, b-4, 2)$ 를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(2, 3, 2)$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [2점]

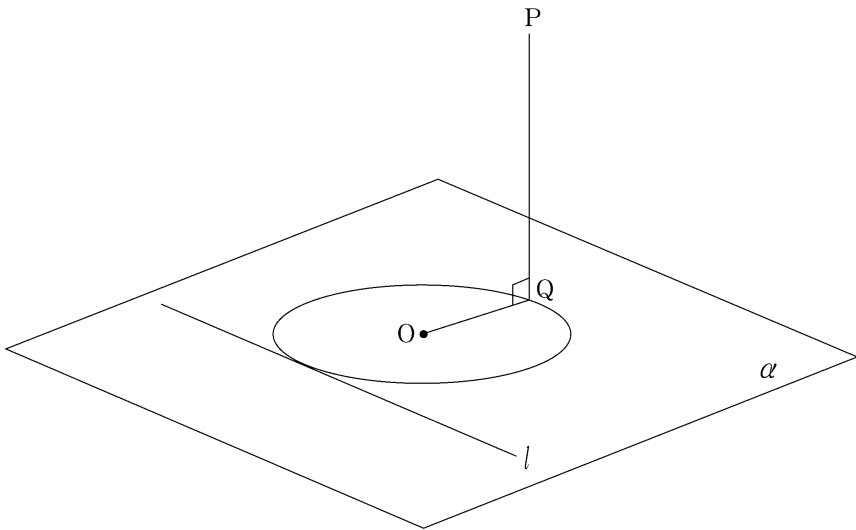
- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

24. 두 초점이 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$ 인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다.

타원 위의 점 P 에 대하여 삼각형 $PF'F$ 가 정삼각형일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

25. 그림과 같이 평면 α 위에 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원과 이 원에 접하는 직선 l 이 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 Q 라 할 때, 직선 OQ 는 직선 l 과 수직이고 $\overline{OQ} = 3$ 이다. 점 P 와 직선 l 을 지나는 평면과 평면 α 가 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 선분 OP 의 길이는? [3점]

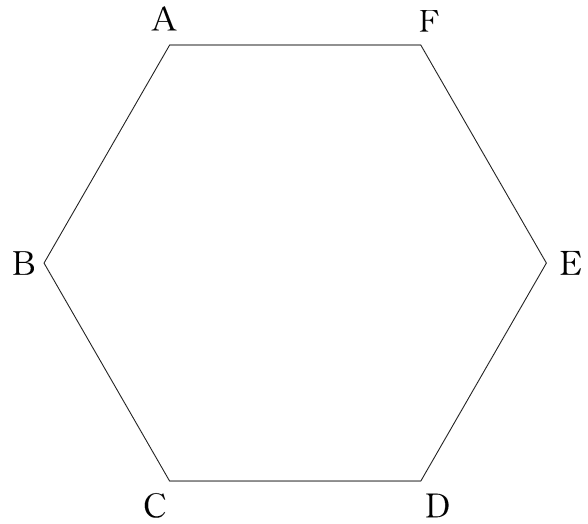


- ① $2\sqrt{10}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{55}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

26. 그림과 같이 좌표평면에서 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF의 두 변 BC와 DE 위를 움직이는 점을 각각 P, Q 라 할 때,

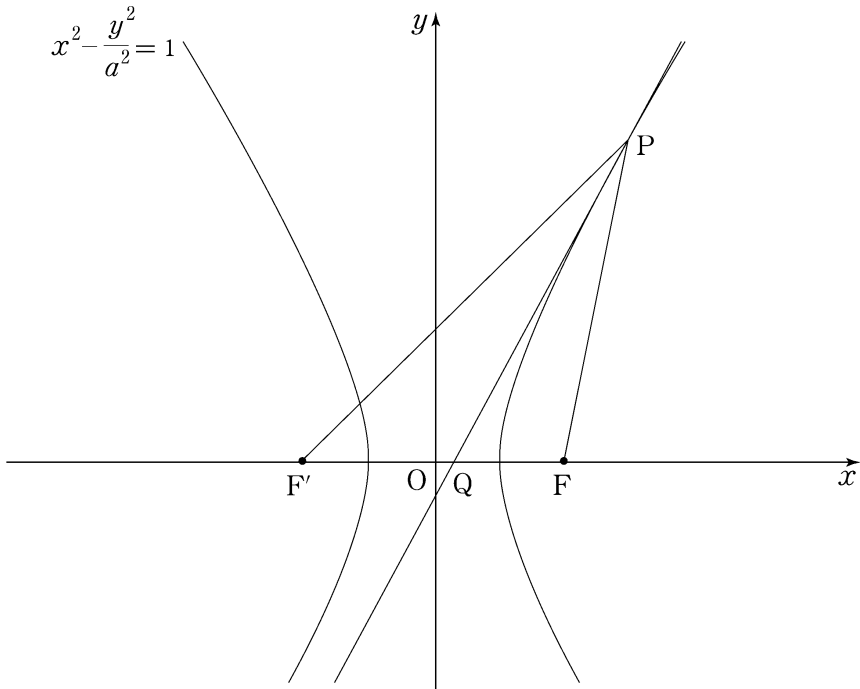
$$\overrightarrow{AX} = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}) \overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X 가 나타내는 영역의 넓이는? [3점]



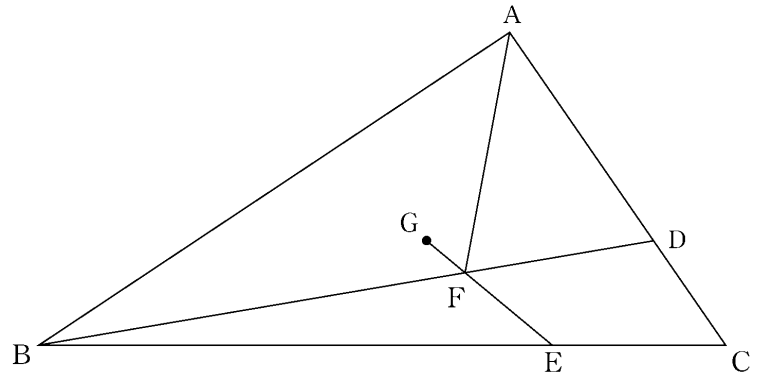
- ① $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{7\sqrt{3}}{8}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{8}$

27. 그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 위의 점 $P(k, 2\sqrt{6})$ ($k > 0$)에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 삼각형 FPQ 의 둘레의 길이를 l_1 , 삼각형 QPF' 의 둘레의 길이를 l_2 라 하자. $l_2 - l_1 = \frac{8}{3}$ 일 때, 삼각형 FPF' 의 둘레의 길이는? (단, a 는 상수이다.) [3점]



- ① 12
- ② 14
- ③ 16
- ④ 18
- ⑤ 20

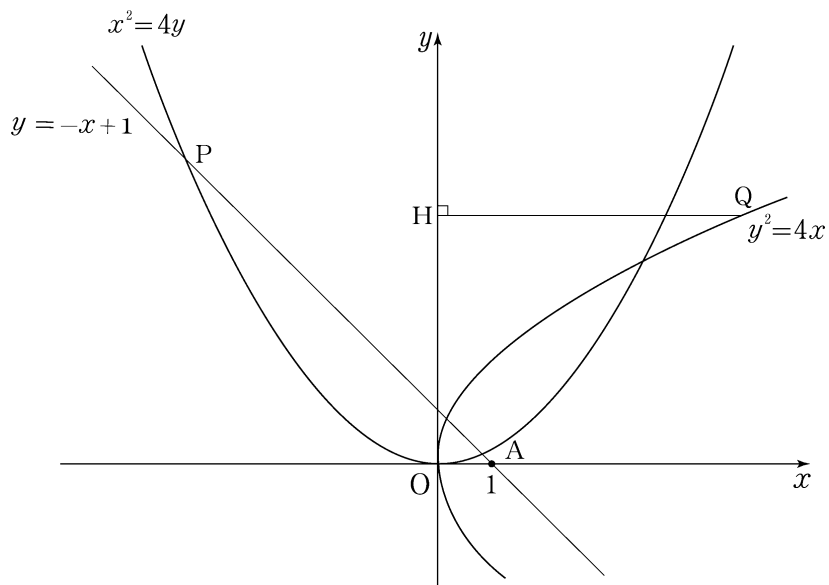
28. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = \sqrt{13}$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 AC 를 2:1로 내분하는 점을 D , 선분 BC 를 3:1로 내분하는 점을 E 라 하자. 삼각형 ABC 의 무게중심 G 에 대하여 두 선분 BD, EG 의 교점을 F 라 하자. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{20}{13}$ 일 때, $\cos(\angle ABC)$ 의 값은? [4점]



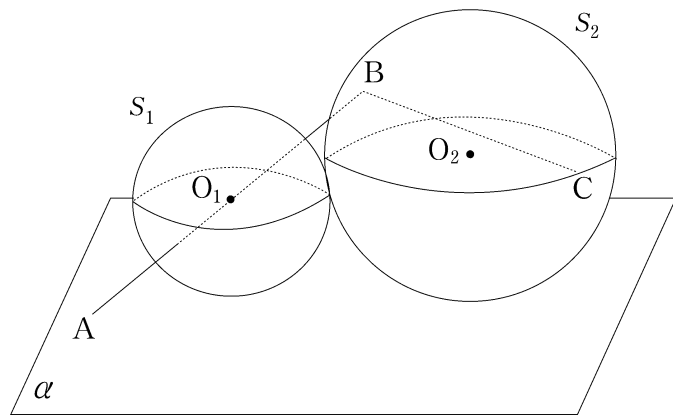
- ① $\frac{9}{13}$
- ② $\frac{3\sqrt{11}}{13}$
- ③ $\frac{10}{13}$
- ④ $\frac{3\sqrt{13}}{13}$
- ⑤ $\frac{11}{13}$

단답형

29. 그림과 같이 포물선 $x^2=4y$ 가 직선 $y=-x+1$ 과 만나는 점 중 제2사분면 위의 점을 P라 하자. 포물선 $y^2=4x$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점을 Q, 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 A(1, 0)에 대하여 $\overline{PA} - \overline{QH} = 1 + \sqrt{2}$ 일 때, 세 점 P, Q, A를 지나는 원의 넓이는 $(a+b\sqrt{2})\pi$ 이다. $2a-b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]



30. 그림과 같이 중심이 점 O_1 이고 반지름의 길이가 2인 구 S_1 이 중심이 점 O_2 이고 반지름의 길이가 3인 구 S_2 에 외접하며 평면 α 위에 두 구가 놓여 있다. 평면 α 위의 점 A에 대하여 구 S_2 가 직선 AO_1 에 접할 때, 그 접점을 B라 하자. 직선 AB가 평면 α 와 이루는 각의 크기가 30° 일 때, 구 S_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{p}+6\sqrt{q}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.