출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목			
				확률과 통계		미적분	
문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답	문항번호	정답
1	②	12	③	23	③	23	⑤
2	④	13	⑤	24	④	24	①
3	③	14	⑤	25	②	25	④
4	⑤	15	④	26	①	26	②
5	②	16	2	27	⑤	27	③
6	⑤	17	19	28	③	28	⑤
7	①	18	22	29	30	29	8
8	④	19	81	30	48	30	2
9	②	20	3				
10	①	21	50				
11	①	22	7				

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!

유튜브 공통 해설 강의 QR

https://www.youtube.com/c/띵수학mathdding/playlists

공통과목

1. 정답) ② [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $2^{-\frac{3}{4}} \times \sqrt[4]{2} = 2^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 정답) ④ [수학Ⅱ 다항함수의 미분법]

해설 : $f'(x) = 6x^2 + 1$이므로 $f'(1) = 6 + 1 = 7$이다.

3. 정답) ③ [수학Ⅰ 등차수열과 등비수열]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 할 때,

$\frac{a_5}{a_3} = 2$에서 $r^2 = 2$이고, $a_2 a_6 = (a_2)^2 r^4 = 1$

$(a_2)^2 = \frac{1}{4}$이고 $a_4 = a_2 r^2 = 2a_2 > 0$에서 $a_2 = \frac{1}{2}$이다.

$a_8 = a_2 r^6 = \frac{1}{2} \times 2^3 = 4$

4. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x) = f(2) = \lim_{x \to 2+} f(x)$에서

$4 - 6 + a = 4 - a$, $a = 3$이다.

$\lim_{x \to 2-} f(x) + f(3) = (2^2 - 3 \times 2 + 3) + 6 - 3 = 4$

5. 정답) ② [수학Ⅰ 삼각함수]

해설 : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $1 + \sin\theta \neq 0$이고

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \times \tan\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta + \sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1}{2}$$

에서 $2\sin\theta = 1 - \sin\theta$, $\sin\theta = \frac{1}{3}$이다.

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} < 0$이고

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

6. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 부정적분]

해설 : $xf(x)=\int_1^x f(t)\,dt+x^3-1$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\int_1^1 f(t)\,dt+1^3-1=0$이다.

$xf(x)=\int_1^x f(t)\,dt+x^3-1$의 양변을 미분하면

$xf'(x)+f(x)=f(x)+3x^2$에서 $xf'(x)=3x^2$이고

$x\neq 0$에서 $f'(x)=3x$이고 도함수 $f'(x)$도 다항함수이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x$이다.

$f'(x)=3x$의 양변을 부정적분하면

$f(x)=\frac{3}{2}x^2+C$ (C는 적분상수이다.) 이고 $f(1)=0$이므로

$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}$이고, $f(3)=\frac{27}{2}-\frac{3}{2}=12$이다.

7. 정답) ① [수학Ⅰ 수학적 귀납법]

해설 : $a_{n+1}a_n=3n+1$에서

$a_3a_4=10,\ a_4a_5=13$이고 $\frac{a_5}{a_3}=\frac{13}{10}$

$a_8a_9=25,\ a_9a_{10}=28$이고 $\frac{a_{10}}{a_8}=\frac{28}{25}$이고

$\frac{a_5}{a_3}+\frac{a_{10}}{a_8}=\frac{130+112}{100}=\frac{121}{50}$ 이다.

8. 정답) ④ [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : $v(t)=3t^2-6t$에서 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리는 $k<2$일 때, $\int_0^k |3t^2-6t|\,dt=\int_0^k(-3t^2+6t)dt$

$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^k$$

$$=-k^3+3k^2$$

이고 $k<2$에서 $-k^3+3k^2<4$이므로 움직인 거리가 8에 모순이다.

$k\geq 2$일 때, $\int_0^k|3t^2-6t|\,dt=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^k(3t^2-6t)dt$

$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^k$$

$$=k^3-3k^2+8$$

이고 움직인 거리가 8이므로 $k^3-3k^2+8=8$에서 $k=3$이다.

점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 할 때,

$a(t)=v'(t)=6t-6$이고 $t=2k=6$에서의 가속도는 $a(6)=30$이다.

9. 정답) ② [수학Ⅱ 함수의 극한 + 함수의 연속]

해설 : $f(x)=(x-1)g(x)$의 양변을 $x-1$로 나누면

$x\neq 1$에서 $\frac{f(x)}{x-1}=g(x)$이고 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$의 값이 존재하고, $f(1)=0$이다.

이 때, 인수정리에 의해 $f(x)=(x-1)(x-k)$, $g(x)=x-k$로 둘 수 있다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)g(x)-g(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-2)g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-2)(x-k)}{x-a}$$

에서 값이 존재하려면 $a=2$ 또는 $a=k$이고 가능한 실수 a의 개수는 1이므로 $k=2$이다.

$f(3)=(3-1)(3-2)=2$이다.

10. 정답) ① [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : $f(0)=f(\pi)+1$에서

$f(0)=\cos 0+b=b+1$, $f(\pi)=\cos a\pi+b$이므로

$\cos a\pi=0$이고, $a=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$ 이다.

$x_3-x_2=2(x_2-x_1)$에서

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2}{a}\pi$이고 삼각함수의 주기성에 의해

$x_3=x_1+\frac{2}{a}\pi$이고 두 식을 연립하면 $x_1+\frac{2}{3a}\pi=x_2$이다.

$\cos ax_1+b=\cos a\left(x_1+\frac{2}{3a}\pi\right)+b=0$이고

$\cos ax_1=\cos\left(ax_1+\frac{2}{3}\pi\right)$에서 $ax_1=\frac{2}{3}\pi$, $b=\frac{1}{2}$이다.

$a=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$ 에서 a의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이고

ab의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

11. 정답) ① [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 역함수 관계이므로

직선 $y=x$에 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 다른 두 교점 A, B를 가지므로 교점의 개수가 2개이고, 이에 따라 두 점 A, B는 모두 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점과 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점은 같다. 점 A의 x좌표를 α라 할 때, $2^{a\alpha+b}=\alpha$이고 $\mathrm{A}(\alpha,\alpha)$이다.

중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원이 원점을 지나므로 반지름의

길이는 $\overline{AB}=\overline{OA}$이다. 세 점 O, A, B는 모두 직선 $y=x$ 위에 있으므로 점 B는 $(2\alpha, 2\alpha)$이고, $2^{2a\alpha+b}=2\alpha$이다.

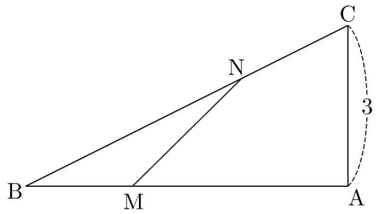
$g(3)=0$에서 $f(0)=3$이고, $2^b=3$에서 $b=\log_2 3$이다.
$2^{a\alpha+b}=\alpha$, $2^{2a\alpha+b}=2\alpha$를 연립하면 $2^{2a\alpha+b}=2\times 2^{a\alpha+b}$에서
$2a\alpha=a\alpha+1$이고 $a\alpha=1$이다.
$2^{a\alpha+b}=2^{1+\log_2 3}=6=\alpha$이고, $a=\dfrac{1}{6}$이고, $2^{ab}=2^{\frac{1}{6}\log_2 3}=3^{\frac{1}{6}}$이다.

12. 정답) ③ [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : $h(x)=f(x)-x$이라 둘 때,
$\{a, -a\}=\{t \mid g(t)=2\}$에서 $h(x)=t$가 서로 다른 두 실근을 가지도록 하는 t는 a, $-a$뿐이고, 이 때 $h(x)$의 극댓값은 a, 극솟값은 $-a$이다.
$\{a, -a\}\subset\{x \mid f(x)=0\}$에서 $f(a)=0$, $f(-a)=0$이다.
$h(a)=-a$, $h(-a)=a$이고 이 때, $-a<a$이므로 최고차항이 양수인 삼차함수의 그래프 개형을 고려해볼 때,
함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극솟값, $x=-a$에서 극댓값을 가진다.
$h'(a)=h'(-a)=0$이고 $h'(x)=f'(x)-1$에서 $f'(a)=f'(-a)=1$이고, 도함수 $f'(x)$는 y축에 대칭인 우함수이다.
$f(a)=f(-a)=0$에서 대칭성을 고려할 때,
$f(x)=(x+a)x(x-a)$로 둘 수 있고
$f'(x)=x(x+a)+x(x-a)+(x-a)(x+a)$이고
$f'(a)=f'(-a)=2a^2=1$이다.
$f'(2a)=6a^2+2a^2+3a^2=11a^2=\dfrac{11}{2}$이다.

13. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 삼각함수의 활용]

해설 :



ㄱ. $\overline{BM}=a$, $\overline{CN}=b$에서 두 선분 AB, BC의 $2:1$ 내분점이 각각 M, N이므로 $\overline{AB}=3a$, $\overline{BC}=3b$이다. 피타고라스 정리에 의해
$(3a)^2+3^2=(3b)^2$에서 $a^2+1=b^2$이고
정리하면 $(b-a)(b+a)=1$이다. (참)

ㄴ. 선분 AM의 중점을 M′이라 할 때, 두 삼각형 ABC, M′BN은 $3:2$의 닮음비로 닮음이다. 닮음비에서 $\overline{AC}:\overline{M'N}=3:2$, $\overline{M'N}=2$이다.
삼각형 MM′N에서 $\angle BM'N=\angle MM'N=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{M'N}=2$, $\overline{M'M}=a$이므로 $\tan(\angle M'MN)=\dfrac{2}{a}$에서
$\tan(\pi-\angle M'MN)=\tan(\angle BMN)=-\dfrac{2}{a}$이다. (참)

ㄷ. 삼각형 MNM′에서 $\overline{MN}=\sqrt{a^2+4}$이고, $\overline{BM}=a$, $\overline{BN}=2b$이다.
코사인법칙에 의하여
$$\cos(\angle BNM)=\frac{\overline{MN}^2+\overline{BN}^2-\overline{BM}^2}{2\overline{MN}\times\overline{BN}}$$
$$=\frac{a^2+4+4b^2-a^2}{4b\sqrt{a^2+4}}=\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{a^2+4}}\quad(b^2=a^2+1)$$
에서 양변을 제곱하면 $\dfrac{9}{10}=\dfrac{a^4+4a^2+4}{a^4+5a^2+4}$이다.
정리하면 $a^4-5a^2+4=0$이고, $a^2=1$ 또는 $a^2=4$에서 $a=1$ 또는 $a=2$이다. 가능한 모든 a의 값의 합은 $1+2=3$이다. (참)

14. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : (나)에서 함수 $|f(x)f(x-a)|$의 미분가능성을 조사하려면 $f(x)f(x-a)=0$이 되는 x에서만 미분가능성을 조사하면 된다. (나머지 x에서는 모두 미분가능하다.)
(ⅰ) 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=k_1$로 1개인 경우

$f(x)f(x-a)=0$이 되는 x는 $x=k_1$, $x=k_1+a$이고 모든 실수 x에서 $g(x)\neq 0$인 다항식 $g(x)$에 대하여

$|f(x)f(x-a)|=|(x-k_1)(x-k_1-a)|\times|g(x)|$이다.

이때, 함수 $|f(x)f(x-a)|$는 $x=k_1$과 $x=k_1+a$에서 미분가능하지 않으므로 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ) 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=k_1$, $x=k_2$로 2개인 경우

삼차함수 $f(x)$의 식을 $f(x)=m(x-k_1)(x-k_2)^2$으로 둘 때,

$f(x)f(x-a)=0$이 되는 x는 $x=k_1$, $x=k_2$, $x=k_1+a$, $x=k_2+a$이다. 이 때, 함수 $|f(x)f(x-a)|$가 미분가능하지 않은 x가 1개이려면 $k_1+a=k_2$가 되어서
$|f(x)f(x-a)|=m\left|(x-k_1)(x-k_2)^3(x-k_2-a)^2\right|$이어야 하고 (나) 조건을 만족시키려면 $k_1=0$이 되어
$|f(x)f(x-a)|=m\left|x(x-a)^3(x-2a)^2\right|$이어야 한다.

이때, $f(x)=mx(x-a)^2$이고, $f'(x)=m(x-a)^2+2mx(x-a)$
$=m(x-a)(3x-a)$

이다, $f'(1)=0$에서 $f'(1)=m(1-a)(3-a)=0$이므로

$a=1$ 또는 $a=3$이다.

$a=1$인 경우, $f(x)=mx(x-1)^2$이고 $f'(x)=3m\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x-1)$이다.

(가) 조건에 의해 $x=\frac{1}{3}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$에 접해야하고 이 때, $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}m=1$, $m=\frac{27}{4}$이다.

$f(2)=\frac{27}{4}\times 2\times 1^2=\frac{27}{2}$이다.

$a=3$인 경우, $f(x)=mx(x-3)^2$이고 $f'(x)=3m(x-1)(x-3)$이다. (가) 조건에 의해 $x=1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$에 접해야하고 이때, $f(1)=4m=1$, $m=\frac{1}{4}$이다.

$f(2)=\frac{1}{4}\times 2\times 1^2=\frac{1}{2}$이다.

이에 따라 $f(2)$의 최댓값은 $\frac{27}{2}$이다.

(iii) 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=k_1$, $x=k_2$, $x=k_3$으로 3개인 경우

삼차함수 $f(x)$의 식을 $f(x)=m(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)$로 둘 때,

$f(x)f(x-a)=0$이 되는 x는 $x=k_1$, $x=k_2$, $x=k_3$, $x=k_1+a$, $x=k_2+a$, $x=k_3+a$이다.

(나) 조건을 만족하려면 x만 일차식이고, 나머지 인수들은 이차 이상의 다항식이어야 하나, k_1, k_2, k_3이 모두 서로 다른 실수이고 k_1+a, k_2+a, k_3+a도 모두 서로 다른 실수이므로 일차식인 인수는 $f(x)f(x-a)$에 적어도 두 개 존재한다.

이 때, 미분가능하지 않은 x가 적어도 두 개이므로 (나)를 만족시키지 못한다.

(i), (ii), (iii)에 따라 $f(2)$의 최댓값은 $\frac{27}{2}$이다.

15. 정답) ④ [수학Ⅰ 수학적 귀납법]

해설 : $(a_{n+1}-a_n-1)(a_{n+1}-|a_n-3|)\le 0$에서

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이므로 $|a_n-3|\le a_n+1$이고

$|a_n-3|\le a_{n+1}\le a_n+1$이다.

$|a_{m+1}-a_m|\ne 1$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 7이므로

자연수 m에 대하여 $m\le 6$에서 $|a_{m+1}-a_m|=1$이다.

이 때, a_7의 값까지 $|a_{m+1}-a_m|=1$에 의해 결정되고

가능한 a_7의 값을 모두 나열해보면 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14이다.

$\sum_{k=1}^{12}a_k$가 최대인 상황을 구하고 있으므로 a_7이 큰 상황부터 구해보면

$a_7=14$인 경우 $|a_n-3|\le a_{n+1}\le a_n+1$에서 7 이상인 자연수 m에 대하여 모두 $a_{m+1}=|a_m-3|$으로 최솟값을 가지더라도 $a_{10}\ge 5$이므로 $a_{10}=1$에 모순이다.

$a_7=12$인 경우 역시, $|a_n-3|\le a_{n+1}\le a_n+1$에서 7 이상인 자연수 m에 대하여 모두 $a_{m+1}=|a_m-3|$으로 최솟값을 가지더라도 $a_{10}\ge 3$이므로 $a_{10}=1$에 모순이다.

$a_7=10$인 경우, $|a_n-3|\le a_{n+1}\le a_n+1$에서 7 이상 9 이하인 자연수 m에 대하여 $a_{m+1}=|a_m-3|$으로 최솟값을 가지면 $a_{10}\ge 1$로 $a_{10}=1$가 가능하다.

$\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{7}a_k+\sum_{k=8}^{10}a_k+\sum_{k=11}^{12}a_k$로 나눌 때,

$\sum_{k=1}^{7}a_k$는 $a_1=8$, $a_2=9$, $a_3=10$, $a_4=11$, $a_5=12$, $a_6=11$, $a_7=10$인 경우 최대이고, $\sum_{k=1}^{7}a_k=71$이다.

$\sum_{k=8}^{10}a_k$는 $a_{m+1}=|a_m-3|$으로 최솟값만을 가졌으므로 $a_8=7$, $a_9=4$, $a_{10}=1$이고 $\sum_{k=8}^{10}a_k=12$이다.

$\sum_{k=11}^{12}a_k$는 $|a_n-3|\le a_{n+1}\le a_n+1$에서 최댓값을 가질 때, $a_{11}=2$, $a_{12}=3$이고 $\sum_{k=11}^{12}a_k=5$이다.

즉, $\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{7}a_k+\sum_{k=8}^{10}a_k+\sum_{k=11}^{12}a_k=88$일 때 최대이다.

$a_7\le 8$인 경우

$\sum_{k=1}^{7}a_k$에서 $a_7=10$인 경우 보다 항상 작으므로 $\sum_{k=1}^{7}a_k<71$이고

나머지 항들에서는 같거나 작으므로 $\sum_{k=8}^{10}a_k\le 12$, $\sum_{k=11}^{12}a_k\le 5$이다.

즉, $\sum_{k=1}^{12}a_k<88$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{12}a_k$의 최댓값은 $a_7=10$일 때의 최댓값인 88이다.

16. 정답) 2 [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $\log_3 36-\frac{2}{\log_2 3}=\log_3 36-\frac{1}{\frac{1}{2}\log_2 3}=\log_3 36-\frac{1}{\log_4 3}$

$=\log_3 36-\log_3 4=\log_3 9=2$

17. 정답) 19 [수학Ⅱ 부정적분 + 도함수의 활용]

해설 : $f'(x)=6x^2+4x-2$에서 양변을 부정적분 하면

$f(x)=2x^3+2x^2-2x+C$이고 (C는 적분상수)

$f'(x)=2(3x-1)(x+1)=0$에서

$f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가진다.

$f(-1)=2+C=1$에서 $C=-1$이고

$f(2)=16+8-4-1=19$

18. 정답) 22 [수학Ⅰ 수열의 합]

해설 : $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=3$이고

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-4a_k+4\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$$
$$=43-4\sum_{k=1}^{10}a_k=4$$

에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{39}{4}$이다.

$\sum_{k=1}^{10}\left(2a_k+\frac{1}{4}\right)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{4}=\frac{39}{2}+\frac{5}{2}=22$이다.

19. 정답) 81 [수학Ⅱ 다항함수의 미분법]

해설 :

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)-f(a+h)+f(a)}{h}$$
$$=-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=-2f'(a)=a\times f'(2)$$

이고 $f(x)=x(x-a)(x-2a)$에서

$f'(x)=(x-a)(x-2a)+x(x-2a)+x(x-a)$이고

$f'(a)=-a^2,\ f'(2)=(2-a)(2-2a)+2(2-2a)+2(2-a)$

$=2a^2-12a+12$

이고

$2a^3-12a^2+12a=2a^2$에서 $2a(a-1)(a-6)=0$에서

$a=1,\ a=6$이고

$f(x)=x(x-1)(x-2)$ 또는 $f(x)=x(x-6)(x-12)$이다.

$f(3)=6$ 또는 $f(3)=3(-3)(-9)=81$

20. 정답) 3 [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x\to n}\frac{g(x)}{(x-n)f(x)}=n^2-n-2\ (n=0,\ 1,\ 2)$에서

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{xf(x)}=-2,\ \lim_{x\to1}\frac{g(x)}{(x-1)f(x)}=-2,\ \lim_{x\to2}\frac{g(x)}{(x-2)f(x)}=0$

이고 $x\to n$일 때, $(x-n)f(n)\to0$이므로 다항함수 $g(x)$에서

$g(n)=0$이어야 한다.

인수정리에 의해 $g(x)=x(x-1)(x-2)(x-k)$으로 둘 수 있고

$\lim_{x\to2}\frac{x(x-1)(x-2)(x-k)}{(x-2)f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-1)(x-k)}{f(x)}=0$

$\frac{2(2-k)}{f(2)}=0$에서 $k=2$이다.

$\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(x-2)^2}{xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)(x-2)^2}{f(x)}=-2$에서

$\frac{-1(-2)^2}{f(0)}=-2,\ f(0)=2$이고

$\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x-2)^2}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-2)^2}{f(x)}=-2$에서

$\frac{1(-1)^2}{f(1)}=-2,\ f(1)=-\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=-\frac{5}{2}x+2,$

$f(2)=-3,\ g(3)=6,\ f(2)+g(3)=3$이다.

21. 정답) 50 [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : 두 삼각형 OAB, OAC의 외접원의 넓이가 같으려면

두 외접원의 반지름이 같아야 하고,

사인법칙에 의해 $\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin(\angle\mathrm{OAB})}=\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\sin(\angle\mathrm{OAC})}$이어야 한다.

이 때, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로 $\sin(\angle\mathrm{OAB})=\sin(\angle\mathrm{OAC})$이다.

$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OAC}$인 경우, 점 A가 직선 $y=-x$ 위에 존재해야 하고, 이 때, $\overline{\mathrm{AB}}\neq\overline{\mathrm{AC}}$에 모순이다. 따라서 $\angle\mathrm{OAB}=\pi-\angle\mathrm{OAC}$인 경우, 점 A가 직선 $y=x-2$ 위에 존재해야 한다.

두 곡선 $y=a^x,\ y=\log_a x$이 만나는 점은 직선 $y=x$ 위에 존재하고, $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha)$라 할 때, 이를 모두 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시키면,

두 곡선 $y=a^x-2,\ y=\log_a x-2$가 만나는 점은 직선 $y=x-2$ 위에 존재하고, $\mathrm{P}'(\alpha,\ \alpha-2)$가 된다.

이 때, 두 곡선 $y=a^x-2,\ y=\log_a 2x=\log_a x+\log_a 2$가 만나는 점은 직선 $y=x-2$ 위에 존재하고, 이는 점 A이다.

즉, 점 A는 점 $\mathrm{P}'(\alpha,\ \alpha-2)$이고, $\log_a x+\log_a 2=\log_a x-2$에서

$\log_a 2=-2,\ a=2^{-\frac{1}{2}}$이다.

$100a^2=100\times2^{-1}=50$이다.

22. 정답) 7 [수학Ⅱ 도함수의 활용 + 정적분]

해설 : $|x-a|f(x)=(x^2-ax)\int_a^x g(t)dt$에 $x=0$를 대입히면

$f(0)=0$이다.

$x>a$에서 $(x-a)f(x)=(x^2-ax)\int_a^x g(t)dt$

$f(x)=x\int_a^x g(t)dt$이고

$x<a$에서 $-(x-a)f(x)=(x^2-ax)\int_a^x g(t)dt$

$f(x)=-x\int_a^x g(t)dt$이다.

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $x=a$에서 연속이고

$\lim_{x\to a+} f(x)=a\int_a^a g(t)dt=0$

$\lim_{x\to a-} f(x)=-a\int_a^a g(t)dt=0$에서 $f(a)=0$이다.

$a=0$인 경우, $|x|f(x)=x^2\int_0^x g(t)dt$, $f(x)=|x|\int_0^x g(t)dt$이고

인수정리에 의해 삼차함수 $f(x)$는 $f(x)=x(x^2+mx+n)$이라 둘 수 있다.

$x\geq 0$일 때, $x^2+mx+n=\int_a^x g(t)dt$

$x<0$일 때, $-(x^2+mx+n)=\int_a^x g(t)dt$이고

이 때, $\int_0^x g(t)dt$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x g(t)dt-0}{x}=\lim_{x\to a+}\frac{(x^2+mx+n)}{x}$의 극한값이 존재해야 하고

$n=0$이고, $\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x g(t)dt-0}{x}=\lim_{x\to a+}\frac{(x^2+mx)}{x}=m$이다,

$\lim_{x\to 0-}\frac{\int_0^x g(t)dt-0}{x}=\lim_{x\to a-}\frac{-(x^2+mx)}{x}=-m$이고

두 극한값이 같아야 하므로 $m=-m$에서 $m=0$, $f(x)=x^3$이다.

$f(x)=|x|\int_0^x g(t)dt$에서 $\int_a^x g(t)dt=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$,

$g(x)=2|x|$이다.

이 때, 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 세 실근을 가지지 못하므로

모순이다.

$a\neq 0$인 경우,

인수정리에 의해 삼차함수 $f(x)$는 $f(x)=x(x-a)(x-m)$으로 둘 수 있다.

$|x-a|f(x)=(x^2-ax)\int_a^x g(t)dt$에서

$x\geq 0$일 때, $(x-a)(x-m)=\int_a^x g(t)dt$

$x<0$일 때, $-(x-a)(x-m)=\int_a^x g(t)dt$이고

이 때, $\int_a^x g(t)dt$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to a+}\frac{\int_a^x g(t)dt-0}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)(x-m)}{x-a}=a-m$

$\lim_{x\to a-}\frac{\int_a^x g(t)dt-0}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{-(x-a)(x-m)}{x-a}=m-a$에서

$a-m=m-a$, $a=m$이어야 한다.

$f(x)=x(x-a)^2$이고 $\int_a^x g(t)dt=\begin{cases} (x-a)^2 & (x\geq a) \\ -(x-a)^2 & (x<a)\end{cases}$

에서 $g(x)=2|x-a|$이다.

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$x>a$에서 $x(x-a)^2=2(x-a)$, $x(x-a)=2$이고 곡선 $y=x(x-a)$와 직선 $y=2$의 개형을 고려했을 때, $x>a$에서 한 개의 실근을 가진다.

$x=a$에서 $0=0$이므로 한 개의 실근을 가진다.

즉, $x<a$에서 $x(x-a)^2=-2(x-a)$, $x(x-a)=-2$에서 한 개의 실근을 가져야 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 가지고, 이 때, 곡선 $y=x(x-a)$와 직선 $y=-2$의 개형을 고려하면 $a>0$일 때, 방정식 $x(x-a)=-2$가 중근을 가져야 한다.

$x^2-ax+2=0$에서 $D=a^2-8=0$이고 $a=2\sqrt{2}$이다.

$f(x)=x(x-2\sqrt{2})^2$에서 $f(1)=9-4\sqrt{2}$이고

$g(x)=2|x-2\sqrt{2}|$에서 $g(1)=4\sqrt{2}-2$이다.

$f(1)+g(1)=7$이다.

확률과 통계

23. 정답) ③ **[확률과 통계 이항정리]**

해설 : $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^6=\sum_{r=0}^{6}\left\{{}_6C_r\times\left(\frac{x}{2}\right)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{6-r}\right\}=\sum_{r=0}^{6}\frac{{}_6C_r\times x^{2r-6}}{2^r}$

에서 $r=4$이면 $2r-6=2$이므로

x^2의 계수는 $\frac{{}_6C_4}{2^4}=\frac{15}{16}$이다.

24. 정답) ④ [확률과 통계 수학적 확률]

해설 : 동전 2개를 동시에 던질 때,

앞면이 나오는 동전의 개수가 각각 0, 1, 2일 확률은

각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3+5+2}{12}=\frac{5}{6}$이다.

25. 정답) ② [확률과 통계 독립과 종속]

해설 : 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A^C과 B도 서로 독립이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cup B)&=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=1-\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=1-\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

에서 $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이고,

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$이다.

따라서

$\mathrm{P}(B-A)=\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

이다.

26. 정답) ① [확률과 통계 중복조합]

해설 : 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$가 5의 배수가

되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 5)$이므로

$f(1)$ 또는 $f(3)$의 값에 따라 $f(2)$, $f(4)$의 값이 결정된다.

따라서 $f(1)\le f(3)\le f(5)$를 만족하는 함수 f의 개수가

주어진 조건을 만족하는 함수 f의 개수가 되므로

${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

27. 정답) ⑤ [확률과 통계 여사건의 확률]

해설 : 두 수 $X=1112$, $Y=1233$에 대하여

$A=X$, $B=Y$인 경우가 가능하고 이때, $A<B$이다.

만약 $A=Y$, $B=X$이면 $A>B$이고 이는 어떠한 수를 뽑더라도

성립하므로 $A<B$일 확률과 $A>B$일 확률은 같다.

따라서 $A=B$일 확률을 p라 하면,

$A<B$일 확률은 $\frac{1-p}{2}$이다.

$A=B$일 확률은 선택한 4장의 카드와 선택하지 않은 4장의 카드의

순서쌍이 같은 경우이므로

$(1, 1, 2, 3)$을 선택한 경우이다.

따라서 $p=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{6\times2\times2}{70}=\frac{12}{35}$이고,

$A<B$일 확률은 $\frac{1-p}{2}=\frac{23}{70}$

28. 정답) ③ [확률과 통계 원순열]

해설 : ⅰ) A, B가 이웃하지 않은 경우

A와 B 사이에 다른 여학생 한 명이 앉아야 하고,

A, B, 다른 여학생 한 명을 한 묶음으로 보고 원순열을 이용하면

$2\times4!=48$

ⅱ) A, B가 이웃한 경우

A와 B의 한쪽에는 남학생이 앉아야 하고,

남학생 두 명과 A, B를 한 묶음으로 보고 원순열을 이용하면

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times2!\times3!=144$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $48+144=192$

29. 정답) 30 [확률과 통계 조건부확률]

해설 : ⅰ) $b=2$, $c=3$일 때,

ⅰ-1) $a=1$인 경우

주머니 A에서는 1과 2가 적힌 공을 뽑아야 하고,

주머니 B에서는 3이 적힌 공과 다른 한 공을 뽑아야 함

⇨ $\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

ⅰ-2) $a=2$인 경우

주머니 A에서는 2가 적힌 공을 두 개 뽑아야 하고,

주머니 B에서는 3이 적힌 공과 다른 한 공을 뽑아야 함

⇨ $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$

ⅱ) $b=3$, $c=4$일 때,

$d\ge c$이므로 $d=5$ 또는 $d=6$이고, 주머니 B에서는

$b=3$을 나타내는 공은 주머니 A의 공이다.

따라서 주머니 A에서는 숫자 3이 적힌 공과 다른 한 공을 뽑아야 하고, 주머니 B에서는 4와 5 또는 4와 6이 적힌 공을 뽑아야 함

⇨ $\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$

이때, 위의 경우에서 bc가 6의 배수이고 $a+d$가 3의 배수가 되는

순서쌍 (a, b, c, d)를 모두 나타내고 그 확률을 구하면

$(1, 2, 3, 5)$ ⇨ $\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{15}$

$(2,2,3,4)$ ⇨ $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{60}$

$(1,3,4,5)$ ⇨ $\frac{{}_2C_1}{{}_5C_2}\times\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{15}+\frac{1}{60}+\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{2}{15}}=\frac{4+1+2}{12+3+8}=\frac{7}{23},\ p+q=23+7=30$$

30. 정답) 48 [확률과 통계 중복조합]

해설 : ⅰ) 노란색 카드를 받는 학생이 1명인 경우

노란색 카드를 2장 받으므로, 조건 (나), (다)에 의해 빨간색 또는 파란색 카드를 3장 받아야 하고, 파란색 카드를 3장 받은 경우, 다른 두 학생이 빨간색, 파란색 카드를 각각 적어도 1장씩 받을 수 없다.

따라서 세 학생 중 한 명은 노란색 카드 2장과 빨간색 카드 3장을 받고, 남은 빨간색 카드 3장과 파란색 카드 4장을 다른 두 명의 학생에게 각각 적어도 1장씩 나누어 주는 경우의 수는 ⇨

${}_2H_1\times{}_2H_2=6$

$\therefore\ {}_3C_1\times6=18$

ⅱ) 노란색 카드를 받는 학생이 2명인 경우

노란색 카드를 받는 2명의 학생이 모두 파란색 카드를 받는다고 하면, 남은 카드는 빨간색 카드 뿐이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

ⅱ-1) 노란색 카드를 받는 2명의 학생이 모두 빨간색 카드를 적어도 2장 받는 경우

다른 한 학생은 빨간색 카드를 적어도 1장 받아야 하고, 노란색 카드를 받은 두 학생은 파란색 카드를 받을 수 없으므로 남은 빨간색 카드 1장을 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ⇨ ${}_3H_1=3$

$\therefore\ {}_3C_2\times3=9$

ⅱ-2) 노란색 카드를 받는 2명의 학생 중 한 명은 빨간색 카드를 적어도 2장, 다른 한 명은 파란색 카드를 적어도 2장 받는 경우

다른 한 학생은 빨간색 카드와 파란색 카드를 적어도 1장씩 받아야 하고,

남은 빨간색 카드 3장과 파란색 카드 1장을 이미 빨간색 또는 파란색 카드를 받은 학생들에게만 나누어 주는 경우의 수는 ⇨

${}_2H_3\times{}_2H_1=8$

이때, 노란색 카드 1장과 빨간색 카드 2장을 받은 학생에게 빨간색 카드 3장을 모두 나누어주면 받은 카드의 수가 6이 되므로

$\therefore\ {}_3C_2\times(8-1)=21$

따라서 구하는 경우의 수는 $18+9+21=48$

미적분

23. 정답) ⑤ [미적분 등비수열의 극한]

해설 : $\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n+3^n}{4^{n-1}+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4^n}}=3\times4=12$

24. 정답) ① [미적분 여러 가지 미분법]

해설 : $\frac{dx}{dt}=\frac{e^t}{e^t+1}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{e^t(e^t+1)-e^t\times e^t}{(e^t+1)^2}=\frac{e^t}{(e^t+1)^2}$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{e^t}{(e^t+1)^2}}{\frac{e^t}{e^t+1}}=\frac{1}{e^t+1}$이므로

$t=\ln3$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^{\ln3}+1}=\frac{1}{4}$

25. 정답) ④ [미적분 삼각함수의 덧셈정리]

해설 : 두 직선 $y=ax+1$, $y=(a+2)x-2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=a+2$이고,

$\theta=\beta-\alpha$이므로

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{(a+2)-a}{1+a(a+2)}=\frac{2}{(a+1)^2}$ …㉠

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서 θ는 예각이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

이고, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$이다.

따라서 ㉠에 의해 $\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(a+1)^2=4$이고,

$a=1$ 또는 $a=-3$이므로

모든 실수 a의 값의 곱은 -3

26. 정답) ② [미적분 도함수의 활용]

해설 : 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접하므로

접점의 x좌표를 α라 할 때,

$f(\alpha)=g(\alpha)$, $f'(\alpha)=g'(\alpha)$

이어야 함

$f(\alpha)=g(\alpha)$

⇨ $(\alpha+1)e^{-\alpha}=e^{-\alpha}+k$,

$\therefore\ k=e^{-\alpha}$ …㉠

$f'(\alpha)=g'(\alpha)$

⇨ $f'(x)=-xe^{-x}$, $g'(x)=-e^{-x}$이므로

$-\alpha e^{-\alpha}=-e^{-\alpha}$

$\therefore\ \alpha=1$

㉠에서 $k=\dfrac{1}{e}$

27. 정답) ③ [미적분 급수]

해설 : 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\overline{B_1D}=2\sqrt{5^2-2^2}=2\sqrt{21}$,

$\angle A_1B_1D=\theta$라 하면 $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$이므로

$\overline{B_1B_2}=2\times2\times\dfrac{\sqrt{21}}{5}=\dfrac{4\sqrt{21}}{5}$ …㉠

직선 B_1D는 각 $\angle A_1B_1C_1$을 이등분하므로,

선분 B_1D가 호 M_1N_1과 만나는 점을 L_1이라 하면

두 부채꼴 $B_1M_1L_1$, $B_1N_1L_1$의 넓이는 같다.

따라서 S_1은 삼각형 $B_1B_2M_1$의 넓이와 같고, ㉠에 의해

$S_1=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{4\sqrt{21}}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{8\sqrt{21}}{25}$

$\overline{B_2D}=\overline{B_1D}-\overline{B_1B_2}=\dfrac{6\sqrt{21}}{5}$이므로

닮음비 $2\sqrt{21}:\dfrac{6\sqrt{21}}{5}=1:\dfrac{3}{5}$, 넓이의 비 $1:\dfrac{9}{25}$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{8\sqrt{21}}{25}}{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$$

28. 정답) ⑤ [미적분 합성함수의 미분법]

해설 : $g'(x)=-\sin\{f(x)-\pi x\}\times\{f'(x)-\pi\}$

에서 $\sin\{f(\alpha)-\pi\alpha\}=0$이거나 $f'(\alpha)-\pi=0$인 $x=\alpha$의 값에 대하여 함수 $g(x)$는 극값을 가진다.

$\sin\{f(\alpha)-\pi\alpha\}=0$이려면 $f(\alpha)=\pi\alpha+m\pi$ (m은 정수)

이어야 하므로 $g(\alpha)=\cos\{f(\alpha)-\pi\alpha\}=\cos m\pi$에서

함수 $g(x)$는 서로 다른 극값으로 1, -1을 갖는다.

$f'(\alpha)-\pi=0$이려면 $f'(\alpha)=\pi(3\alpha^2-n)=\pi$에서

$\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{n+1}{3}}$이어야 하고, $\beta=\sqrt{\dfrac{n+1}{3}}$이라 하면

함수 $f(x)$는 기함수, 함수 $g(x)$는 우함수이므로

함수 $g(x)$는 극값 $g(\beta)=g(-\beta)$를 갖는다.

따라서 함수 $g(x)$의 서로 다른 극값의 개수가 3이 되기 위해서는 $g(\beta)\neq1$ 이고 $g(\beta)\neq-1$이어야 한다.

$g(\beta)=\cos\{\pi\beta(\beta^2-n)-\pi\beta\}=\cos\{\pi(\beta^3-\beta-n)\}$에서

$\beta^3-\beta=\beta(\beta+1)(\beta-1)$이 정수가 아니어야 하는데,

$\beta^3-\beta=\sqrt{\dfrac{n+1}{3}}\times\dfrac{n-2}{3}$에서

$n+1$이 3의 배수가 아니면

분모에 $\sqrt{3}$이 남게 되므로 정수일 수 없고,

$n+1$이 3의 배수이면

$n-2$가 0 또는 3의 배수가 되어 $\dfrac{n-2}{3}$는 정수가 된다.

이때, $\dfrac{n+1}{3}$이 제곱수가 되면 $\beta^3-\beta$가 정수가 되므로

$n=2$일 때, $\beta^3-\beta=0$이고 $\beta=1$,

$n=11$일 때, $\beta^3-\beta=6$이고 $\beta=2$,

$n=26$일 때, $\beta^3-\beta=24$이고 $\beta=3$

의 세 경우에서 $g(\beta)=1$ 또는 $g(\beta)=-1$이다.

따라서 함수 $g(x)$의 서로 다른 극값의 개수가 3이 되도록 하는 30 이하의 자연수 n의 개수는 27이다.

29. 정답) 8 [미적분 삼각함수의 극한]

해설 : $\angle AQP=\dfrac{3}{4}\pi-\theta$이고,

선분 AB의 중점을 O라 하면, $\angle OPQ=\dfrac{\pi}{4}-\theta$

삼각형 OPQ에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{OP}}{\sin(\angle OQP)}=\dfrac{\overline{OQ}}{\sin(\angle OPQ)}$이므로

$\overline{OQ}$

$=\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-\theta\right)}=\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}=\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$=2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=2\times\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

이때, $\angle POQ=2\theta$이므로

$f(\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times2^2\times2\theta-\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\times\sin2\theta$

$=4\theta-2\sin 2\theta\times\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

$=2\sin 2\theta\left(\dfrac{2\theta}{\sin 2\theta}-\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$

$=2\sin 2\theta\times\dfrac{2\theta-\sin 2\theta+\tan\theta(2\theta+\sin 2\theta)}{\sin 2\theta(1+\tan\theta)}$

이때, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta<\theta<\tan\theta$이므로

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\sin\theta-\sin\theta}{\theta^2}\le\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\theta-\sin\theta}{\theta^2}\le\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^2}$

$0\le\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\theta-\sin\theta}{\theta^2}\le\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^2\cos\theta}=0$에서

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\theta-\sin\theta}{\theta^2}=0$이고, 따라서

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta^2}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left\{\dfrac{2\sin 2\theta}{\theta}\times\dfrac{2\theta-\sin 2\theta+\tan\theta(2\theta+\sin 2\theta)}{\sin 2\theta(1+\tan\theta)\times\theta}\right\}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left\{\dfrac{2\sin 2\theta}{\theta}\times\dfrac{\tan\theta(2\theta+\sin 2\theta)}{\sin 2\theta(1+\tan\theta)\times\theta}\right\}=8$

30. 정답) 2 [미적분 도함수의 활용]

해설 : $\ln(x^3-tx^2+2t)=t+\ln x$

$\Leftrightarrow\ x^3-tx^2+2t=e^{t+\ln x}$

$\Leftrightarrow\ x^3-tx^2-e^t x+2t=0\ \cdots㉠$

에서 $t=\ln 2$이면

$x^3-(\ln 2)x^2-2x+2\ln 2=0$

$\Leftrightarrow\ (x-\ln 2)(x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow\ x=\ln 2$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

이고, $x>0$이어야 하므로

$f(\ln 2)=\sqrt{2}$, $g(\ln 2)=\ln 2$ $(\because\ \sqrt{2}>\ln 2)$

㉠에 $x=f(t)$를 대입하면

$\{f(t)\}^3-t\{f(t)\}^2-e^t f(t)+2t=0$

양변을 t에 대하여 미분하면

$3\{f(t)\}^2f'(t)-\{f(t)\}^2-2tf(t)f'(t)$

$\qquad -e^t f(t)-e^t f'(t)+2=0$

$f'(t)=\dfrac{\{f(t)\}^2+e^t f(t)-2}{3\{f(t)\}^2-2tf(t)-e^t}\ \cdots㉡$

㉡의 양변에 $t=\ln 2$를 대입하면

$f'(\ln 2)=\dfrac{2+2\sqrt{2}-2}{6-2\sqrt{2}\ln 2-2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}\ln 2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\ln 2}$

$\dfrac{1}{f'(\ln 2)}+g(\ln 2)=(\sqrt{2}-\ln 2)+\ln 2=\sqrt{2}$

이므로 $k=\sqrt{2}$이고, $k^2=2$