확률

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 시행과 사건

확률의 정의에 앞서 확률론 전반에서 사용되는 용어들을 먼저 정의할 필요가 있다.

시행 : 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의해 결정되는 관찰이나 실험을 시행이라 한다.

표본공간(S) : 어떤 시행이 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 한다.

사건 : 표본공간의 부분집합을 사건이라 한다.

근원사건 : 어떤 시행에서 표본공간의 한 원소로 이루어진 집합을 근원사건이라 한다.

공사건($\varnothing$) : 결코 일어나지 않는 사건으로, 공집합을 공사건이라 한다.

합사건 : 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 A와 B의 합사건이라 하고, 기호로 $A \cup B$로 표현한다.

곱사건 : 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 A와 B가 동시에 일어나는 사건을 A와 B의 곱사건이라 하고, 기호로 $A \cap B$로 표현한다.

여사건 : 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C로 표현한다.

배반사건 : 두 사건 A, B에 대하여 $A \cap B = \varnothing$일 때(두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때) 두 사건을 서로 배반사건이라고 한다.

Ⅱ. 확률의 정의

중학교에서 배우는 가장 고전적인 확률은 수학적 확률이다. 수학적 확률은 어떤 시행의 결과가 유한하고, 각 근원사건이 일어날 확률이 같을 때, 표본공간 S와 사건 A에 대하여 A의 수학적 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

이다. (단, $S \neq \varnothing$)

또한, 동일한 시행을 n번 반복하여 사건 A가 일어나는 횟수를 q_n이라 하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = p$$

를 사건 A의 통계적 확률이라 한다. 표본공간이 유한하고 각 근원사건이 같은 정도로 일어날 것이 보장될 때, 어떤 사건에 대한 수학적 확률과 통계적 확률은 동일하다.

위에서 살펴본 수학적 확률과 통계적 확률은 표본공간이 무한집합이거나, 사건이 연속적으로 이어진 경우 그들의 개수를 세는 것 자체가 불가능하므로 계산할 수 없다. 그러한 경우에는 기하학적 측도를 이용한 기하학적 확률을 이용하여 확률을 논하게 된다.

연속인 표본공간 S와 어떤 사건 A에 대하여 각각의 영역의 크기를 $\mathrm{s}(S)$, $\mathrm{s}(A)$라 할 때,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{s}(A)}{\mathrm{s}(S)}$$

를 사건 A의 기하학적 확률이라고 한다. 이때 영역의 크기는 길이, 넓이, 부피, 각도 등의 기하학적 측도(Measure)이다. 기하학적 확률을 응용한 몇 가지 예제를 제시하면 다음과 같다. (풀이는 생략한다.)

예제 1) 정삼각형 내부의 한 점에서 각 변에 내린 수선의 길이를 각각 x, y, z라 할 때, x, y, z를 세 변의 길이로 갖는 삼각형이 존재할 확률을 구하여라.

[답] $\frac{1}{4}$

예제 2) 평평한 바닥 위에 간격이 $2a$인 평행선들이 그려져 있다. 길이가 $2l$이고 두께를 무시할 수 있는 바늘을 바닥 위에 떨어뜨릴 때, 바늘이 어느 한 평행선과 만날 확률을 구하여라. (단, $l \leq a$)

[답] $\frac{2l}{\pi a}$

예제 3) 한 변의 길이가 a인 정사각모양의 격자무늬가 무한히 연속되는 평면 위에 길이가 l은 바늘을 떨어뜨릴 때, 바늘이 어느 격자 선과 만날 확률을 구하여라.

[답] $\frac{4l}{\pi a} - \frac{l^2}{\pi a^2}$

위에서 설명한 확률은 직관적이기는 하나, 수학적으로 엄밀하지 못하다. 이를 해결하기 위해 20세기 초 러시아의 수학자 안드레이 콜모고로프(A. N. Kolmogorov)는 공리를 이용하여 확률을 정의하였으며, 현대의 확률론은 이 공리적 정의에 기반하고 있다.

표본공간 S의 사건 A에 대하여 다음 세 가지 공리를 모두 만족시키는 $\mathrm{P}(A)$를 사건 A의 공리적 확률이라 한다.

(i) $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$
(ii) $\mathrm{P}(S) = 1$
(iii) A_n ($n \in \mathbb{N}$)이 표본공간 S에서 정의된 상호배반사건일 때, $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$이다.

여기서 표본공간 S, 표본공간의 모든 사건의 집합 F, 확률측도 P에 대하여 이 세 쌍으로 구성된 공간 (S, F, P)를 확률공간(Probability Space)이라 한다.

이 공리적 확률의 공리들을 이용하면 확률의 기본 성질들을 쉽게 증명할 수 있다.

예제 4) $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$임을 보여라.

pf) $\varnothing$과 표본공간 S에 대하여 3번 공리를 적용하면

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(\varnothing \cup S) = \mathrm{P}(\varnothing) + \mathrm{P}(S)$$

이므로 $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$이다. ■

예제 5) 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$임을 보여라.

pf) 3번 공리에 의해

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A - B) + \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B - A)$$

$$= \{\mathrm{P}(A - B) + \mathrm{P}(A \cap B)\} + \{\mathrm{P}(B - A) + \mathrm{P}(A \cap B)\} - \mathrm{P}(A \cap B)$$

$$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \ ■$$

예제 6) 사건 A에 대하여 $\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$임을 보여라.

pf) 3번 공리에 의해

$$1 = \mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^{\mathrm{C}})$$

이므로

$$\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

가 성립한다. ■

예제 7) 두 사건 A, B에 대하여 $A \subseteq B$이면 $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$임을 보여라.

pf) A와 $B-A$에 대하여 3번 공리를 적용하면

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup (B-A)) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B-A)$$

이므로

$$\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B-A) \geq 0$$

이고

$$\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$$

이다. ■

Ⅲ. 조건부 확률과 베이즈 정리

표본공간 S와 두 사건 A, B에 대하여 사건 B가 발생했을 때 사건 A가 발생할 확률은

$$\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} =: \mathrm{P}(A \mid B)$$

이고, 이를 조건부 확률이라 한다.

조건부 확률에 대해서도 다음의 명제가 성립하며, 이는 앞선 예제 4 ~ 7번과 비슷한 방법으로 증명할 수 있다.

예제 8) 다음이 성립함을 보여라.

(1) $\mathrm{P}(\varnothing \mid C) = 0$

(2) $\mathrm{P}(A \cup B \mid C) = \mathrm{P}(A \mid C) + \mathrm{P}(B \mid C) - \mathrm{P}(A \cap B \mid C)$

(3) $\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}} \mid C) = 1 - \mathrm{P}(A \mid C)$

(4) $A \subseteq B \rightarrow \mathrm{P}(A \mid C) \leq \mathrm{P}(B \mid C)$

이를 일반화하여 공식화한 베이즈 정리(Bayes' Rule)는 다음과 같다.

$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_k$는 서로 배반이고 $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S$일 때,

$$\mathrm{P}(S_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap S_i)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(S_i) \cdot \mathrm{P}(A \mid S_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(S_j) \cdot \mathrm{P}(A \mid S_j)} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

이다.

또한 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$가 성립할 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이다. 사건 A와 B가 독립이면 $(A,\ B^{\mathrm{C}})$, $(A^{\mathrm{C}},\ B)$, $(A^{\mathrm{C}},\ B^{\mathrm{C}})$는 모두 독립이고, 이는 예제 6번과 간단한 식변형을 통해 유도된다.