무한 등비 급수

무한등비급수 (이하 ‘무등비’)

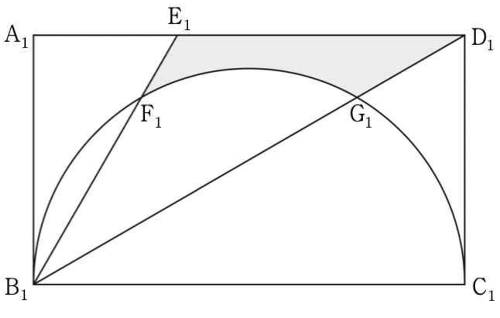
무등비 문제의 경우 언제나 답이 도출되는 식이 같습니다. 공비를 r, 초항을 S_1이라고 할 때, 대부분 문제가 $\frac{S_1}{1-r}$이라는 식으로 귀결됩니다. 그렇기에 문자 두 개를 구하는 단원이라고 생각하시면 됩니다. 그러면 생각해봅시다. S_1을 구하는 법과 r을 구하는 법을요.

무등비 문제는 언제나 도형이 2개로 출제됩니다. 첫 번째 도형의 경우 S_1을 구하는 용도이고, 두 번째 도형의 경우 r을 구하는 용도입니다. 그림과 함께 살펴봅시다.

_2022.04 모의고사 28번 문항

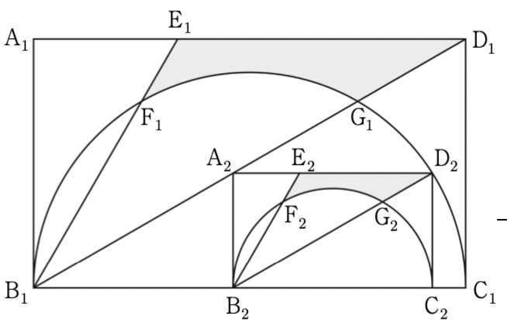
28. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원의 호 B_1C_1이 두 선분 B_1E_1, B_1D_1과 만나는 점 중 점 B_1이 아닌 점을 각각 F_1, G_1이라 하자. 세 선분 F_1E_1, E_1D_1, D_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 호 G_1C_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:\sqrt{3}$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



_ for S_1

R_2



_ for r

⋮ ⋮

S_1을 구하는 방법은 순전히 도형 실력이 맞습니다. 다만, 여러분 이런 얘기 들어보시지 않았나요?

“좌표축에 올리면 무조건 풀 수 있다 ㄹㅇ ㅋㅋ”

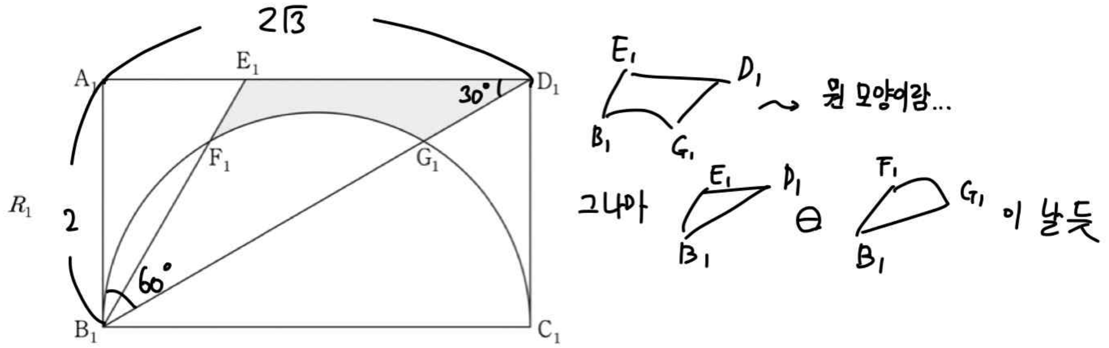
이 말이 틀린 말이 아닙니다. 그러면 왜 좌표축에 올리면 여러분들이 풀 수 있는 걸까요..

바로 직선의 기울기 때문에 그럽니다. 직선의 기울기에 우리가 쓸 수 있는 삼각비가 반영되어 있습니다.

직선의 기울기 = $\tan\theta$이므로 직선으로 나타내면 여러분이 저절로 삼각비를 사용하게 됩니다.

즉, 직선을 그리지 않더라도 여러분이 삼각비를 쓸 수 있다면, 언제나 문제를 풀 수 있습니다.

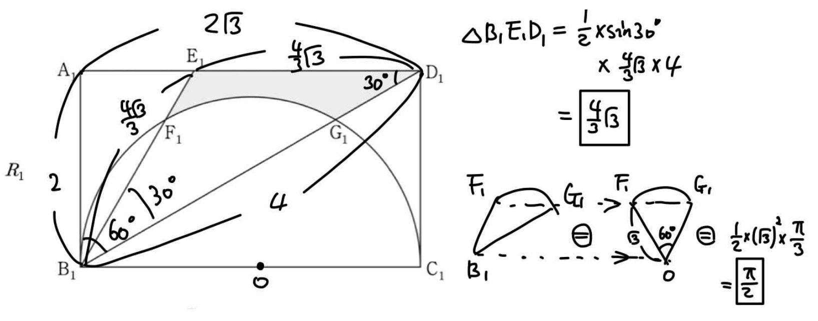
그러면 오늘도 일관되고 논리적인 도형 풀이를 보러 한 번 가봅시다 :)



우선 문제에서 준 것만 그림에 나타냈습니다. 여기는 삼각비를 쓸 필요도 없군요.
특수각인 60도가 나와버렸으니까요..!

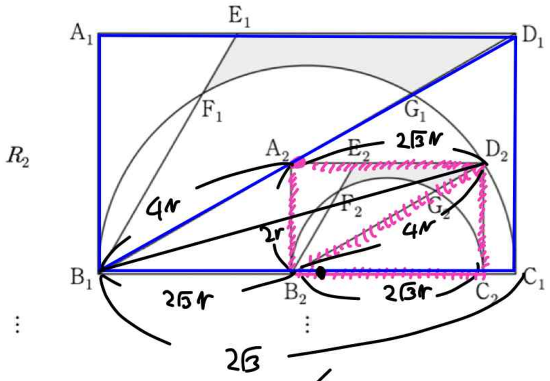
이럴 때 항상 생각해야 합니다. 정말 저걸 구하는 걸지 아니면 저것과 넓이가 같은 다른 부분의 넓이를 구해야 할지 (feat. 2021학년도 6월 모의평가 20번 문제)..

우선 $\Delta E_1B_1D_1$의 넓이는 손쉽게 구할 수 있습니다. 문제는 이상한 모양의 $B_1F_1G_1$인데, 설마 저 모양을 구할까요.. ㅎㅎ 같은 넓이의 다른 부분을 구합시다...!



평행하니까 슬쩍...!

S_1은 쉽게 구할 수 있음을 확인할 수 있습니다.



① $\frac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$　　② $\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$

③ $\frac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$　　④ $\frac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$

⑤ $\frac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$

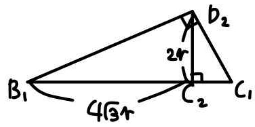
내가 이미 아는 변의 길이 : ///

내가 구할 변의 길이 : ///

겹치는 포인트는?

… $\overline{B_2C_2} \to \overline{B_1C_1}\,(\overset{2\sqrt{3}r}{\overline{B_1B_2}}+\overset{2\sqrt{3}r}{\overline{B_2C_2}}+\overset{??}{\overline{C_2C_1}})$ 이 승부처!!

다르게 표현해볼까?



(일명 ‘소’자 공식)

$(2r)^2 = 4\sqrt{3}r \times \overline{C_2C_1}$　∴ $\overline{C_2C_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}r$

∴ $\overline{B_1C_1} = 2\sqrt{3} = (4\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}})r = \frac{13}{3}\sqrt{3}r$　∴ $\boxed{r=\frac{6}{13}}$

넓이이므로 공비 $= r^2 = \frac{36}{169}$　∴ $\frac{169}{133}\times\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$

$= \boxed{\frac{169}{798}\times(8\sqrt{3}-3\pi)}$

여기서 핵심은 파랑이와 분홍이입니다!

우리가 r을 구하려면 결국 ‘어쩌고r = 얼마(실제값)’ 형태가 나와야 합니다.
그래야 $r = \frac{\text{얼마(실제값)}}{\text{어쩌고}}$형태로 나오니까요.

그렇다면 어떤 ‘얼마’라는 부분을 r로 표현해주어야 저 식의 형태가 나올 겁니다.
‘얼마’가 어딘지 찾는 방법이 바로 파랑이와 분홍이입니다.

1) 이미 길이를 아는 곳을 파랑으로 표시해봅니다.
2) 두 번째 조그만 도형의 길이를 r을 사용해 적어봅니다. 그리고 분홍색으로 표시해봅니다.
3) 파랑이와 분홍이가 제일 많이 겹치는 곳을 살핍니다. 명백히 $\overline{B_2C_2}$이네요.

그럼 우리가 구해야 할 ‘얼마’는 $\overline{B_2C_2}$를 포함한 $\overline{B_1C_1}$이 우리의 승부처입니다!!!

그러면 이제 ‘얼마’에 해당하는 $\overline{B_1C_1}$을 r로 표시하는 것이 우리가 할 일입니다.
그래서 제가 기를 쓰고 $\overline{C_1C_2}$를 구하려고 한 것이죠.

이렇게 어려운 등비급수 도형 문제일수록 승부처가 어느 곳인지 명백히 찾는 것이 중요합니다. 항상 ‘얼마’와 ‘어쩌고r’이 어디인지 생각하여 둘이 겹치는 곳을 승부처로 생각하는 습관을 가지시길 바랍니다. :)