

Q1. 지구와 달 사이에 물체가 있을 때 지구와 달은 만유 인력의 법칙에 따라 물체를 서로 끌어 당긴다. 그렇다면 이 물체의 무게가 “0” 이 되는 위치는 지구로부터 얼마나 떨어진 곳이 될까 ? (단, 지구에서 달까지의 거리는 r , 달의 질량은 지구 질량의 $\frac{1}{81}$ 이라고 한다.)

만유인력의 법칙에 따라 지구와 달이 그 사이에 있는 물체를 서로 끌어당길 때, 물체는 지구와 달로부터 각각 반대방향으로 당겨지게 된다. 여기서 우리는 무게라는 것의 의미를 짚고 가야한다. 물체와 지구 사이에 작용하는 힘을 중력이라 하는데, 이 중력이 물체를 끌어당기는 힘의 크기를 무게라 한다. 고로, 무게가 0이 되기 위해서는 작용점이 동일한 물체에 있으며, 중력이 물체를 당기는 힘과 크기는 같고 방향이 반대인 또 다른 힘이 작용해야한다는 것이다. 그렇게 되면, 물체에 작용하는 합력이 0이되므로 ‘무게’의 정의로하여금 “0” 이라고 할 수 있게 된다. 그리고 그 힘이 바로 물체와 달 사이의 만유인력이 되는 것이다.

이때, 만유인력은 두 물체의 질량의 곱에 비례하고 두 물체 사이의 거리에 반비례한다. 따라서 $F = G \frac{Mm}{r^2}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ 으로 표현된다. 여기서 M, m 은 두 물체의 질량, r 은 두 물체 사이의 거리이다. 지구에서 달까지의 거리는 r 이며 달의 질량은 지구의 질량의 $\frac{1}{81}$ 이라고 한다. 고로, 지구의 질량이 M 일 때, 달의 질량은 $\frac{1}{81}M$ 이 된다. 물체의 질량을 m 이라고 잡고 지구와 물체 사이의 거리를 R 이라고 하자. 이때, 지구와 물체 사이의 만유인력은 $F = G \frac{Mm}{R^2}$ 이 된다. 지구와 달 사이의 거리는 r 이므로, 달과 물체 사이의 거리는 $(r-R)$ 이 된다. 고로, 달과 물체 사이의 만유

인력은 $F = G \frac{\frac{M}{81}m}{(r-R)^2}$ 이 된다. 힘의 평형이 이루어지기 위해서는 이 두 힘이 같아

야하므로 $G \frac{\frac{M}{81}m}{(r-R)^2} = G \frac{Mm}{R^2}$ 이라는 식이 성립해야한다. 이 식을 정리하면,

$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{81(r-R)^2}$, $R^2 = 81(r-R)^2$ 이다. 이때, 길이의 값은 양수이므로 양쪽에 루트를 씌울 수 있다. 즉, $10R = 9r$, $R = \frac{9}{10}r$ 이다. 고로, 물체의 무게가 “0” 이 되는

지점은 지구로부터 $\frac{9}{10}r$ 만큼 떨어진 곳이 된다.

Q2. 지구 표면에 있는 질량 m 인 물체를 지표로부터 지구 반지름의 3배 높이에 옮기면 위치 에너지는 얼마나 증가하는가? (단, 지구의 질량 및 반지름은 각각 M 및 R 이고, 만유인력 상수는 G 이다. $U = -G \frac{Mm}{r}$)

에너지는 일을 할 수 있는 능력을 의미한다. 즉, ‘잠재적으로’ 미래에 할 수 있는 일의 양이 된다. 이때, 에너지가 소모된다면 그 손실된 양만큼 외부에 일을 하게 된다. 고로, $W = \Delta E$ 의 관계가 성립하게 되는데, 이를 일과 에너지의 정리라고 한다. 예를 들어, 우리가 흔히 위치에너지를 나타낼 때 사용하는 $E_p = mgh$ 라는 식에서, mgh 의 값은 기준점으로부터 물체를 h 만큼 올리는데 든 일의 양, 다시말해 h 까지 올라가는 동안 물체가 받은 일의 양을 의미한다. 기준점에서 물체의 E_p 는 0이었으나 h 까지 올라가며 외부로부터 일을 받게 되었고, 그만큼 일을 할 수 있는 능력인 ‘에너지’를 얻게된 것이다.

만유인력에 의한 위치에너지의 크기를 구하기 위해서는 이 일과 에너지의 정리를 사용해야한다. 일은 에너지로 전환되기 때문에, 질량이 m 인 물체를 특정 높이까지 올리는 동안 한 일의 크기를 알면 에너지를 구할 수 있기 때문이다. $F = G \frac{Mm}{r^2}$ 의 만유인력을 받는 동안 질량이 m 인 물체를 만유인력과 크기가 같고 방향이 반대인 힘을 가하여 무한히 먼 곳까지 올릴 때, 일의 양은 $W = G \frac{Mm}{r}$ 이 된다. 이 일의 양은 무한히 먼 곳에서의 위치에너지와 거리 r 에서의 위치에너지의 차와 같다. 이때, 무한히 먼 곳에서의 위치에너지는 0이므로 $U_\infty - U_r = G \frac{Mm}{r}$, $U_r = -G \frac{Mm}{r}$ 이 된다.

따라서, 지구 표면에 있는, 즉 지구 중심과의 거리가 R 이고 질량이 m 인 물체의 위치에너지는 $-G \frac{Mm}{R}$ 이다. 이 물체를 지표로부터 지구 반지름의 3배 높이로 옮겼을 때의 위치에너지는 $-G \frac{Mm}{R+3R}$ 이 된다. 결론적으로, 증가한 위치에너지의 양은 $-G \frac{Mm}{4R} + G \frac{Mm}{R} = G \frac{3Mm}{4R}$ 이 된다.