지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 자연수 k에 대하여 $0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다.

$0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 모든 해의 합은? 〔2022년 4월 11〕

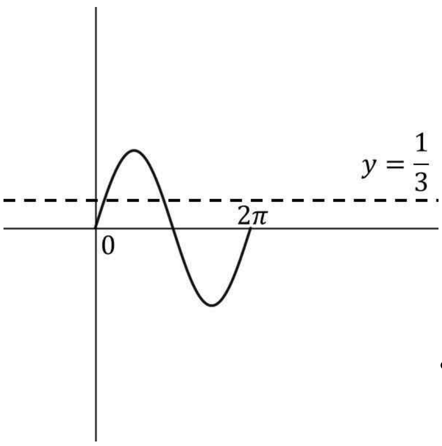
① 5π　　② 6π　　③ 7π　　④ 8π　　⑤ 9π

1. 정답 ③ 〔2022년 4월 11〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 자연수 보이면 숫자 넣을 준비

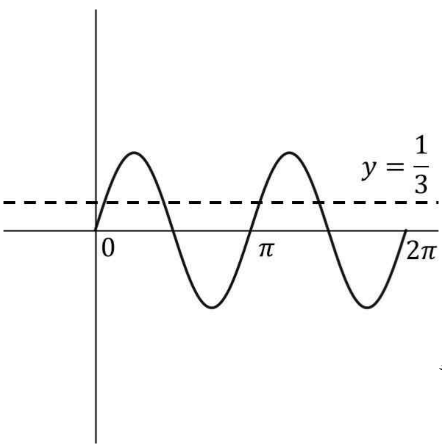
일단 k가 자연수라네요. k에 숫자를 넣을 준비는 하고 있어야겠어요. 그리고 $0 \leq x < 2\pi$에서 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이랍니다. 결국 $y = \sin kx$와 $y = \frac{1}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 8이라는 말이죠?

일단 생각을 좀 해볼게요. 평범한 $\sin x$의 그래프는 다들 아시죠?

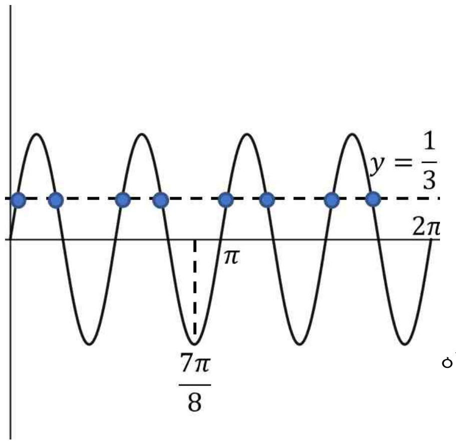


이런 그래프입니다. 지금은 $y = \frac{1}{3}$과 2개의 점에서 만나네요.

$\sin kx$는 주기만 k만큼 당긴 함수에요. 대충 숫자를 넣어서 그래프를 그려볼게요. 예를 들어 $k = 2$라면?



주기가 2배만큼 당겨지면서 꿀렁꿀렁하는 게 두 번이 되었어요. $y = \frac{1}{3}$과 만나는 점도 4개로 늘었구요. 만약 $k = 3$이라서 주기가 3배 당겨진다면? 꿀렁꿀렁하는 게 세 번이 되고 만나는 점의 개수도 6개가 되겠죠? 결국 개수가 8이 되려면 $k = 4$가 되어야 합니다.



이렇게 되겠네요.

이제 $0 \le x < 2\pi$에서 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 모든 해의 합을 구해봅시다. 일단 보이는 그래프는 $x=\frac{7\pi}{8}$축 대칭이에요. $x=\frac{7\pi}{8}$축을 기준으로 점 8개가 왼쪽에 4개, 오른쪽에 4개가 있죠? 이 점들은 $x=\frac{7\pi}{8}$축을 기준으로 각각 왼쪽과 오른쪽에 대응되는 대칭점들이 있습니다. 대칭점들은 $x=\frac{7\pi}{8}$축 대칭이니까 x좌표의 중점이 $x=\frac{7\pi}{8}$이 나와야 하므로, 더하고 2로 나누면 $x=\frac{7\pi}{8}$이 나오게 됩니다. 2를 곱하면 단순 합은 $\frac{7\pi}{8}\times 2=\frac{7\pi}{4}$입니다. 그런데 이런 쌍이 4개가 있으니까 결국 $\frac{7\pi}{4}\times 4=7\pi$이겠네요. 답은 ③번입니다.

2. 정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때,
〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
〔2022년 4월 14〕

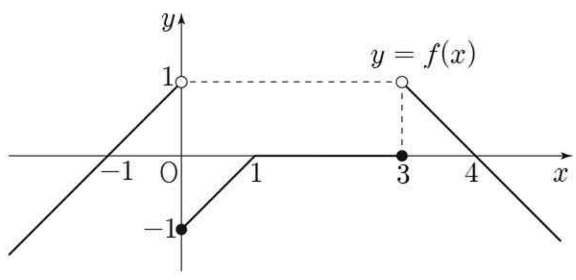
<보 기>

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

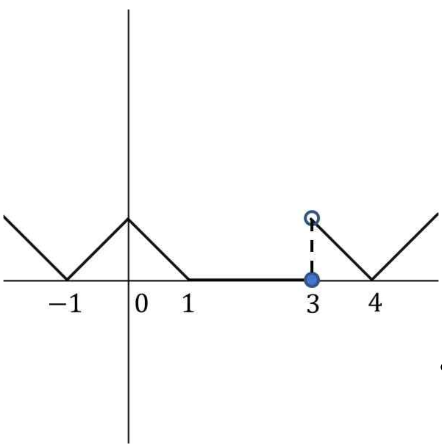


2. 정답 ④ 〔2022년 4월 14〕

1) 정수 보이면 숫자 넣을 준비, 좌극한 우극한

k가 정수이고 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (1 \le x \le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$ 랍니다. 이때 $g(x)=|f(x-k)|$라고 하네요. 이건 $f(x)$를 절댓값을 씌워서 접어 올린 다음 x축의 방향으로 k만큼 움직인 함수네요.

ㄱ에서 $k=-3$일 때 $\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이냐고 물어봅니다. 일단 $g(x)=|f(x+3)|$인데 결국 $\lim_{x\to 0-}|f(x+3)|=|f(3)|$이냐고 물어보는 거죠? 이건 일단 $|f(x)|$부터 알아야겠어요.



이렇게 됩니다. 일단 $\lim_{x\to 0-}|f(x+3)|$을 편의상 $|f(3-)|$라고 표현할게요. $x=3$보다 작은 쪽에서의 함숫값이라는 표현이라고 해두죠. 그럼 지금 그래프를 보면 $x=3$에서의 $|f(x)|$의 함숫값과 $x=3$보다 작은 쪽에서의 함숫값이 같나요? 같네요! ㄱ은 맞습니다.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

ㄴ에서 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재하냐고 묻네요. 일단 $x=0$에서 연속이라는 건 $x=0$에서의 좌극한, 우극한 함숫값이 모두 같아야 한다는 거예요.

그러면 결국 $f(0-)+|f(-k-)|=f(0+)+|f(-k+)|=f(0)+|f(-k)|$이어야 합니다. 그래프에서 함숫값을 확인해서 넣어보면

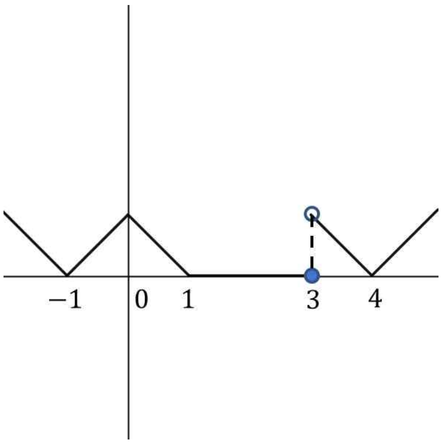
$1+|f(-k-)|$

$-1+|f(-k+)|$

$-1+|f(-k)|$

이 세 개가 모두 같아야 해요.

다시 $|f(x)|$ 그래프로 돌아가봅시다.



$1+|f(-k-)|$

$-1+|f(-k+)|$

$-1+|f(-k)|$

가 모두 같아야 하는데 만약 k가 $k=-3$을 제외한 정수라고 생각을 해볼게요. 그러면 $|f(-k-)|=|f(-k+)|=|f(-k)|$입니다. $|f(x)|$는 $x=3$을 제외하고는 연속이니까요. 그러면 위의 저 세 개의 값이 같아질 수 있을까요? 하나는 1을 더하고 나머지 두 개는 1을 빼는데 같아질 리가 없죠.

그러면 $k=-3$이라고 생각을 해봅시다. 각각 값을 계산하면

$1+|f(3-)|=1$

$-1+|f(3+)|=0$

$-1+|f(3)|=-1$

세 값이 모두 달라지네요. 결국 ㄴ은 옳지 않습니다.

3) 미분가능은 연속 확인 + 미분계수 확인

ㄷ에서 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5라고 합니다. 이젠 곱한 함수까지 나오네요.

미분가능하기 위해서는 연속에 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 합니다. 일단 연속부터 확인해볼게요. 결국 $f(0-)g(0-)=f(0+)g(0+)=f(0)g(0)$이어야 하니까 $|f(-k-)|=-|f(-k+)|=-|f(-k)|$이어야 합니다. $|f(x)|$ 그래프에서 이걸 만족시키려면 $k=1,\ -1,\ -2,\ -4$입니다.

이제 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 해요. $k=1,\ -1,\ -2,\ -4$이라고 했으니까 각각 살펴봅시다.

$k=1$이라면 $x=0$보다 작은 쪽에서 일단 $f(x)=x+1$이고, $g(x)=|f(x-1)|$인데 이건 $|f(x)|$ 그래프를 x축

방향으로 1만큼 평행이동한 함수니까 $x=0$보다 작은 쪽에서 $g(x)=-x$입니다. $f(x)g(x)=-x(x+1)$이네요. 큰 쪽에서는 마찬가지로 해보면 $f(x)=x-1$, $g(x)=x$이므로 $f(x)g(x)=x(x-1)$입니다. 이 둘은 모두 다항함수니까 미분을 해서 도함수를 구한 후 $x=0$에서의 극한값이 같다고 해도 무방하겠죠? 좌미분계수는 $\lim_{x\to 0-}-2x-1=-1$이고, 우미분계수는 $\lim_{x\to 0+}2x-1=-1$입니다. 같네요! 미분가능합니다.

$k=-1$일 때를 볼게요. $x=0$보다 작은 쪽에서 $f(x)=x+1$이고, $g(x)=|f(x+1)|$인데 이건 $|f(x)|$ 그래프를 x축 방향으로 -1만큼 평행이동한 함수니까 $x=0$보다 작은 쪽에서 $g(x)=-x$입니다. $f(x)g(x)=-x(x+1)$이네요. 큰 쪽에서는 마찬가지로 해보면 $f(x)=x-1$, $g(x)=0$이므로 $f(x)g(x)=0$입니다. 좌미분계수는 $\lim_{x\to 0-}-2x-1=-1$이고, 우미분계수는 $\lim_{x\to 0+}0=0$입니다. 다르네요. 미분불가능합니다.

$k=-2$일 때는 $x=0$보다 작은 쪽에서 $f(x)=x+1$이고, $g(x)=|f(x+2)|$인데 $|f(x)|$ 그래프를 x축 방향으로 -2만큼 평행이동한 함수니까 $x=0$보다 작은 쪽에서 $g(x)=0$입니다. $f(x)g(x)=0$이네요. 큰 쪽에서는 마찬가지로 해보면 $f(x)=x-1$, $g(x)=0$이므로 $f(x)g(x)=0$입니다. 이건 뭐 왼쪽 오른쪽 둘다 0이니까 미분가능하네요.

$k=-4$일 때는 $x=0$보다 작은 쪽에서 $f(x)=x+1$이고, $g(x)=|f(x+4)|$인데 $|f(x)|$ 그래프를 x축 방향으로 -4만큼 평행이동한 함수니까 $x=0$보다 작은 쪽에서 $g(x)=-x$입니다. $f(x)g(x)=-x(x+1)$이네요. 큰 쪽에서는 마찬가지로 해보면 $f(x)=x-1$, $g(x)=x$이므로 $f(x)g(x)=x(x-1)$입니다. 이거 아까 $k=1$일 때랑 똑같지 않나요? 미분가능하네요.

가능한 k는 $k=1$, -2, -4이고 합은 -5이네요. ㄷ은 맞습니다. 따라서 옳은 건 ㄱ, ㄷ이고 답은 ④번입니다.

3. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.
양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$,
$(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가
곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는
$t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2 \times f(4)$의 값을 구하시오.
(단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.) 〔2022년 4월 20〕

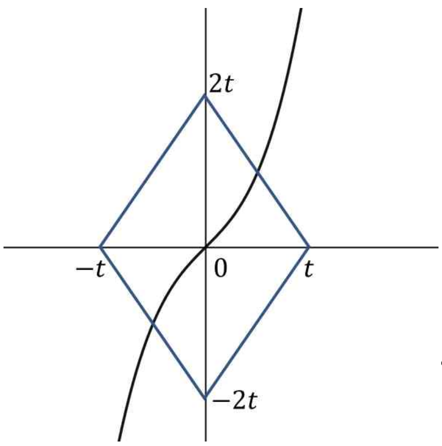
3. 정답 240 〔2022년 4월 20〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

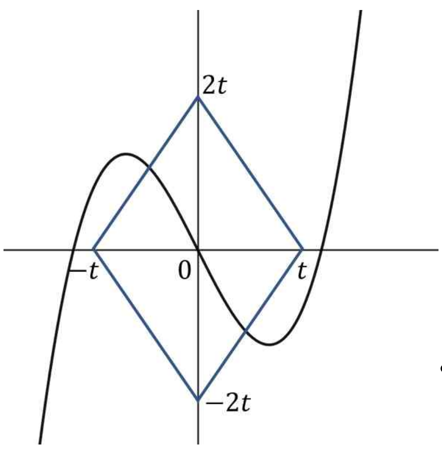
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다네요. x에서의 함숫값과 정확히 반대에 있는 $-x$에서의 함숫값은 서로 부호도 반대라는 거죠? $f(-x)+f(x)=0$이고 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}=0$로 x에서의 함숫값과 $-x$에서의 함숫값의 중점은 0이 된다는 거로도 표현할 수 있어요. 원점 (0, 0) 대칭이라는 의미입니다. 기함수라고도 부르죠.

기함수라는 건 홀수차항만 존재해야 하잖아요? 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 홀수차항만 존재한다면 $f(x)=x^3+ax$로 둘 수 있습니다.

이때 $t>0$인데 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라고 한답니다. 이거 그래프에 그려서 해석해볼게요.
일단 $f(x)$의 개형은 두 가지입니다.



일단 이 개형이 가능해요. 아까 $g(t)$는 마름모와 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수라고 했었죠? 그림에서는 2점에서 만나니까 $g(t)=2$이네요.



이런 개형도 가능해요. 지금 그래프에서도 2개의 점에서 만나니까

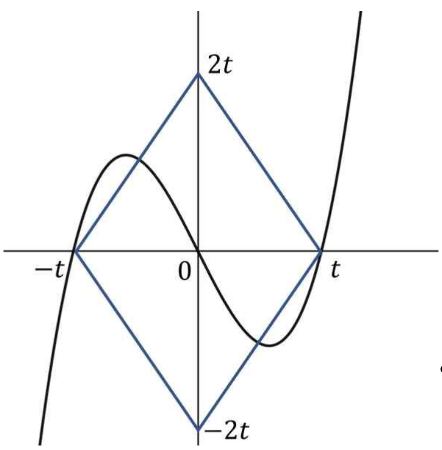
$g(t)=2$입니다. $g(t)$의 해석은 대충 끝난 것 같아요.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

그런데 $g(t)$가 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이라고 하네요. $0<\alpha<8$이구요. $g(t)$는 마름모가 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수인데 이 함수가 불연속이라는 건 t가 변함에 따라 만나는 점의 개수에도 변동이 있다는 말이겠죠? 계속 k개의 점에서만 만난다면 그건 연속이잖아요.

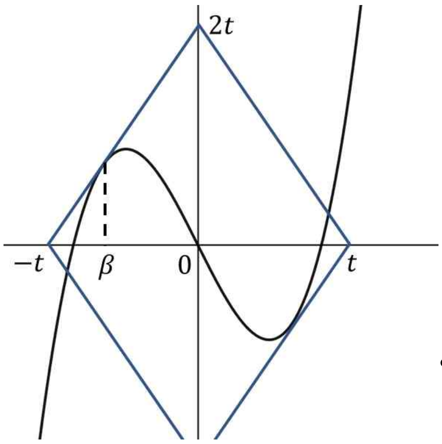
우리 처음 살펴봤던 개형을 보면 t를 증가시켜도 계속 2개의 점에서 만나는 걸 알 수 있어요. 따라서 두 번째 개형으로 가야 합니다.

생각을 해볼게요. 어떻게 되어야 $g(t)$, 즉 마름모와 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수가 변할까요? 일단 t가 작을 때는 $g(t)=2$입니다. 그래프로도 살펴봤었죠. 이제 t를 증가시켜볼게요.

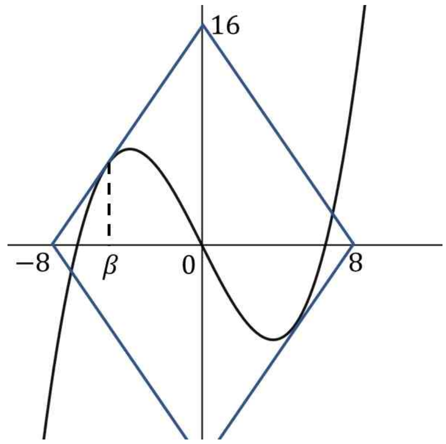


여기서 처음으로 개수가 변합니다. 4개가 되죠? 따라서 이 지점에서의 t의 좌표가 α가 됩니다. $f(x)$의 함숫값은 0이 되니까 $f(\alpha)=f(-\alpha)=0$이 되네요. 이미 $f(0)=0$인 것까지 고려하면 인수정리에 의하여 $f(x)$는 x, $(x-\alpha)$, $(x+\alpha)$라는 인수를 각각 적어도 하나씩 가져야 하고, $f(x)=x(x-\alpha)(x+\alpha)=x^3-\alpha^2 x$입니다.

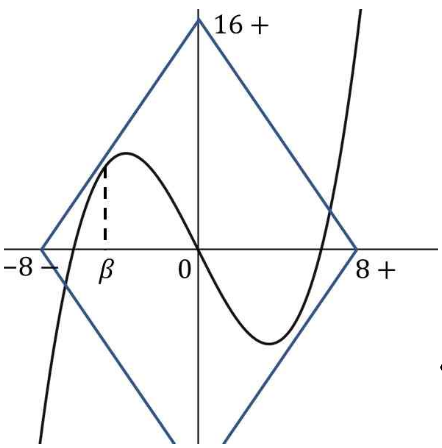
계속 증가시켜보죠. 다음으로 개수가 변하는 지점은



여기네요. 이때 $t=8$이므로



이렇게 됩니다. 정확히 접할 때는 $g(t)=4$로 개수가 변하지 않지만 t가 살짝 커진다면?



이렇게 2개의 점에서 만나게 되죠. 이러면 $g(t)=2$로 개수가 변하니까

불연속이 됩니다. 이러면 결국 $f(x)=x^3-\alpha^2x$가 $y=2x+16$과 $x=\beta$에서 접하는 걸로 파악하면 되겠군요.

일단 함숫값이 같아야 하니까 $\beta^3-\alpha^2\beta=2\beta+16$입니다. 그리고 $x=\beta$에서 접선의 기울기가 2여야 하니까 $3\beta^2-\alpha^2=2$입니다. $\alpha^2=3\beta^2-2$를 $\beta^3-\alpha^2\beta=2\beta+16$에 넣으면 $\beta^3=-8$이고 $\beta=-2$입니다.
$\alpha^2=10$이네요.

이제 $\alpha^2\times f(4)$를 구해볼게요. 일단 $\alpha^2=10$라는 건 알구요. $f(x)=x^3-\alpha^2x$이므로
$f(4)=64-4\alpha^2=24$입니다. 곱하면 240이네요.

4. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오.
〔2022년 4월 21〕

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.
(나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\displaystyle\sum_{k=m}^{2m} \lvert a_k \rvert = 128$인 자연수 m이 존재한다.

4. 정답 170 〔2022년 4월 21〕

1) 등차수열 a_n은 $a+(n-1)d$로 놓기, 조건해석

일단 등차수열 $\{a_n\}$이 공차가 자연수 d이고, 모든 항이 정수라고 합니다. 그럼 첫 항도 정수여야겠네요. 그래야 정수끼리 더했을 때 정수가 나오죠. 일단 $a_n = a+(n-1)d$라고 놓고 a는 정수, d는 자연수라고 해놓을게요. 또한 공차가 자연수니까 $\{a_n\}$은 증가하는 수열이라는 걸 알 수 있네요.

(가)조건에서 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니라고 합니다.

(나)조건에서 $a_{2m} = -a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$인 자연수 m이 존재한다네요. 일단 생각을 좀 해볼게요.

$a_{2m} = -a_m$이라는 건 a_{2m}과 a_m의 부호가 반대라는 거잖아요? 그런데 a_{2m}의 값은 a_m보다 무조건 커야 해요. 공차가 자연수니까 $\{a_n\}$은 증가하는 수열이거든요. $\{a_n\}$의 모든 항은 0이 아니니까 a_m은 음수이고 a_{2m}은 양수입니다.

그런데 또 여기서 생각해봐야 하는 건 m이 만약 짝수라면? $a_{2m}+a_m = 0$이기 때문에

$$\frac{a_{2m}+a_m}{2} = \frac{a+(2m-1)d+a+(m-1)d}{2} = \frac{2a+(3m-2)d}{2} = \frac{2\left(a+\left(\frac{3}{2}m-1\right)d\right)}{2} = \frac{2a_{\frac{3}{2}m}}{2} = a_{\frac{3}{2}m} = 0\text{이}$$

됩니다. m은 짝수니까 $2\times b$ (b는 자연수)의 형태로 표현할 수 있으니까 $a_{\frac{3}{2}m} = a_{3b} = 0$의 형태로 표현할 수 있죠? 아까 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니라면서요? m은 무조건 홀수여야 합니다. $m = 2b-1$ (b는 자연수)로 표현할 수 있겠네요.

2) 시그마 펼치기

그리고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$라고 했었죠? $a_{2m} = -a_m$와 연결지어서 생각해봅시다. 왜 하필 m과 $2m$항을 줬을까요? 그리고 왜 하필 m부터 $2m$까지의 합을 줬을까요? 절댓값까지 씌워서 말이죠.

아까 우리가 알아낸 건 a_m은 음수이고 a_{2m}은 양수라는 것, 서로 부호만 다른 값이라는 것, m은 홀수라는 거예요. 일단 $m = 2b-1$을 다 넣어보면 a_m과 a_{2m}은 a_{2b-1}, a_{4b-2}로 표현할 수 있어요. 그리고 $\sum_{k=2b-1}^{4b-2} |a_k| = 128$이구요. 이거 시그마를 펼쳐보면 $|a_{2b-1}| + |a_{2b}| + \cdots + |a_{4b-3}| + |a_{4b-2}| = 128$이 됩니다.

여기서 우리는 $|a_{2b-1}|$과 $|a_{4b-2}|$가 같은 값이라는 걸 알 수 있어요. 아까 a_m과 a_{2m}은 서로 부호만 다른 값이라고 했었잖아요. 그러면 절댓값 씌우면 같아지죠. 그런데 $|a_{2b-1}|$의 다음 항인 $|a_{2b}|$와 $|a_{4b-2}|$의 전 항인 $|a_{4b-3}|$ 역시 값이 같습니다. $|a_{2b}|$은 음수인 a_{2b-1}에 공차 d를 더하고 값이 커진 상태에서 절댓값을 씌운 값이고, $|a_{4b-3}|$은 양수인 a_{4b-2}에 공차 d를 빼고 값이 작아진 상태에서 절댓값을 씌웠잖아요. a_{2b-1}와 a_{4b-2}의 부호가 반대라는 걸 생각해보면 a_{2b}와 a_{4b-3}의 부호 역시 반대가 되어야죠.

수식으로 확인해볼게요. $|a_{2b}|=|a+(2b-1)d|$이고, $|a_{4b-3}|=|a+(4b-4)d|$인데 $a_{4b-2}+a_{2b-1}=0$이므로 $a_{4b-2}-d+a_{2b-1}+d=a_{4b-3}+a_{2b}=0$가 됩니다. d를 빼고 더해도 어차피 0이니까 등식에는 영향이 없죠? a_{4b-2}에 d를 빼면 전 항인 a_{4b-3}이 나오고, a_{2b-1}에 d를 더하면 다음 항인 a_{2b}가 됩니다. 따라서 이 둘의 부호가 반대이므로 절댓값을 씌우면 값이 같아지네요.

그런데 마찬가지의 논리로 a_{2b}의 다음 항인 a_{2b+1}과 a_{4b-3}의 전 항인 a_{4b-4} 역시 절댓값 씌우면 값이 같아지는 거 아닌가요? d를 빼고 더하면 $a_{4b-3}-d+a_{2b}+d=a_{4b-4}+a_{2b+1}=0$이잖아요. 부호가 반대니까 절댓값 씌우면 값이 같아지죠. 이렇게 쭈욱 $|a_{2b-1}|+|a_{2b}|+\ \cdots\ +|a_{4b-3}|+|a_{4b-2}|=128$의 양쪽의 대응되는 값이 같아집니다.

언제까지일까요? $2b-1$과 $4b-2$의 평균은 $3b-\frac{3}{2}$입니다. 그런데 이런 자연수는 존재하지 않죠. 따라서 $3b-\frac{3}{2}$과 가장 가까운 자연수인 $3b-1$과 $3b-2$가 대응되는 값입니다. $a_{3b-2}+a_{3b-1}=0$이므로 a_{3b-2}이 가장 마지막 음수가 되는 거고, a_{3b-1}이 첫 번째 양수가 되는 거죠.

결국 $|a_{2b-1}|+|a_{2b}|+\ \cdots\ +|a_{4b-3}|+|a_{4b-2}|=128$를 정리해보면 $(|a_{2b-1}|+|a_{4b-2}|)+(|a_{2b}|+|a_{4b-3}|)+\cdots+(|a_{3b-2}|+|a_{3b-1}|)=128$이 됩니다. 괄호 안의 값은 같은 값이니까 결국 구하는 값은 $2\times(|a_{3b-1}|+|a_{3b}|+\cdots\ |a_{4b-2}|)=128$입니다. 그런데 a_{3b-1}은 첫 번째 양수이고, 그 이후로 자연수를 계속 더하는 거니까 계속 양수죠? 따라서 $a_{3b-1}+a_{3b}+\cdots+a_{4b-2}=64$입니다.

등차수열의 합을 구해볼게요.

$\frac{(a_{3b-1}+a_{4b-2})}{2}\times b=\frac{(a+(3b-2)d+a+(4b-3)d)}{2}\times b=\frac{b(2a+(7b-5)d)}{2}=64$입니다. 이때 $a_{3b-2}+a_{3b-1}=a+(3b-3)d+a+(3b-2)d=2a+(6b-5)d=0$이므로 $\frac{b(2a+(7b-5)d)}{2}=\frac{b^2d}{2}=64$이고

$b^2d=128$입니다.

3) 자연수 보이면 숫자 넣기

b랑 d모두 자연수이죠? $b^2d=128$가 되는 조합을 찾아봅시다.

$(b^2=1,\ d=128)$, $(b^2=4,\ d=32)$, $(b^2=16,\ d=8)$, $(b^2=64,\ d=2)$가 가능하네요. 모든 d의 합은 $128+32+8+2=170$입니다.

5. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오. 〔2022년 4월 22〕

5. 정답 30 〔2022년 4월 22〕

1) 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

$a>0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $g(x)=\displaystyle\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$랍니다. 일단 정적분의 위끝에 변수가 있네요. 먼저 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$을 넣으면 $g(0)=0$입니다. 이후 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$이네요. $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수였으니까 그걸 미분한 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이죠? 그거 두 개를 곱했으니까 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 9인 사차함수입니다.

이때 $g(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다고 합니다. 일단 극값을 갖는다라는 건 뭐죠? 그 부분에서 도함수의 부호가 바뀌어야 해요. $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=g'\left(\dfrac{13}{2}\right)=0$입니다.

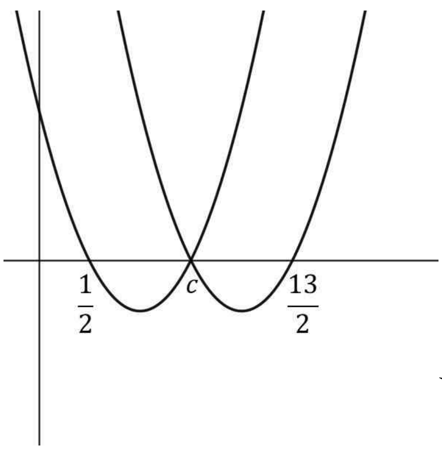
아까 살펴봤듯이 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 9인 사차함수입니다. $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=g'\left(\dfrac{13}{2}\right)=0$이구요. 여기서 $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다고 했으니까 다른 부분에서는 아예 x축과 만나지 않거나, 아니면 만나더라도 x축에 접해야 합니다. 그러면 도함수의 부호가 바뀌지 않죠. 부드럽게 접어 올라갈 테니까요. 결국 정리하면 $g'(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$에서는 더 이상 인수를 가지지 않아야 하고, 다른 부분에서는 아예 인수를 가지지 않거나 인수를 가지더라도 두 개를 가져야 합니다.

그런데 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$입니다. $f'(x+a)$와 $f'(x-a)$는 전부 $f'(x)$를 x축 방향으로 평행이동한 함수이죠. x축 방향 평행이동의 특징은 x좌표의 위치만 변화할 뿐 함수의 형태는 건드리지 않는다는 거예요. $f'(x)$가 x축과 아예 만나지 않는다면 평행이동을 하더라도 여전히 x축과 만나지 않습니다. 그러면 $g'(x)$의 인수가 존재할 리가 없겠죠?

만약 $f'(x)$가 x축에 접한다면 $f'(x)$는 같은 인수를 두 개 가집니다. 예를 들어 $f'(x)=3(x-b)^2$라고 해보면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)=3(x-b+a)^2\times 3(x-b-a)^2$이죠? 이때 $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=g'\left(\dfrac{13}{2}\right)=0$이므로 무조건 $g'(x)=9\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\left(x-\dfrac{13}{2}\right)^2$가 됩니다. 그런데 이러면 극값이라는 게 없죠. $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$ 둘 다 x축에 접어 올라가니까 부호가 바뀌지 않잖아요.

결국 $f'(x)$는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 합니다. 그런데 생각을 해볼게요. 만약 $f'(x+a)$와 $f'(x-a)$가 모두 서로 다른 인수를 가진다면? 둘을 곱한 $g'(x)$가 $g'(x)=9(x-q)(x-w)(x-e)(x-r)$ 뭐 이런 식으로 되었다고 하면 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 가질 수가 없죠. 극값을 갖는 부분이 4개가 생기는데요?

아까 $g'(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서는 더 이상 인수를 가지지 않아야 하고, 다른 부분에서는 아예 인수를 가지지 않거나 인수를 가지더라도 두 개를 가져야 한다고 했었죠. 그럼 만약 $f'(x+a)$와 $f'(x-a)$가 겹치는 인수를 가지고 있다면? 예를 들어 $(x-c)$를 가지고 있다면 $g'(x)=9\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{13}{2}\right)(x-c)^2$가 되면서 $x=c$에서는 부드럽게 접하면서 올라가니까 부호가 바뀌지 않게 돼요. 정확히 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 가지게 되는 거죠.



요런 느낌입니다.

그럼 일단 $f'(x+a)$는 $f'(x)$를 x축 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 건데 $a>0$이니까 무조건 왼쪽으로 가야 하죠? 그럼 왼쪽에 있는 함수가 $f'(x+a)$이고 오른쪽에 있는 함수가 $f'(x-a)$이네요.

$f'(x+a)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-c)$, $f'(x-a)=3\left(x-\frac{13}{2}\right)(x-c)$입니다.

지금 $f'(x-a)$은 $f'(x+a)$를 x축 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것으로 볼 수도 있잖아요? $f'(x+a)$의 x자리에 $x-2a$를 넣으면 $f'(x-a)=3\left(x-2a-\frac{1}{2}\right)(x-2a-c)$입니다. 이때 $x=\frac{1}{2}+2a$는 $x=c$와 대응되고, $x=2a+c$는 $x=\frac{13}{2}$와 대응이 됩니다. 그대로 오른쪽으로 옮겨 온 거니까요. 따라서 $\frac{1}{2}+2a=c$이고 $2a+c=\frac{13}{2}$입니다. 연립하면 $a=\frac{3}{2}$, $c=\frac{7}{2}$이네요. $f'\left(x-\frac{3}{2}\right)=3\left(x-\frac{13}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)$이므로

x 자리에 $x+\dfrac{3}{2}$를 넣으면 $f'(x)=3(x-5)(x-2)=3x^2-21x+30$입니다.

이제 $a\times f(1)$를 구해야 하죠? 일단 $a=\dfrac{3}{2}$라는 건 알구요. $f(0)=-\dfrac{1}{2}$이니까 $f'(x)=3x^2-21x+30$를 적분해서 $f(x)$ 구한 다음 $x=1$ 넣으면 되겠네요. $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x+C$인데 $f(0)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $C=-\dfrac{1}{2}$이고 $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x-\dfrac{1}{2}$입니다. $f(1)=20$이네요. $a\times f(1)=30$입니다.