[니네가 만든 모의고사]

| 한성은 & 5A수학학원 |

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

5A수학학원 학생들이 출제, 제가 수정/검수한 문항들입니다.
문항마다 번호(난이도)를 포함한 코멘트를 달았습니다.
문항에서 이용된 공부할만한 소재에 밑줄을 쳐 놨어요.

한동훈 (KAIST)

5A ACADEMY

5A수학학원 클리닉 선생님입니다.
동훈쌤이 고등학생일 때 제가 가르쳤어요.
그 때는 똑똑했는데.

출제 학생 명단입니다.
[백석고 곽재호], [운정고 권도은], [안곡고 김승래], [저현고 김정현], [백신고 김한수],
[백석고 박유찬], [백석고 서지호], [화수고 신준], [백마고 이지민] [백석고 임찬영],
[백신고 최민서], [상산고 최세영]
1번~4번은 수학1, 5번~8번은 수학2, 9번~10번은 확통, 11번~14번은 미적분입니다.

CCL

[백석고 박유찬]

1. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=2n-1$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10} a_k=325$일 때, a_1의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[한성은의 점수]

쉬운 4점, 9번~10번. 지금은 교과서에 없는
계차수열, 점화식 풀이
가 강하게 들어와서 아쉽지만 한 번쯤 다뤄볼만.

[백마고 이지민]

2. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이

$$\sum_{k=1}^{2m} a_k=0,\quad \sum_{k=1}^{2m} |a_k|=392$$

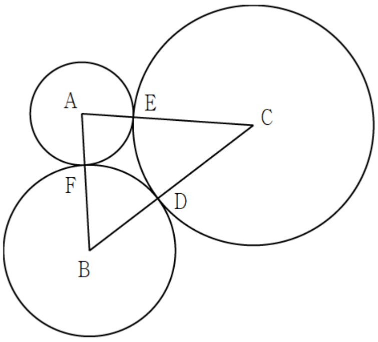
를 만족시킬 때, a_{2m}의 최솟값을 구하여라.

[한성은의 점수]

11번~13번. 깔끔한 등차수열의 합 문항.
약수 종류로 케이스 분류해야 하는 기출 문항은
[2022학년도 9월 13번]이 있다.

[진산과고 한동훈]

3. 그림과 같이 어느 두 원도 서로 외접하는 세 원의 중심을 각각 A, B, C라 하고 세 원과 선분 BC, CA, AB의 교점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=12$, $\overline{CA}=10$일 때, $\overline{EF}$의 값은?



① $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}}{2}$
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

[한성은의 점수]

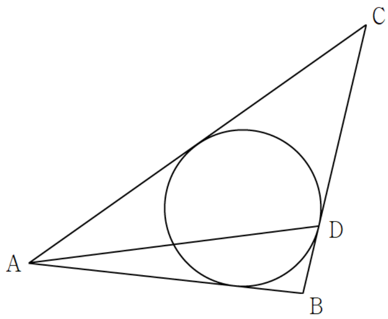
쉬운 4점, 9번~10번. 세 원의 반지름의 길이를 구하지 못하거나 코사인법칙이 떠오르지 않으면 수능 점수의 큰 위기이다.

[운정고 권도은]

4. 삼각형 ABC에 내접하는 원과 선분 BC의 교점을 D라 하자.

$$\overline{AB}=4,\quad \overline{AC}=6,\quad \overline{AD}=3\sqrt{2}$$

일 때, $\overline{BD}$의 값은? (단, $\overline{BC}>3$이다.)



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1
④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[한성은의 점수]

11번~13번. 좋은 문제. 밖으로 돌리는 것도 봐둘 만 하고, 코사인법칙을 때리면 삼차식이 나오는 것이 묘하게 어색(신선)해서 재미있었다.
* 원본은 풀다 뒤지라는 수준으로 복잡했다. 풀이 과정을 1/3 정도로 줄인 것이다.

[백신고 김한수]

5. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to u} \frac{x-u}{\int_{u}^{x} |f'(t)|dt}$$

의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 u의 값이 α, $\beta(\alpha<\beta)$ 뿐이고 $f(\beta)-f(\alpha)=\frac{4}{3}$이다. $f'(0)=-9$일 때, $f'(6)$의 값을 구하여라.

[한성은의 점수]

13번. 정적분으로 정의된 함수의 미분을 이용하여 $f'(u)=0$을 어렵게 적어놨다. $f(\beta)-f(\alpha)$의 값에서 $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있어야 한다. $f(x)$에서 비율관계 쳐도 좋고, $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이로 봐도 좋다.
* 문항이 $f(x)$가 아니라 $f'(x)$에서 만들어졌다.

[저현고 김정현]

6. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|$와 집합

$S=\{x|g(x)=t\}$

의 원소의 개수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to a+} g'(x) \times \lim_{x \to a-} g'(x) \le 0$이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 14이다. (나) 함수 $h(t)$가 $t=0$과 $t=8$에서만 불연속이다.

$h(9)+1<h(0)$일 때, $f(6)$의 값을 구하여라.

[한성은의 점수]

어려운 13번 또는 아주 쉬운 22번. 근의 개수로 그래프 개형 찾는 문항이야 많이 봐 왔을 것이고, (가)에서 좌/우미분계수(같은 것) 관련된 조건 읽는 것도 연습해 둘 만 하다. y값 차이를 x값 차이로 돌리려면 인수를 이용한 식의 구성이 필요하다.

[상산고 최세영]

7. 양수 a와 함수 $f(x)$가 $x \le a$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^2(a-x), \quad f(x)+f(2a-x)=0$$

를 만족시킨다. 모든 자연수 n에서 $a_n < a_{n+1}$인 수열 $\{a_n\}$과 함수 $g(x)=\int_b^x |f'(t)|dt$에 대하여 함수

$$h(x)=\sum_{k=1}^{4}|g(x)-a_k|$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $a_1=-4$이고 $a_3=8$일 때, $ab \times a_4$의 값을 구하여라.

[한성은의 점수]

13번 또는 20번. 대칭성을 나타낸 식임을 알고 있어야 하고, $g(x)$에서
정적분으로 정의된 함수,
x축 결정, $|f'(x)|$의 적분
의 세 가지 요소가 모두 공부할 만 하다. 그 외에 a_k가 될 수 있는 값이 4개 뿐인 것을 잡아내야 한다. 짜맞추는 재미가 있는 문항.

[백석고 곽재호]

8. $f'(x)=0$의 세 실근이 등차수열 이루고 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$와 양수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f'(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. (나) $\lim_{x \to 2} \frac{f'(x)f(x-k)}{(x-2)^3}$의 값이 존재한다.

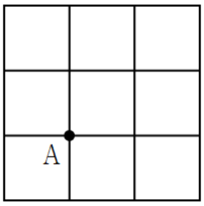
$f(k)$의 값을 구하여라.

[한성은의 점수]

약간 쉬운 22번. 핵심이 되는 출제 요소는 (특이한) 사차함수의 개형을 깔고 합성함수가 포함된 방정식의 근의 개수. n축이 쓰임직 하다.
(나)에서, $f(x)=0$와 $f'(x)=0$이 모두 삼중근이 나올 수 없음에서부터 풀어나가야 한다.

[백석고 임찬영]

9. 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1km인 바둑판 모양의 도로망이 있다. A지점에서 출발하여 이 도로망을 따라 6km를 이동하여 다시 A지점으로 돌아오는 경우의 수를 구하여라. (단, 이동방향은 교차로에서만 바꿀 수 있으며, 한 번 지난 도로를 다시 지날 수 있다.)



[한성은의 점수]

28번~29번. 조건이 꽤 재미있다. 풀이에 따라 다르겠지만 해설 기준으로 하면, 여사건 발라내는 것도 공부가 되고 (일부가) 같은 것이 있는 순열로 처리되는 것도 재미있다.

[백석고 서지호]

10. A, B, C, D, E를 포함한 10명을 5명씩 2개의 조를 만들고 각 조의 대표를 1명씩 정할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하여라.

(가) A와 D는 같은 조에 편성된다. (나) 각 조의 대표는 모두 A, B, C, D, E 중에서 뽑는다.

[한성은의 점수]

27번. 조 편성은 분할/분배라 직접 출제범위는 아니다. 해야 되는 것은 알고 있지? 이런 문제는 항상 그렇듯, 기준 잡는 방법에 따라 난이도가 달라진다. 당장 출제자도 좀 어렵게 풀었더라구.

[안곡고 김승래]

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$$g(4)=0, \quad g'(4)=\frac{2}{3}, \quad \int_0^4 g(x)dx=-\frac{5}{2}$$

를 만족시킨다. $f(4)$의 값을 구하여라.

[한성은의 점수]

26번~27번. 기울기는 역함수의 미분법으로 처리하는 것이 어렵지 않았을 듯. 넓이를 돌려 그려놓고 보면, x절편 설정이 필요하고, 두 식을 연립하여 계산하는 과정이 꽤 괴롭다. 재미있기도 하고.

[백신고 최민서]

12. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le n$일 때 $f_n(x)=\sin\pi x$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f_n(x)=f_n(x+n)$이다.

x에 대한 방정식 $\int_0^x f_n(t)dt=\frac{4}{\pi}$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}g(k)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

[한성은의 점수]

어려운 27번, 쉬운 28번. $f_n(x)$와 $\int_0^x f_n(t)dt$를 그리고 $g(n)$을 구할 때, 홀짝 케이스 분류가 필요했다. 여기까지가 재미있었음. $\sum_{k=1}^{n}g(k)$은 케이스별로 계산해야 해서 좀 귀찮아.

[저현고 김정현]

13. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 자연수 n에 대하여

$$g(x)=\int_0^x |f'(t)|dt, \quad h(n)=\int_0^n g(2t)dt$$

이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}h(k)}{n^a}=b \ (b\neq 0)$$

일 때, ab의 값은?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$
④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

[한성은의 점수]

쉽게 출제된 28번.

$\underline{\int_0^x |f'(t)|dt}$나 $\underline{\int_0^n g(2t)dt}$

는 다뤄볼 만 하다. $|f'(x)|$를 적분하는 것은 자주 보이는 소재고, $g(2x)$의 적분은 헷갈리기 좋다. 아주 특별한 것은 없지만 함수가 3중으로 정의되어 있고 시그마까지 시키고 있으니 답까지 가려면 기본기가 좀 필요하다.

[화수고 신준]

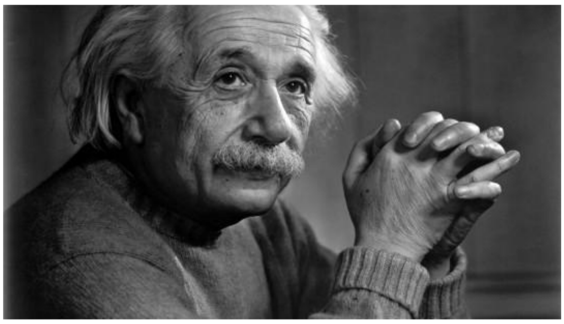
14. 함수 $f(x)=(x^2-3x)e^{-x}$와 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$가

$$h(x)=|f(|g(x)|)|$$

이다. 방정식 $h(x)=0$의 모든 실근이 a, 0, 3, b, c이고 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 모든 k의 값이 a, b, c일 때, $|g(6)|$의 값을 구하여라.
(단, $a<0<3<b<c$)

[한성은의 점수]

유치하게 출제된 30번. 소재를 분류하면
<u>합성함수의 개형</u>과 <u>미분가능성</u>
이다. 미분가능성은 대충 [거길 지나가면 꺾인다.] 정도로 처리될 것이고, n축 등 합성함수 문항을 좀 다뤄봤으면 무난했을 듯.



저는 천재가 아닙니다.

그저 ____________ 입니다.

니들이 별거아닐 뿐

[2023 니네가 만든 모의고사 정답표]

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	27	03	③	04	③	05	45
06	136	07	72	08	18	09	326	10	300
11	50	12	②	13	④	14	48		

COMMENT 01

축차대입 돌리면

$$a_n = a_1 + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) = a_1 + (n-1)^2$$

이고

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10a_1 + \sum_{k=1}^{9} k^2 = 10a_1 + 285$$

이다.

* 약간 점화식, 계차수열의 요소가 있지만 대충 풀자.

COMMENT 02

$a_m + a_{m+1} = 0$이므로

$$\sum_{k=1}^{2m} |a_k| = -2\sum_{k=1}^{m} a_k = 2\times\left(\frac{1}{2}d + \frac{3}{2}d + \frac{5}{2}d + \cdots + \frac{2m-1}{2}d\right) = m^2 d$$

이다. $m^2 d = 392 = 2^3 \times 7^2$에서 m의 값은 1, 2, 7, 14가 가능하다.

대응되는 a_{2m}의 값은 각각 196, 147, 56, 27이다.

COMMENT 03

세 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3라 하면 $2(r_1 + r_2 + r_3) = 30$이므로 $r_1 = 3$, $r_2 = 5$, $r_3 = 7$이다.

삼각형 ABC에서 $\cos(\angle\mathrm{CAB}) = \frac{1}{8}$이므로 $\overline{\mathrm{EF}} = \sqrt{3^2 + 3^2 - 2\times3\times3\times\frac{1}{8}}$ 이다.

COMMENT 04

원과 선분 CA의 교점을 E, 원과 선분 AB의 교점을 F라 하자.

$\overline{\mathrm{BD}} = a$라 하면, $\overline{\mathrm{BF}} = a$, $\overline{\mathrm{AF}} = 4-a$, $\overline{\mathrm{AE}} = 4-a$, $\overline{\mathrm{CE}} = a+2$, $\overline{\mathrm{CD}} = a+2$이다.

$$\cos(\angle\mathrm{ADB}) = \frac{(3\sqrt{2})^2 + a^2 - 4^2}{2\times3\sqrt{2}\times a} = -\frac{(3\sqrt{2})^2 + (a+2)^2 - 6^2}{2\times3\sqrt{2}\times(a+2)}$$

에서 $a^3 + 3a^2 - 6a + 2 = 0$이므로 $a = 1$이다.

* 방정식 $a^3 + 3a^2 - 6a + 2 = 0$의 근 $-2 + \sqrt{6}$는 $\overline{\mathrm{BC}} > 3$를 만족시키지 않는다.

COMMENT 05

$g(x) = \int_u^x |f'(t)|dt$라 할 때, $\lim_{x\to u}\frac{x-u}{\int_u^x |f'(t)|dt}$는 $g'(u) = |f'(u)| \neq 0$이면 $\frac{1}{g'(u)}$이다.

이 값이 존재하지 않을 때는 $|f'(u)| = 0$일 때다. $f'(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 곡선 $y = f'(x)$는 x축과 두 점에서 만난다. 곡선 $y = f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 = \frac{4}{3}$이므로 $\beta - \alpha = 2$이다. $f'(0) = -9$을 얻으면 $f'(x) = (x-1)(x-3)^2$이다.

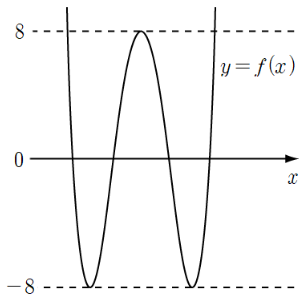
COMMENT 06

함수 $f(x)$는 극값으로 -8 또는 0 또는 8을 가질 수 있다.

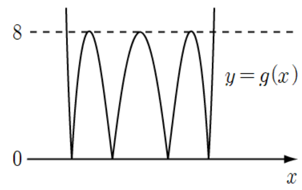
대충 $h(9)=2$인 각이므로 $3<h(0)$에서 $h(0)=4$이다. $f(x)$는 두 극소점의 함숫값이 모두 -8, 극댓값이 8이다.

$\lim_{x\to a+} g'(x) \times \lim_{x\to a-} g'(x) \le 0$는 $g(x)$가 $x=a$에서 첨점 또는 극점일 때이므로 a는 7개이고 $f(x)$가 극대인 x값(평균)은 2이다.

[그림1]과 [그림2] 참고. 대충 $k(x)=(x-a)^2(x+a)^2$에서 $k(0)=a^4$이므로 $f(x)=x^2(x-4)^2-8$인 각이다.



[그림1]



[그림2]

COMMENT 07

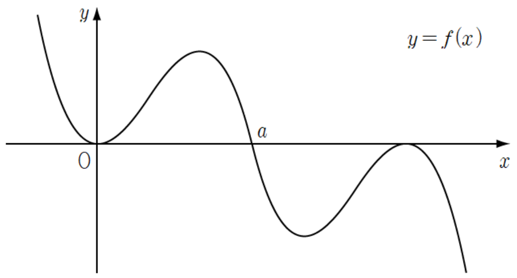
[그림1]은 $y=f(x)$의 그래프, [그림2]는 $y=g(x)$의 그래프이다.

함수 $h(x)$가 미분가능하려면 네 함수 $|g(x)-a_1|$, $|g(x)-a_2|$, $|g(x)-a_3|$, $|g(x)-a_4|$가 모두 미분가능해야 한다.

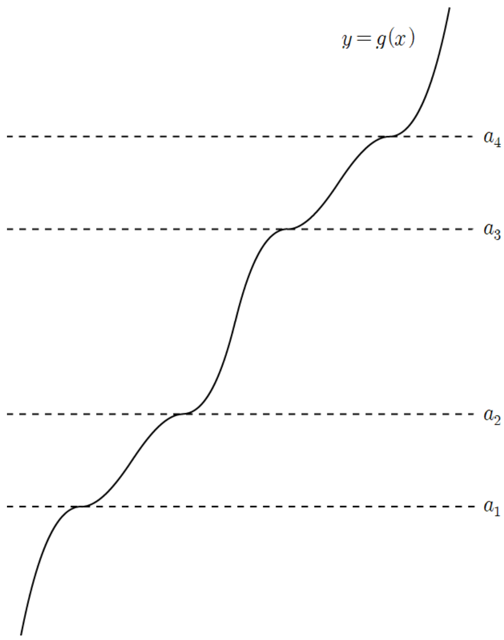
네 수 a_1, a_2, a_3, a_4는 모두 $g(x)$의 $g'(x)=0$일 때의 함숫값이다.

$a_3-a_1=12$에서 $f(x)$의 $x \le a$인 부분의 극댓값과 극솟값의 차이가 4이므로 $a=3$이다.

$a_2=0$이므로 $b=2$, $a_4=a_3+4=12$이다.



[그림1]



[그림2]

COMMENT 08

$f'(x)=0$의 세 근을 a, b, c라 하자. (단, $a<b<c$)

$f'(f(x))=0$의 근이 5개 $f(x)$의 두 극소점의 함숫값이 b, 극댓값이 c이다.

방정식 $f'(x)=0$은 중근을 가지지 않고 $f(x)=0$은 삼중근 또는 사중근을 가지지 않는다.

따라서 $f'(2)=0$인데, $a=2$ 또는 $b=2$이면 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않으므로 $c=2$이다.

방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지므로 $b=0$, $f(x)=\frac{1}{8}(x-2)^2(x+2)^2$이다.

또, 방정식 $f(x)=0$이 중근 $2-k$를 가지므로 $k=4$이다.

COMMENT 확률과 통계 09

Case1) ↑↑↑↓↓↓를 나열하는 경우의 수 : 13

전체 경우의 수 $\frac{6!}{3!3!}$에서 ↑↑↑↓↓↓, ↓↓로 시작하는 경우의 수 4, ↓↑↓↓↑↑, ↑↓↓↓↑↑을 뺀다.

Case2) →→→←←←을 나열하는 경우의 수 : 13

Case3) ↑↑↓↓→←을 나열하는 경우의 수 : 150

↑↑↓↓을 잘 배열하는 경우의 수 5, →을 끼워넣는 경우의 수 5, ←을 끼워넣는 경우의 수 6을 곱한다.

Case4) ↑↓→→←←을 나열하는 경우의 수 : 150

COMMENT 확률과 통계 10

A, B, C, D, E를

Case1) 1/4로 나눌 때 : ${}_3C_1\times1\times4\times{}_5C_4=60$

Case2) 2/3으로 나누고 A와 D가 2에 속할 때 : $2\times3\times{}_5C_3=60$

Case2) 2/3으로 나누고 A와 D가 3에 속할 때 : ${}_3C_2\times2\times3\times{}_5C_3=180$

COMMENT 미적분 11

$f(0)=4$, $f'(0)=\frac{3}{2}$이므로 $f(x)=x^3+ax^2+\frac{3}{2}x+4$이다. $f(k)=0$이라 할 때,

$$\int_k^0 f(x)dx=\frac{5}{2}$$

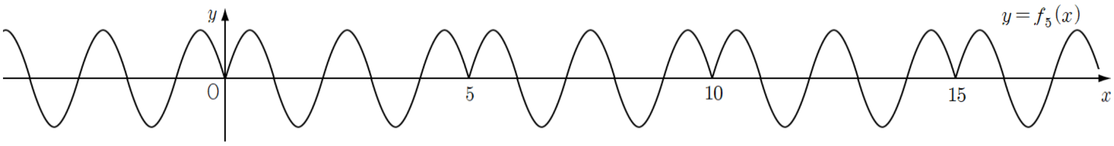
이다. 연립하여 풀면 $k=-1$, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+4$이다.

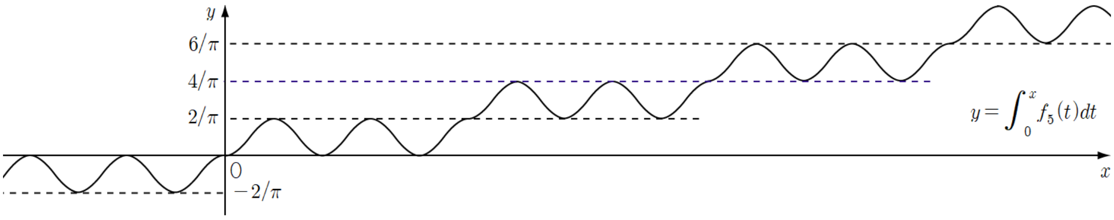
* a를 소거하고 k에 대한 사차방정식을 풀어야 한다.

COMMENT 미적분 12

n이 짝수일 때, $f_n(x)=\sin\pi x$이므로 $\int_0^x f_n(t)dt$의 최댓값은 $\frac{\pi}{2}$이다.

n이 홀수일 때, 아 설명하기 귀찮은데, $n=5$일 때를 그려보면 $g(5)=5$임을 알 수 있다.





따라서,

$$g(n)=\begin{cases} n & (n\text{이 홀수}) \\ 0 & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{n} g(k)=\begin{cases} \frac{n^2+2n+1}{4} & (n\text{이 홀수}) \\ \frac{n^2+2n}{4} & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$ 이다.

COMMENT 미적분 13

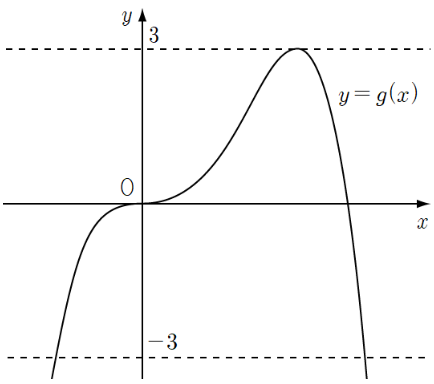
$$h(n)=\frac{1}{2}\int_0^{2n} g(t)dt=\frac{1}{2}\times 2n\times\frac{4n}{\pi}=\frac{4n^2}{\pi}$$

$$\sum_{k=1}^{n} h(k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{\pi}k^2=\frac{4}{\pi}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sim\frac{4}{3\pi}n^3$$

COMMENT 미적분 14

$h(x)=0$이면 $|g(x)|=0$ 또는 $|g(x)|=3$이므로 $g(x)$의 값은 -3 또는 0 또는 3이다.

또, $x=0$과 $x=3$에서 $h(x)$가 미분가능하므로 $g(x)$는 다음 그림과 같은 각이다.



귀찮으니 비율관계로 가자. $b=4$이고 $g(x)=mx^3(x-4)$에서 $g(3)=3$이므로 $m=-\frac{1}{9}$이다.

$g(x)=-\frac{1}{9}x^3(x-4)$에서 $g(6)=-48$이다.