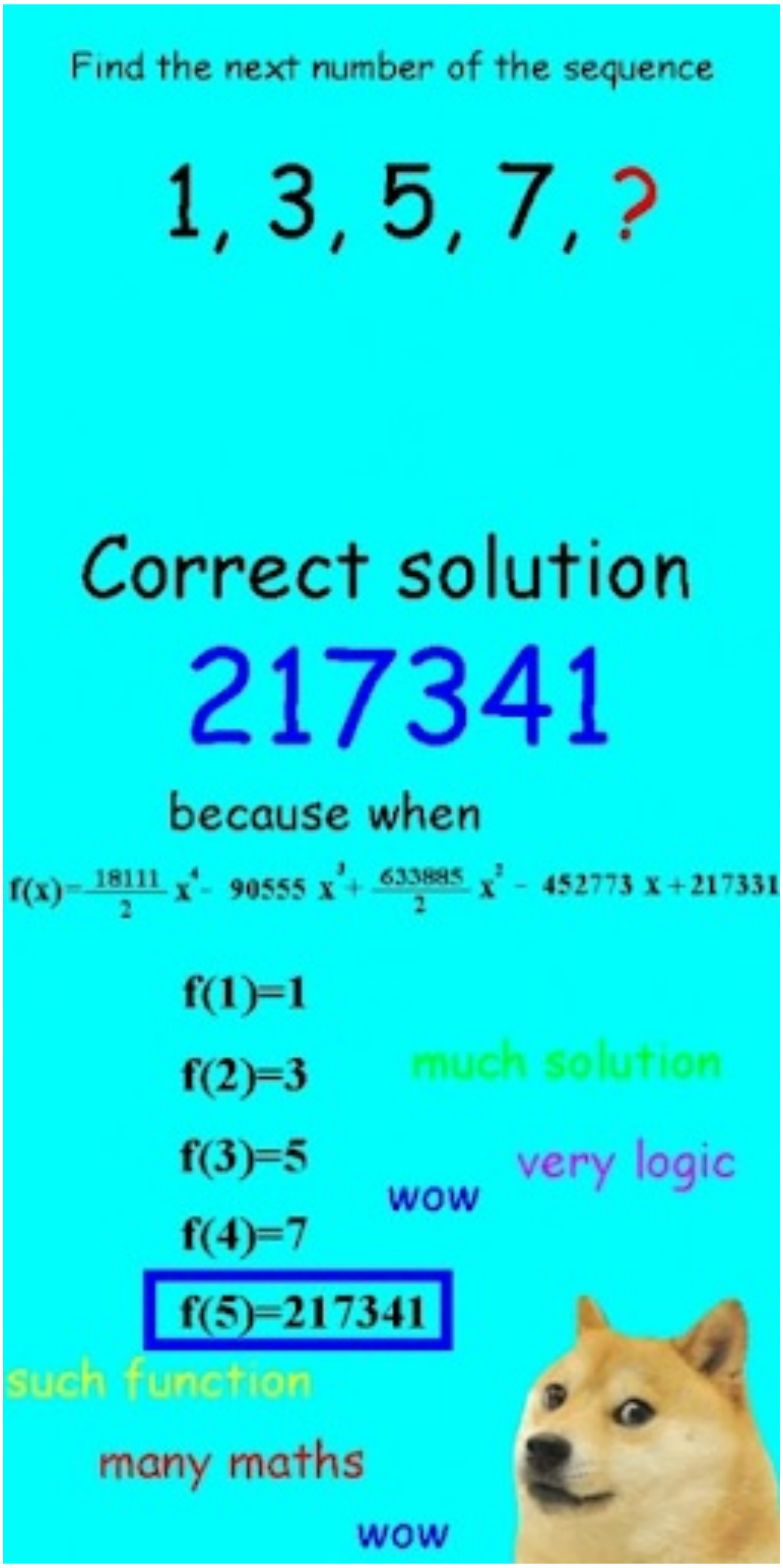
120페이지로 끝내는 기하 교과 외



xyo
889268

목차

개요

기하를 공부하는 학생에게 있어서 교과 외에 해당하는 **공간벡터**에 대해서 글을 써보려고 합니다.

공간벡터가 뭔지 잘 모르실 수도 있는데 일단 엄청 간단히 먼저 설명하면
평면벡터는 이차원 평면에 있는 벡터이고
공간벡터는 **삼차원 공간에 있는 벡터**입니다.
그러니까 평면벡터 $\overrightarrow{v_1}$의 성분이 (x, y)이고, 공간벡터 $\overrightarrow{v_2}$의 성분은 (x, y, z)입니다.

공간벡터가 뭔지 대충 알겠습니다.

다음으로 할 수 있는 질문은 **"공간벡터를 어디에다가 써먹나요?"**가 있겠는데
기하 교과서의 단원이 크게 보면 3개인데 3단원인 공간도형이랑 두 글자가 겹치네요.
평면벡터랑도 두 글자가 겹치는데요?

안 웃기셨으면 미안합니다. 평면벡터 문제에서 공간벡터를 쓸 이유는 딱히 없고 공간도형 단원의 일부 문제에서 공간벡터를 쓸 수 있습니다. 각 잡고 공간벡터로 풀어야지 마음먹으면 많은 공간도형 문제를 벡터를 이용해서 풀 수 있습니다.

이런 질문을 할 수도 있겠습니다. **"그럼 공간도형 문제 나오면 공간벡터 써서 풀라는 건가요?"**
"공간벡터로 풀어라"고 강요하는 건 아닙니다.
수능 보러 가면 공간도형 문제가 두세 개 있을 것입니다. 그중에 적어도 하나는 꽤 많이 어려울 것이고요. 그 어려운 문제를 봤을 때, 교과 외 개념을 쓰지 않는(아마도 출제자가 의도했을) 좋은 풀이가 떠오르지 않을 수 있겠습니다.

"이런 경우를 대비해서 보험으로 공간벡터를 공부해놓는 게 어떨까?" 제안하는 것입니다.

이면각의 크기를 구하는 문제가 있다고 합시다. 일반적으로 두 가지 풀이가 있겠습니다.
① 두 평면의 교선을 찾아서 교선에 수직인 두 직선을 찾아 그 두 직선이 이루는 각의 크기 구하기
② 한 평면 위의 어떤 도형의 넓이를 구하고, 그 도형의 다른 평면 위로의 정사영의 넓이를 구해서 두 넓이를 비교하여 이면각의 크기 구하기

①, ②번 풀이를 시도했는데 교선이 안 보인다거나 정사영 내리기 곤란하다든가 하는 상황이 있을 수 있겠습니다. 안 떠오르면 뭐 어쩔 수 없이 4점을 잃어야 하는 상황입니다.

수능은 이렇게 안 풀리면 저렇게라도 풀어야 하는 시험입니다.
예전에 어디선가 20학년도 수능 가형 17번 문제를 라그랑주 승수법이라는 걸 이용해서 풀었고 96점을 받았다는 글을 봤습니다. 2011117이 맞는지 정확히 기억은 안 나는데, 어쨌든 그 글을 보고 저도 그 풀이를 시도해봤는데 계산이 더럽고 엄청 오래 걸리더군요.

그 글을 쓰신 분은 아마 시간은 꽤 남는데, 17번 문제에서 좋은 풀이가 안 떠올랐을 것입니다.
라그랑주 승수법이 뭔지 모르고 좋은 풀이가 계속 안 떠오른다면 틀려야 하는 상황입니다.
그리고 평가원이 풀이 과정을 보고 감점하는 것도 아닙니다.
저 글을 쓰신 분과 같은 상황이라고 가정하고 '좋은 풀이가 마땅히 안 떠오르는데, 라그랑주 승수법으로 풀면 어떨까?'라는 생각이 들었다면 그걸로 계산을 막 해서 답을 내는 게 맞겠습니다.

갑자기 라그랑주 승수법 얘기를 막 했는데, 그걸 공부하라는 뜻은 당연히 아닙니다.
공간벡터가 라그랑주 승수법보다 어려운 것도 아닙니다. 배우기는 훨씬 쉽습니다.

"보험"이라는 관점에서 봤을 때 공간벡터를 공부해두는 게 나쁘지 않다고 생각합니다.

만약 수능에서 **문제를 다 풀었는데 시간이 남을 수도** 있겠죠. 그럼 뭐 잘못 푼 건 없는지 검토를 하실 텐데, 풀어본 문제를 다른 방법으로 풀어보는 식으로 검토를 할 수 있습니다. 공간도형 문제를 풀어서 답을 내긴 했는데, 이게 진짜 정답이 맞는지 모르겠다면 공간벡터로 풀어서 검토를 해보는 건 어떨까 싶은 생각이 듭니다.

공간도형 문제를 풀 때 직관에 의존하는 경우가 꽤 있습니다.
이 두 직선이 서로 수직이어야 말이 될 것 **같은데?**
저 점에서 이 평면 위로 수선 내리면 이 점에 떨어져야 할 것 **같은데?**
빙글빙글 돌아가는 도형의 이 평면 위로의 정사영의 넓이는 이럴 때가 최대일 것 **같은데?**

이런 경우에 그럴 것 같은 걸 실제로 그렇다고 생각하고 답을 내는 건 위험할 수도 있습니다.
공간벡터를 배워둔다면 **직관적으로 그럴 것 같은 걸 수식을 통해 직접 확인**할 수 있을 것입니다.

여러분이 보게 될 시험에서 공간도형 문제는 어떤 식으로 나올까요?

다음 두 문장은 모두 참입니다.

1. 공간벡터를 모르면 못 푸는 문제는 절대 나오지 않는다.
2. 공간벡터로 풀려고 하면 풀 수 있게 나온다.

일단 기본적으로 이렇게 문제가 나올 것입니다.

그러면 공간도형 문제의 풀이들을 크게 “교과 내 풀이”, “교과 외 풀이”로 나눌 수 있을 것입니다.

두 풀이 중에 뭐가 더 나은지(시간이 덜 오래 걸린다거나 계산이 적다거나)를 생각해 봐야 할 텐데, **적어도 수능에서는** “교과 외 풀이”가 “교과 내 풀이”보다 많이 유리하게는 출제하지 않을 것입니다.

‘적어도 수능에서는’이라는 말을 굳이 앞에 썼습니다. 수능이 아닌 다른 시험지에서 교과 외 풀이가 교과 내 풀이보다 유리한 문제가 나온 적이 있거든요. **22학년도 예비평가 30번**이 그러했습니다. 이따가 연습문제에서 같이 보겠습니다.

여기까지 읽으신 학생분들을 네 가지 유형으로 나눠볼 수 있겠습니다.
① 원래 교과 외 공부를 할 생각이 있으셨던 현역, 재수생분들
② 장수생이라 이미 그 내용을 알고 계신 분들
③ 원래 아무 생각 없었는데, 제가 뭐라고 하는지 보고 결정하려는 분들
④ 교과 외 공부를 할 생각이 전혀 없었고, 제 주장을 반박해볼까 싶으신 학생들

②번 분들은 교과 외 생각 없으시면 그냥 안 하시면 되겠고, 생각 있으시면 감 유지 정도만(적당한 난이도의 평가원 기출들 다시 보면서) 하시면 되겠습니다.

④번 분들이 하실 만한 반박의 내용이 어느 정도 예상되는데, 그 의견들을 모두 존중합니다. 그 의견들이 틀렸다고 생각하지 않습니다. **교과 외를 공부하지 않으시더라도 좋은 점수를 받을 수 있는 건 맞습니다.** 그렇다고 제 의견이 틀렸다고 생각하지도 않습니다. 아마 서로 타협이 안 될 것입니다.
"나랑 다르게 생각하는 사람이 있구나" 정도로 넘어가시고, 교과서에 맞게 공부하셔서 좋은 결과 있으시길 바랍니다.

걱정되는 것은 ①, ③ 학생들입니다.
수능에서 어려운 공간도형 문제가 나왔다고 가정해봅시다.
교과 내 풀이가 잘 떠오르지 않습니다. 그래서 교과 외 풀이를 시도합니다.
근데 평소에 교과 외 공부를 한다고는 했는데 제대로 하지 않아서 교과 외 풀이도 잘 안 됩니다.

이런 일이 생긴다면 4점을 잃는 데서 끝나지 않고, 다른 문제 검토할 시간마저 잃을 수가 있습니다.

이런 일이 일어나면 안 되겠죠. 교과 외 공부를 하기로 했으면 제대로 공부해야 하겠습니다.

개념이 많이 어려운 건 아닙니다만 그래도 제대로 공부하려면 어느 정도 시간이 필요하겠습니다.
교과 외 공부할 생각이 있으신(생기신) 분들은 그 시간을 투자할 여력이 되는지(다른 과목 공부하기 바쁜 건 아닌지 등)를 잘 생각해보고 결정하셨으면 좋겠습니다.
공부할지 말지는 제가 결정해드릴 수 있는 문제가 아닌 것 같습니다.

보험이나 검토 수단으로써 공간벡터를 공부하는 게 어떨까 설득하는 글이었습니다.
그렇지만 한 번 더 **교과 외를 공부하지 않아도 좋은 점수를 받을 수 있다**는 말을 해야 할 것 같습니다. 본인에게 교과 외가 필요할지 아닐지 충분히 고민해보고 공부할지 말지 결정하셨으면 좋겠습니다.

다음 페이지부터는 공간벡터를 공부하기로 결정한 분들이 읽어주시면 되겠습니다.

이제 어떻게 공간벡터를 공부하면 되는지 설명하겠습니다.
① 공간벡터가 뭔지, 어떻게 연산을 하는지 기초적인 개념 공부
② 공간도형 문제를 풀 때 쓰일 수 있는 내용 공부
③ 일부 공간벡터 기출 풀이
④ 공간도형 문제를 공간벡터를 이용해 풀어보는 연습

이 정도로 볼 수 있겠습니다.
①, ②는 각각 평면벡터와 공간도형을 잘 학습했다면 어렵지 않을 것입니다.

③에서 기출들을 너무 많이 풀어볼 필요는 없겠고, 너무 어려운 것도 풀 필요가 없습니다.
다소 어렵다 싶은 기출 문제들은 해설이 무슨 말을 하는 건지 이해하는 정도로도 충분하겠습니다.
(이 글에 없는 공간벡터 기출 문제에 대해서 저에게 풀이를 요청하셔도 됩니다.)

④가 결국 중요한데, 같이 많은 문제로 연습해봅시다.

어쨌든 이제부터는 공간벡터 개념에 대해서 설명하고, 적당한 난이도의 공간벡터 기출을 같이 보고, 공간도형 문제들을 공간벡터를 이용하여 풀어볼 것입니다.

공간벡터 기본 개념 - 위치벡터와 성분, 내적

공간벡터의 뜻과 그 연산에 대해서 설명하겠습니다.
이 글의 처음에서 말했듯 공간벡터 $\overrightarrow{v_2}$는 3차원 공간에 있는 벡터입니다.
평면벡터에서 배운 개념들을 공간으로 확장하기만 하면 되겠습니다.

1. 위치벡터와 성분

좌표공간의 원점 $\mathrm{O}(0,0,0)$에 대하여 좌표공간 위의 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$를 위치벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$와 같이 표현할 수 있습니다.
좌표공간의 세 점 $\mathrm{E}_1(1,0,0)$, $\mathrm{E}_2(0,1,0)$, $\mathrm{E}_3(0,0,1)$에 대하여 세 점의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$이라 합시다.
그렇다면 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$의 위치벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$를 $\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$로 표현할 수 있습니다.

좌표공간에 두 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$가 있고, 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 합시다. 그럼 다음이 성립합니다.

① $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$
② $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$
③ 실수 k에 대하여 $k\vec{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$
④ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$
⑤ 두 실수 m, n에 대하여 $m\vec{a}+n\vec{b}=(ma_1+nb_1, ma_2+nb_2, ma_3+nb_3)$

2. 공간벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 여러 가지 방법으로 구할 수 있습니다.

① 두 벡터의 성분을 알 때
$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

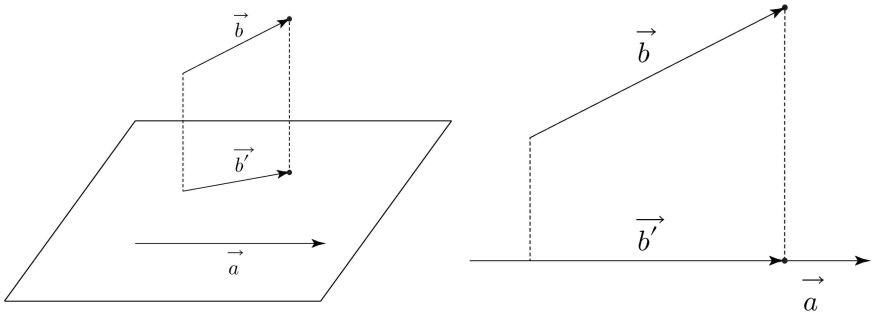
② 두 벡터의 크기와 두 벡터가 이루는 각의 크기를 알 때
두 벡터가 이루는 각의 크기가 θ이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

③ $\vec{a}$를 포함하는 도형(직선, 평면)으로 $\vec{b}$를 정사영하여 얻은 벡터를 $\overrightarrow{b'}$이라 하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\overrightarrow{b'}$이므로 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{b'}$을 계산하시면 됩니다. $\vec{a}$와 $\overrightarrow{b'}$는 한 평면 위에 있으므로 평면벡터의 내적이라고 보시면 됩니다.

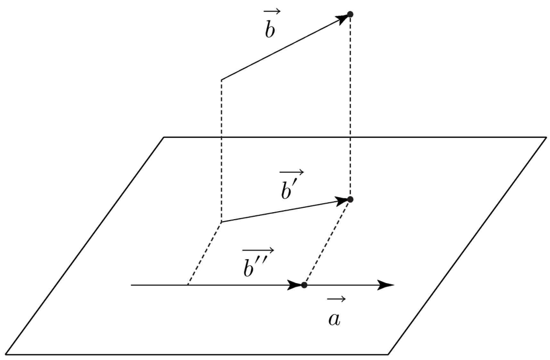
내적을 구하는 방법을 3가지 알아봤습니다.

여기서 ②를 다음과 같이 응용해봅시다.
두 벡터의 내적과 두 벡터의 크기를 안다면 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ를 알아내고 싶을 때
$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$를 계산하여 알아낼 수 있습니다.

다음으로, ③을 그림과 함께 이해해봅시다.



가능하다면 $\vec{a}$를 포함하는 직선으로 $\vec{b}$를 정사영하는 게 계산이 쉽겠습니다.
$\vec{a}$를 포함하는 직선으로 $\vec{b}$를 바로 정사영하는 게 어렵다면 다음과 같이 단계를 밟으면 되겠습니다.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b'} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b''}$입니다.

공간벡터의 내적에 대하여 다음이 성립합니다.

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여
① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
② $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
③ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$
④ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
⑤ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

내적과 관련하여 간단한 문제를 풀어봅시다.

정사면체 OABC에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직임을 벡터의 내적을 이용하여 보이시오.

가급적 여러 가지 방법으로 풀어보시면 좋겠습니다. 다음 페이지에 풀이가 있으니, 일단 스스로 해보고 넘어가세요.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$가 서로 수직임을 보이면 되겠습니다. 수직이라는 건 두 벡터가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$라는 뜻입니다. $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\frac{\pi}{2}$입니다. 즉 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$임을 보여야 합니다.

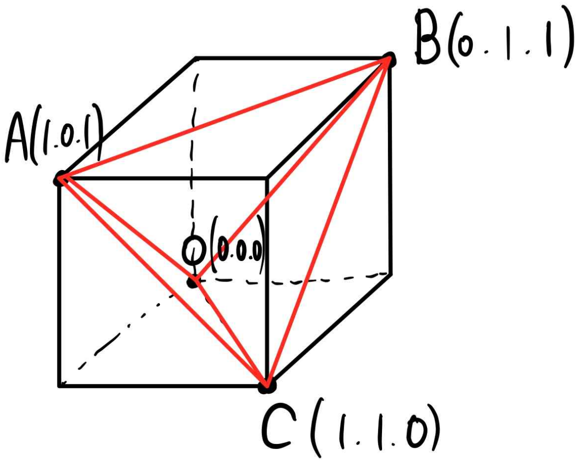
첫 번째 풀이

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$입니다. 그럼 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$로 볼 수 있겠습니다.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\frac{\pi}{3}$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$입니다.

두 번째 풀이

정사면체에서 좌표를 잡는 방법 중에서 정육면체의 꼭짓점 중 4개를 정사면체의 꼭짓점으로 보는 방법이 있습니다. 편의상 정사면체의 한 모서리의 길이를 $\sqrt{2}$로 잡겠습니다.
그림으로 표현하면 이렇습니다.



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (1, 0, -1)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$입니다.

세 번째 풀이

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면, 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 G입니다.
그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$를 포함하는 평면 ABC로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 정사영한 벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$입니다.
그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 입니다.
네 점 G, A, B, C는 한 평면 위에 있으므로 평면벡터의 내적으로 생각하면 되겠습니다.
그림을 그리지는 않겠습니다. 정삼각형 ABC와 정삼각형의 무게중심 G에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$이라는 건 다들 금방 아실 테니까요. 어쨌든 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$입니다.

네 번째 풀이

선분 BC의 중점을 M이라 합시다. $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}}$ 이므로 점 O에서 직선 BC에 내린 수선의 발은 M입니다. 마찬가지로 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발도 M입니다.
그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$를 포함하는 직선 BC로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 정사영한 벡터는 $\vec{0}$입니다.
그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$입니다.

다음으로, 공간도형 문제에서 이면각의 크기를 구할 때 쓰일 수 있는 **평면의 방정식**에 대한 내용을 배워봅시다.

평면의 방정식 - 연립방정식 관점

• 기본 개념

공간도형 개념을 처음 배우면서 **평면의 결정 조건**이라는 것을 배웠을 것입니다.

① **한 직선 위에 있지 않은 세 점은 하나의 평면을 결정한다.**

② 한 점과, 그 점을 지나지 않는 직선은 하나의 평면을 결정한다.

③ 한 점에서 만나는 두 직선은 하나의 평면을 결정한다.

④ 서로 평행한 두 직선은 하나의 평면을 결정한다.

평면의 방정식을 세우려면 4개의 조건 중 ①을 이용합니다.
평면의 방정식은 기본적으로 4개의 실수 a, b, c, d에 대하여 $ax+by+cz+d=0$ 꼴로 생겼습니다. 평면의 방정식을 찾는다는 것은 곧 4개의 실수 a, b, c, d의 비를 찾는 것입니다.

한 직선 위에 있지 않은 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3, z_3)$이 주어져 있다고 합시다.
세 점 A, B, C를 포함하는 평면의 방정식을 찾고 싶습니다.
그럼 연립방정식 $\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1+d=0 \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0 \\ ax_3+by_3+cz_3+d=0 \end{cases}$ 을 풀어서 4개의 실수 a, b, c, d의 비를 찾아야 합니다.

이 방식으로 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C의 좌표가 모두 주어져 있을 때, 평면 ABC의 방정식을 찾아낼 수 있습니다.

$\mathrm{A}(0,0,1)$, $\mathrm{B}(1,1,3)$, $\mathrm{C}(2,3,6)$을 지나는 평면의 방정식을 구해봅시다.
연립방정식을 풀어보면 $a:b:c:d=1:1:-1:1$이 나와서 평면의 방정식을 $x+y-z+1=0$으로 얻을 수 있습니다.

• 좌표 관찰

평면의 방정식을 얻는 과정을 알아봤는데, 이 과정이 그렇게 편하지는 않습니다.
그런데 꼭 연립방정식을 풀어야만 평면의 방정식을 얻을 수 있는가 하면, 그렇지 않은 경우도 있습니다. 보자마자 연립방정식을 세워서 풀기 전에 평면이 지나는 **세 점의 좌표를 잘 살펴봐야** 합니다.

예제를 봅시다. 다음 페이지 넘어가기 전에 반드시 먼저 평면의 방정식을 세워보기 바랍니다.
그냥 연립방정식 풀지 말고, 세 점의 좌표를 잘 살펴보고 세 점의 공통점이 뭔지를 생각해보세요.

① $\mathrm{A}(1,5,0)$, $\mathrm{B}(2,3,0)$, $\mathrm{C}(-4,8,0)$을 지나는 평면의 방정식

② $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(2,2,2)$, $\mathrm{C}(1,1,4)$를 지나는 평면의 방정식

③ $\mathrm{A}(4,0,0)$, $\mathrm{B}(2,2,2)$, $\mathrm{C}(-3,1,1)$을 지나는 평면의 방정식

④ $\mathrm{A}(5,1,2)$, $\mathrm{B}(5,3,5)$, $\mathrm{C}(5,-1,2)$를 지나는 평면의 방정식

잘 해보셨나요? 풀이 바로 하겠습니다. 안 하셨으면 다시 올라가서 꼭 풀어봐주세요.

① 세 점 A, B, C의 z좌표가 모두 0이라는 공통점이 있습니다. 평면 ABC의 방정식은 $z=0$입니다. 즉 xy평면이네요.

② 세 점 A, B, C의 x좌표, y좌표, z좌표의 합이 모두 6이라는 공통점이 있습니다. 평면 ABC의 방정식은 $x+y+z=6$입니다.

③ 세 점 A, B, C의 y좌표와 z좌표가 같다는 공통점이 있습니다. 평면 ABC의 방정식은 $y=z$입니다. 이것을 $y-z=0$으로 표현할 수 있겠습니다.

④ 세 점 A, B, C의 x좌표가 모두 5라는 공통점이 있습니다. 평면 ABC의 방정식은 $x=5$입니다.

네 문제에 대해서 세 점의 좌표를 관찰해서 답을 내봤습니다. 근데 이게 진짜 답이 맞는 건지 불안할 수 있습니다. 이것 말고도 다른 평면의 방정식이 있는 건 아닌가 의심하면서요.

②번 문제에서 세 점의 좌표를 관찰해서 $x+y+z=6$을 얻어냈다고 가정해봅시다. $x+y+z=6$에 세 점의 좌표를 대입해보았더니 모두 등식이 성립합니다.
그럼 이게 진짜 유일한 답이 맞는 건지 확인하는 방법에 대해 말씀드리겠습니다.

어떻게 하면 되냐면, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않음을 확인하면 됩니다.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,0,-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,-1,1)$입니다. 두 벡터가 서로 평행하지 않으므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않네요. 그럼 답은 $x+y+z=6$이 확실히 맞습니다.

- **특수한 경우**

세 점 A, B, C의 좌표가 특별한 경우에는 암기를 통해 바로 평면의 방정식을 구할 수 있습니다.

$abc \neq 0$인 세 실수 a, b, c에 대하여 세 점 A, B, C의 좌표가 $\mathrm{A}(a, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, b, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, c)$라고 합시다. 그럼 평면 ABC의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$입니다.

간단한 예제입니다.
세 점 $\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 4)$를 지나는 평면의 방정식

→ $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$입니다. 등식의 양변에 4를 곱해서 $4x+2y+z=4$로 정리하면 깔끔하겠습니다.

위의 상황은 매우 특수한 상황이므로 암기해두시는 게 좋겠습니다.

위의 상황과 비슷한 경우에, 위의 상황을 응용할 수 있습니다.

또 예제를 봅시다.
세 점 $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,2,0)$, $\mathrm{C}(0,2,4)$를 지나는 평면의 방정식

→ 위에 있는 상황처럼 특수한 줄 알았는데 C가 z축 위의 점이 아니네요. 그러면 평면 ABC와 z축이 만나는 점을 지금으로서는 모릅니다. 위의 상황과 비슷하게 평면의 방정식을 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{c}=1$로 두고 싶습니다. 근데 이렇게 두는 것보다는 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+cz=1$로 두는 것이 안전합니다.

왜 그러냐면, 0이 아닌 실수 c에 대하여 평면의 방정식아 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{c}=1$라고 하면 이 평면은 $(0,0,c)$를 지나야 한다는 말이 되는데, 평면과 z축의 교점의 좌표를 정확히 모르기 때문에 그렇게 하면 안 됩니다.
실제로 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{c}=1$에 점 C의 좌표를 대입해보면 $\frac{0}{1}+\frac{2}{2}+\frac{4}{c}=1$에서 $1+\frac{4}{c}=1$이고, $\frac{4}{c}=0$이라는 결론을 얻습니다. $\frac{4}{c}=0$은 분명히 문제가 있죠. 그래서 평면의 방정식을 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+cz=1$로 두어야 합니다.

어쨌든 평면 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+cz=1$이 A와 B를 지나는 건 당연하므로 C의 좌표만 대입해보면 되겠습니다. $\frac{2}{2}+4c=1$에서 $c=0$입니다. 그러므로 평면의 방정식은 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$에서 $2x+y=2$입니다.

바로 앞 페이지에서 이게 진짜 답이 맞는지 확인하는 방법을 알려드렸습니다. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로 답이 진짜 맞습니다.
지금까지 평면의 방정식을 연립방정식의 관점에서 이해해보았습니다.
이렇게 말하는 걸 보면 다른 관점이 있다는 뜻이겠죠? 맞습니다. 이제부터는 평면의 방정식을 **법선벡터**의 관점에서 이해해봅시다.

평면의 방정식 – 법선벡터 관점

공간도형 개념을 공부하면서 **직선과 평면의 수직**이라는 개념을 봤을 겁니다.
어떤 평면 α와 수직인 직선 l에 대하여 l은 평면 α 위의 모든 직선과 수직입니다.

이것을 평면의 방정식을 만드는 데 응용할 수 있습니다.
평면의 방정식을 만들려면 법선벡터의 성분과 평면이 지나는 한 점의 좌표가 필요합니다.
여기서 평면 α의 법선벡터는 평면 α와 수직인 직선 l의 방향벡터라고 보면 되겠습니다.

평면 α의 법선벡터가 $\vec{\alpha}=(a, b, c)$이고, 평면 α가 지나는 점 중에서 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$이 알려져 있다고 합시다. 그럼 평면 α 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y, z)$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

이 식이 무슨 의미일까요? 점 P는 평면 α 위의 임의의 점입니다. 그러므로
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$는 평면 α 위의 임의의 벡터라고 할 수 있습니다.
평면 α의 법선벡터가 $\vec{\alpha}=(a, b, c)$라고 하였으므로, $\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$에서
$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$을 얻을 수 있는 것입니다. 이것이 평면 α의 방정식이 되겠습니다.
위에서 배웠던 $ax+by+cz+d=0$과 크게 다를 건 없겠습니다.

예제를 한 번 풀어봅시다.
정사면체 ABCD에 대하여 두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(5, 4, 1)$이다. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 평면 MCD의 방정식을 구하시오.

꼭 풀고 다음 페이지로 넘어가세요.

일단 선분 AB의 중점 M의 좌표부터 구합시다. 이거는 교과서에 있습니다. $\mathrm{M}(3, 3, 2)$입니다.

평면 MCD의 방정식을 구해야 하는데, M의 좌표는 알지만 두 점 C, D의 좌표를 모릅니다.
그러므로 연립방정식을 풀어서 평면의 방정식을 얻는 건 불가능합니다.

그렇다면 평면의 방정식을 구하려면 **법선벡터**가 필요하겠습니다.

평면 MCD와 수직인 직선을 찾아야 합니다. 그러려면 **평면 MCD 위의 서로 다른 두 직선과 모두 수직인 직선을 찾아야** 하겠습니다.

평면 MCD 위의 직선은 직선 MC, 직선 MD 등이 있습니다.
여기서 두 삼각형 ABC, ABD가 모두 정삼각형이므로, 직선 AB는 직선 MC와 수직이고, 직선 AB는 직선 MD와도 수직입니다.
직선 AB는 평면 MCD 위의 서로 다른 두 직선과 모두 수직이므로, 평면 MCD는 직선 AB와 수직입니다.
그러므로 평면 MCD의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$라고 할 수 있겠습니다. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4, 2, -2)$이므로 평면 MCD의 방정식은 $4(x-3)+2(y-3)-2(z-2)=0$입니다.

이를 간단히 정리하면 $4x+2y-2z=14$에서 $2x+y-z=7$입니다.

※ 법선벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4, 2, -2)$를 찾았는데, 방정식을 $4(x-3)+2(y-3)-2(z-2)=0$로 찾지 말고, $4x+2y-2z=d$로 둔 다음에 이 평면이 M을 지나도록 하는 실수 d를 찾는다고 생각해도 좋겠습니다.

※ 0이 아닌 실수 k에 대하여 평면 MCD의 법선벡터가 $k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$라고 볼 수 있으므로, 법선벡터를 $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2, 1, -1)$로 바로 두면 계산이 좀 더 간단하겠습니다. k가 0만 아니라면 어떤 실수든 상관 없습니다.

그림 없이 텍스트로만 설명했는데, 천천히 한 문장씩 곱씹어가며 읽으셨길 바랍니다.

평면의 방정식의 성질들을 다음 페이지에서 알아봅시다.

평면의 방정식의 성질들

① 점과 평면 사이의 거리

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 이다.

② 평면 $ax+by+cz=d$가 원점을 포함하면 $d=0$이고, x축을 포함하면 $a=d=0$이고, x축과 평행하면 $a=0$이다. y축과 z축에 대해서도 비슷하게 적용할 수 있겠다.

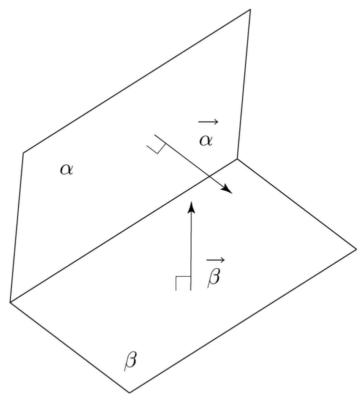
③ 이면각

공간도형 문제에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구해야 하는 문제를 자주 볼 수 있습니다.
일반적인 방법은 교선을 구해서 이면각의 정의를 이용하거나, 한 평면 위의 도형의 넓이를 구하고, 그 도형의 다른 평면으로의 정사영의 넓이를 구해서 이면각의 크기를 구하는 것입니다.

이면각의 크기를 구할 때 평면의 방정식을 이용할 수 있습니다.
이는 다음 성질 때문입니다.

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 두 평면의 법선이 이루는 각의 크기와 같다.

즉 법선벡터가 $\vec{\alpha}$인 평면 α와, 법선벡터가 $\vec{\beta}$인 평면 β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$ 입니다.



이면각의 크기를 구하기 위해 두 평면의 방정식을 알아내어(즉, 법선벡터를 알아내어) $\cos\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$ 를 계산하면 되겠습니다.

평면의 방정식을 이용하여 이면각의 크기 구하기

아마도 여러분이 수능에서 교과 외를 쓴다면 평면의 방정식을 작성하여 이면각의 크기를 구하는 경우가 많을 것입니다.

여기서 문제 유형을 세 가지로 나눌 수가 있겠습니다.
① 문제에서 점들의 좌표가 잘 주어져 있다.
② 문제에서 점들의 좌표가 주어져 있지 않다.
③ 문제에서 점들의 좌표가 주어져 있는데, 숫자가 마음에 들지 않는다.

유형 ①의 경우는 문제에서 주어진 대로 평면의 방정식을 적으면 되겠습니다.

유형 ②의 경우는 문제에서 점들의 좌표가 주어져 있지 않으므로 임의로 좌표를 설정해주어야 합니다.

유형 ③의 경우는 문제에서 주어진 마음에 안 드는 좌표들을 마음에 들도록 바꿔서 평면의 방정식을 작성할 수가 있겠습니다.

• 유형 ①

유형 ①의 경우는 딱히 더 할 말은 없습니다만 연습문제를 같이 풀어봅시다. 올해 수특에 있는 문제입니다. 교과 내 풀이가 궁금하다면 제가 올린 수특 정리글을 확인해주세요.

유형 ① 예제: 23 수특 공간좌표 Level 3 4번

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(4,0,0)$, $\mathrm{B}(2,2,2)$, $\mathrm{C}(-3,1,1)$에 대하여 평면 α가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 평면 α와 평면 ABC의 교선은 xy평면 위에 있다. (나) 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 15°이다.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① $9\sqrt{3}$ ② $12\sqrt{3}$ ③ $15\sqrt{3}$ ④ $18\sqrt{3}$ ⑤ $21\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구해야 하는 문제입니다.
세 점 A, B, C에서 평면 α에 내린 수선의 발 A′, B′, C′을 구해서 삼각형 A′B′C′의 넓이를 구해야겠다고 생각하는 사람은 없을 것입니다.

당연히 삼각형 ABC의 넓이를 구하고, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 찾아내야 하겠습니다.

삼각형 ABC의 넓이부터 구해봅시다. $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AC}=\sqrt{51}$, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$입니다.
$\cos(\angle ABC)=\dfrac{12+27-51}{2\times 2\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}$이므로 $\sin(\angle ABC)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이고, 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}$입니다.

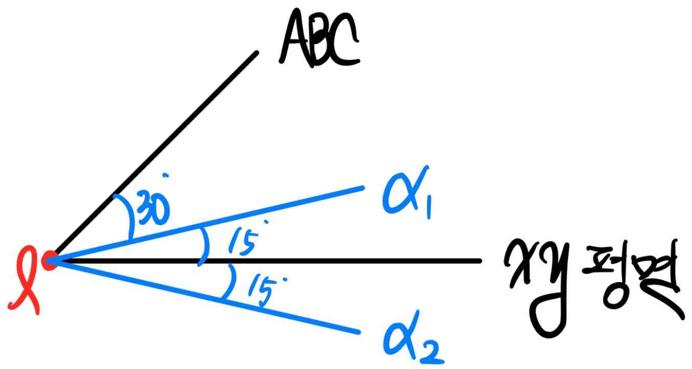
이제 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 찾읍시다.
(가)에 따르면 세 평면 ABC, α, xy평면이 직선을 공유합니다.
(나)를 봤을 때 평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 계산해야겠다는 생각이 듭니다.

여기서 평면 ABC의 방정식을 이용하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 알아냅시다.
세 점이 한 직선 위에 있지 않음은 당연한 사실입니다. 왜냐하면 삼각형 ABC가 정의되니까요.
세 점의 좌표를 잘 관찰해봐야 합니다. $A(4,0,0)$, $B(2,2,2)$, $C(-3,1,1)$

좌표를 관찰해봤더니 y좌표와 z좌표가 같다는 공통점이 있습니다. 그럼 평면 ABC의 방정식은 $y-z=0$입니다. 평면 ABC의 법선벡터는 $(0,1,-1)$이고, xy평면의 법선벡터[1]는 $(0,0,1)$입니다.

그러므로 두 평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{|(0,1,-1)\cdot(0,0,1)|}{|(0,1,-1)||(0,0,1)|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\theta=45^\circ$ 입니다.

세 평면 ABC, α, xy평면이 직선을 공유합니다. 그 직선이 뭔지는 잘 모르겠지만 l이라 하고 다음과 같이 단면화할 수 있습니다. 직선 l이 점처럼 보이도록 단면화합니다.



1) xy평면은 $z=0$이므로 그렇습니다.

그러면 두 평면 ABC, α가 이루는 각의 크기의 최솟값은 30° 이고, 최댓값은 60° 이네요.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이로 $6\sqrt{2}\cos 30^\circ$, $6\sqrt{2}\cos 60^\circ$ 두 값이 가능하겠습니다. 둘을 곱하면 $18\sqrt{3}$ 입니다. ④번이 정답입니다.

이 문제는 올해 수특 문제이니까 당연히 교과 내 문제입니다.
평면의 방정식을 이용하지 않고도 당연히 풀 수 있습니다.

평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 구할 때 이면각의 정의를 써도 되고, 정사영의 넓이를 구해도 되겠습니다.

그 풀이는 제가 올렸던 23 수특 공간좌표 정리글에서 확인해주시면 되겠습니다.

정리글에 있는 세 가지 풀이를 한 번 비교해보세요. 평면의 방정식 풀이가 크게 불리한 느낌은 아닐 겁니다.

- **유형 ②**

이제 다음으로 **이면각 구하기 유형 ②: 점들의 좌표가 주어져 있지 않은 경우**를 보겠습니다.

문제에서 좌표에 대한 얘기를 하지 않습니다. 그럼에도 평면의 방정식을 세워서 이면각의 크기를 구하고 싶다면 직접 좌표를 설정해주어야 합니다.

좌표를 설정해주어야 하는데, 잘 설정하는 방법이 있을 것입니다. 잘 설정한다는 말은 곧 평면의 방정식 찾는 계산을 가능한 한 줄이면서 설정한다는 뜻입니다.

좌표를 설정하는 방법에 대해서 설명드리겠습니다.

일단 기본적으로 좌표를 설정하려면 반드시 **서로 수직인 3개의 직선**을 찾아야 합니다.
서로 수직인 3개의 직선을 찾아서 이것들을 각각 x축, y축, z축으로 설정해주어야 합니다.
그런데 우리가 아는 x축, y축, z축은 원점에서 만납니다. **하지만 좌표를 설정하기 위해 찾은 세 직선이 무조건 한 점에서 만나야 하는 것은 아닙니다.** 단지 그 직선들이 각각 좌표축과 평행하다는 사실만 알고 가면 됩니다.

서로 수직인 3개의 직선을 찾았습니다. 그 3개의 직선을 각각 x축, y축, z축에 대응시키는 경우의 수는 6가지이겠습니다($3!$이죠). 이거는 본인 마음대로 하시면 됩니다만, 기하러 정서상 누워 있는 평면을 xy평면으로 보는 게 자연스럽겠습니다.[2)]

서로 수직인 세 직선을 찾아서 각각 x축, y축, z축에 대응시켜준 상태입니다.
원점만 정하면 좌표를 모두 세운 것이 됩니다. 여기서 가급적 문제에서 주어진 두 평면이 원점을 포함하도록 원점을 정해주세요. 그것이 계산상 유리합니다.

왜냐하면 기본적인 평면의 방정식이 $ax+by+cz+d=0$인데, 원점을 포함하는 평면은 $d=0$이 보장되기 때문입니다. 미지수를 4개 찾는 것보단 3개 찾는 게 더 쉽죠.

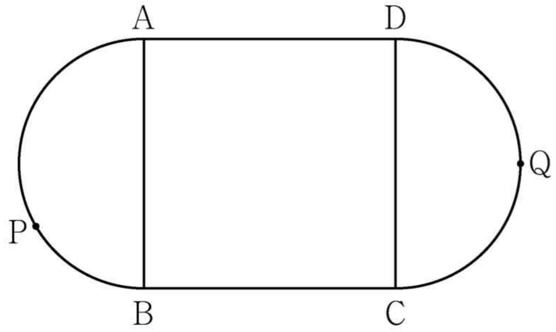
다음 페이지에서 예제를 보겠습니다. 작년 9월 평가원 29번입니다. 교과 내 풀이는 다들 알고 계실 테니 따로 적지 않겠습니다.

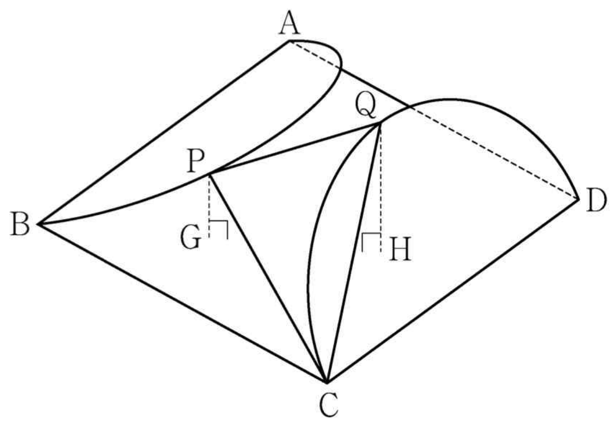
2) 무엇을 눕혀서 그리는 게 유리한지 아는 것이 중요하다고 계속 강조해왔습니다. 서로 수직인 세 직선을 찾는 과정을 밟으실 텐데, 애초에 그 과정을 겪기 전에 특정 평면을 눕혀서 잘 그렸어야 합니다. 그 평면을 xy평면으로 둡시다.

유형 ② 예제: 22학년도 9월 평가원 29번

그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.

이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]





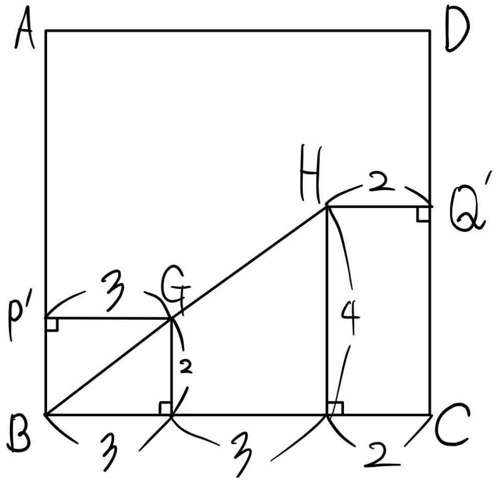
1. 선분 AB의 중점을 M이라 하자. 점 P가 호 AB의 삼등분점이므로 삼각형 PBM은 정삼각형이고, 정삼각형의 한 모서리의 길이는 4이다. 그러므로 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P′이라 할 때, 점 P′은 선분 BM의 중점이고, $\overline{\mathrm{PP'}}=2\sqrt{3}$ 이다.

한편, 점 Q에서 직선 CD에 내린 수선의 발 Q′은 선분 CD의 중점이고, $\overline{\mathrm{QQ'}}=4$이다.

$\angle \mathrm{PGP'}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 PP′G에 대하여 $\overline{\mathrm{PP'}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PG}}=\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{P'G}}=3$이고,

$\angle \mathrm{QHQ'}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 QQ′H에 대하여 $\overline{\mathrm{QQ'}}=4$, $\overline{\mathrm{QH}}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{Q'H}}=2$이다.

정사각형 ABCD 위에 네 점 P′, Q′, G, H를 표시해보면 다음과 같다.

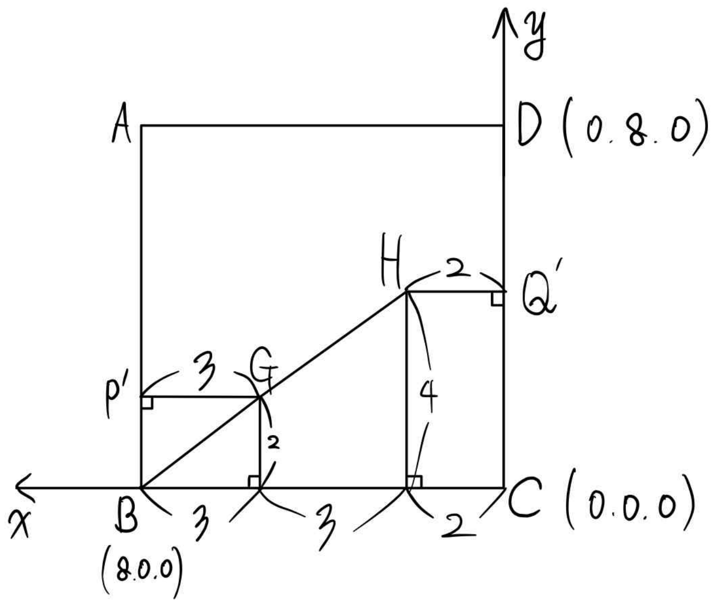


2. 구하고자 하는 값은 두 평면 PCQ, ABCD가 이루는 각의 크기 θ입니다. 평면의 방정식을 구해서 푼다고 합시다. 그럼 좌표를 설정해줘야 하는데, 이미 누워 있는 평면이 있고, 그게 정사각형이기까지 합니다. 그리고 직선 PG와 직선 QH가 이 누워 있는 평면과 수직임을 알고 있습니다.

누워 있는 평면을 xy평면으로 두고, 정사각형의 모서리를 각각 x축과 y축으로 보고, 직선 PG를 z축으로 보면 좋겠습니다.

원점만 정하면 모든 점의 좌표가 결정되겠습니다. 어느 점을 원점으로 정할까요?
정사각형의 네 꼭짓점 중에서 하나를 고르면 좋겠습니다. 그중에서도 C를 원점으로 정하는 게 계산상 유리합니다. 왜 그럴까요? 일단 평면 ABCD가 xy평면인 건 잘 알고 있고, 평면 PCQ의 방정식을 찾아야 하는 상황입니다. 평면 PCQ는 당연히 C를 포함합니다. C를 원점으로 정하면 $ax+by+cz+d=0$에서 $d=0$이 보장되기 때문입니다.

좌표를 모두 정했습니다. 직선 CB를 x축, 직선 CD를 y축, 평면 ABCD와 수직인 직선 PG를 z축으로 정한 것입니다. 그림 살짝 그려주겠습니다.



$G(5,2,0)$, $H(2,4,0)$입니다. 두 직선 PG, QH가 z축과 평행합니다.
그러므로 $P(5,2,\sqrt{3})$, $Q(2,4,2\sqrt{3})$을 얻을 수 있습니다.

세 점 $C(0,0,0)$, $P(5,2,\sqrt{3})$, $Q(2,4,2\sqrt{3})$을 지나는 평면의 방정식을 찾아야 하는 상황입니다. 원점을 포함하니까 상수항이 0입니다.

식을 $ax+by+\sqrt{3}cz=0$으로 두면 어떨까요? z의 계수를 $\sqrt{3}c$로 두는 이유는 P, Q의 x좌표와 y좌표는 자연수인데, z좌표는 $\sqrt{3}$의 자연수 배이기 때문입니다. 이렇게 두는 게 계산이 좀 더 편할 것 같습니다.

두 점 P, Q의 좌표를 평면의 방정식에 대입하여 $5a+2b+3c=0$, $2a+4b+6c=0$을 얻습니다. 두 등식에 대해 연립방정식을 풀면 $a=0$, $b:c=3:-2$를 얻습니다. 그러므로 평면 PCQ의 방정식은 $3y-2\sqrt{3}z=0$입니다.

평면 PCQ와 xy평면이 이루는 각의 크기 θ를 찾을 준비가 다 됐습니다. 평면 PCQ의 법선벡터는 $(0,3,-2\sqrt{3})$이고, xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로
$\cos\theta=\dfrac{|(0,3,-2\sqrt{3})\bullet(0,0,1)|}{|(0,3,-2\sqrt{3})||(0,0,1)|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$에서 $70\cos^2\theta=40$입니다.

이 문제의 출제 의도로 보이는 풀이는 두 평면의 교선을 찾는 것입니다. 이 문제에서 두 평면의 교선을 잘 찾아보면 직선 BC가 나옵니다. 만약 교선이 직선 BC가 아니고 삐뚤했다면 평면의 방정식 계산 풀이가 좀 더 편할 것 같다는 생각도 듭니다.

• 유형 ③

이제 **이면각 구하기 유형 ③: 점들의 좌표가 주어져 있는데 숫자가 마음에 들지 않는 경우**를 봅시다.

문제를 딱 봤더니 어떤 점의 좌표가 마음에 안 듭니다. 이거를 마음에 들게 바꾸어서 평면의 방정식을 세워도 됩니다.

여기서 주의할 점이 있습니다. **좌표를 바꾸더라도 문제에서 주어진 점들의 위치 관계가 바뀌면 안 됩니다.**

그리고 만약에 문제에서 특정 점의 좌표를 물었다고 하면, 좌표축을 함부로 바꾸면 안 되겠습니다.

특정 점의 좌표를 물은 게 아니라면 **문제에서 주어진 점들의 위치 관계가 바뀌지 않는 선에서 좌표축을 새로 설정해도 좋습니다.**

하지만 문제를 보자마자 마음에 안 드는 점의 좌표를 바로 바꾸지는 말고, 점들의 위치 관계를 확인한 뒤에 좌표를 새로 설정하는 것이 안전하겠습니다.

예제를 봅시다. 작년 수능 30번 문제이고, 제가 이 문제를 처음 봤을 때 좌표를 임의로 바꿔서 풀었습니다. 교선 찾는 과정이 그다지 마음에 들지 않아서요.

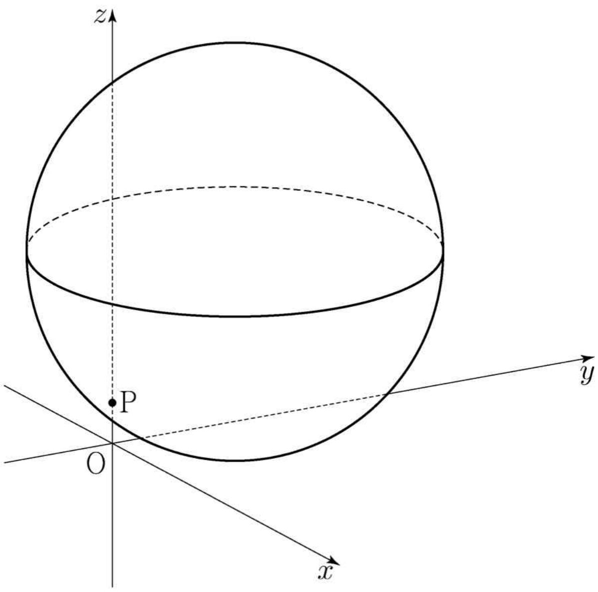
유형 ③ 예제: 22학년도 수능 30번

좌표공간에서 중심이 $C(2, \sqrt{5}, 5)$이고 점 $P(0, 0, 1)$을 지나는 구

$$S: (x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2 + (z-5)^2 = 25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.

삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

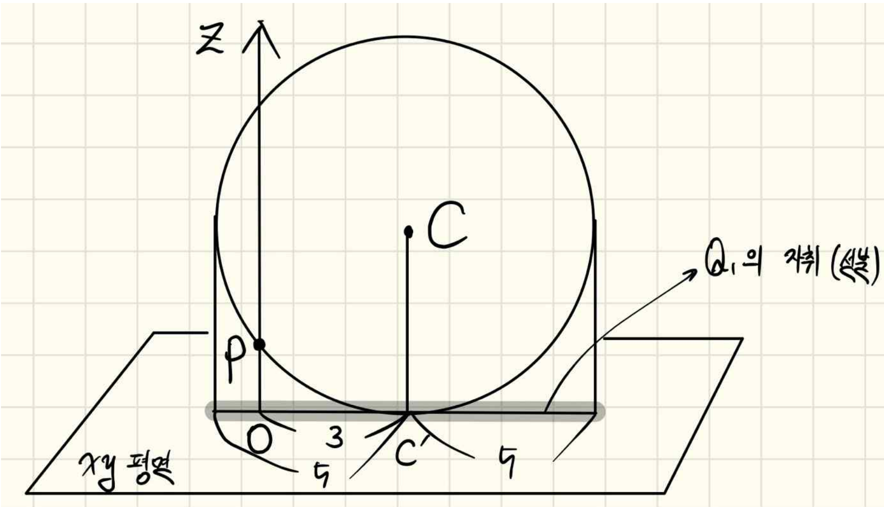


0. 일단 점 C의 좌표가 마음에 안 듭니다만, 당장 바꾸지는 말고 나머지 점들의 위치 관계를 파악합시다.

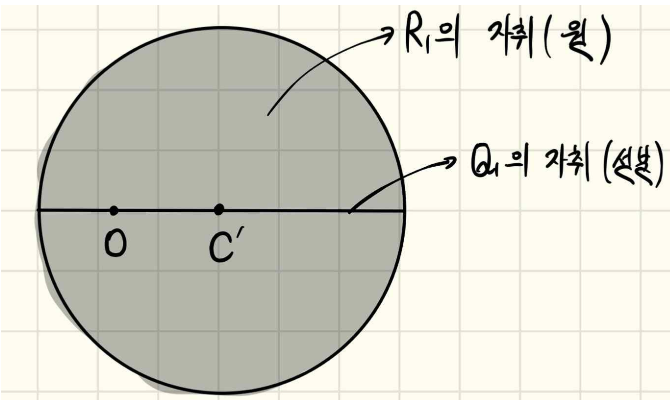
1. 구의 반지름의 길이가 5이고, 구의 중심 C의 z좌표가 5이므로 구 S가 xy평면과 접한다. 문제에서 요구하는 것은 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이의 최댓값과, 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대일 때 두 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$, PQR가 이루는 각의 크기이다. 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이의 최댓값부터 찾아야 하겠다.

   점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{C'}(2, \sqrt{5}, 0)$이라 하자. $\overline{\mathrm{OC'}} = 3$이다. 두 점 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이 각각 존재할 수 있는 영역은 어떻게 될까? $\mathrm{R_1}$의 영역은 쉽다. R이 구 S 위를 마음대로 움직이므로 $\mathrm{R_1}$은 점 $\mathrm{C'}$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 xy평면 위의 원이다.

   평면 OPC는 xy평면과 수직이다. 평면 OPC가 z축을 포함하고, z축은 xy평면과 수직이기 때문이다. 그렇다면 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q의 xy평면 위로의 정사영 $\mathrm{Q_1}$의 자취는 다음과 같다.



   $\mathrm{Q_1}$은 직선 $\mathrm{OC'}$ 위의 점이고, $\overline{\mathrm{C'Q_1}} \le 5$이다. 이제 xy평면 위의 네 점 O, $\mathrm{C'}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$을 보자.

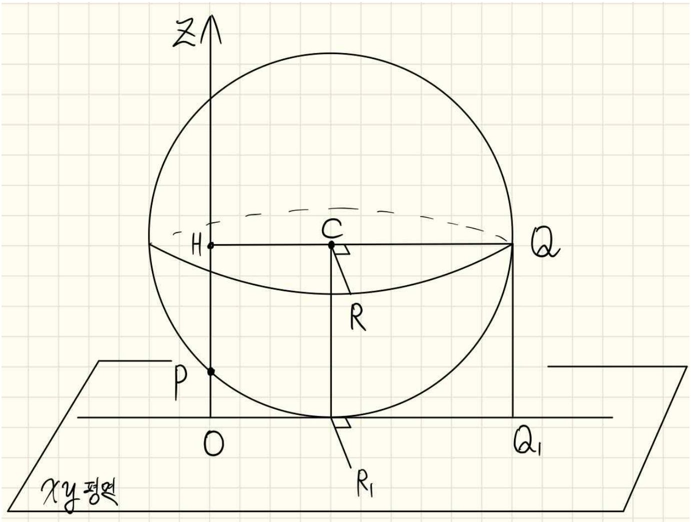


   여기서 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되려면 점 $\mathrm{Q_1}$은 O로부터 가장 멀리 떨어져 있어야 하겠고, 점 $\mathrm{C'R_1}$이 직선 $\mathrm{OQ_1}$이 수직이어야 하고, $\overline{\mathrm{C'R_1}} = 5$이어야 하겠다.

삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ_1}}\times\overline{\mathrm{C'R_1}}=\frac{1}{2}\times 8\times 5=20$이다.

2. 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$과 평면 PQR가 이루는 각의 크기 θ를 찾자. 구하고자 하는 값은 $20\cos\theta$이다.

   평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$은 xy평면이다. xy평면과 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 찾아야 한다. P의 위치는 알고 있다. Q, R의 위치를 찾아야 하는데, $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CR}}=\overline{\mathrm{C'Q_1}}=\overline{\mathrm{C'R_1}}=5$이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{CQ}}$, $\overline{\mathrm{C'Q_1}}$은 서로 평행하고, $\overline{\mathrm{CR}}$, $\overline{\mathrm{C'R_1}}$은 서로 평행하다. 그림을 그려보자.



3. 모든 점들의 위치 관계를 확인했습니다. 두 평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$, PQR가 이루는 각의 크기를 찾아야 하는데, 평면의 방정식을 이용해서 풀어보자고 마음먹었습니다.

   평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$은 xy평면입니다. xy평면은 마음에 드는 평면입니다. 그대로 xy평면이면 좋겠고, 평면 PQR의 방정식을 찾을 건데, 점 C의 좌표가 $(2,\sqrt{5},5)$인 게 마음에 안 듭니다. 이 숫자를 좀 바꿨으면 싶습니다.

   평면 $\mathrm{OQ_1R_1}$을 그대로 xy평면으로 보기로 했으니, xy평면에 수직인 직선인 z축은 그대로 z축이어야 하겠습니다. 그래서 점들의 z좌표는 그냥 가만히 놔둡니다.

   위에 있는 그림에서 직선 $\mathrm{OQ_1}$을 x축으로 본다면, 직선 $\mathrm{C'R_1}$은 y축과 평행합니다. 이렇게 되면 좌표들의 숫자가 괜찮은 편입니다.

   $\overline{\mathrm{OC'}}=3$, $\overline{\mathrm{OQ_1}}=8$, $\overline{\mathrm{C'R_1}}=5$라서 $\mathrm{C'}(3,0,0)$, $\mathrm{Q_1}(8,0,0)$, $\mathrm{R_1}(3,5,0)$으로 좌표를 바꾸었습니다. 두 점 Q, R와 xy평면 사이의 거리가 5이므로 $\mathrm{Q}(8,0,5)$, $\mathrm{R}(3,5,5)$입니다.

4. 세 점 $(0,0,1)$, $(8,0,5)$, $(3,5,5)$를 지나는 평면의 방정식을 찾읍시다.
$(0,0,1)$을 지나므로 방정식을 $ax+by+cz=c$로 두고, Q, R의 좌표를 대입하여 미지수 a, b, c의 비를 찾읍시다.

두 등식 $8a+4c=0$, $3a+5b+4c=0$을 얻습니다. 두 등식에 대한 연립방정식을 풀면 $a=b$와 $a:c=1:-2$를 얻을 수 있습니다. 그러므로 평면 PQR의 방정식은 $x+y-2z=-2$이고, 법선벡터는 $(1,1,-2)$입니다.

xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로 두 평면이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여
$\cos\theta=\dfrac{|(1,1,-2)\cdot(0,0,1)|}{|(1,1,-2)||(0,0,1)|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$입니다.

그러므로 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $20\cos\theta=\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$이고,
정답은 23입니다.

이런 유형의 문제는 나온 적이 거의 없습니다.
왜냐하면 이런 문제를 낸다는 것 자체가 교과 외 풀이를 막으려고 내는 것이기 때문입니다.
원래는 평면의 방정식이 교과 내였으니까요.

그럼에도 좌표를 마음대로 바꿔서 풀려고 하면 얼마든지 풀 수 있습니다.
비슷한 교과 내 문제(좌표 바꿔서 평면의 방정식으로 해결)를 연습문제에서 풀어봅시다.

꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기 구하기

이제 공간도형 문제를 풀기 위한 공간벡터 개념들은 다 배운 것 같습니다.
연습문제들로 넘어가기 전에, 두 가지 주제만 따로 빼서 공부해볼까 합니다.
그중 하나는 **“꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기 구하기”**라는 주제입니다.

교과 내 문제에서 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하라고 물어볼 수 있습니다.
일반적인 풀이는 꼬인 위치에 있는 두 직선 중에서 하나를 평행이동하여 한 점에서 만나게 한 뒤에 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하는 것입니다.

하지만 이 작업이 그렇게 편하지만은 않습니다. 공간벡터를 이용해서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있습니다.

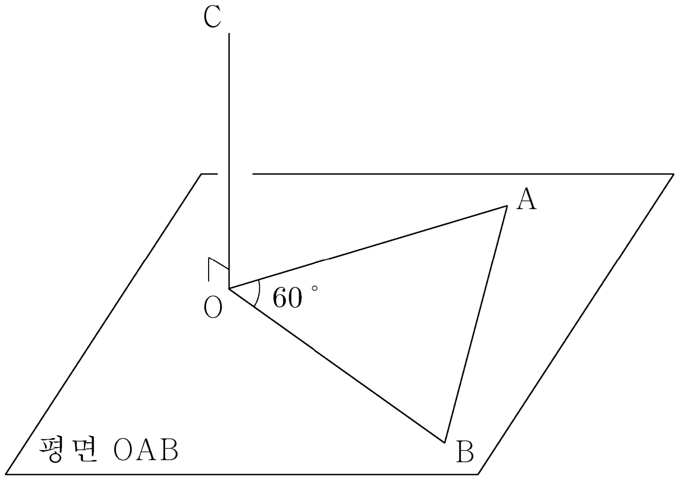
적당한 난이도의 예제를 두 문제 보겠습니다.

예제: 22학년도 수능특강

중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 구 위의 세 점 A, B, C가 $\angle \mathrm{AOB} = 60^\circ$,
$\angle \mathrm{AOC} = \angle \mathrm{BOC} = 90^\circ$ 를 만족시킨다. 직선 OB와 직선 AC가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,
$\cos^2\theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

34

1. $\angle \mathrm{AOC} = \angle \mathrm{BOC} = 90^\circ$ 라는 조건을 우선 생각해보면, 직선 OC와 직선 OA가 서로 수직이고, 직선 OC와 직선 OB가 서로 수직입니다. 그러므로 직선 OC와 평면 OAB는 서로 수직입니다. $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = 2$와 $\angle \mathrm{AOB} = 60^\circ$ 라는 조건을 고려하여 그림을 그려봅시다.



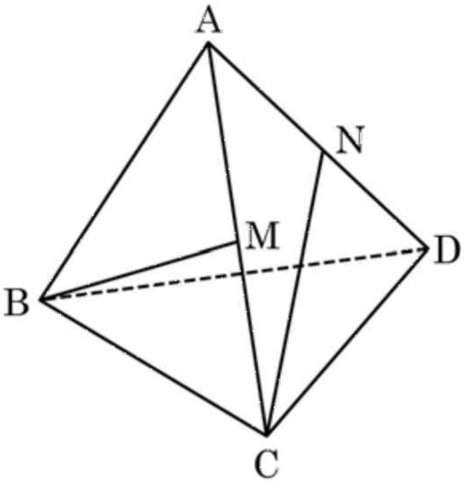
2. 직선 OB와 직선 AC가 이루는 각의 크기를 구해야 하는데, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$가 이루는 각의 크기를 구하면 되겠습니다. $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{CA}}|} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}}{2 \times 2\sqrt{2}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}$의 값만 구하면 답을 낼 수 있습니다. 점 C에서 평면 OAB에 내린 수선의 발이 O이므로, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$[3]이다. 이 값이 $2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$이므로 $\cos\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$이고, $\cos^2\theta = \dfrac{1}{8}$이다. 그래서 정답은 9입니다.

꼬인 위치에 있는 두 직선이 서로 만나도록 한 직선을 평행이동하는 작업이 다소 불편했습니다.
예제 한 문제 더 봅시다.

3) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{CO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$이다.
그리고 직선 OC와 평면 OAB가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CO}} = 0$이다.

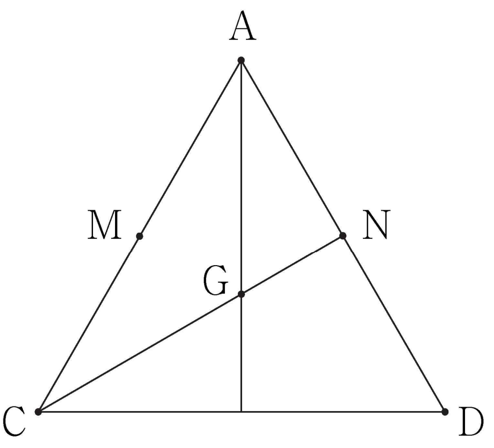
예제: 11년 10월 교육청 30번

정사면체 ABCD에서 두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 직선 BM과 직선 CN이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



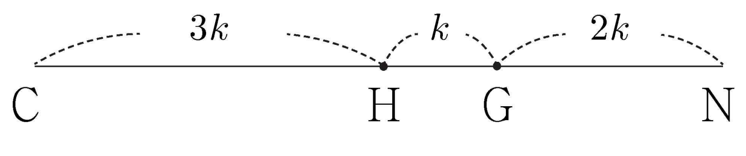
1. 직선 BM과 직선 CN이 이루는 예각의 크기를 구해야 하는데, 역시 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CN}}$이 이루는 예각의 크기를 구하면 되겠습니다. $\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{BM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{BM}}||\overrightarrow{\mathrm{CN}}|}$ 입니다. 여기서 정사면체의 한 모서리의 길이가 주어지지 않았으므로 길이를 편한 대로 설정하면 되겠고, $|\overrightarrow{\mathrm{BM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CN}}|$ 임을 알고 있습니다.
$|\overrightarrow{\mathrm{BM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CN}}| = 1$로 잡으면 $\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{BM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}}|$ 입니다. 내적만 계산하면 됩니다.

2. 네 점 B, C, M, N 중에서 세 점 C, M, N은 평면 ACD 위의 점입니다. 점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발은 정삼각형 ACD의 무게중심입니다. 이 점을 G라 합시다.



$|\overrightarrow{\mathrm{BM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}}| = |\overrightarrow{\mathrm{GM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}}|$ 임을 알 수 있습니다. 네 점 G, M, C, N이 한 평면 위의 점이므로 평면벡터의 내적이라고 볼 수 있겠습니다.

3. 한편, 네 점 C, G, M, N 중에서 세 점 C, G, N은 한 직선 위의 점입니다. 점 M에서 이 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면, $|\overrightarrow{\mathrm{GM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}}| = |\overrightarrow{\mathrm{GH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}}|$ 이다.



길이의 비가 $3:1:2$이므로 $3k$, k, $2k$로 잡아봤습니다. 우리가 처음에 $|\overrightarrow{\mathrm{CN}}| = 1$로 잡았으므로 $k = \dfrac{1}{6}$ 입니다. $|\overrightarrow{\mathrm{GH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}}| = \overrightarrow{\mathrm{HG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CN}} = |\overrightarrow{\mathrm{HG}}||\overrightarrow{\mathrm{CN}}| = \dfrac{1}{6}$ 입니다. 그러므로 $\cos\theta = \dfrac{1}{6}$ 입니다.
정답은 7이네요.

공간벡터 회전

'개요'에서 22학년도 예비평가 30번에 대한 얘기를 짧게 했습니다. 이 문제는 기하 교과 내 문제이지만 교과 외 풀이가 교과 내 풀이보다 유리한 것 같습니다.

이전 교육과정에서 모의고사 29번으로 자주 나오던 주제라서 그냥 계산하다보면 답이 나오는 유형입니다. 문제 상황은 일반적으로 다음과 같습니다.

세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$에 대하여 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 θ_1과 $\vec{a}$와 $\vec{c}$가 이루는 각의 크기 θ_2를 안다고 합시다. 이 상황에서 $\vec{b}$와 $\vec{c}$가 이루는 각의 크기의 최대 혹은 최솟값을 구하고자 한다.

(단, $0 < \theta_1 < \theta_2 \leq \dfrac{\pi}{2}$이라고 합시다.) (또, 일반적으로 최솟값을 묻는 경우가 많습니다.)

문제를 다음과 같은 규칙으로 그림을 그려서 해결합니다.

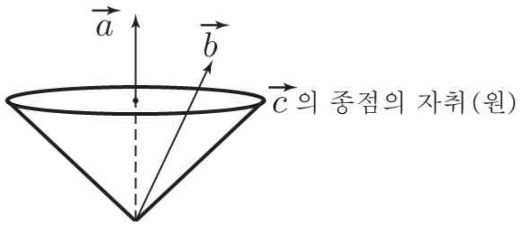
① 세 벡터를 그려야 하는데, 우선 세 벡터의 시점을 모두 같게 합니다.

② $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기와, $\vec{a}$와 $\vec{c}$가 이루는 각의 크기를 알고 있습니다. 문제에서 주어진 조건에 따르면 $\vec{a}$가 공통이므로 $\vec{a}$를 똑바로 세워서 그립니다.

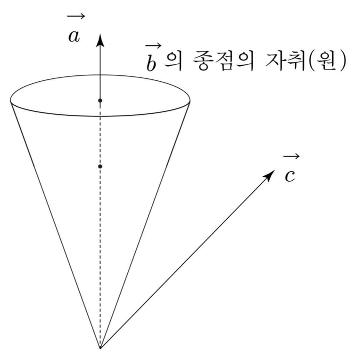
③ 두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$를 마저 그려줍니다. 회전하는 벡터의 종점의 **자취**는 원으로 그려줍니다.
이때, 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$의 크기는 무시해도 좋습니다. 알고 싶은 건 벡터의 크기가 아니라 벡터가 이루는 각의 크기이기 때문입니다.

큰 틀은 위와 같은데, 문제마다 상황이 조금씩은 다를 수 있겠습니다.

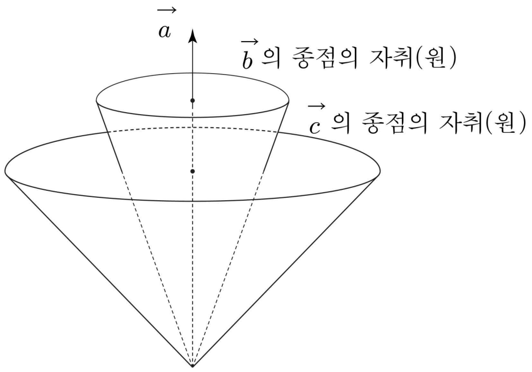
① $\vec{a}$, $\vec{b}$가 정해져 있고, $\vec{c}$가 $\vec{a}$를 축으로 회전하는 경우



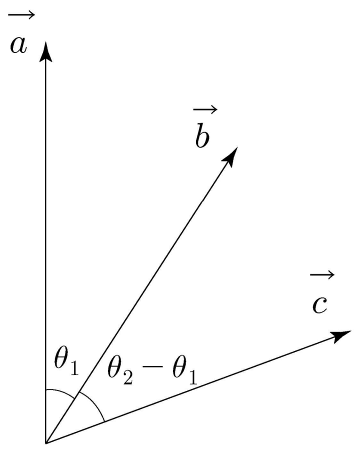
② $\vec{a}$, $\vec{c}$가 정해져 있고, $\vec{b}$가 $\vec{a}$를 축으로 회전하는 경우



③ $\vec{a}$가 정해져 있고, $\vec{b}$와 $\vec{c}$가 $\vec{a}$를 축으로 각각 회전하는 경우



세 경우 모두 $\vec{b}, \vec{c}$가 이루는 각의 크기의 최솟값은 $\theta_2 - \theta_1$입니다.



어떤 문제에서는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 0 이상 θ_1 이하로 주어지는 경우도 있습니다.
이때는 $\vec{b}$의 종점이 원의 경계 및 내부입니다(이런 경우는 이번 교육과정에서 다뤄지기 어렵습니다.)

지금까지의 기출문제들은 이 정도 선에서 모두 해결됩니다.

모의고사에서 벡터 회전과 관련된 문제가 나온다면 θ_1, θ_2, $\theta_2 - \theta_1$이 모두 특수각이거나 $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$로 주어질 것입니다. 그렇지 않을 경우에는 삼각함수 덧셈정리를 이용해야 하는데, 이 내용은 미적분 교과서에 해당하기 때문입니다.

이 유형의 쉬운 문제를 하나 풀어본 다음에 같이 22학년도 예비평가 30번을 풀어봅시다.

12학년도 수능 21번

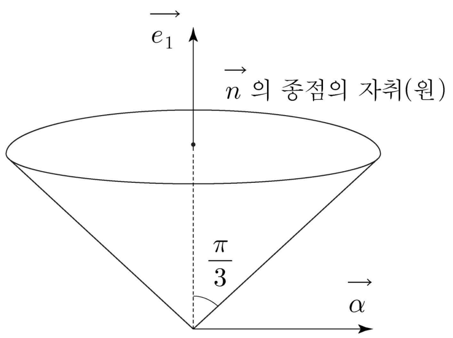
좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 6이다.
(나) 삼각형 ABC의 yz평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

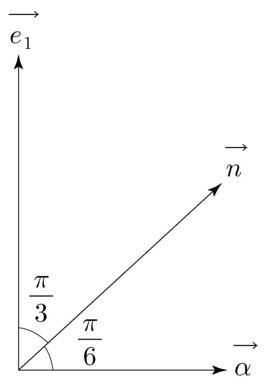
삼각형 ABC의 평면 $y+z=0$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 S이다. S^2의 값을 구하시오. [4점]

1. 평면 ABC의 법선벡터를 $\overrightarrow{n}$이라 하고, yz평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$이라 합시다.
(가)와 (나) 조건에 따르면 평면 ABC와 yz평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $6\cos\theta=3$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$이고, $\theta=\frac{\pi}{3}$입니다.

2. 평면 $y+z=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{\alpha}=(0,1,1)$이라 합시다. $\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\alpha}=0$이므로 $\overrightarrow{e_1}$과 $\overrightarrow{\alpha}$는 서로 수직입니다. 그림을 그려봅시다. $\overrightarrow{e_1}$과 $\overrightarrow{n}$이 이루는 각을 알고, $\overrightarrow{e_1}$과 $\overrightarrow{\alpha}$가 이루는 각을 알고 있습니다. $\overrightarrow{e_1}$이 공통이므로 $\overrightarrow{e_1}$을 똑바로 세워서 그립니다.



우리가 알고 싶은 건 평면 ABC와 평면 $y+z=0$이 이루는 각의 크기의 최솟값, 즉 $\overrightarrow{n}$과 $\overrightarrow{\alpha}$가 이루는 각의 크기의 최솟값입니다. $\overrightarrow{n}$이 아래 그림과 같을 때 $\overrightarrow{n}$과 $\overrightarrow{\alpha}$가 이루는 각의 크기가 최소이고, 그 값은 $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{6}$입니다.

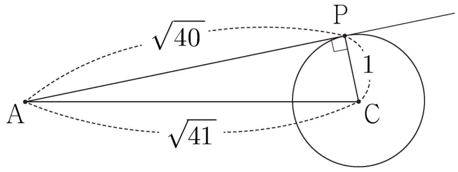


$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 삼각형 ABC의 평면 $y+z=0$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $3\sqrt{3}$입니다. 그러므로 정답은 27입니다.

22학년도 예비평가 30번

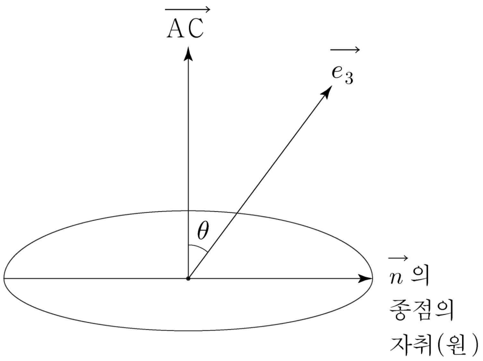
좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(0, 0, 1)$을 지나는 직선이 중심이 $\mathrm{C}(3, 4, 5)$이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점 P에서만 만난다. 세 점 A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. 점 P는 구 밖의 점 A에서 구에 그은 접선의 접점입니다. 그렇다면 삼각형 ACP는 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{41}$, $\overline{\mathrm{CP}}=1$, $\angle\mathrm{APC}=90^{\circ}$ 인 직각삼각형입니다. 간단한 그림을 그려봅시다.

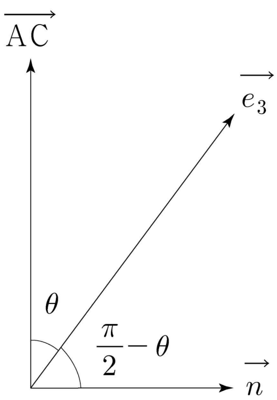


구하고자 하는 값은 세 점 A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값입니다. 우선 세 점 A, C, P를 지나는 원의 넓이를 구해야 하는데, $\angle\mathrm{APC}=90^{\circ}$ 이므로 이 원의 지름의 길이는 $\sqrt{41}$ 입니다. 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$ 이므로 원의 넓이는 $\dfrac{41}{4}\pi$이 되겠습니다.

2. 평면 ACP와 xy평면이 이루는 각의 크기의 최솟값을 찾아야 합니다. 평면 ACP의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면, $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,4,4)$입니다. xy평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$입니다. $\overrightarrow{e_3}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면, $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{e_3}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$입니다. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 $\vec{n}$이 이루는 각의 크기를 알고, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 $\overrightarrow{e_3}$가 이루는 각의 크기를 압니다. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 공통이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 세워서 그립시다.



우리가 알고 싶은 건 xy평면과 평면 ACP가 이루는 각의 크기의 최솟값, 즉 $\overrightarrow{e_3}$와 $\vec{n}$이 이루는 각의 크기의 최솟값입니다. $\vec{n}$이 다음 그림과 같을 때 $\overrightarrow{e_3}$와 $\vec{n}$이 이루는 각의 크기가 최소이고, 그 값은 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$입니다.



$\cos\theta=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$ 이므로 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$ 입니다.

그러므로 세 점 A, C, P를 포함하는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{5}{4}\sqrt{41}$ 입니다.

그래서 정답은 9입니다.

이제 연습문제를 풀어볼 시간입니다. 해설은 손풀이로 쓰려고 합니다.
일부 문항의 해설은 이미 제가 작업을 해둔 상태라 타이핑된 해설로 제공되겠습니다.

연습문제는 공간벡터 문제, 공간도형 문제 두 가지로 나뉩니다.

결국 이 글을 읽는 목적은 수능에서 공간도형 문제를 잘 풀기 위함입니다.
교과 내 풀이가 안 떠오르더라도 답을 낼 수 있게 함이 목적이죠.

교과 외 풀이를 잘 구사할 수 있도록 공간벡터 자체의 실력을 기르기 위한 문제들이 공간벡터 문제들입니다.

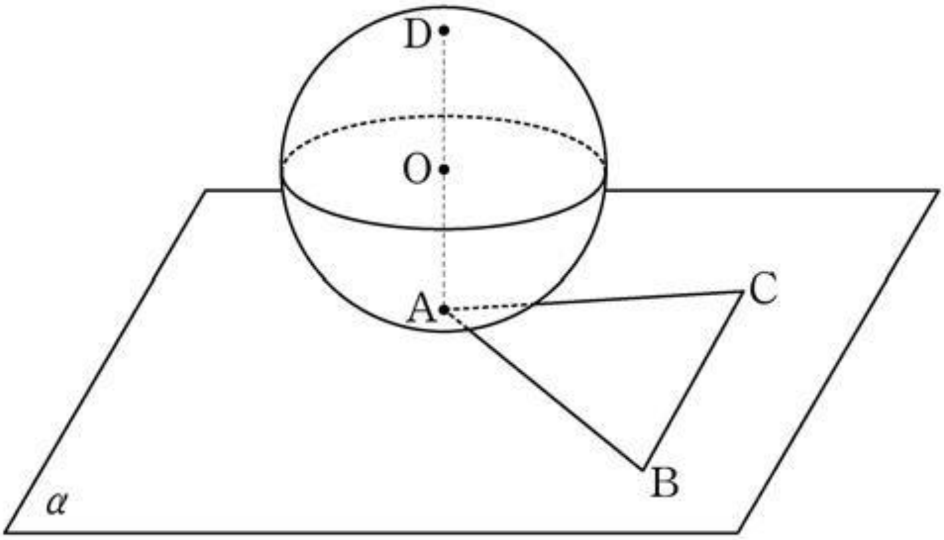
이를 공간도형에 적용해보는 연습을 공간도형 문제를 풀면서 진행하시면 되겠습니다.

교과 외 문제 중에서 지나치게 난이도가 높은 것 같은 문제는 따로 빨간색으로 표시해두겠습니다.
이 문제는 너무 오래 붙잡고 있지 말고, 적당히 시도하다가 안 되면 해설만 이해하는 식으로 공부하면 좋겠습니다.

공간벡터 연습문제

1. 07학년도 수능 24번

그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2$의 값을 구하시오. [4점]

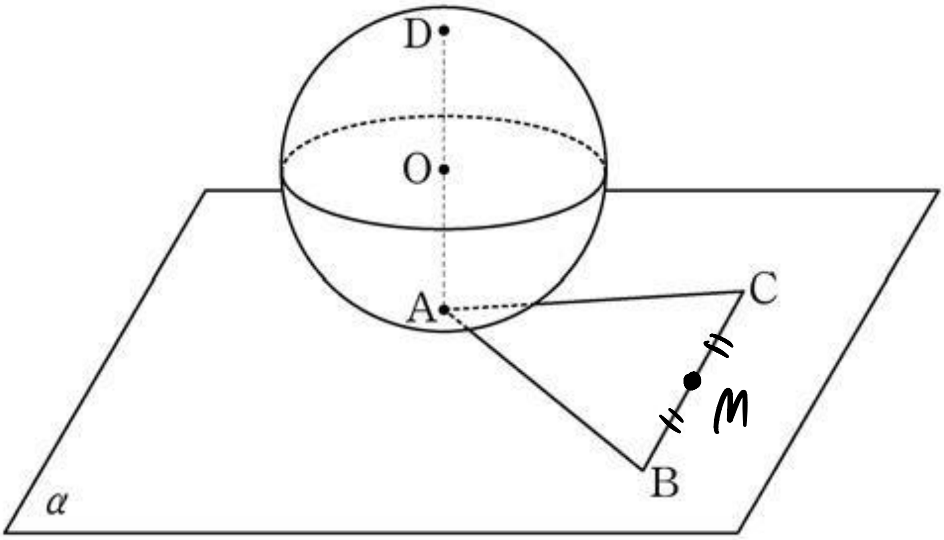


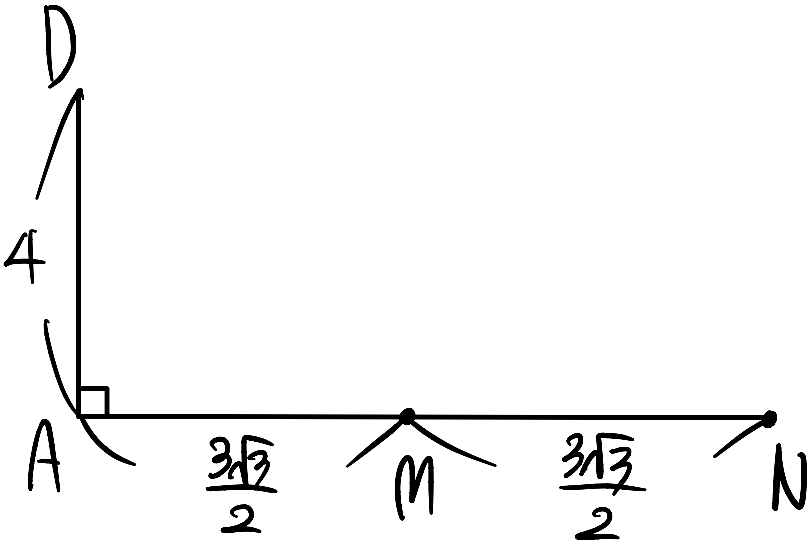
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AM}$$

공간벡터 연습문제

1. 07학년도 수능 24번

그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2$의 값을 구하시오. [4점]





$$\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DN}$$

$$|\overrightarrow{DN}|^2 = \boxed{43}$$

2. 09학년도 수능 22번

좌표공간의 점 $A(3,3,3)$과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

P는 방향이 자유로움.

2. 09학년도 수능 22번

좌표공간의 점 $A(3,3,3)$과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$의 값은

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$와 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$의 방향이 같을 때 최대.

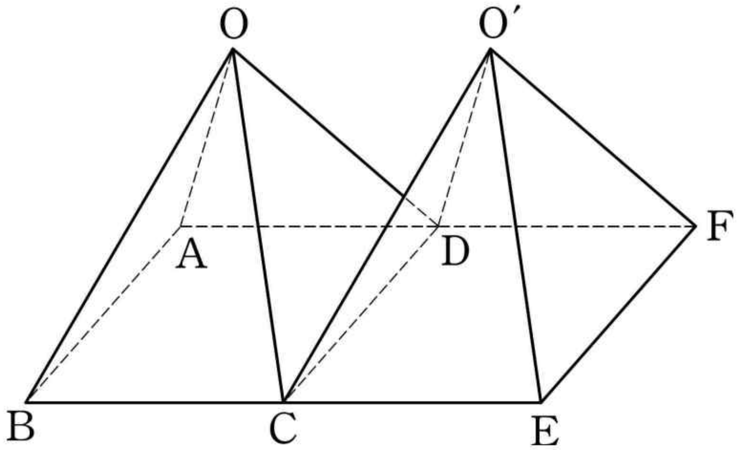
최댓값 $= \frac{2}{3}|\overrightarrow{OA}| + \frac{1}{3}|\overrightarrow{OP}|$

$= 2\sqrt{3} + 3$

$\boxed{50}$

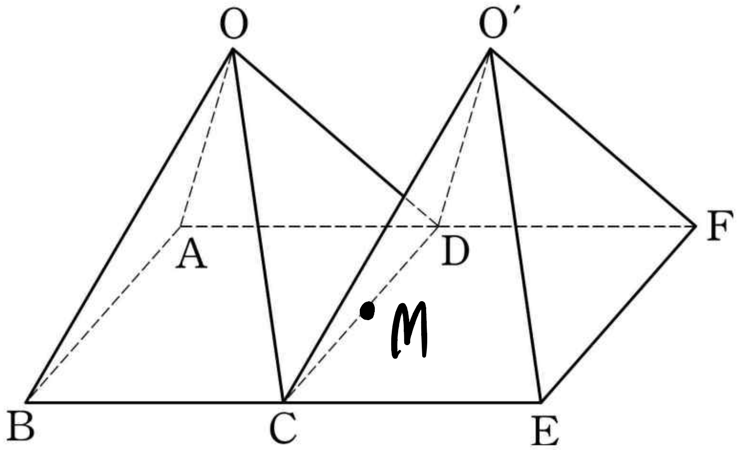
3. 07학년도 9월 평가원 21번

그림은 모든 모서리의 길이가 2인 두 개의 정사각뿔 O－ABCD, O′－DCEF에 대하여 모서리 CD를 일치시킨 도형을 나타낸 것이다. $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}|^2$의 값을 구하시오.
(단, 면 ABCD와 면 DCEF는 한 평면 위에 있다.) [4점]



3. 07학년도 9월 평가원 21번

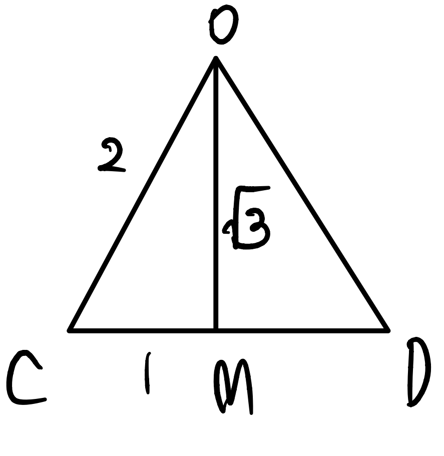
그림은 모든 모서리의 길이가 2인 두 개의 정사각뿔 O－ABCD, O′－DCEF에 대하여 모서리 CD를 일치시킨 도형을 나타낸 것이다. $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}|^2$의 값을 구하시오.
(단, 면 ABCD와 면 DCEF는 한 평면 위에 있다.) [4점]



$\overline{BF}$ 중점 = $\overline{CD}$ 중점 = M

$|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}| = |2\overrightarrow{OM}| = 2|\overrightarrow{OM}| = 2\sqrt{3}$

$\boxed{12}$



4. 07학년도 수능 21번

좌표공간의 점 A$(3, 6, 0)$에서 평면 $\sqrt{3}y - z = 0$에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

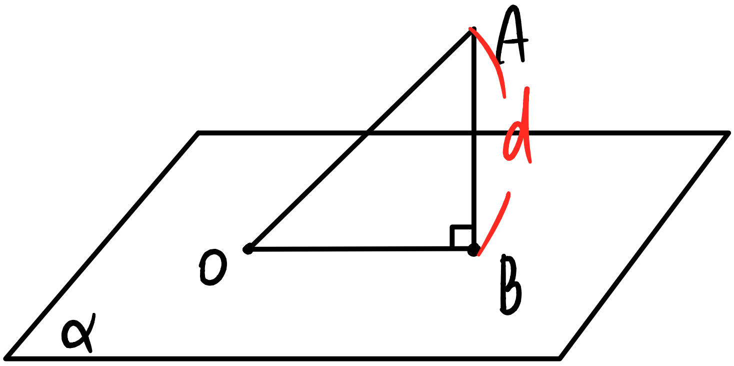
점과 평면 사이의 거리 공식

4. 07학년도 수능 21번

좌표공간의 점 A$(3, 6, 0)$에서 평면 $\sqrt{3}y - z = 0$에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

α

O는 α 위의 점이다.



$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}|^2 = \overline{OA}^2 - d^2$$

$$= (3^2+6^2) - \left(\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}\right)^2$$

$$= 45 - (3\sqrt{3})^2 = \boxed{18}$$

5. 07학년도 9월 평가원 3번

두 벡터 $\vec{a}=(2,2,1)$, $\vec{b}=(1,4,-1)$이 이루는 각의 크기 θ의 값은? (단, $0 \le \theta \le \pi$이다.) [2점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

5. 07학년도 9월 평가원 3번

두 벡터 $\vec{a}=(2,2,1)$, $\vec{b}=(1,4,-1)$이 이루는 각의 크기 θ의 값은? (단, $0 \le \theta \le \pi$이다.)

[2점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{2+8-1}{3 \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

6. 17학년도 9월 평가원 18번

좌표공간에 점 $\mathrm{P}(0, 0, 4)$가 있고, xy평면 위의 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 ABP의 법선벡터가 $\vec{n} = (2, -2, 1)$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

법선벡터 $= \vec{e_3} = (0.0.1)$

6. 17학년도 9월 평가원 18번

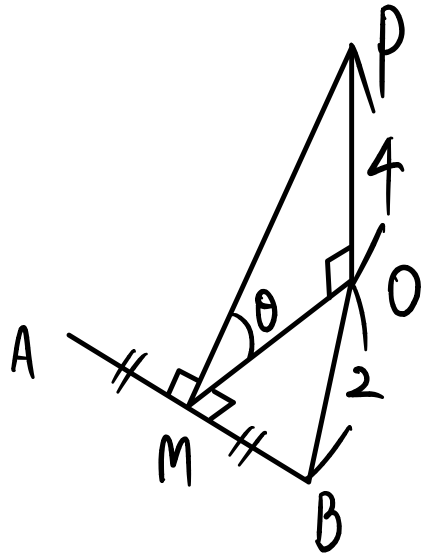
좌표공간에 점 $\mathrm{P}(0,0,4)$가 있고, xy평면 위의 원 $x^2+y^2=4$ 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 ABP의 법선벡터가 $\vec{n}=(2,-2,1)$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\sqrt{6}$　　② $2\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{10}$　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $\sqrt{14}$

평면 ABP 와 xy 평면이 이루는 각의 크기 θ

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{e_3}}{|\vec{n}|\,|\vec{e_3}|} = \frac{1}{3}$$

$\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{PA}=\overline{PB}$



$\overline{OM} = \sqrt{2}$

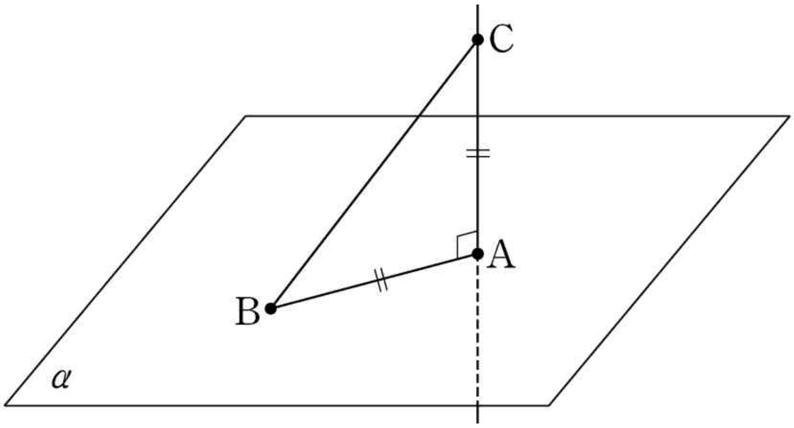
$\rightarrow$ $\overline{MB} = \overline{MA} = \sqrt{2}$

$\therefore$ $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$

7. 14학년도 9월 평가원 28번

좌표공간에서 평면 α 위에 두 점 $\mathrm{A}(1,0,1)$, $\mathrm{B}(-1,a,a)$가 있다. 좌표공간의 점 C에 대하여 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 A이고, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$는 $(1,2,-1)$와 평행하다.

삼각형 ABC가 이등변삼각형일 때, 원점 O에 대하여 선분 OC의 길이는 d이다. d^2의 값을 구하시오. [4점]

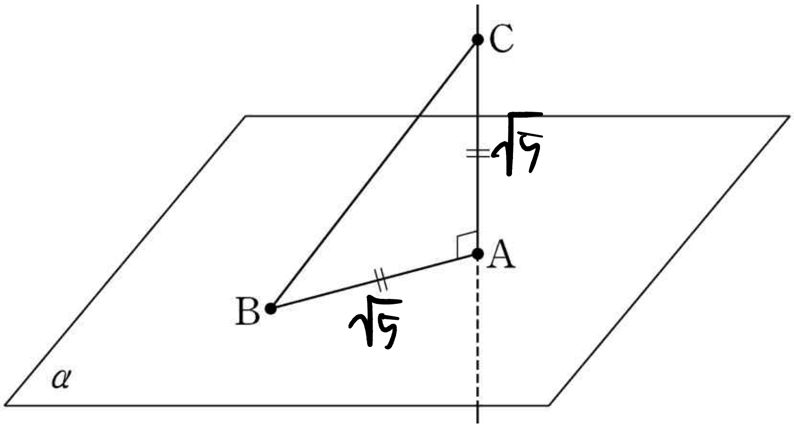


α : $1(x-1)+2(y-0)+(-1)(z-1)$

$\to x+2y-z=0$

7. 14학년도 9월 평가원 28번

좌표공간에서 평면 α 위에 두 점 A$(1, 0, 1)$, B$(-1, a, a)$가 있다. 좌표공간의 점 C에 대하여 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 A이고, $\overrightarrow{AC}$는 $(1, 2, -1)$와 평행하다.
삼각형 ABC가 이등변삼각형일 때, 원점 O에 대하여 선분 OC의 길이는 d이다. d^2의 값을 구하시오. [4점]

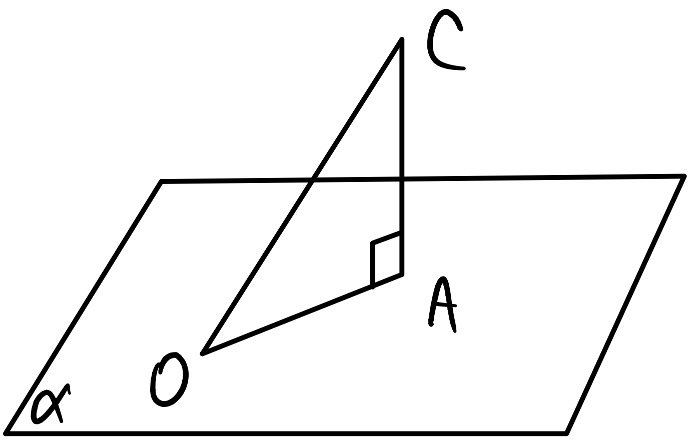


B$(-1, a, a)$가 평면 $x+2y-z=0$ 위의 점이다.

$-1+2a-a=0 \to a=1$

$\overline{AB}=\sqrt{5}$

원점 O도 평면 α 위의 점이다.

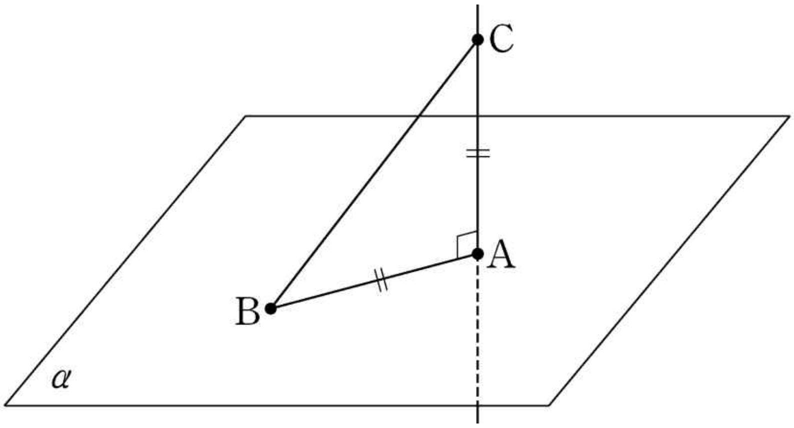


$\overline{OA}=\sqrt{2}$

$d^2=7$

7. 14학년도 9월 평가원 28번

좌표공간에서 평면 α 위에 두 점 $A(1, 0, 1)$, $B(-1, a, a)$가 있다. 좌표공간의 점 C에 대하여 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 A이고, $\overrightarrow{AC}$는 $(1, 2, -1)$와 평행하다.
삼각형 ABC가 이등변삼각형일 때, 원점 O에 대하여 선분 OC의 길이는 d이다. d^2의 값을 구하시오. [4점]



a 구하는 다른 방법

$\overrightarrow{AB} = (-2, a, a-1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot (1, 2, -1) = 0$

$\longrightarrow -2+2a-a+1=0 \longrightarrow a=1$

8. 08학년도 9월 평가원 6번

평면 $2x-y=0$과 평면 $x-3y+kz+2=0$이 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

8. 08학년도 9월 평가원 6번

평면 $\underline{2x-y=0}$과 평면 $\underline{x-3y+kz+2=0}$이 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

α β

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

$\vec{\alpha} = (2.\ -1.\ 0)$ $\vec{\beta} = (1.\ -3.\ k)$

$$\cos 60° = \frac{|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|\ |\vec{\beta}|} = \frac{|2+3|}{\sqrt{5} \times \sqrt{k^2+10}} = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{k^2+10}} = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \sqrt{k^2+10} = \sqrt{20}$$

$$\longrightarrow k^2 = 10$$

9. 10학년도 수능 20번

좌표공간에서 벡터 $\vec{n}=(2,3,1)$에 수직이고 점 $(1,-5,2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+ay+bz+c=0$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [3점]

9. 10학년도 수능 20번

좌표공간에서 벡터 $\vec{n}=(2,3,1)$에 수직이고 점 $(1,-5,2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+ay+bz+c=0$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [3점]

$a=3 \quad b=1$

$2x+3y+z+c=0$

$2-15+2+c=0 \longrightarrow c=11$

$\boxed{15}$

10. 17학년도 수능 24번

좌표공간에서 평면 $x+8y-4z+k=0$이 구 $x^2+y^2+z^2+2y-3=0$에 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

10. 17학년도 수능 24번 α

좌표공간에서 평면 $x+8y-4z+k=0$이 구 $x^2+y^2+z^2+2y-3=0$에 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

$$x^2+(y^2+2y+1)+z^2=4$$

$$x^2+(y+1)^2+z^2=2^2$$

점 $(0,-1,0)$과 평면 α 사이 거리 $=2$

$$\longrightarrow \quad 2=\frac{|-8+k|}{\sqrt{1^2+8^2+4^2}}$$

$$\longrightarrow \quad 18=|k-8|$$

$$\therefore \quad k=8+18,\quad 8-18$$

$$\boxed{16}$$

11. 17학년도 수능 12번

좌표공간에서 평면 $2x+2y-z+5=0$과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

11. 17학년도 수능 12번

좌표공간에서 평면 $\underline{2x+2y-z+5=0}$과 $\underline{xy\text{평면}}$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

α $z=0$

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

$\vec{\alpha}=(2,2,-1)$ $\vec{e_z}=(0,0,1)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{e_z}|}{|\vec{\alpha}||\vec{e_z}|}=\frac{1}{3\times1}$$

12. 14학년도 사관학교 24번

한 모서리의 길이가 $6\sqrt{6}$인 정사면체 ABCD에 대하여 점 P가

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=2\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

를 만족시킨다. 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 할 때, 선분 PG의 길이를 구하시오. [3점]

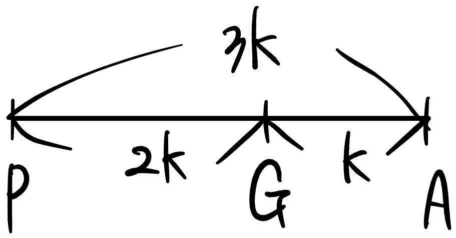
12. 14학년도 사관학교 24번

한 모서리의 길이가 $6\sqrt{6}$인 정사면체 ABCD에 대하여 점 P가

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PA}$$

를 만족시킨다. 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 할 때, 선분 PG의 길이를 구하시오. [3점]

$$3\overrightarrow{PG} = 2\overrightarrow{PA}$$



$$2k = 2\times 6\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 24$$

13. 16학년도 수능 19번

좌표공간에 점 $\mathrm{A}(2, 2, 1)$과 평면 $\alpha : x+2y+2z-14=0$이 있다. 평면 α 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}} \leq 3$을 만족시킬 때, 점 P가 나타내는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

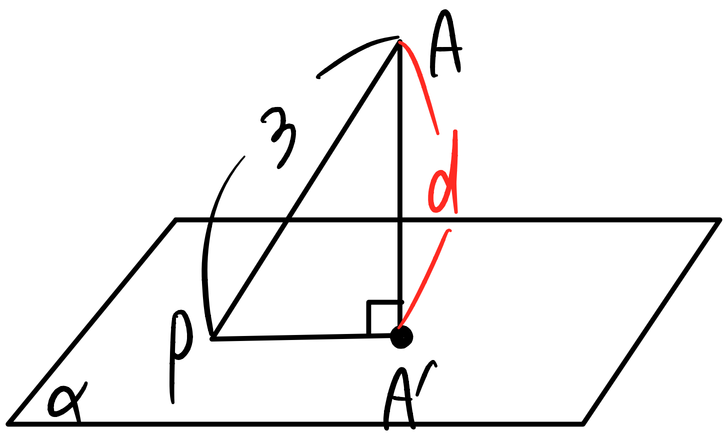
① $\frac{14}{3}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{11}{3}\pi$ ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

점과 평면 사이의 거리

13. 16학년도 수능 19번

좌표공간에 점 A(2, 2, 1)과 평면 $\alpha : x+2y+2z-14=0$이 있다. 평면 α 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}} \le 3$을 만족시킬 때, 점 P가 나타내는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

① $\frac{14}{3}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{11}{3}\pi$ ⑤ $\frac{10}{3}\pi$



P : A'을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{9-d^2}$인 원

$= \sqrt{5}$

$$d = \frac{|2+4+2-14|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 2$$

평면 α 위의 넓이가 5π인 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이

$\vec{\alpha} = (1, 2, 2)$ $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{e_3}|}{|\vec{\alpha}|\,|\vec{e_3}|} = \frac{2}{3} \longrightarrow \boxed{5\pi \times \frac{2}{3}}$$

14. 06년 10월 교육청 21번

좌표공간에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 9인 구가 세 점 $A(18, 0, 0)$, $B(0, 9, 0)$, $C(0, 0, 9)$를 지나는 평면에 의하여 잘린 도형의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오. [4점]

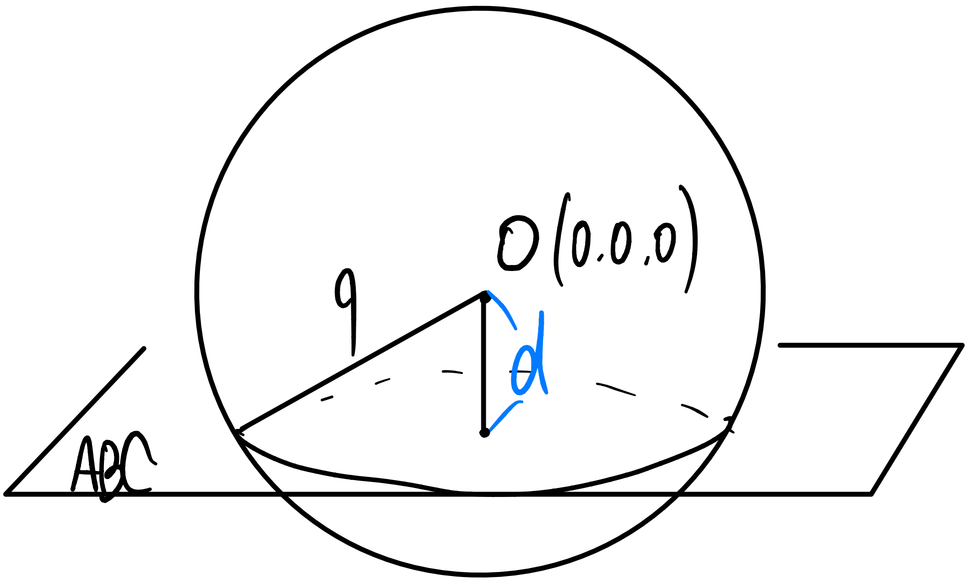
특수한 평면의 방정식

점과 평면 사이의 거리

14. 06년 10월 교육청 21번

좌표공간에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 9인 구가 세 점 A$(18, 0, 0)$, B$(0, 9, 0)$, C$(0, 0, 9)$를 지나는 평면에 의하여 잘린 도형의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오. [4점]

평면 ABC : $\frac{x}{18} + \frac{y}{9} + \frac{z}{9} = 1 \longrightarrow x + 2y + 2z = 18$



$$a = 9^2 - d^2 = 81 - \left[\frac{18}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right]^2$$

$$= 81 - 6^2 = \boxed{45}$$

15. 17년 10월 전북 교육청 29번

좌표공간에서 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 세 점 $\mathrm{A}(6, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 6)$을 지난다.
(나) 구 S의 중심은 삼각형 ABC의 외접원의 중심이다.

구 S와 평면 $z=1$이 만나서 생기는 도형의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q\sqrt{3}}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

좌표 관찰 : x좌표 + y좌표 + z좌표 = 6

특수한 평면 $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1$

15. 17년 10월 전북 교육청 29번

좌표공간에서 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 세 점 $\mathrm{A}(6, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 6)$을 지난다. (나) 구 S의 중심은 삼각형 ABC의 외접원의 중심이다.

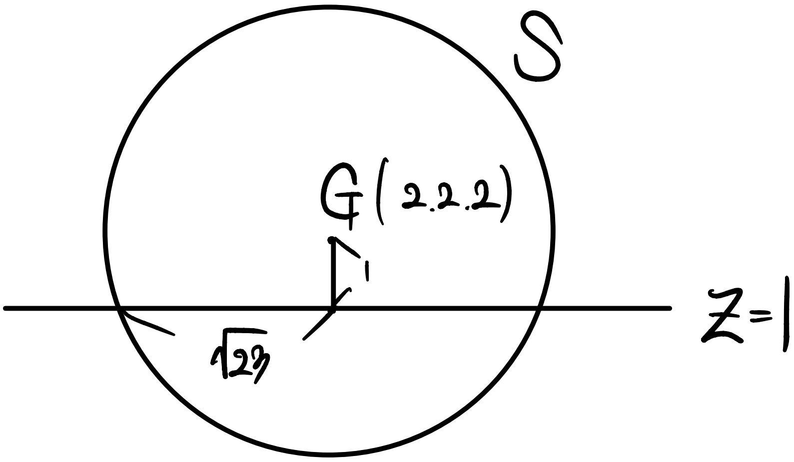
: 원 C

구 S와 평면 $z=1$이 만나서 생기는 도형의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q\sqrt{3}}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

평면 ABC : $x+y+z=6$

구 S 중심 = 정삼각형 ABC의 외접원 중심 = 무게중심

$G(2.2.2)$ 반지름 길이 $=2\sqrt{6}$



원 C 넓이 $=23\pi$

$z=1$: $\vec{e_3}=(0.0.1)$

평면 ABC : $\vec{n}=(1.1.1)$

$\longrightarrow \cos\theta=\frac{\vec{e_3}\cdot\vec{n}}{|\vec{e_3}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{23}{3}\sqrt{3}\pi$

$\boxed{26}$

16. 98학년도 수능 27번

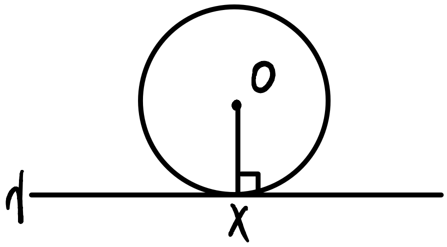
구 $x^2+y^2+z^2=100$ 위의 점 $\mathrm{A}(8,6,0)$에서 구에 접하는 평면을 α, 점 $\mathrm{B}(0,6,8)$에서 구에 접하는 평면을 β라 하자. 평면 α 위의 정삼각형 T가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 T의 한 꼭짓점은 원점 O이다. (나) 삼각형 T의 무게중심은 A이다.

삼각형 T의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{3}a$이다. a의 값을 구하시오. [4점]

접점 X

접평면 γ



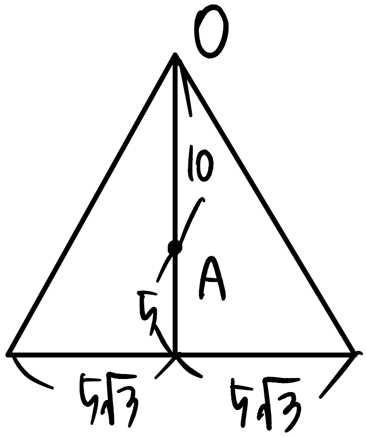
γ 법선벡터 $= \overrightarrow{OX}$

16. 98학년도 수능 27번

구 $x^2+y^2+z^2=100$ 위의 점 $\mathrm{A}(8,6,0)$에서 구에 접하는 평면을 α, 점 $\mathrm{B}(0,6,8)$에서 구에 접하는 평면을 β라 하자. 평면 α 위의 정삼각형 T가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 T의 한 꼭짓점은 원점 O이다.
(나) 삼각형 T의 무게중심은 A이다.

삼각형 T의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{3}a$이다. a의 값을 구하시오. [4점]



삼각형 T 넓이

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (10\sqrt{3})^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 300$

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 θ

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|} = \frac{36}{100}$$

$$\sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 300 \times \frac{36}{100} = 27\sqrt{3}$$

$\boxed{27}$

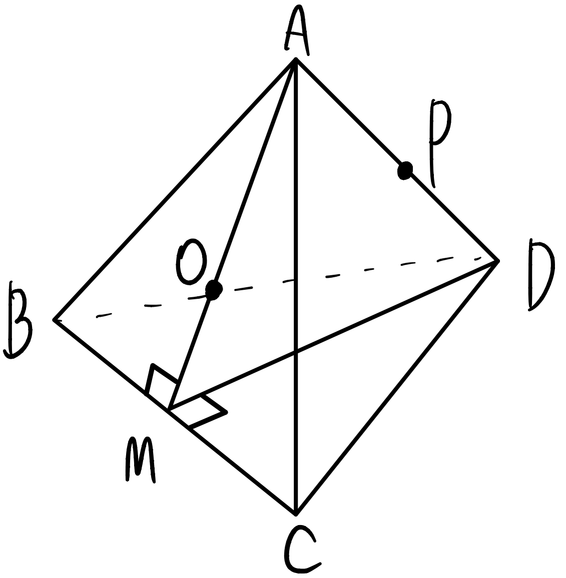
17. 17학년도 수능 29번

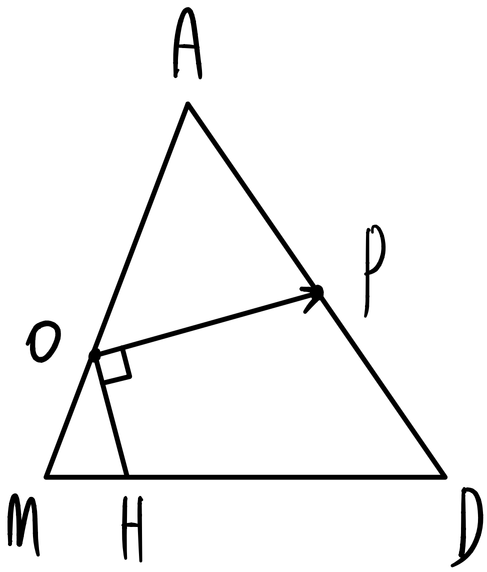
한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① Q가 어떤 식으로 움직이는지 확인

17. 17학년도 수능 29번

한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





Q는 (i) 면 BCD 위의 점이다.

(ii) O를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{OP}$인 평면 α 위의 점이다.

→ Q는 두 평면 BCD, α의 교선 (선분) 위의 점이다.

정사면체 성질 → $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{MD}$

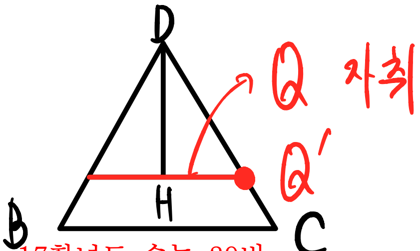
→ $\overrightarrow{BC} \perp$ 평면 MAD

→ $\overrightarrow{BC}$는 평면 MAD 위의 모든 직선과 수직이다.

→ $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OP}$

∴ 점 Q는 H를 지나고 $\overrightarrow{BC}$와 평행한 선분 위의 점이다.

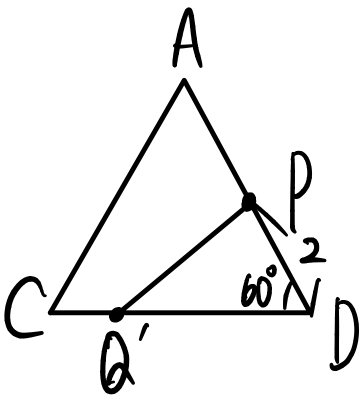
② : 계산



$|\overrightarrow{PQ}|$ 가 최대가 되도록 하는 $Q = Q'$

17. 17학년도 수능 29번

한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

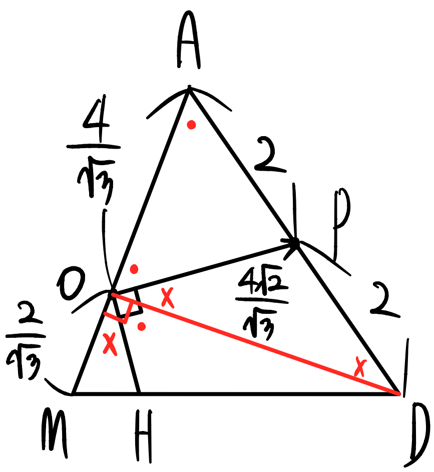


$$\overline{DQ'} = \overline{DH} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\overline{DH}$ 찾고 코사인 법칙으로 $|\overrightarrow{PQ}|$ 구하기

$$|\overrightarrow{PQ'}|^2 = 4 + \frac{4}{3}\overline{DH}^2 - 2\times 2\times \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{DH} \times \frac{1}{2}$$

1.



삼각형 OMD 넓이

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\times\overline{OM}\times\overline{OH}\times\sin(x) + \frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{OH}\times\sin(\bullet)$$

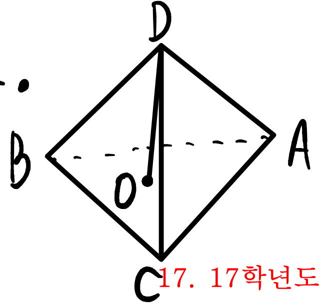
$$= \frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\frac{10}{3} \rightarrow \overline{OH} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

$$\overline{DH}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OD}^2 - 2\,\overline{OH}\times\overline{OD}\times\cos(\bullet)$$

$$= \frac{32}{25} + \frac{32}{3} - 2\times\frac{4\sqrt{2}}{5}\times\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = 32\times\frac{6}{25} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{5}\right)^2$$

$$|\overrightarrow{PQ'}|^2 = 4 + \frac{4}{3}\times\frac{64\times 3}{25} - 2\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{196}{25} = \left(\frac{14}{5}\right)^2 \quad \boxed{19}$$

2.



$\overrightarrow{DO}$가 평면 ABC와 수직이다.

$\rightarrow \overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DO}|^2 = \frac{32}{3}$

17. 17학년도 수능 29번

한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$\overrightarrow{DQ'} = t \times \overrightarrow{DC} \quad (0 < t < 1)$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ'} = (\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DO})\cdot(\overrightarrow{DQ'} - \overrightarrow{DO})$$

$$= \overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ'} - \overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DQ'} + |\overrightarrow{DO}|^2$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot t\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DO}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DO}\cdot t\overrightarrow{DC} + \frac{32}{3}$$

$$= \frac{t}{2}\times 8 - \frac{1}{2}\times\frac{32}{3} - \frac{32}{3}t + \frac{32}{3}$$

$$= -\frac{20}{3}t + \frac{16}{3} = 0$$

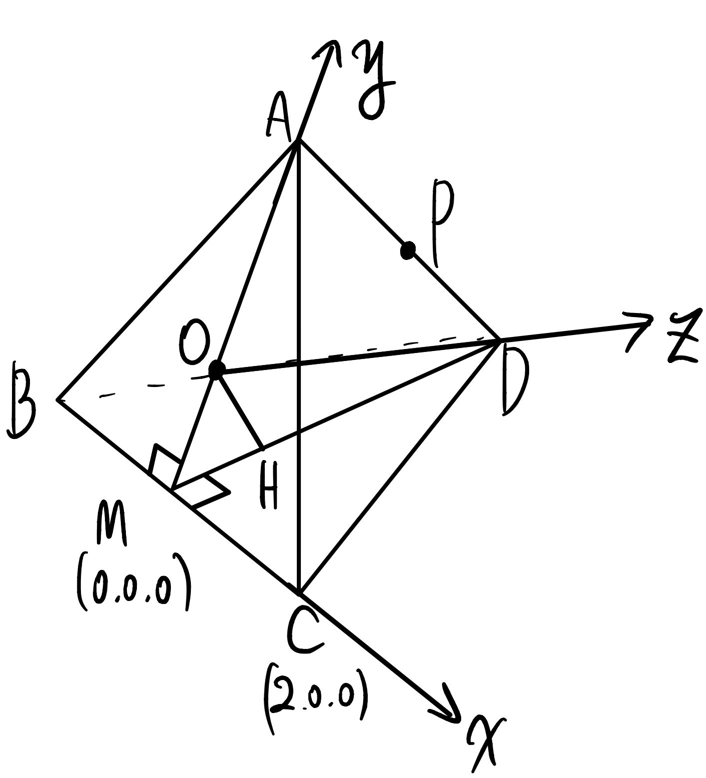
$$\therefore t = \frac{4}{5}$$

$|\overrightarrow{DQ'}| = \frac{4}{5}|\overrightarrow{DC}| = \frac{16}{5}$ 이므로 $|\overrightarrow{PQ'}| = \frac{14}{5}$ $\boxed{19}$

3. 좌표

17. 17학년도 수능 29번

한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$A(0,\ 2\sqrt{3},\ 0)$

$O\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$

$D\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$

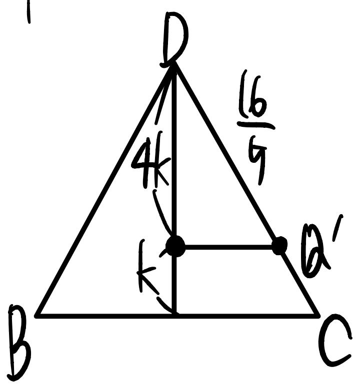
$P\left(0,\ \frac{4\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

$H\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}t,\ \frac{4\sqrt{6}}{3}t\right)$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=0 \rightarrow \left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}(t-1),\ \frac{4\sqrt{6}}{3}t\right)=0$$

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}=(0,\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}) \qquad \frac{3}{2}\overrightarrow{OH}=\left(0,\ \sqrt{3}(t-1),\ 2\sqrt{6}t\right)$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=0 \rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{OP}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{OH}=0 \rightarrow 3(t-1)+12t=0 \quad \therefore t=\frac{1}{5}$$



$\overline{DQ'}=\frac{16}{5}$이므로 $\overline{PQ'}=\frac{14}{5}$ $\boxed{19}$

18. 07학년도 9월 평가원 5번

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(a, 0, b)$, $\mathrm{B}(b, a, 0)$, $\mathrm{C}(0, b, a)$에 대하여 $a^2+b^2=8$일 때, 삼각형 ABC의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최솟값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 3

좌표 관찰 : x좌표 + y좌표 + z좌표 = $a+b$

평면 ABC : $x+y+z=a+b$

18. 07학년도 9월 평가원 5번

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(a, 0, b)$, $\mathrm{B}(b, a, 0)$, $\mathrm{C}(0, b, a)$에 대하여 $a^2+b^2=8$일 때, 삼각형 ABC의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최솟값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 3

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{a^2+b^2+(a-b)^2}$$

삼각형 ABC : 정삼각형

평면 ABC $\perp \vec{n}=(1, 1, 1)$

xy평면 $\perp \vec{e_3}=(0, 0, 1)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{e_3}|}{|\vec{n}|\,|\vec{e_3}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

삼각형 ABC의 xy평면 위로의 정사영 넓이

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[a^2+b^2+(a-b)^2\right]$$

$$=2+\frac{1}{4}(a-b)^2\ge 2 \quad (a=b=2\text{일 때})$$

19. 22학년도 파급효과 N제 마지막 문제

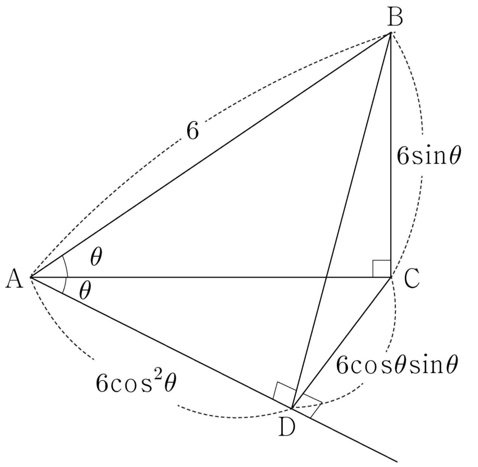
좌표공간의 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$
(나) 평면 ABC와 평면 ACD는 서로 수직이다.
(다) 평면 ABD와 평면 ACD가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.
(라) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$의 모든 성분의 합은 0이다.

삼각형 BCD의 평면 $x+2y+2z=0$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

St

1. 구의 반지름의 길이가 3이고, $\overline{\mathrm{AB}}=6$이므로 A, B는 구의 지름의 양끝점이다.
그러므로 $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADB}=\frac{\pi}{2}$이다. (가)에서 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$라고 하였다. 이 각을 θ라 하자. θ는 예각이다. (나)의 조건과 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=\theta$라는 조건을 통해 다음과 같이 그림을 그리자.



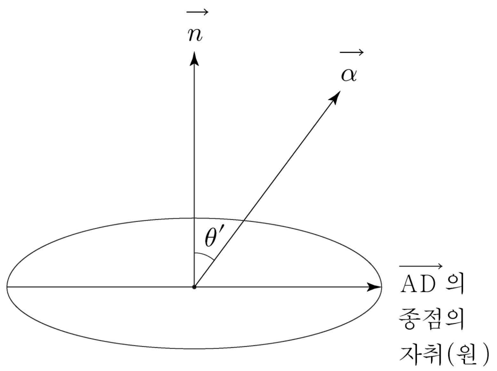
평면 ABC와 평면 ACD가 서로 수직이다. 두 평면의 교선은 직선 AC이고, $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$이므로 점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발은 C이다. 한편, $\angle\mathrm{ADB}=\frac{\pi}{2}$이므로 삼수선의 정리에 의해 직선 AD와 직선 CD가 서로 수직이다.

2. 이제 (다) 조건을 해석하면, 평면 ABD와 평면 ACD의 교선은 직선 AD이다. 우리는 이미 직선 AD와 수직인 두 직선 BD와 직선 CD를 그려놓았다. 그러므로 두 평면 ABD, ACD의 이면각은 $\angle\mathrm{BDC}$이다. 이 값이 $\frac{\pi}{3}$이다.
$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{6\sin\theta}{6\cos\theta\sin\theta}=\sqrt{3}$에서 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$을 얻는다.

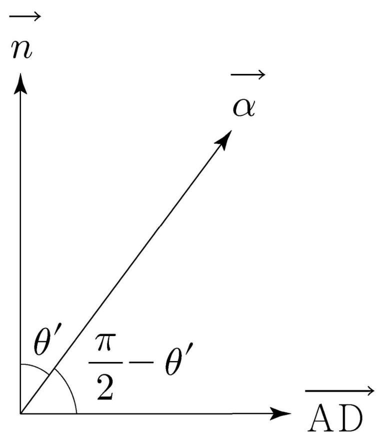
3. 남은 조건은 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$의 모든 성분의 합이 0이라는 것뿐이고, 문제에서 묻는 것은 삼각형 BCD의 평면 $x+2y+2z=0$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값이다.
우선 $\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{2}$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{6}$이므로 삼각형 BCD의 넓이는 $4\sqrt{3}$이다.
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$는 직선 BD와 수직이고, 또 직선 CD와도 수직이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$는 평면 BCD와 수직이다.
즉 평면 BCD의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$이다.

한편, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$의 성분을 (a,b,c)라 할 때, $a+b+c=0$이다.
여기서 발상이 필요한데, $\vec{n}=(1,1,1)$이라 하면, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=a+b+c$이다.
이 값이 0이므로 $\vec{n}$과 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$는 서로 수직이다. 이 발상을 해냈다면 문제를 해결할 수 있다.

4. 평면 $x+2y+2z=0$의 법선벡터를 $\vec{\alpha}=(1,2,2)$라 하자. $\vec{n}$과 $\vec{\alpha}$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하면, $\cos\theta' = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{n}||\vec{\alpha}|} = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}$이다. 그림을 그려보자. $\vec{n}$과 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$가 이루는 각을 알고, $\vec{n}$과 $\vec{\alpha}$가 이루는 각을 안다. $\vec{n}$이 공통이므로 $\vec{n}$을 똑바로 세워서 그린다.



우리가 알고 싶은 건 평면 BCD와 평면 $x+2y+2z=0$가 이루는 각의 크기의 최솟값, 즉 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$와 $\vec{\alpha}$가 이루는 각의 크기의 최솟값이다. $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$가 아래 그림과 같을 때 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$와 $\vec{\alpha}$가 이루는 각의 크기가 최소이고, 그 값은 $\dfrac{\pi}{2}-\theta'$이다.



$\cos\theta' = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}$이므로 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta'\right) = \sin\theta' = \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$이다.

그러므로 삼각형 BCD의 평면 $x+2y+2z=0$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

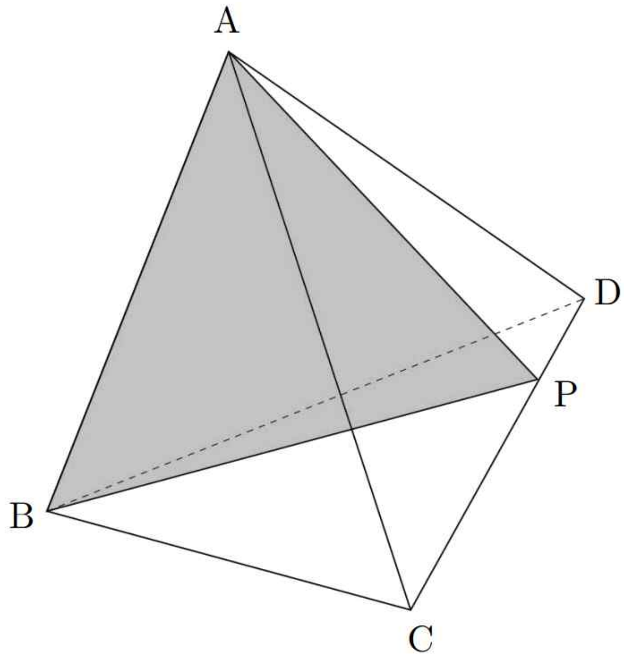
$4\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$이다. 그러므로 정답은 7이다.

공간도형 연습문제

1. 12년 7월 교육청 21번

그림과 같이 정사면체 ABCD의 모서리 CD를 3:1로 내분하는 점을 P라 하자. 평면 ABP와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{18}$



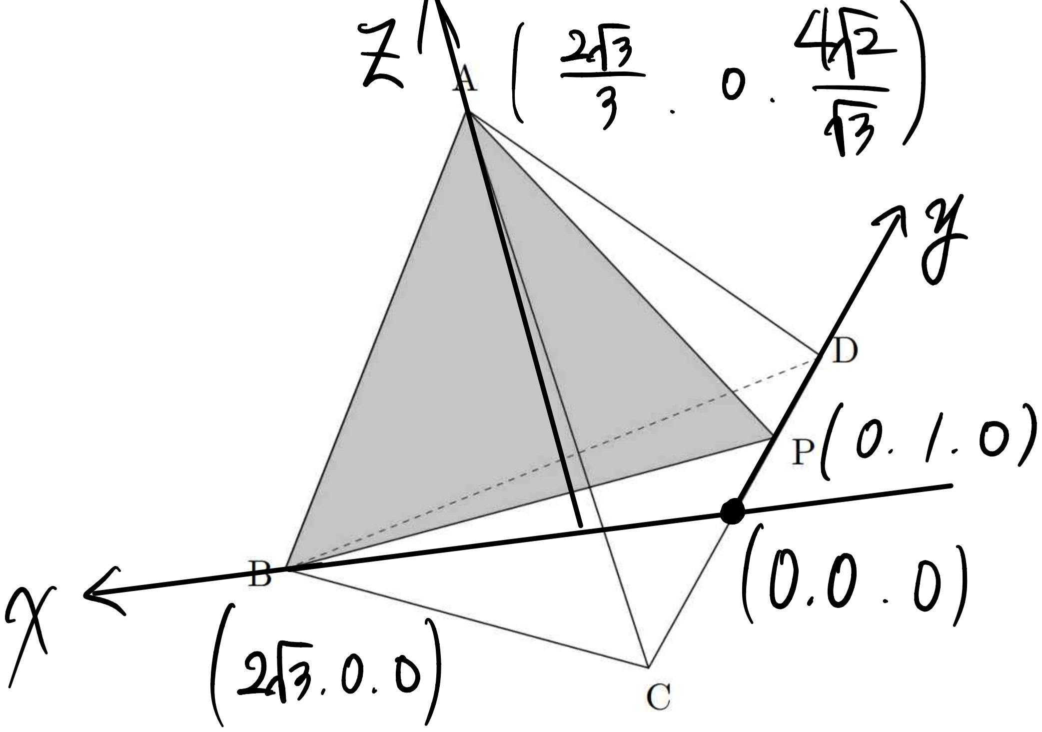
정사면체 모서리 길이 4로 잡고 좌표 설정

공간도형 연습문제

1. 12년 7월 교육청 21번

그림과 같이 정사면체 ABCD의 모서리 CD를 3:1로 내분하는 점을 P라 하자. 평면 ABP와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{18}$



거의 특수한 평면의 방정식

ABP : $\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{y}{1} + cz = 1$

A 좌표 대입

$\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{6}}$

$\rightarrow \sqrt{2}x + 2\sqrt{6}y + z = 2\sqrt{6} \quad \perp \quad \vec{n} = (\sqrt{2}, 2\sqrt{6}, 1)$

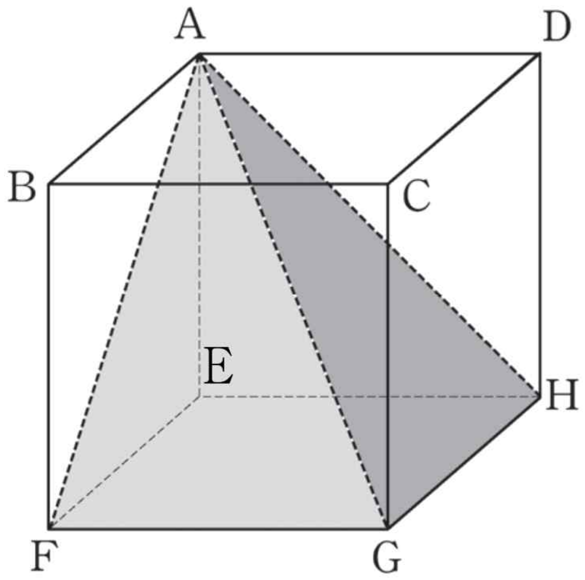
xy평면 $\perp \ \vec{e_3} = (0, 0, 1)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{e_3}}{|\vec{n}||\vec{e_3}|} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

2. 07학년도 수능 6번

정육면체 ABCD−EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

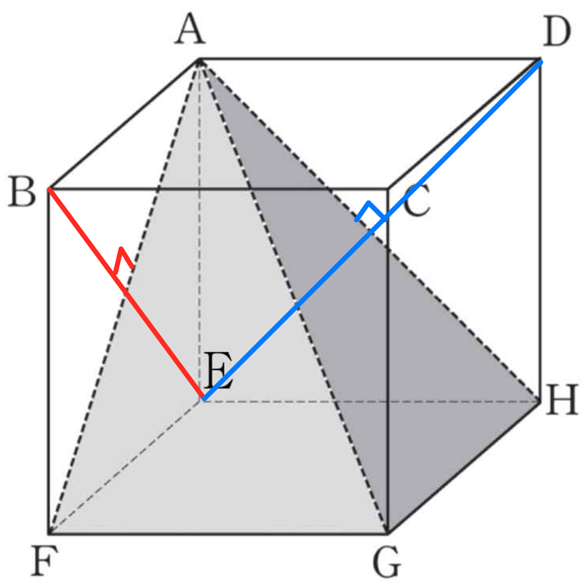


$\perp \overrightarrow{EB}$ $\perp \overrightarrow{ED}$

2. 07학년도 수능 6번

정육면체 ABCD−EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



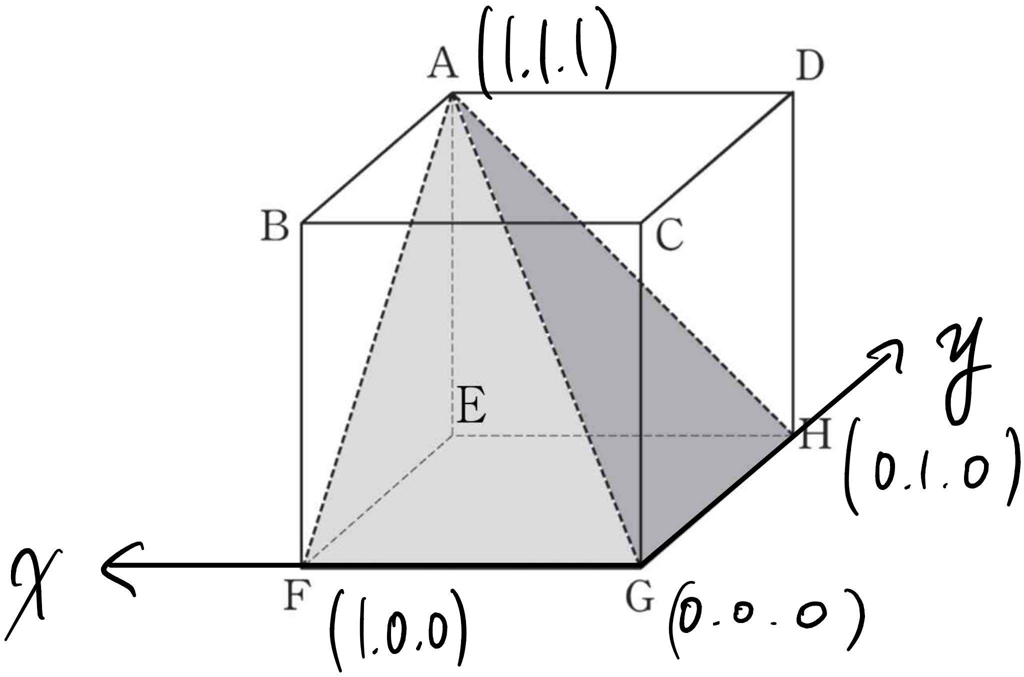
$\theta = \angle BED$, 삼각형 BED : 정삼각형

$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

2. 07학년도 수능 6번

정육면체 ABCD−EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$



평면 AFG : x축 포함 $by + cz = 0$

A좌표 대입 $b + c = 0$

∴ 평면 AFG : $y - z = 0$ ⊥ $\vec{n_1} = (0,1,-1)$

평면 AGH : y축 포함 $ax + c'y = 0$

A좌표 대입 $a + c' = 0$

∴ 평면 AGH : $x - z = 0$ ⊥ $\vec{n_2} = (1,0,-1)$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{1}{2}$$

3. 05학년도 9월 평가원 23번

좌표공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$, $z \geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $30\cos\theta$의 값을 구하시오.

[4점]

3. 05학년도 9월 평가원 23번

좌표공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$, $z \geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $30\cos\theta$의 값을 구하시오.

[4점]

α가 y축 포함 $\rightarrow \alpha : ax+cz=0$

반구 중심 $O'(5.4.0)$

O'과 평면 α 사이 거리 $=3$

$\rightarrow \dfrac{|5a|}{\sqrt{a^2+c^2}}=3 \rightarrow \boxed{\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}}=\dfrac{3}{5}}$

$\alpha \perp \vec{\alpha}=(a.0.c)$

xy 평면 $\perp \vec{e_3}=(0.0.1)$

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{e_3}|}{|\vec{\alpha}||\vec{e_3}|}=\boxed{\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}}}$

$$\left[\frac{|a|}{\sqrt{a^2+c^2}}\right]^2+\left[\frac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}}\right]^2=1$$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{4}{5}$, $30\cos\theta=\boxed{24}$

4. 23학년도 수특 공간좌표 유제 3번

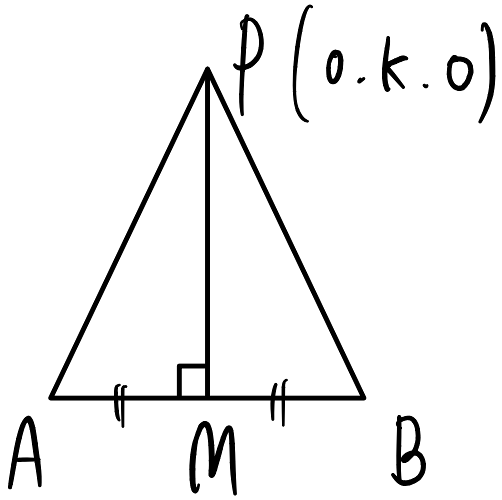
좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1, 3, 5)$, $\mathrm{B}(-4, -2, -1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

4. 23학년도 수특 공간좌표 유제 3번

좌표공간의 두 점 A$(1, 3, 5)$, B$(-4, -2, -1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 1　　② $\frac{6}{5}$　　③ $\frac{7}{5}$　　④ $\frac{8}{5}$　　⑤ $\frac{9}{5}$



$$M\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 2\right)$$

$$\overrightarrow{BA} = (5.\ 5.\ 6)$$

$$\overrightarrow{MP} = \left(\frac{3}{2}\ .\ k-\frac{1}{2}\ .\ -2\right)$$

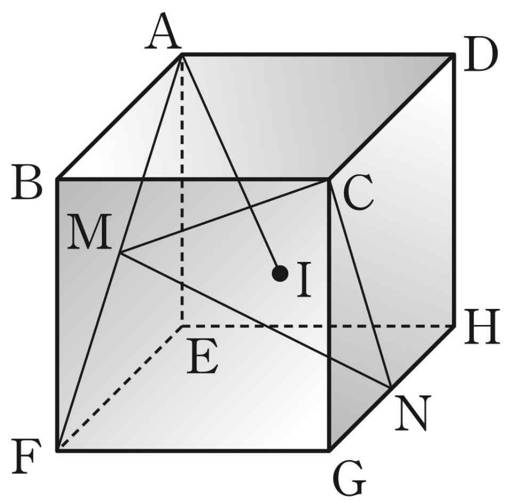
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MP} = \frac{15}{2} + 5k - \frac{5}{2} - 12 = 0$$

$$\longrightarrow k = \frac{7}{5}$$

5. 23학년도 수특 공간좌표 유제 6번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD－EFGH에서 두 선분 AF, GH의 중점을 각각 M, N이라 하고 삼각형 CMN의 무게중심을 I라 할 때, 선분 AI의 길이는?

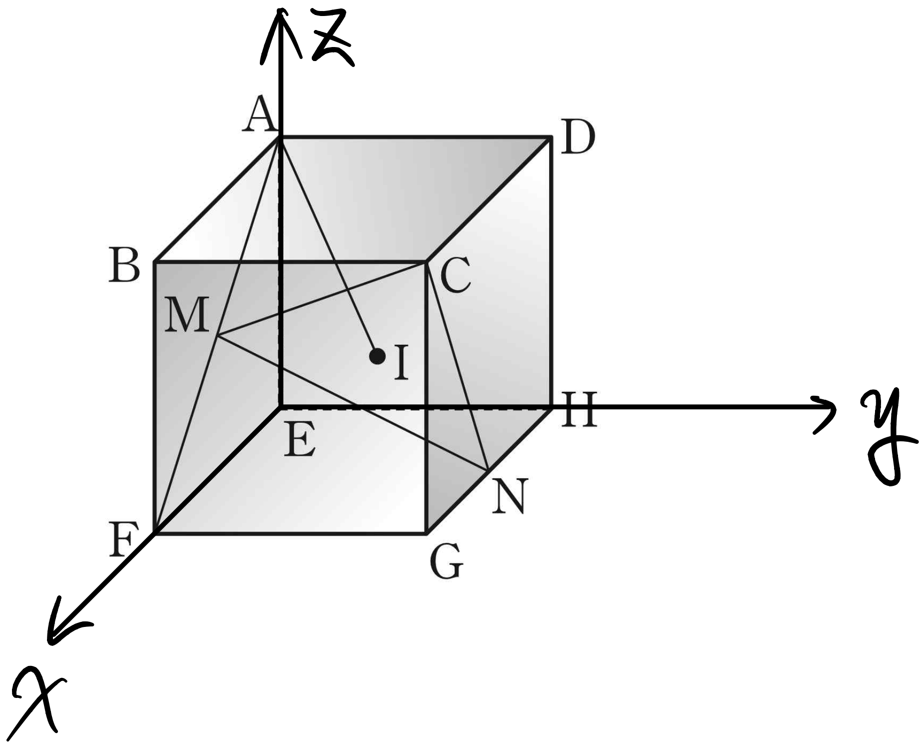
① $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{41}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{42}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{43}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{11}}{3}$



5. 23학년도 수특 공간좌표 유제 6번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에서 두 선분 AF, GH의 중점을 각각 M, N이라 하고 삼각형 CMN의 무게중심을 I라 할 때, 선분 AI의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{41}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{42}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{43}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{11}}{3}$



$$3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$$

$$= (2.2.0) + (1.0.-1) + (1.2.-2)$$

$$= (4.4.-3)$$

$$3|\overrightarrow{AI}| = \sqrt{4^2+4^2+3^2} = \sqrt{41}$$

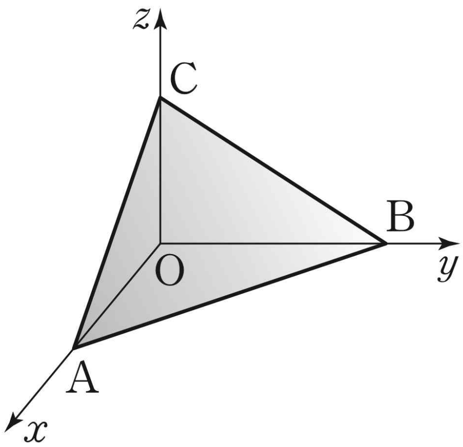
ㅇㅈ

특수한 평면

6. 23학년도 수특 공간좌표 Level 2 2번

좌표공간의 네 점 $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,2\sqrt{2},0)$, $C(0,0,2)$에 대하여 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 OH의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$



평면 ABC : $\frac{x}{2}+\frac{y}{2\sqrt{2}}+\frac{z}{2}=1$

$\longrightarrow \sqrt{2}x+y+\sqrt{2}z=2\sqrt{2}$

$\overline{OH}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

7. 23학년도 수특 공간좌표 Level 2 6번

좌표공간의 점 A$(0, 0, 8)$와 y축 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 직선 AP, AQ가 구 $S: x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$와 모두 접할 때, 선분 PQ의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

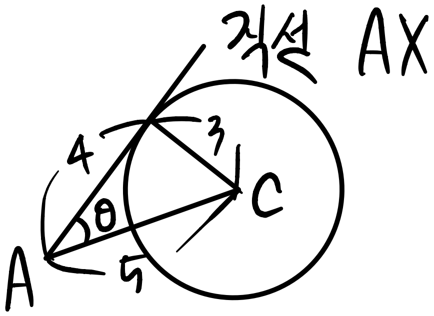
7. 23학년도 수특 공간좌표 Level 2 6번

좌표공간의 점 A(0, 0, 8)와 y축 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 직선 AP, AQ가 구 $S : x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$와 모두 접할 때, 선분 PQ의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

y축 위의 점 X$(0, t, 0)$에 대하여 직선 AX와 구 S가 접한다. 가능한 점 X의 위치가 P, Q로 2개이다.

→ t에 대한 이차방정식을 풀고, $\overline{PQ}$를 물어보니까 이차방정식의 두 실근의 차를 계산해야 되겠구나.

$\overline{AC}=5$



$\overrightarrow{AX}$와 $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기 $\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$

$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AX}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos\theta = 4|\overrightarrow{AX}|$

$\overrightarrow{AX}=(0, t, -8)$ $\overrightarrow{AC}=(0, 3, -4)$

$3t+32 = 4\sqrt{t^2+64}$

$\rightarrow \left(\frac{3}{4}t+8\right)^2 = t^2+64$

$\rightarrow \frac{9}{16}t^2+12t+64 = t^2+64$

$\rightarrow \frac{7}{16}t^2 = 12t$

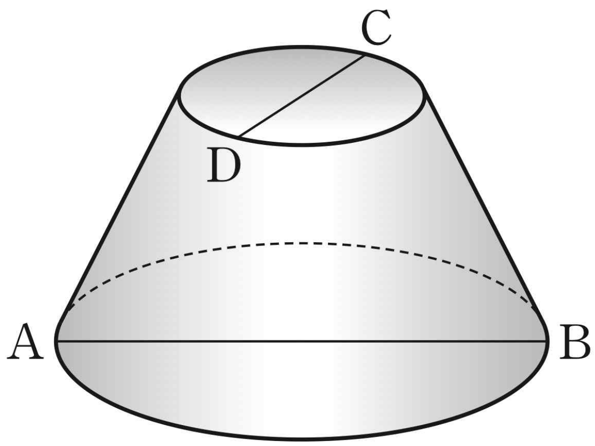
$\rightarrow t=0,\ t=\frac{16\times 12}{7}=\frac{192}{7}$

$\boxed{199}$

8. 23학년도 수특 공간도형 Level 3 6번

그림과 같이 한 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원이고 다른 한 밑면은 길이가 2인 선분 CD를 지름으로 하는 원이며 높이는 2인 원뿔대가 있다. 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60°일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{2}{7}\pi$ ③ $\frac{9}{28}\pi$ ④ $\frac{5}{14}\pi$ ⑤ $\frac{11}{28}\pi$

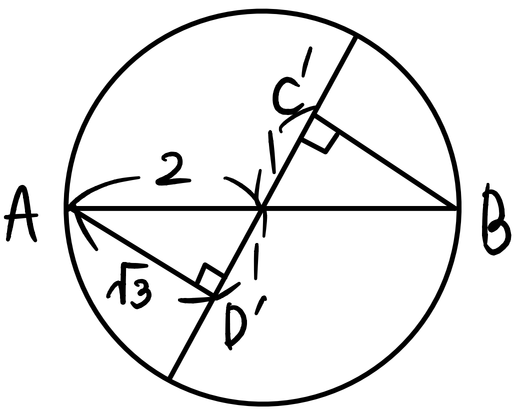


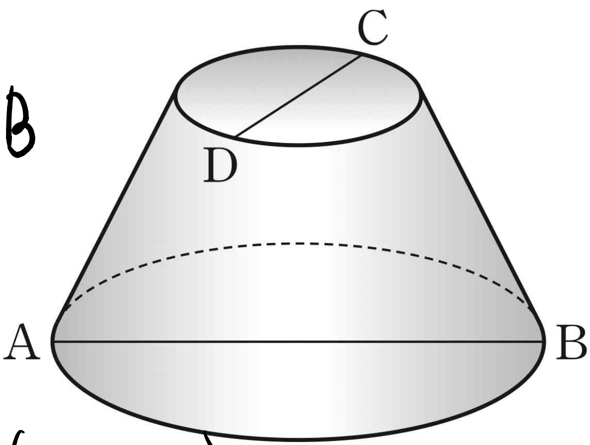
좌표계 시작 → 평면의 방정식 완성

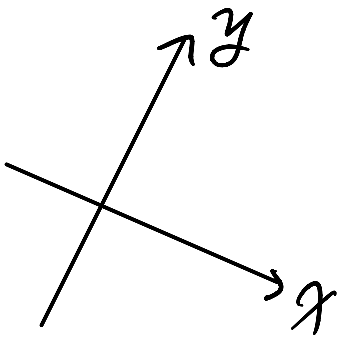
8. 23학년도 수특 공간도형 Level 3 6번

그림과 같이 한 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원이고 다른 한 밑면은 길이가 2인 선분 CD를 지름으로 하는 원이며 높이는 2인 원뿔대가 있다. 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60°일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{2}{7}\pi$ ③ $\frac{9}{28}\pi$ ④ $\frac{5}{14}\pi$ ⑤ $\frac{11}{28}\pi$ ✓







$A(-\sqrt{3}, 0, 0)$

$D'(0, 0, 0)$ $D(0, 0, 2)$

$C'(0, 2, 0)$ $C(0, 2, 2)$

$B(\sqrt{3}, 2, 0)$

$\overline{CD} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{7}$, $\overline{BD} = \sqrt{11}$

$\longrightarrow$ 외접원 넓이 $\frac{11}{4}\pi$

평면 BCD $\perp \vec{n_1}$: $\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{z}{2} = 1 \longrightarrow 2x + \sqrt{3}z = 2\sqrt{3}$

평면 ACD $\perp \vec{n_2}$: $-\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{z}{2} = 1 \longrightarrow -2x + \sqrt{3}z = 2\sqrt{3}$

$\vec{n_1} = (2, 0, \sqrt{3})$

$\vec{n_2} = (-2, 0, \sqrt{3})$

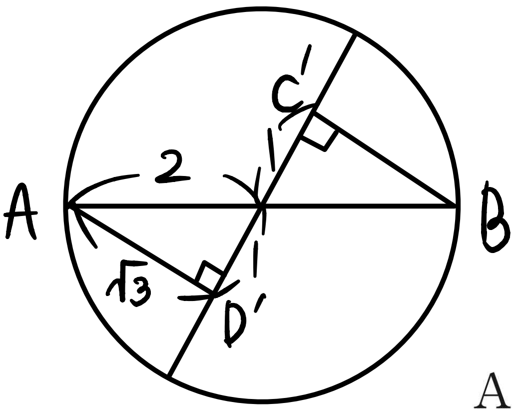
$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{|-4+3|}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{1}{7}$

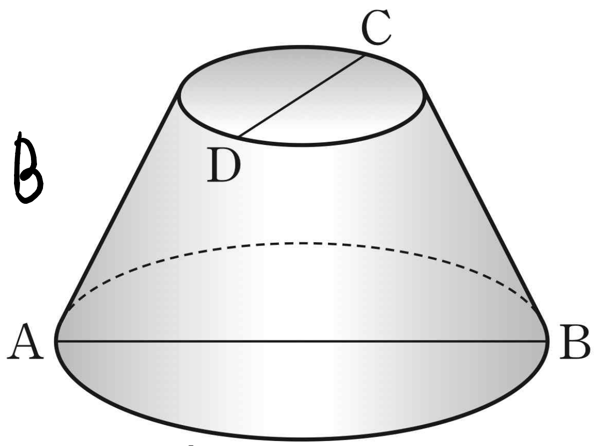
외접원 넓이 $\frac{11}{4}\pi$ 구한 이후 벡터 이용

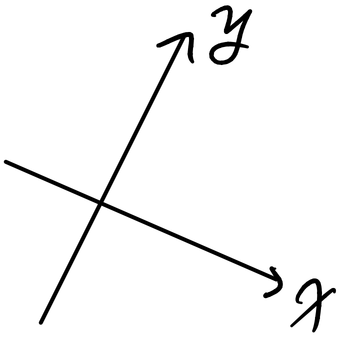
8. 23학년도 수특 공간도형 Level 3 6번

그림과 같이 한 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원이고 다른 한 밑면은 길이가 2인 선분 CD를 지름으로 하는 원이며 높이는 2인 원뿔대가 있다. 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60° 일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{2}{7}\pi$ ③ $\frac{9}{28}\pi$ ④ $\frac{5}{14}\pi$ ⑤ $\frac{11}{28}\pi$







$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ 가 이루는 각의 크기 θ

$\overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 0, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 0, 2)$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{|-3+4|}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{1}{7}$$

Q. 좌표축을 왜 저렇게 잡나요? $A(-2, 0, 0)$ $B(2, 0, 0)$ $D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$ $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$로 잡으면 안될까요?

A. 그렇게 하셔도 됩니다만 좌표축을 잘 잡으려면 (계산을 적게 하려면) 서로 수직인 3개의 직선이 눈에 보일 때, 그 직선들을 좌표축으로 설정하는 게 좋습니다

세 직선 AD', D'C', D'D가 서로 수직입니다.

위치 관계 확인

9. 21년 10월 교육청 30번

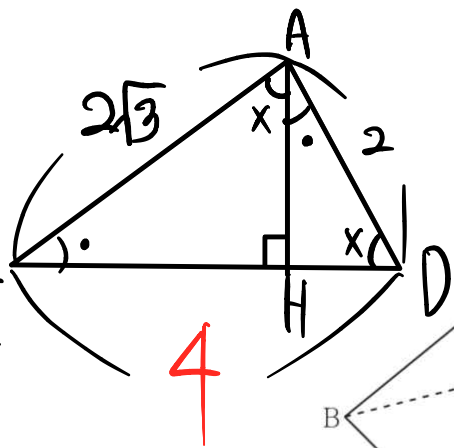
한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

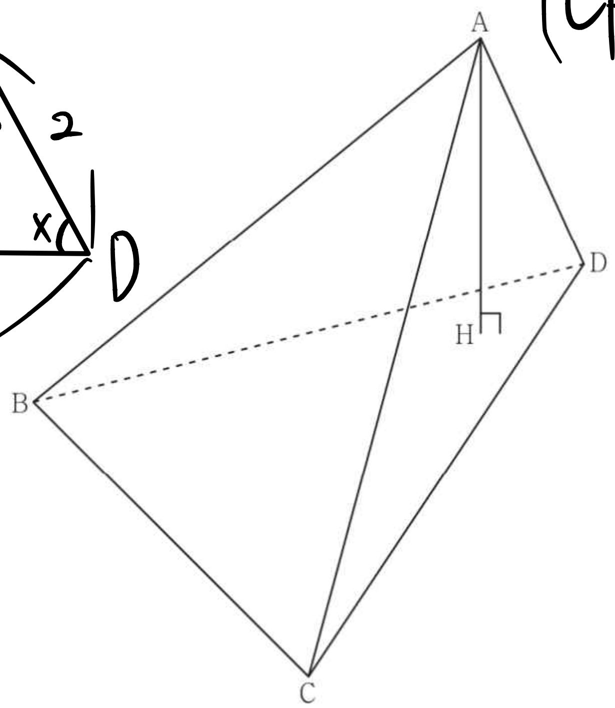
(가) $\angle \mathrm{AEH} = \angle \mathrm{DAH}$ (나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{\mathrm{DE}} = 4$이다.

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가)





(나) $\angle CED = 90^\circ$

E는 $\overline{BC}$ 중점.

AHD 넓이 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

이면각 계산 (좌표)

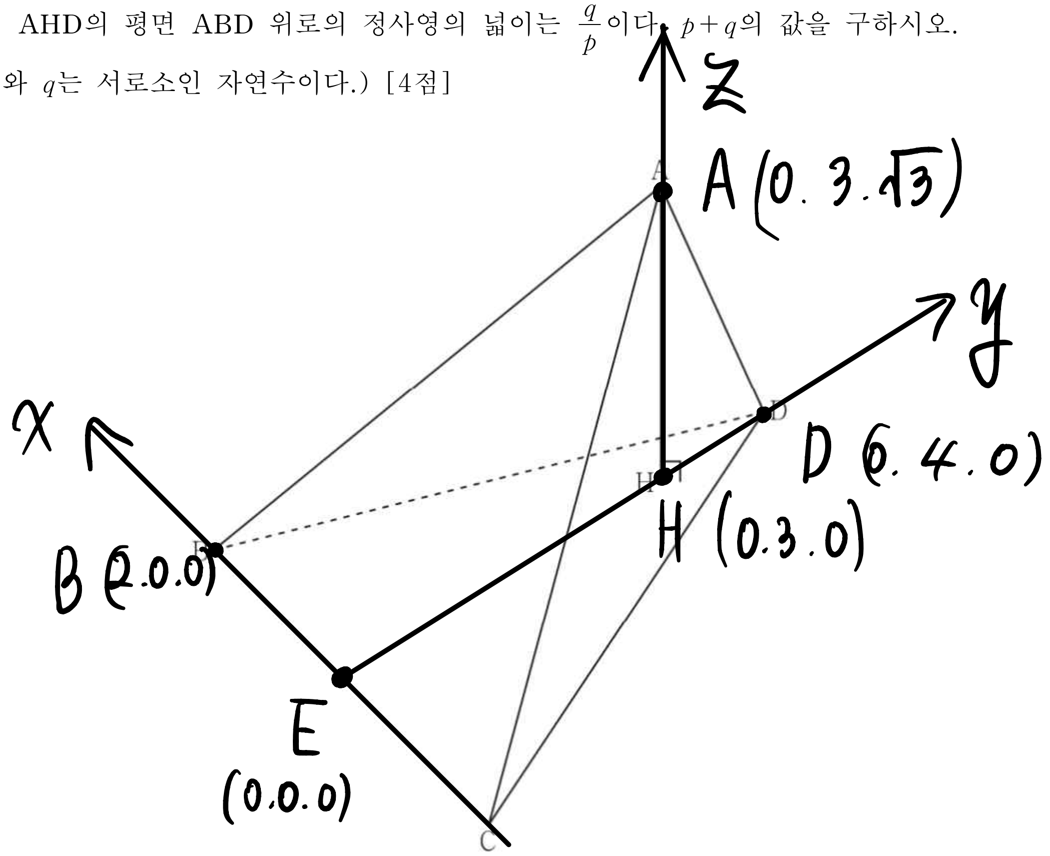
ABD : 약간 특수한 평면

9. 21년 10월 교육청 30번

한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle AEH = \angle DAH$
(나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{DE} = 4$이다.

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



평면 AHD : yz 평면 $\perp \ \vec{e_1} = (1.0.0)$

평면 ABD : $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + cz = 1$ A 좌표 대입 $c = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$\rightarrow 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + z = 4\sqrt{3} \ \perp \ \vec{n} = (2\sqrt{3}. \sqrt{3}. 1)$

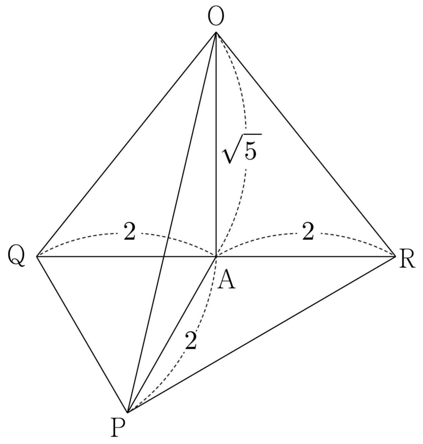
$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{e_1}|}{|\vec{n}||\vec{e_1}|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{7}$$

10. 22학년도 파급효과 N제 48번

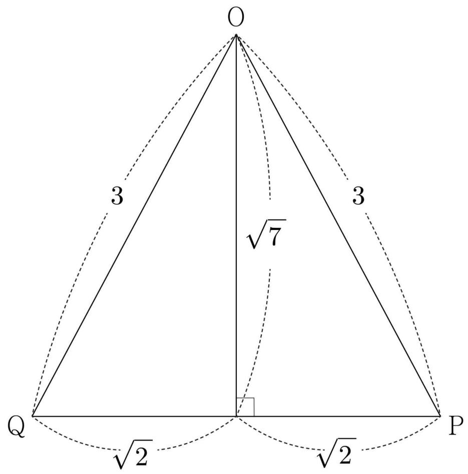
좌표공간의 구 $x^2+y^2+z^2=9$가 평면 α와 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C의 중심을 A라 할 때, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}$이다. 원 C 위의 세 점 P, Q, R에 대하여 삼각형 PQR이 $\angle \mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 OPQ의 평면 OPR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{14}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. 구의 반지름의 길이는 3이고, 구의 중심 O와 평면 α 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다. 원 C의 반지름의 길이는 2이다. 삼각형 PQR가 $\angle \mathrm{QPR} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다. 그림을 그려보자.



구하고자 하는 값은 삼각형 OPQ의 평면 OPR 위로의 정사영의 넓이이다. 삼각형 OPQ의 넓이를 구하고, 두 평면 OPQ, OPR가 이루는 각을 구하자.

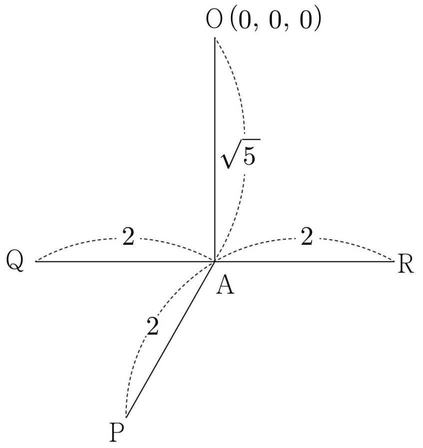
2. $\overline{\mathrm{PQ}} = 2\sqrt{2}$이므로 삼각형 OPQ의 모양은 다음과 같다.



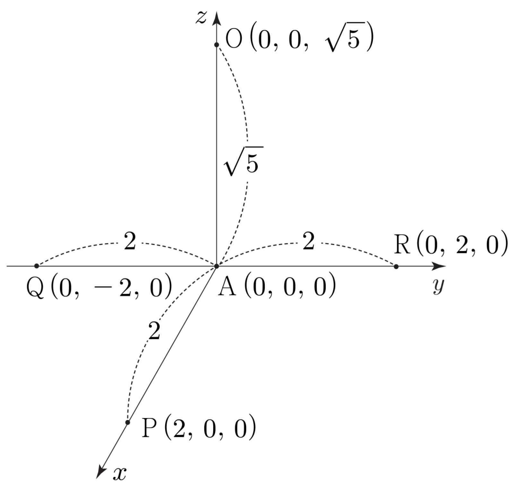
삼각형 OPQ의 넓이는 $\sqrt{14}$이다.

3. 두 평면 OPQ, OPR가 이루는 각의 크기를 구해야 한다.

모든 점의 위치 관계는 다음과 같다.



서로 수직인 3개의 직선이 보인다. 평면의 방정식을 이용하여 문제를 풀고 싶은데, A가 원점이라면 두 평면 OPQ, OPR의 방정식을 세우기 더 쉬워진다. A가 원점이라면 두 평면은 세 점 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$을 지나는 꼴이 되기 때문이다. 점들의 위치 관계만 유지된다면 문제에서 주어진 좌표를 무시하고 다음과 같이 새롭게 좌표를 설정해줄 수 있다.



평면 OPQ의 방정식은 $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{z}{\sqrt{5}}=1$에서 $\sqrt{5}x-\sqrt{5}y+2z=2\sqrt{5}$이고, 법선벡터는 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 2)$이다.

평면 OPR의 방정식은 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{\sqrt{5}}=1$에서 $\sqrt{5}x+\sqrt{5}y+2z=2\sqrt{5}$이고, 법선벡터는 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 2)$이다.

두 평면 OPQ, OPR가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{5-5+4}{(\sqrt{14})^2}=\frac{2}{7}$이다.

삼각형 OPQ의 평면 OPR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{2}{7}\sqrt{14}$이다. 정답은 9이다.

11. 23학년도 파급효과 N제 33번

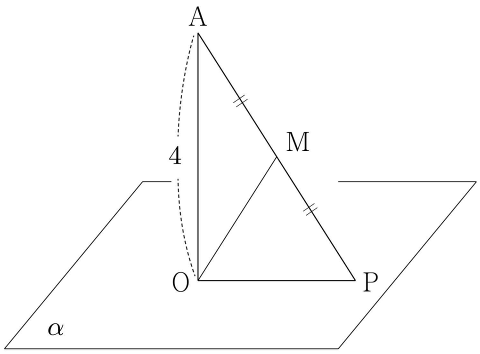
좌표공간의 원점 O를 지나는 평면 α에 대하여 평면 α 위에 있지 않은 점 $\mathrm{A}(2, \sqrt{3}, 3)$와 평면 α 위를 움직이는 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 OA는 평면 α와 수직이다.

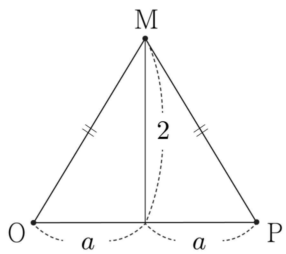
(나) 선분 AP의 중점을 M이라 할 때, $\cos(\angle\mathrm{OMP}) = \dfrac{3}{5}$이다.

삼각형 OAP의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 S이다. S^2의 값을 구하시오. [4점]

1. 일단 $\overline{\mathrm{OA}}=4$이다. 직선 OA가 평면 α와 수직이므로 평면 α 위의 점 P에 대하여 삼각형 AOP는 $\angle \mathrm{AOP}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 그림을 그려보자.

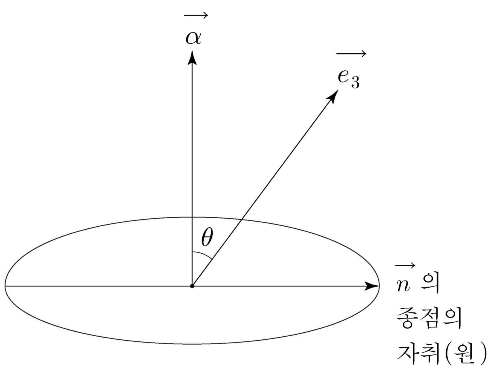


(나)를 해석하자. 선분 AP의 중점 M에 대하여 삼각형 OMP는 $\overline{\mathrm{MO}}=\overline{\mathrm{MP}}$인 이등변삼각형이고, M과 평면 α 사이의 거리는 2이다.



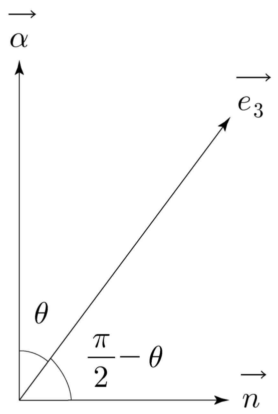
$\overline{\mathrm{OP}}=2a$라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{OMP})=\frac{2^2-a^2}{2^2+a^2}$이다. 이 값이 $\frac{3}{5}$이므로 $a=1$이다. 그러므로 점 P는 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

2. 삼각형 OAP의 넓이는 4이다. 삼각형 OAP의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구해야 한다. 평면 OAP의 법선벡터를 $\overrightarrow{n}$이라 하자. $\overrightarrow{n}$은 직선 OA와 수직이다. 즉, 평면 α의 법선벡터를 $\overrightarrow{\alpha}=(2,\sqrt{3},3)$라 할 때, $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\alpha}$이다. xy평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$이다. xy평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하면, $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{e_3}}{|\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{e_3}|}=\frac{3}{4}$이다. 그림을 그려보자. $\overrightarrow{\alpha}$와 $\overrightarrow{n}$이 이루는 각을 알고, $\overrightarrow{\alpha}$와 $\overrightarrow{e_3}$가 이루는 각을 안다. $\overrightarrow{\alpha}$가 공통이므로 $\overrightarrow{\alpha}$를 똑바로 세워서 그린다.



우리가 알고 싶은 건 xy평면과 평면 OAP이 이루는 각의 크기의 최솟값, 즉 $\overrightarrow{e_3}$와 $\overrightarrow{n}$이 이루는 각의 크기의 최솟값이다.

$\overrightarrow{n}$이 아래 그림과 같을 때 $\overrightarrow{e_3}$와 $\overrightarrow{n}$이 이루는 각의 크기가 최소이고, 그 값은 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.



$\cos\theta=\frac{3}{4}$이므로 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

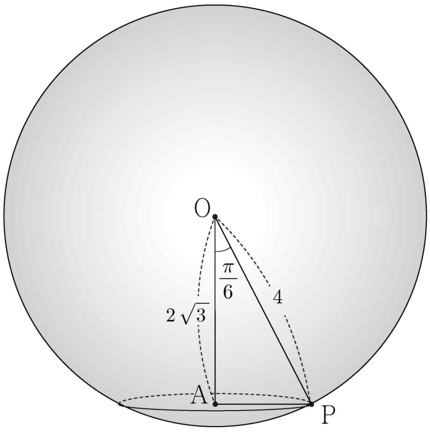
그러므로 삼각형 OAP의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{7}$이다. 그러므로 정답은 7이다.

12. 15학년도 수능 29번

좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=16$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $M\pi$, 최솟값을 $m\pi$라 하자. M^2+m^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

(가) 원 C는 점 $\mathrm{P}(2, 0, 2\sqrt{3})$를 포함하는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 중심을 A라 할 때, $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{3}$이다.

1. $\overline{\mathrm{OP}}=4$이므로 점 P는 구 S 위의 점이다. 점 P를 포함하는 평면으로 구를 자른 단면인 원 C에 대하여, 원 C의 중심 A와 원점 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$이므로 원 C의 반지름의 길이는 2이다. 그림을 그려보자.



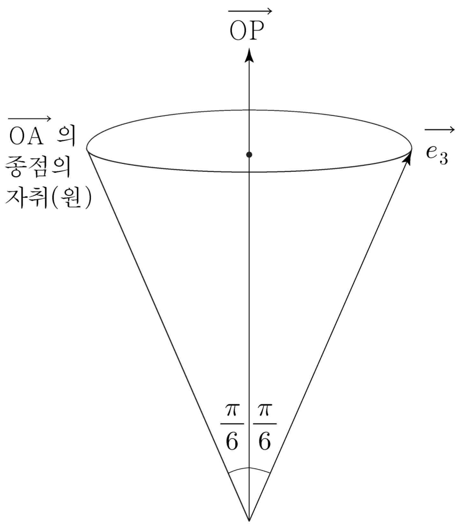
원 C를 포함하는 평면을 α라 하자. 평면 α의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2,0,2\sqrt{3})$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

xy평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$이라 하자. $\overrightarrow{e_3}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면,

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{e_3}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$이다.

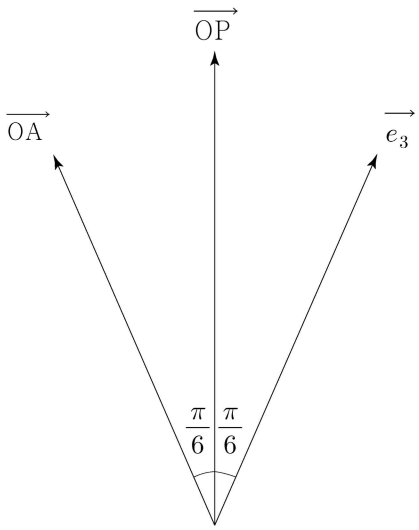
그림을 그려보자. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각을 알고, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{e_3}$가 이루는 각을 안다. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 공통이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 똑바로 세워서 그린다.



2. 우리가 알고 싶은 건 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기의 최댓값과 최솟값, 즉 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{e_3}$가 이루는 각의 크기의 최댓값과 최솟값이다.

우선 최소일 때는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{e_3}$의 방향이 서로 같다. 이때 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 최대이고, 최댓값은 4π이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 다음 그림과 같을 때 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{e_3}$가 이루는 각의 크기가 최대이고, 최댓값은 $\frac{\pi}{3}$이다.



$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$이므로 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최솟값은 2π이다.

그러므로 답은 20이다.

13. 자작문제

좌표공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다. (단, 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있지 않다.)

(가) 직선 AB와 직선 CD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{3}{5}$이다.

(나) 직선 AB와 평면 OCD가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta$이다.

(다) $\overline{\mathrm{CD}} = 6$이고, 직선 AB의 평면 OCD 위로의 정사영은 직선 OC이다.

직선 AB가 평면 OCD와 만나는 점이 선분 OC를 $5:1$로 외분하는 점일 때, 사면체 OABD의 부피는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

두 직선 AB, CD가 서로 꼬인 위치에 있다. 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기를 계산할 때 벡터를 사용할 수 있겠다. 그런데 문제에서 좌표에 대한 조건이 없으므로 좌표를 먼저 설정해주어야 하겠다.

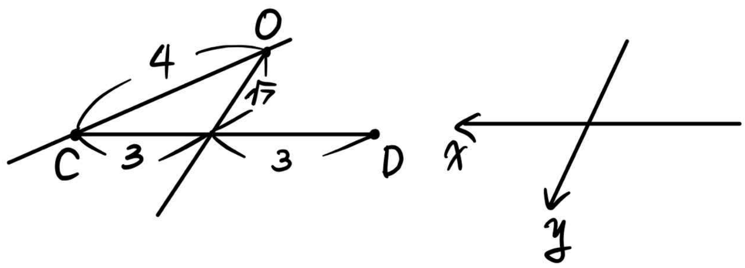
가능한 한 계산을 줄일 수 있도록 좌표를 설정하자. 평면 OCD를 xy평면으로 보고, 직선 CD가 x축과 평행하다고 하자. 직선 AB의 방향벡터를 $\overrightarrow{d}=(a,b,c)$라 설정하자.

직선 CD의 방향벡터는 $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$이므로 (가)에서 $\dfrac{|\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{e_1}|}{|\overrightarrow{d}||\overrightarrow{e_1}|}=\dfrac{|a|}{|\overrightarrow{d}|}=\dfrac{3}{5}$를 얻는다.

평면 OCD의 법선벡터는 $\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$이므로 (나)에서 $\dfrac{|\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{e_3}|}{|\overrightarrow{d}||\overrightarrow{e_3}|}=\dfrac{|c|}{|\overrightarrow{d}|}=\dfrac{3}{5}$을 얻는다.

$|\overrightarrow{d}|=5$로 두면 $|a|=|c|=3$을 얻을 수 있고, $a^2+b^2+c^2=25$이므로 $|b|=\sqrt{7}$도 얻을 수 있다.
$(|a|,|b|,|c|)=(3,\sqrt{7},3)$을 얻었는데, 세 수 a, b, c의 부호는 마음대로 설정해도 좋다. 모두 양수로 보아도 좋다는 뜻이다.

직선 AB의 방향벡터는 $\overrightarrow{d}=(3,\sqrt{7},3)$이다.
(다)를 보면, 직선 OC의 방향벡터는 $\overrightarrow{d'}=(3,\sqrt{7},0)$이다.



위와 같이 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{C}(3,\sqrt{7},0)$, $\mathrm{D}(-3,\sqrt{7},0)$으로 좌표를 설정할 수 있다.

삼각형 OAB의 넓이를 계산하는 과정은 교과 내 풀이와 동일하다. 삼각형 OAB의 넓이는 $3\sqrt{7}$이다.

점 D와 평면 OAB 사이의 거리를 계산하자. 평면 OAB의 방정식을 알아내어야 한다.
평면 OAB의 법선벡터를 $\overrightarrow{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$라 하자. $\overrightarrow{d}=(3,\sqrt{7},3)$, $\overrightarrow{d'}=(3,\sqrt{7},0)$에 대하여 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{d}=0$이고, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{d'}=0$이다. 그러므로 $\gamma=0$, $3\alpha+\sqrt{7}\beta=0$에서 $\alpha=-\sqrt{7}$, $\beta=3$을 얻을 수 있다.

평면 OAB는 원점을 포함하고 법선벡터가 $\overrightarrow{n}=(-\sqrt{7},3,0)$이므로 평면 OAB의 방정식은 $-\sqrt{7}x+3y=0$이고, 점 $\mathrm{D}(-3,\sqrt{7},0)$와 평면 OAB 사이의 거리는 $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$이다.

그러므로 사면체 OABD의 부피는 $\dfrac{21}{2}$이다.

여기까지 오느라 고생 많으셨습니다.
공간도형 학습에 도움이 되길 바랍니다.

이 정도 공부하면 교과 외는 충분하지 않을까 싶은데, 이 파일에 없는 공간벡터 문제를 어떻게 푸는지, 공간도형 문제를 벡터로 어떻게 푸는지 궁금하시면 질문하셔도 좋습니다.

평가원, 교육청, 사관학교, ebs 문제의 질문만 받겠습니다.

~~후원은 스타벅스 아아 톨 기프티콘으로 받겠습니다.~~