제 2 교시

수학 영역(B 형)

2014학년도 대학수학능력시험 19번

19. 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S 가 x축과 y축에 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S 가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S 의 반지름의 길이는? [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

문제분석

・ 내용영역 : 기하와 벡터
Ⅲ. 공간도형과 공간좌표
1. 공간도형
2. 공간좌표

・ 행동영역 : 내적문제해결능력
(두 가지 이상의 수학적 개념・원리・법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수이고 x축과 y축에 각각 접하는 구의 방정식을 구한다.

(2) 구 S 가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π 일 때, 구의 방정식에 포함된 미지수를 구한다.

(3) 구 S 가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구의 방정식에 포함된 미지수를 구한다.

문제풀이

(1) 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수이고 x축과 y축에 각각 접하는 구의 방정식을 구한다.

(풀이)
구 S 의 중심이 (a, b, c)이고 반지름을 r이라고 할 때,
구 S 는 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ 으로 나타낼 수 있다.
이 때, 구 S 가 x축과 y축에 각각 접한다고 했으므로
$a^2+c^2=b^2+c^2=r^2$ 임을 알 수 있다.
$\therefore (x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2 \ (a>0,\ c>0)$ 이다.

---

(2) 구 S 가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π일 때, 구의 방정식에 포함된 미지수를 구한다.

(풀이)
구 S 의 방정식이 $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$ 이므로
xy평면$(z=0)$과 만나는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$
임을 알 수 있다. 구 S 가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이므로 $\therefore a^2=64$ 이다.

---

(3) 구 S 가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구의 방정식에 포함된 미지수를 구한다.

(풀이)
구 S 의 방정식이 $(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=8^2+c^2$ 이다.
구 S 가 z축$(x=0,\ y=0)$과 만날 때 식을 구해보면
$64+64+(z-c)^2=64+c^2 \quad \therefore z^2-2cz+64=0$ 이다.
이 때, z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이라 함은 z에 관한 이차방정식의 두 근의 차가 8이라는 것과 같다.
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 이므로 $\therefore c^2=80$
구하고자 하는 구 S 의 반지름을 구해보면
$r^2=a^2+c^2=144 \quad \therefore r=12$ 이다.

2014학년도 대학수학능력시험 20번

20. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2번째 수를 a, 6번째 수를 b라 하자. $\log ab$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

문제분석

· 내용영역 : 수학 I
Ⅱ. 지수함수와 로그함수
3. 로그

· 행동영역 : 내적문제해결능력
(두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐서 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 상용로그의 지표와 가수조건을 안다.

(2) $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x값을 구한다.

(3) x값을 크기순으로 나열하여 a와 b의 값을 구한다.

문제풀이

(1) 상용로그의 지표와 가수조건을 안다.
(풀이)
1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, $f(x)$는 정수이고 $0 \leqq g(x) < 1$ 이다.

---

(2) $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x값을 구한다.
(풀이)
$3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되어야 한다. 이 때, $f(x)$는 정수이므로 $5g(x)$의 값이 정수가 되어야 한다.
따라서 $g(x)$의 값은 $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$으로 결정된다.
① $g(x)=0$ 일 때, $f(x)$는 $10, 20, 30 \cdots$ 이다.
② $g(x)=\frac{1}{5}$ 일 때, $f(x)$는 $3, 13, 23, \cdots$ 이다.
③ $g(x)=\frac{2}{5}$ 일 때, $f(x)$는 $6, 16, 26, \cdots$ 이다.
④ $g(x)=\frac{3}{5}$ 일 때, $f(x)$는 $9, 19, 29, \cdots$ 이다.
⑤ $g(x)=\frac{4}{5}$ 일 때, $f(x)$는 $2, ,12, 22, \cdots$ 이다.

※ 이와 같은 과정을 <u>**발견적 추론**</u>이라 한다. 위와 같은 문제는 조건과 기준을 잡고 세어보는 것을 추천한다.

---

(3) x값을 크기순으로 나열하여 a와 b의 값을 구한다.
(풀이)

$\log x$	$f(x)$	$g(x)$
2.8	2	0.8
3.2	3	0.2
6.4	6	0.4
9.6	9	0.6
10	10	0
12.8	12	0.8
⋮	⋮	⋮

따라서 $\log a = 3.2$, $\log b = 12.8$ 이고 $\log ab = \log a + \log b$ 이므로
$\therefore \log ab = 16$ 이다.

2014학년도 대학수학능력시험 21번

21. 연속함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$ 일 때,

$$\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx$$

의 값은? [4점]

① $2(\pi-2)$　② $2\pi-3$　③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$　⑤ 2π

문제분석

- 내용영역 : 적분과 통계
  Ⅰ. 적분법
  2. 정적분
- 행동영역 : 내적문제해결능력
  (두 가지 이상의 수학적 개념・원리・법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대칭인 것을 수학적으로 표현한다.

(2) 주어진 식 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$ 을 정리하여 이어지는 과정에 필요한 식을 만든다.

(3) 주어진 식 $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx$ 에 맞는 적분법을 사용하여 값을 구한다.

문제풀이

(1) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대칭인 것을 수학적으로 표현한다.
(풀이)
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대칭인 것을 수학적으로 표현하면 $f(x)=-f(-x)$ 이다.
위의 내용을 $f(1)=1$ 에 적용하면 $f(-1)=-1$ 임을 알 수 있다.

---

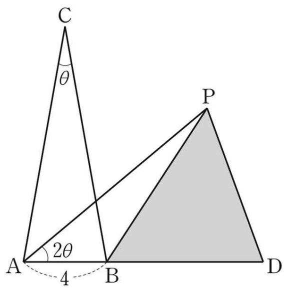
(2) 주어진 식 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$ 을 정리하여 이어지는 과정에 필요한 식을 만든다.
(풀이)
① 주어진 식 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$ 에 $x=0$ 을 대입하면
$f(0)=0$ 임을 알 수 있다.
② 주어진 식 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$ 에 $x=-1$ 을 대입하면
$f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{0}f(t)dt$ 임을 알 수 있다.
$\therefore \int_{0}^{1}f(t)dt=\frac{2}{\pi}$
③ 주어진 식 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$ 을 x에 관해 양변 미분하면
$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$ 임을 알 수 있다.
$\therefore f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$

---

(3) 주어진 식 $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx$ 에 맞는 적분법을 사용하여 값을 구한다.
(풀이)
(2)에 의하여 $f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$ 이므로 주어진 식을
$2\pi\int_{0}^{1}xf'(x)dx$ 로 변형할 수 있다. 부분적분법으로 전개하면
$2\pi\{[xf(x)]_0^1-\int_{0}^{1}f(x)dx\}=2\pi(1-\frac{2}{\pi})=2(\pi-2)$ 이다.

2014학년도 대학수학능력시험 28번

28. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ACB=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡고, $\overline{AC}=\overline{AP}$이고 $\angle PAB=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



문제분석

- 내용영역
  - ① 중학교 3학년
    - Ⅵ. 삼각비
      - 2. 삼각비의 활용
  - ② 수학Ⅱ
    - Ⅲ. 함수의 극한과 연속
      - 1. 함수의 극한
- 행동영역 : 내적문제해결능력
  (두 가지 이상의 수학적 개념・원리・법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 두 변의 길이와 끼인각을 알 때, 삼각형 넓이 구하는 공식을 안다.

(2) 삼각형 BDP의 넓이인 $S(\theta)$를 구하기 위해 선분 BD와 선분 DP를 삼각비를 활용하여 구한다.

(3) 함수의 극한을 이용하여 $\lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$값을 구한다.

문제풀이

(1) 두 변의 길이와 끼인각을 알 때, 삼각형 넓이 구하는 공식을 안다.

(풀이)

※ 중학교 3학년 Ⅵ. 삼각비 2. 삼각비의 활용에서 삼각형의 넓이를 구하는 다양한 공식을 배웁니다.

$S=\frac{1}{2}ab\times\sin\theta$

---

(2) 삼각형 BDP의 넓이인 $S(\theta)$를 구하기 위해 선분 BD와 선분 DP를 삼각비를 활용하여 구한다.

(풀이)

① 삼각형 ABC에서 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 선분 $\overline{BD}$를 구한다.

먼저 선분 AC를 구하면 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2}{\overline{AC}}$ 이므로 $\overline{AC}=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 이다.

$\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AP}=\overline{AD}$ 이므로 $\overline{AD}=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$이다.

$\therefore \overline{BD}=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}-4$

② 삼각형 ADP에서 선분 DP를 구한다.

삼각형 ADP는 이등변 삼각형이다. 따라서 선분 DP의 중점을 N이라 할 때, $\sin\theta=\frac{\overline{DN}}{\overline{AD}}$ 이므로 $\overline{DN}=\frac{2\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 이다.

$\therefore \overline{DP}=\frac{4\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

③ 두 변 $\overline{BD}$, $\overline{DP}$와 끼인각 $\angle BDP=\frac{\pi}{2}-\theta$를 이용하여 삼각형 BDP의 넓이를 구한다.

$\triangle BDP=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{DP}\times\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$$\therefore S(\theta)=\frac{4\sin\theta\times(2-4\sin\frac{\theta}{2})\times\cos\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

---

(3) 함수의 극한을 이용하여 $\lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$값을 구한다.

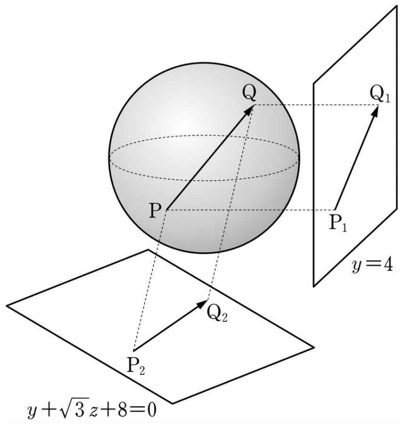
(풀이)

$$\lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta\times4\sin\theta\times(2-4\sin\frac{\theta}{2})\times\cos\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4\times2}{2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$\therefore \lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}=16$

2014학년도 대학수학능력시험 29번

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$ 에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$ 에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



문제분석

- 내용영역
  - ① 수학Ⅱ
    - Ⅱ. 삼각함수
      - 1. 삼각함수
  - ② 기하와 벡터
    - Ⅲ. 공간도형과 공간좌표
      - 1. 공간도형 - ③ 정사영
    - Ⅳ. 벡터
      - 2. 벡터의 성분과 내적

- 행동영역 : 내적문제해결능력
  (두 가지 이상의 수학적 개념·원리·법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 선분 PQ와 평면 $y=4$ 가 이루는 각을 θ_1이라 하고 평면 $y+\sqrt{3}+8=0$ 와 이루는 각을 θ_2라 할 때, 주어진 식 $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$을 간단히 정리한다.

(2) $\theta_1+\theta_2$가 가질 수 있는 값을 생각해본다.

(3) θ_1과 θ_2을 포함하는 삼각방정식의 최댓값을 구한다.

문제풀이

(1) 선분 PQ와 평면 $y=4$ 가 이루는 각을 θ_1이라 하고 평면 $y+\sqrt{3}+8=0$ 와 이루는 각을 θ_2라 할 때, 주어진 식 $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$을 간단히 정리한다.

(풀이)
선분 PQ와 평면 $y=4$ 가 이루는 각을 θ_1이라 할 때,
선분 $\mathrm{P_1Q_1}$의 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\cos\theta_1$ 으로 표현할 수 있다. 똑같은 방법으로 평면 $y+\sqrt{3}+8=0$와 이루는 각을 θ_2이라 할 때,
선분 $\mathrm{P_2Q_2}$의 길이는 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\cos\theta_2$ 으로 표현할 수 있다.
따라서 주어진 식 $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$에 대입하면

$$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\cos\theta_1|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\cos\theta_2|^2$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\times\{(1-\cos^2\theta_1)+(1-\cos^2\theta_2)\}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\times(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)$$

으로 간단히 정리할 수 있다.

---

(2) $\theta_1+\theta_2$가 가질 수 있는 값을 생각해본다.

(풀이)
우선 구의 중심인 (0, 0, 0)에서 두 평면 $y=4$ 와 $y+\sqrt{3}z+8=0$ 까지의 거리를 구해보면 두 값 모두 4임을 알 수 있다. 또한 두 평면의 법선벡터를 이용하여 이면각을 구해보면 60° 임을 알 수 있다.
따라서 구와 두 평면을 단면화해서 $\theta_1+\theta_2$가 가질 수 있는 값을 생각해보면
그림 ①과 같은 경우 $\theta_1+\theta_2$이 가질 수 있는 값이 60° 임을 알 수 있다.
그림 ②와 같은 경우 $\theta_1+\theta_2$이 가질 수 있는 값이 120° 임을 알 수 있다.

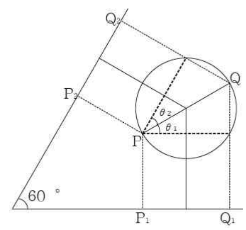


그림 ①

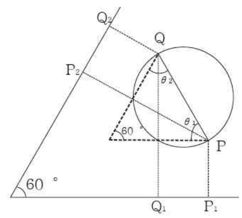


그림 ②

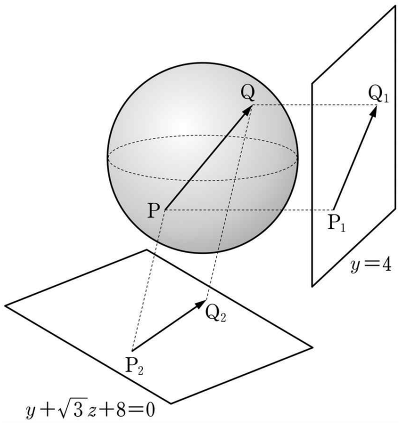
---

(3) θ_1과 θ_2을 포함하는 삼각방정식의 최댓값을 구한다.

(풀이)

2014학년도 대학수학능력시험 29번

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q 가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$ 에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}+8=0$ 에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



문제분석

- 내용영역
  - ① 수학Ⅱ
    - Ⅱ. 삼각함수
      - 1. 삼각함수
  - ② 기하와 벡터
    - Ⅲ. 공간도형과 공간좌표
      - 1. 공간도형 - ③ 정사영
    - Ⅳ. 벡터
      - 2. 벡터의 성분과 내적

- 행동영역 : 내적문제해결능력
  (두 가지 이상의 수학적 개념・원리・법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 선분 PQ와 평면 $y=4$ 가 이루는 각을 θ_1이라 하고 평면 $y+\sqrt{3}+8=0$ 와 이루는 각을 θ_2라 할 때, 주어진 식 $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$을 간단히 정리한다.

(2) $\theta_1+\theta_2$가 가질 수 있는 값을 생각해본다.

(3) θ_1과 θ_2을 포함하는 삼각방정식의 최댓값을 구한다.

문제풀이

(3) θ_1과 θ_2을 포함하는 삼각방정식의 최댓값을 구한다.
(풀이)

θ_1과 θ_2를 예각이라 하면 sin함수는 $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$에서 항상 증가하므로 $\theta_1+\theta_2=\frac{2}{3}\pi$ 일 때, (1)에서 구한 식 $|\overrightarrow{PQ}|^2\times(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)$ 이 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 에 $\theta_1+\theta_2=\frac{2}{3}\pi$ 을 대입하여 정리하면

$$\sin^2\theta_1+\sin^2(\frac{2}{3}\pi-\theta_1)=\sin^2\theta_1+(\sin\frac{2}{3}\pi\times\cos\theta_1-\cos\frac{2}{3}\pi\times\sin\theta_1)^2$$
$$=\frac{5\times\sin^2\theta_1}{4}+\frac{\sqrt{3}\times\sin\theta_1\times\cos\theta_1}{2}+\frac{3}{4}\times(1-\sin^2\theta_1)$$
$$=\frac{\sin^2\theta_1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}\times\sin\theta_1\times\cos\theta_1}{2}$$
$$=\frac{1-\cos2\theta_1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}\times\sin2\theta_1}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\times\sin2\theta_1}{4}-\frac{\cos2\theta_1}{4}+1=\frac{\sin(2\theta_1+\alpha)}{2}+1$$

$\therefore\frac{\sin(2\theta_1+\alpha)}{2}+1$ 이다. $-1\leq\sin(2\theta_1+\alpha)\leq1$ 이므로

$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

이 때, 점 P와 점 Q는 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위에 있으므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 의 지름의 길이와 같다.

$\therefore|\overrightarrow{PQ}|^2\times(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)=4^2\times\frac{3}{2}=24$

2014학년도 대학수학능력시험 30번

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$ 의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$ 에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$ 이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.〔4점〕

문제분석

- 내용영역 : 수학Ⅱ
  - Ⅳ. 미분법
    1. 미분계수와 도함수
    2. 여러 가지 함수의 미분법
    3. 도함수의 활용
- 행동영역 : 내적문제해결능력
  (두 가지 이상의 수학적 개념・원리・법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 주어진 조건 (가)를 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

(2) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$ 에 그은 접선을 구한다.

(3) 주어진 조건 (나)를 만족하는 함수 $k(t)$를 구한다.

문제풀이

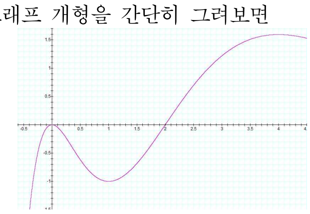
(1) 주어진 조건 (가)를 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.
(풀이)
주어진 조건 (가)를 알아보기 위해서는 함수 $g(x)$의 이계도함수를 알아야 한다.
함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 일 때,
$g(x)=f(x)e^{-x}=(ax^2+bx+c)e^{-x}$
$g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}=(-ax^2+(2a-b)x+(b-c))e^{-x}$
$g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}=(ax^2+(b-4a)x+(2a-2b+c))e^{-x}$
주어진 조건 (가)에서 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$에서 변곡점을 가진다고 했으므로 $g''(1)=g''(4)=0$ 이다.
$\therefore a=-b,\ c=0$ 임을 알 수 있다.
따라서 함수 $f(x)=ax(x-1)$ 임을 알 수 있다.

---

(2) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$ 에 그은 접선을 구한다.
(풀이)
점 $(0, k)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이 아니므로 접점을 임의의 점 $(t, g(t))$로 두고 접선을 구한다.
$y-g(t)=g'(t)(x-t)$
$y-at(t-1)e^{-t}=-a(t^2-3t+1)e^{-t}(x-t)$
임의의 점 $(t, g(t))$을 접점으로 하는 접선이 점 $(0, k)$을 지나므로
$k-at(t-1)e^{-t}=-a(t^2-3t+1)e^{-t}\times(-t)$
$k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$
으로 정리할 수 있다.

---

(3) 주어진 조건 (나)를 만족하는 k에 관한 식을 구한다.
(풀이)
(2)에서 구한 식을 t에 관한 k의 식을 함수식으로 표현하면 $k(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$ 이다. 이 때, 함수 $k(t)$의 도함수를 구해보면 $k'(t)=-at(t-1)(t-4)e^{-t}$ 이므로 함수 $k(t)$는 $t=0, 4$ 일 때, 극댓값을 가지고 $t=1$ 일 때, 극솟값을 가진다.
주어진 조건 (나) 곡선 $y=g(x)$ 에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$ 이라 함은 함수 $k(t)$의 함숫값 범위가 $-1<k(t)<0$ 인 구간에서 t의 값이 3개임을 뜻한다.
① $a>0$ 일 때, 함수 $k(t)$의 그래프 개형을 간단히 그려보면 아래와 같다. 따라서 $-1<k(t)<0$ 인 구간에서 t의 값이 3개가 되려면 함수 $k(t)$가 극소인 $t=1$ 일 때의 극솟값 $k(1)=-1$ 임을 알 수 있다.



$k(1)=-a\times e^{-1}=-1$
$\therefore a=e$
따라서 함수 $g(x)=ex(x-1)e^{-x}$ 이므로 $g(-2)\times g(4)=72$ 이다.
② $a<0$ 일 때, 함수 $k(t)$의 그래프 개형을 간단히 그려보면 $-1<k(t)<0$ 인 구간에서 t의 값이 3개가 나올 수 없음을 알 수 있다.