공간좌표 유제 1번

좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, 점 Q를 z축에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 점 R의 좌표가 $(2, 4, -3)$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

공간좌표 유제 2번

좌표공간에 있는 직사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B는 xy평면에 대하여 대칭이다.
(나) 두 점 A, C는 원점에 대하여 대칭이다.
(다) 점 D의 좌표는 $(-2, -2, 3)$이다.

점 A의 좌표가 (a, b, c)일 때, abc의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

공간좌표 유제 3번

좌표공간의 두 점 $A(1, 3, 5)$, $B(-4, -2, -1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

공간좌표 유제 4번

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(1, 2, -1)$, $\mathrm{B}(-1, 1, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

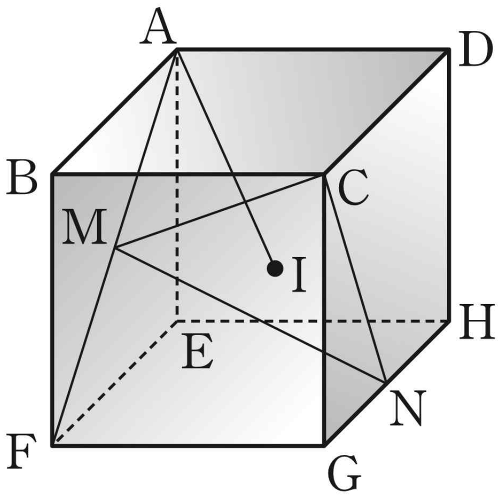
공간좌표 유제 5번

좌표공간의 두 점 A, B$(1, 1, 2)$에 대하여 선분 AB의 중점이 M$(3, -1, 0)$이고, 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표가 (a, b, c)일 때, $|a|+|b|+|c|$의 값을 구하시오.

공간좌표 유제 6번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD$-$EFGH에서 두 선분 AF, GH의 중점을 각각 M, N이라 하고 삼각형 CMN의 무게중심을 I라 할 때, 선분 AI의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{41}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{42}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{43}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{11}}{3}$



공간좌표 유제 7번

좌표공간에서 원점 O를 지나는 직선이 구 $x^2+y^2+z^2-8x-2y+2z+14=0$과 한 점 P에서만 만날 때, 선분 OP의 길이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{14}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

공간좌표 유제 8번

좌표공간에서 중심이 $\mathrm{P}(a, b, c)$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$이고 반지름의 길이가 r인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 x축과 y축에 모두 접한다.
(나) 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이는 8π이다.

$\overline{\mathrm{OP}} = 3\sqrt{2}$일 때, r^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

공간좌표 Level 1 1번

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(1,\,-3,\,a)$, $\mathrm{B}(7,\,1,\,b)$, $\mathrm{C}(c,\,d,\,-5)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B에서 z축에 내린 수선의 발은 일치한다. (나) 두 점 A, C는 원점에 대하여 대칭이다.

$ab+cd$의 값은?

① 20　② 21　③ 22　④ 23　⑤ 24

공간좌표 Level 1 2번

좌표공간의 점 P를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 A, y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 B라 하자. $\mathrm{A}(a-b, a+b, -2)$, $\mathrm{B}(2b-a, 5, c)$일 때, abc의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

공간좌표 Level 1 3번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(-3, t, 2)$, $\mathrm{B}(1, -4, t)$에 대하여 선분 AB의 길이를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 최솟값은?

① $4\sqrt{2}$ ② $\sqrt{34}$ ③ 6 ④ $\sqrt{38}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

공간좌표 Level 1 4번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(4, 5, 6)$과 xy평면 위의 점 P, zx평면 위의 점 Q에 대하여 두 선분 AP, BQ의 길이의 합이 최소일 때 두 점 P, Q의 위치를 각각 P′, Q′이라 하자. 선분 P′Q′의 길이는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

공간좌표 Level 1 5번

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(3, 1, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 5, 0)$, $\mathrm{C}(7, 6, -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 선분 OG의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{15}$　② $2\sqrt{5}$　③ 5　④ $\sqrt{30}$　⑤ $\sqrt{35}$

공간좌표 Level 1 6번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(-1, 5, 3\sqrt{2})$, $\mathrm{B}(a, -1, \sqrt{2})$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $2:1$로 외분하는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}} = 16$일 때, 양수 a의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

공간좌표 Level 1 7번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(0,\,-3,\,-4)$, $\mathrm{B}(2,1,0)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 구 S가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

공간좌표 Level 1 8번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2, 4, -3)$, $\mathrm{B}(5, -2, 3)$에 대하여
구 $S : x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S의 중심은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이다. (나) 구 S는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 지난다.

$a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

① -130 ② -132 ③ -134 ④ -136 ⑤ -138

공간좌표 Level 2 1번

좌표공간의 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(-2,-3,1)$, B, $\mathrm{P}(a,b,c)$를 포함한 8개의 점을 꼭짓점으로 하는 정육면체 C와 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정육면체 C의 모든 모서리를 연장한 직선은 x축 또는 y축 또는 z축과 평행하다. (나) 두 점 A, B는 yz평면에 대하여 대칭이다.

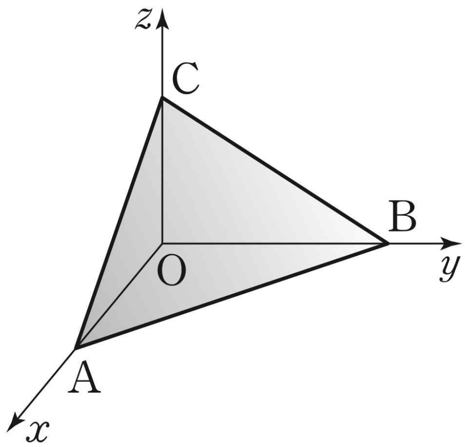
$b>0$, $c<0$, $a+b+c<0$일 때, abc의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

공간좌표 Level 2 2번

좌표공간의 네 점 O$(0,0,0)$, A$(2,0,0)$, B$(0,2\sqrt{2},0)$, C$(0,0,2)$에 대하여 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 OH의 길이는?

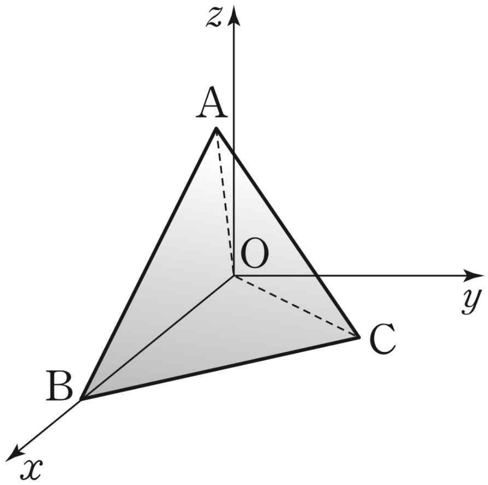
① $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$



공간좌표 Level 2 3번

그림과 같이 좌표공간의 네 점 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(a,b,c)$, $\mathrm{B}(d,0,0)$, $\mathrm{C}(e,f,0)$을 꼭짓점으로 하고 모든 모서리의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 직선 AC와 zx평면이 만나는 점을 P라 할 때, 점 P의 z좌표는? (단, a, b, c, d, e, f는 모두 양수이다.)

① $4\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{15}$ ④ $\sqrt{66}$ ⑤ $6\sqrt{2}$



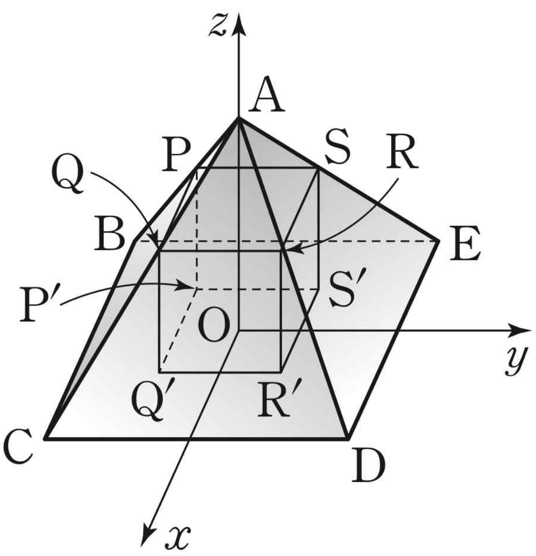
공간좌표 Level 2 4번

그림과 같이 좌표공간에서 z축 위의 점 A와 xy평면 위의 네 점 B, C, D, E를 꼭짓점으로 하는 정사각뿔 A$-$BCDE가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 모서리의 길이는 3이다. (나) 네 직선 BC, CD, DE, EB는 각각 x축 또는 y축과 평행하다.

선분 AB 위의 점 P, 선분 AC 위의 점 Q, 선분 AD 위의 점 R(p, q, r), 선분 AE 위의 점 S에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′, S′이라 하면 도형 PQRS$-$P′Q′R′S′은 직육면체이다. 정사각뿔 A$-$BCDE의 부피를 V라 하면 직육면체 PQRS$-$P′Q′R′S′의 부피는 $\frac{1}{3}V$일 때, $8\sqrt{2}pqr$의 값을 구하시오.

(단, 점 A의 z좌표, 점 D의 x좌표와 y좌표는 모두 양수이다.)



공간좌표 Level 2 5번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1, 2, 1)$, $\mathrm{B}(-1, 3, 3)$과 xy평면 위의 점 P, zx평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}+\overline{\mathrm{BA}}$의 최솟값은?

① $3(\sqrt{5}-1)$　② $3\sqrt{5}$　③ $3(\sqrt{5}+1)$　④ $3(\sqrt{5}+2)$　⑤ $3(\sqrt{5}+3)$

공간좌표 Level 2 6번

좌표공간의 점 $\mathrm{A}(0,0,8)$와 y축 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 직선 AP, AQ가 구 $S: x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$와 모두 접할 때, 선분 PQ의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

공간좌표 Level 3 1번

그림과 같이 좌표공간의 원점 O와 세 점 $A(0, 0, 4)$, $B(a, 0, b)$, $C(c, d, e)$에 대하여 사면체 OABC가 정사면체일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c, d, e는 모두 양수이다.)

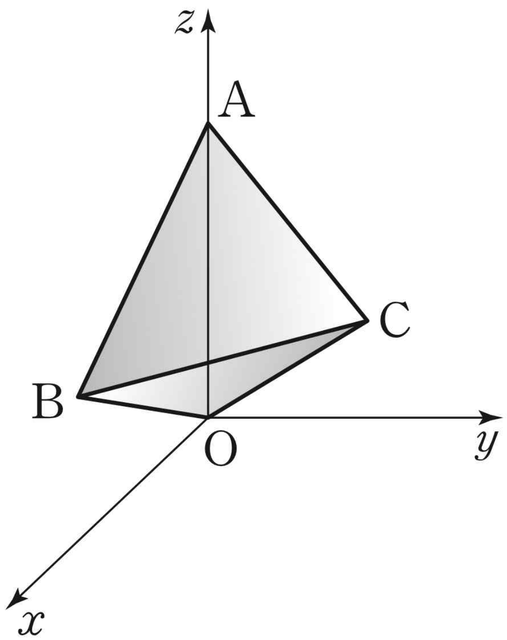
<보기>

ㄱ. $b = 2$

ㄴ. $cd = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

ㄷ. 네 점 O, A, B, C를 지나는 구의 중심의 좌표를 (p, q, r)라 하면 $pqr = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

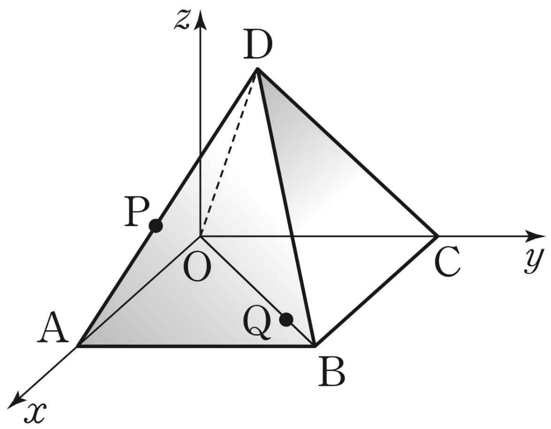
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



공간좌표 Level 3 2번

그림과 같이 좌표공간의 네 점 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$, $\mathrm{A}(2, 0, 0)$, $\mathrm{B}(2, 2, 0)$, $\mathrm{C}(0, 2, 0)$과 z좌표가 양수인 점 D를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{DO}} = \overline{\mathrm{DA}} = \overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{DC}} = \sqrt{6}$ 인 정사각뿔 D$-$OABC가 있다. 선분 DA 위의 점 P와 선분 OB 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 $\mathrm{P}_1(a, b, c)$, $\mathrm{Q}_1(d, e, 0)$이라 할 때, $\dfrac{a+b+c}{d+e}$의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$　　② 1　　③ $\dfrac{4}{3}$　　④ $\dfrac{5}{3}$　　⑤ 2



공간좌표 Level 3 3번

좌표공간의 원점 O, 점 $\mathrm{A}(1, -1, \sqrt{6})$, xy평면 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$
(나) 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{2}$ 이다.

삼각형 AOB에서 $\angle\mathrm{AOB}$를 4등분하는 세 직선이 선분 AB와 만나는 점 중에서 점 B에 가장 가까운 점을 $\mathrm{C}(a, b, c)$라 할 때, $(3abc)^2$의 값을 구하시오.

공간좌표 Level 3 4번

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(4, 0, 0)$, $\mathrm{B}(2, 2, 2)$, $\mathrm{C}(-3, 1, 1)$에 대하여 평면 α가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 평면 α와 평면 ABC의 교선은 xy평면 위에 있다. (나) 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 15°이다.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① $9\sqrt{3}$　　② $12\sqrt{3}$　　③ $15\sqrt{3}$　　④ $18\sqrt{3}$　　⑤ $21\sqrt{3}$

공간좌표 Level 3 5번

좌표공간에서 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 x축에 수직이고 점 $(1, 2, 3)$을 지나는 평면에 의하여 이등분된다. (나) 구 S는 z축에 수직이고 점 $(3, 4, 5)$를 지나는 평면에 의하여 이등분된다. (다) 구 S는 xy평면에 접한다.

구 S와 x축을 포함하는 평면 α가 만나서 생기는 원을 C라 하고, 원 C 위의 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 PH의 길이의 최댓값은 10이고 최솟값은 $\frac{32}{5}$일 때, 원 C의 중심의 x좌표와 y좌표의 합은? (단, 구 S의 중심의 y좌표는 양수이다.)

① $\frac{176}{15}$ ② $\frac{59}{5}$ ③ $\frac{178}{15}$ ④ $\frac{179}{15}$ ⑤ 12

공간좌표 Level 3 6번

좌표공간에서 중심이 $\mathrm{C}(a, a, b)$인 구 S와 구 S의 외부에 있는 점 $\mathrm{A}(6, 6, 6\sqrt{2})$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 xy평면에 접한다. (나) 구 S는 z축에 접한다. (다) 구 S와 선분 OA가 만나는 두 점을 각각 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}} < \overline{\mathrm{OQ}})$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}} = 8$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{AQ}}$의 값은? (단, $a > 0$, $b > 0$이고, O는 원점이다.)

① $32(\sqrt{2}-1)$ ② $16(2\sqrt{2}-1)$ ③ $32\sqrt{2}$ ④ $16(2\sqrt{2}+1)$ ⑤ $32(\sqrt{2}+1)$

공간좌표 유제 1번

좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, 점 Q를 z축에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 점 R의 좌표가 $(2, 4, -3)$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

$\mathrm{Q}(a, b, -c)$

$\mathrm{R}(-a, -b, -c)$

$-(a+b+c) = 2+4-3 = 3$

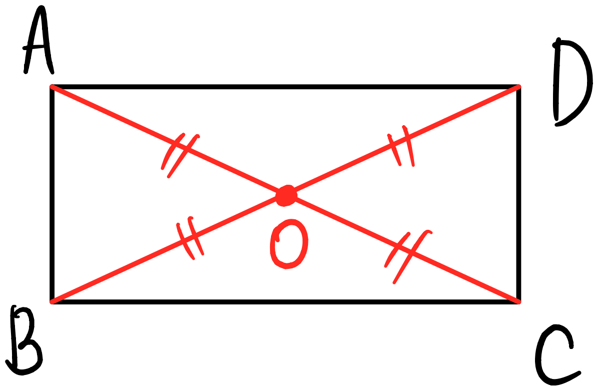
공간좌표 유제 2번

좌표공간에 있는 직사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B는 xy평면에 대하여 대칭이다. (나) 두 점 A, C는 원점에 대하여 대칭이다. (다) 점 D의 좌표는 $(-2, -2, 3)$이다.

점 A의 좌표가 (a, b, c)일 때, abc의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15



$(-2.-2.3)$

(나) B $(2.2.-3)$

(가) A $(2.2.3)$

공간좌표 유제 3번

좌표공간의 두 점 $A(1, 3, 5)$, $B(-4, -2, -1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 1　　② $\frac{6}{5}$　　③ $\frac{7}{5}$　　④ $\frac{8}{5}$　　⑤ $\frac{9}{5}$

$P(0.\ k.\ 0)$

$\overline{AP}^2 = 1^2 + (k-3)^2 + 5^2$

$\overline{BP}^2 = 4^2 + (k+2)^2 + 1^2$

$\therefore\ (k-3)^2 + 25 = (k+2)^2 + 16$

$\rightarrow k^2 - 6k + 34 = k^2 + 4k + 20$

$\rightarrow 14 = 10k$

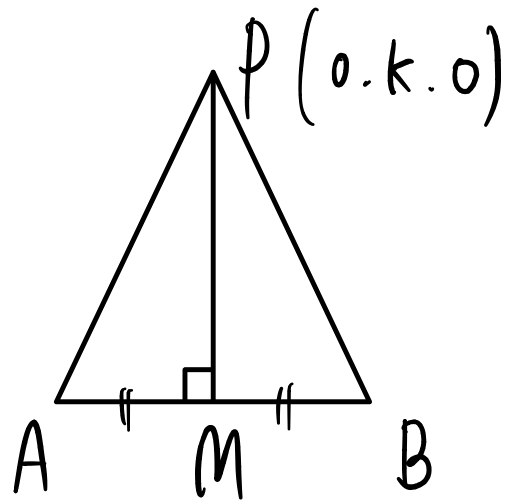
$\therefore\ k = \frac{7}{5}$

교과 외

공간좌표 유제 3번

좌표공간의 두 점 A(1, 3, 5), B(−4, −2, −1)에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$



$$M\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 2\right)$$

$$\overrightarrow{BA} = (5.\ 5.\ 6)$$

$$\overrightarrow{MP} = \left(\frac{3}{2}.\ k-\frac{1}{2}.\ -2\right)$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MP} = \frac{15}{2} + 5k - \frac{5}{2} - 12 = 0$$

$$\longrightarrow k = \frac{7}{5}$$

공간좌표 유제 4번

좌표공간의 세 점 A$(1, 2, -1)$, B$(-1, 1, 0)$, C$(0, 0, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\overline{AB} = \sqrt{6} \longrightarrow \overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{6}$

$\overline{BC} = \sqrt{a^2+2} = \sqrt{6} \qquad \therefore |a| = 2$

만약 $a = 2$이면 $\overline{AC} > 3 > \sqrt{6}$이므로 안 됨

$a = -2$이겠구나.

두 점 A, C의 z좌표 차

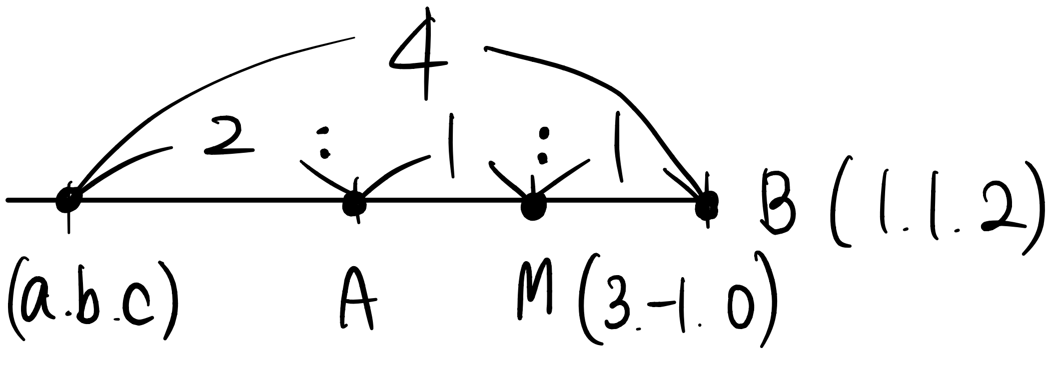
$a = -2$ 대입해보면 $\overline{AC} = \sqrt{6}$ 잘 나옴.

일반적 풀이 : B, M 좌표 이용해서 A 좌표 찾고 외분점 공식

$\longrightarrow$ 단순 계산이니 직접 해보세요.

공간좌표 유제 5번

좌표공간의 두 점 A, B$(1,1,2)$에 대하여 선분 AB의 중점이 M$(3,-1,0)$이고, 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표가 (a,b,c)일 때, $|a|+|b|+|c|$의 값을 구하시오.



$B \longrightarrow M \longrightarrow P$

x좌표 : $+2$ $\quad$ x좌표 : $+2 \times 3$ $\quad$ $a=9$

y좌표 : -2 $\quad$ y좌표 : -2×3 $\quad$ $b=-7$

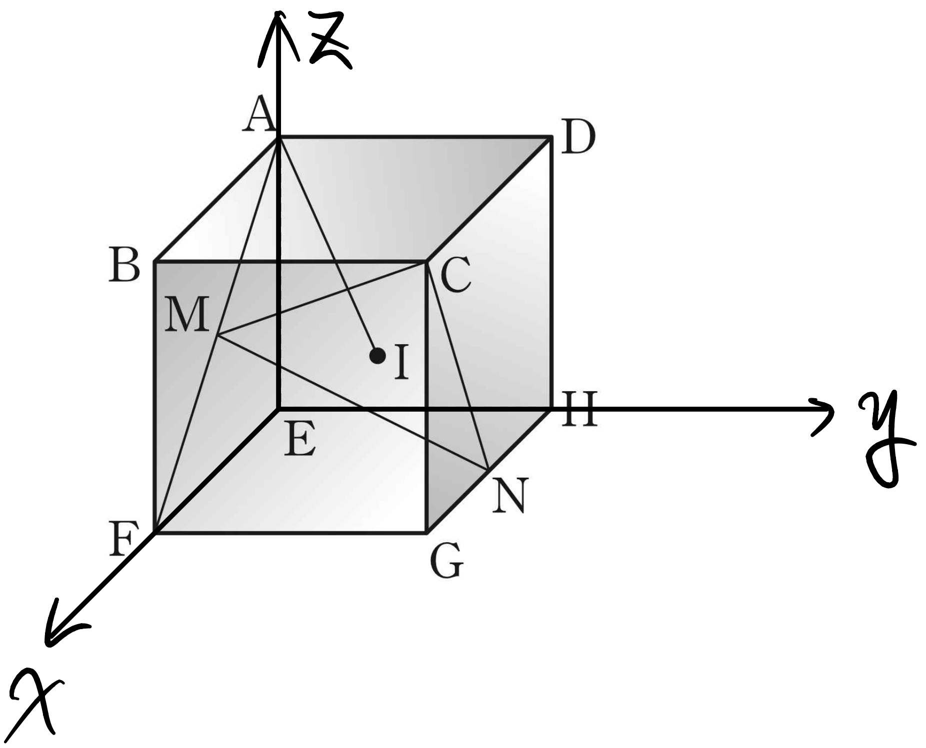
z좌표 : -2 $\quad$ z좌표 : -2×3 $\quad$ $c=-6$

$$9+7+6=\boxed{22}$$

공간좌표 유제 6번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에서 두 선분 AF, GH의 중점을 각각 M, N이라 하고 삼각형 CMN의 무게중심을 I라 할 때, 선분 AI의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{41}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{42}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{43}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{11}}{3}$



A (0.0.2) C(2.2.2) M(1.0.1) N(1.2.0)

I$\left(\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.1\right)$

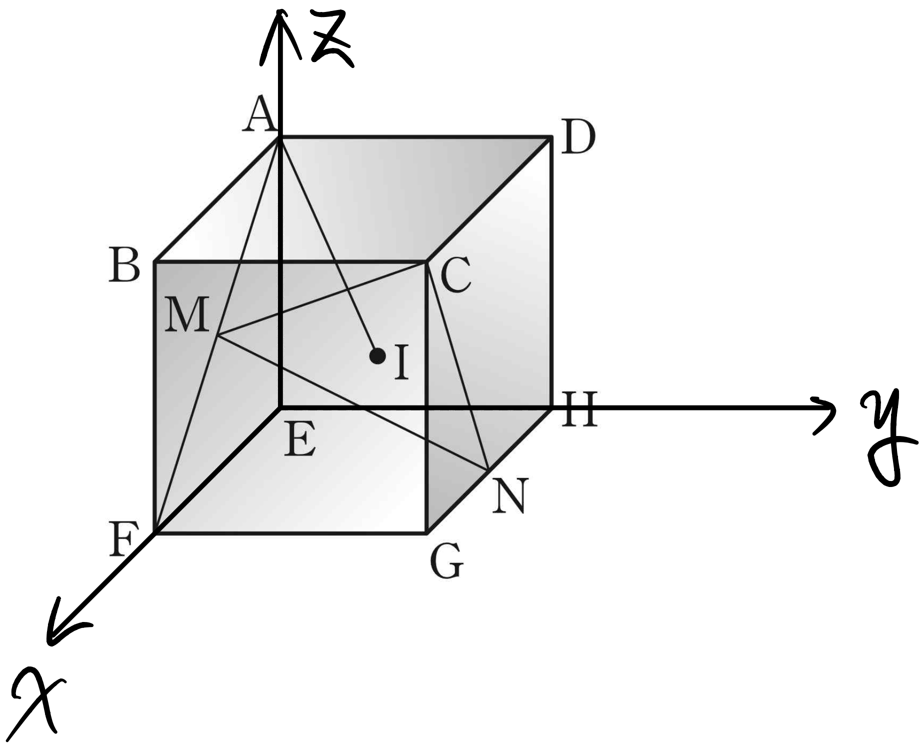
$$\overline{AI} = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+1} = \frac{\sqrt{41}}{3}$$

교과 외

공간좌표 유제 6번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에서 두 선분 AF, GH의 중점을 각각 M, N이라 하고 삼각형 CMN의 무게중심을 I라 할 때, 선분 AI의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{41}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{42}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{43}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{11}}{3}$



$$3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$$

$$= (2.2.0) + (1.0.-1) + (1.2.-2)$$

$$= (4.4.-3)$$

$$3|\overrightarrow{AI}| = \sqrt{4^2+4^2+3^2} = \sqrt{41}$$

공간좌표 유제 7번

좌표공간에서 원점 O를 지나는 직선이 구 $x^2+y^2+z^2-8x-2y+2z+14=0$과 한 점 P에서만 만날 때, 선분 OP의 길이는?

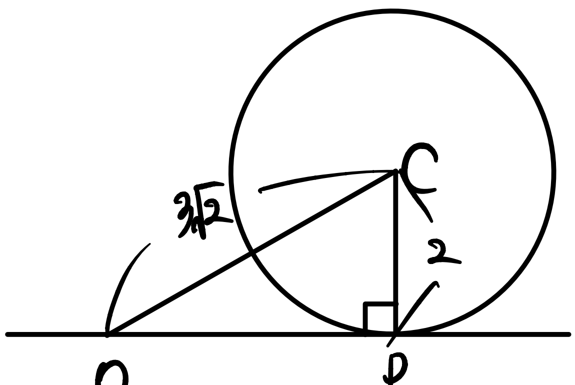
① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{14}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

$$(x^2-8x+16)-16+(y^2-2y+1)-1+(z^2+2z+1)-1+14=0$$

$$(x-4)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4=2^2$$

구 중심 C $(4, 1, -1)$, $\overline{OC}=3\sqrt{2}$,

구 반지름 길이 2



$\overline{OP}=\sqrt{14}$

공간좌표 유제 8번

좌표공간에서 중심이 $\mathrm{P}(a, b, c)$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$이고 반지름의 길이가 r인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

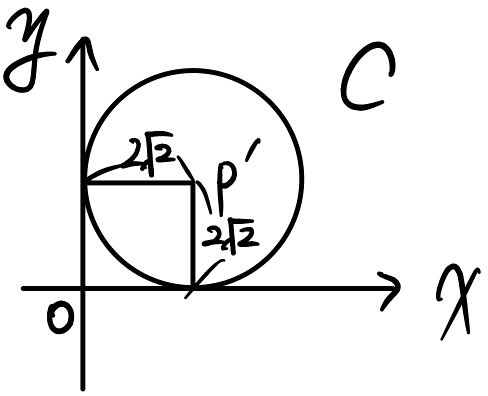
(가) 구 S는 x축과 y축에 모두 접한다.
(나) 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이는 8π이다.

원 C

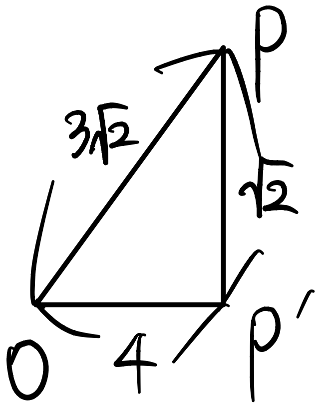
$\overline{\mathrm{OP}}=3\sqrt{2}$일 때, r^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

(가) 원 C는 x축. y축에 모두 접하고,

(나) 원 C의 반지름 길이는 $2\sqrt{2}$이다.



$a=b=2\sqrt{2}$



$$r^2=\overline{\mathrm{PP'}}^2+(2\sqrt{2})^2$$
$$=\boxed{10}$$

공간좌표 Level 1 1번

좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(1, -3, a)$, $\mathrm{B}(7, 1, b)$, $\mathrm{C}(c, d, -5)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B에서 z축에 내린 수선의 발은 일치한다.
(나) 두 점 A, C는 원점에 대하여 대칭이다.

$ab + cd$의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

(가) $a=b$

(나) $c=-1$. $d=3$. $a=5$

$5 \times 5 + (-1) \times 3 = 22$

공간좌표 Level 1 2번

좌표공간의 점 P를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 A, y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 B라 하자. A$(a-b, a+b, -2)$, B$(2b-a, 5, c)$일 때, abc의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$P(\alpha, \beta, \gamma)$

$A(-\alpha, \beta, \gamma)$

$B(-\alpha, \beta, -\gamma)$

① $a-b = 2b-a \longrightarrow a:b = 3:2$

② $a+b = 5 \longrightarrow a=3,\ b=2$

③ $c = 2$

공간좌표 Level 1 3번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(-3, t, 2)$, $\mathrm{B}(1, -4, t)$에 대하여 선분 AB의 길이를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 최솟값은?

① $4\sqrt{2}$ ② $\sqrt{34}$ ③ 6 ④ $\sqrt{38}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

모든 실수 t에 대하여 $f(t) > 0$ 이다.

$\{f(t)\}^2$가 최소일 때 $f(t)$도 최소이다.

$$\{f(t)\}^2 = 4^2 + (t+4)^2 + (t-2)^2$$

$$= 2t^2 + 4t + 36$$

$$= 2(t^2 + 2t + 1) - 2 + 36 \geq 34$$

공간좌표 Level 1 4번

좌표공간의 두 점 A$(1,2,3)$, B$(4,5,6)$과 xy평면 위의 점 P, zx평면 위의 점 Q에 대하여 두 선분 AP, BQ의 길이의 합이 최소일 때 두 점 P, Q의 위치를 각각 P$'$, Q$'$이라 하자. 선분 P$'$Q$'$의 길이는?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

각각 최소이어도 됨.

$P'(1.2.0)$

$Q'(4.0.6)$

$\overline{P'Q'} = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = 7$

공간좌표 Level 1 5번

좌표공간의 세 점 $A(3,1,2)$, $B(-1,5,0)$, $C(7,6,-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 선분 OG의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{15}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ 5 ④ $\sqrt{30}$ ⑤ $\sqrt{35}$

$G\left(\frac{9}{3}, \frac{12}{3}, 0\right)$

$G(3, 4, 0)$

일반적 풀이 : 내분점 공식 써서 P 좌표 표현, 외분점 공식 써서 Q 좌표 표현

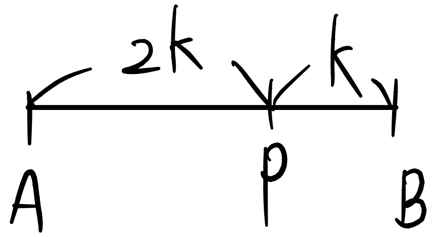
$\overline{PQ}=16$ 가지고 a 구하기

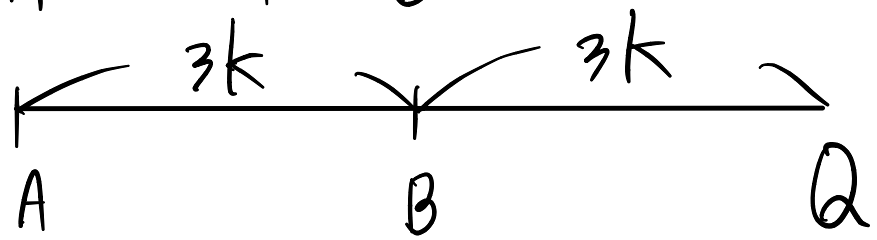
⟶ 단순 계산이니 직접 해보세요.

공간좌표 Level 1 6번

좌표공간의 두 점 $A(-1,5,3\sqrt{2})$, $B(a,-1,\sqrt{2})$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $2:1$로 외분하는 점을 Q라 하자. $\overline{PQ}=16$일 때, 양수 a의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13





$\overline{PQ}=4k=16 \longrightarrow k=4$

$\overline{AB}=3k=12$

$\longrightarrow (a+1)^2+6^2+(2\sqrt{2})^2=144$

$\longrightarrow (a+1)^2+44=144$

$\longrightarrow |a+1|=a+1=10$

$(\because a>0)$

공간좌표 Level 1 7번

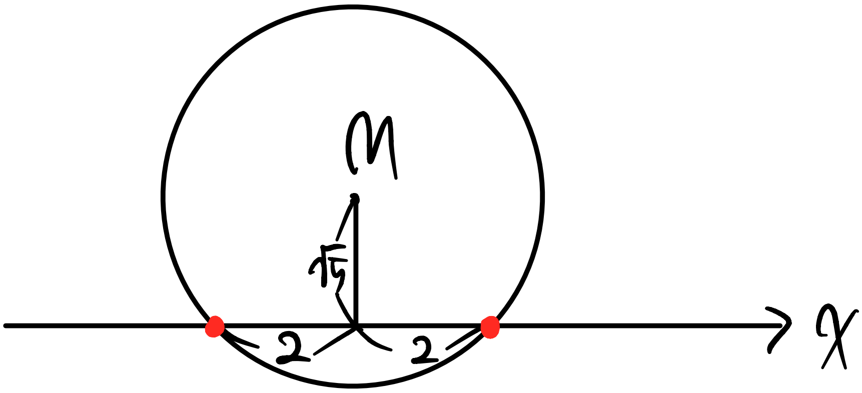
좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(0,-3,-4)$, $\mathrm{B}(2,1,0)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 구 S가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

$\overline{AB} = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = 6 \longrightarrow$ 반지름 길이 3

구 S 중심 = $\overline{AB}$ 중점 $M(1,-1,-2)$

M과 x축 사이 거리 = $\sqrt{5}$



a.b.c 구하려면 내분점 공식은 일단 써야 하는 듯함.

공간좌표 Level 1 8번

좌표공간의 두 점 A$(2, 4, -3)$, B$(5, -2, 3)$에 대하여

$\overline{AB} = \sqrt{3^2+6^2+6^2} = 9$

구 $S: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S의 중심은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이다. (나) 구 S는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 지난다.

P

$a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

① -130 ② -132 ③ -134 ④ -136 ⑤ -138

(가) 중심 $C\left(\dfrac{4+5}{3}, \dfrac{8-2}{3}, \dfrac{-6+3}{3}\right) = (3, 2, -1)$

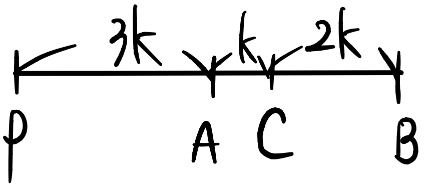
$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4+(z+1)^2-1+d=0$

$a=-6$. $b=-4$. $c=2$. 반지름 길이 $\sqrt{14-d}$

(나) (i) 외분점 공식 써서 P 좌표 찾고 반지름 길이 찾고 d 찾기

$\longrightarrow$ 그닥..

(ii) 선분들 길이 관계 찾기



반지름 길이 $= \dfrac{4}{3}\overline{AB} = 12$

$\sqrt{14-d} = \sqrt{144} \longrightarrow d=-130$

$a+b+c+d = -138$

공간좌표 Level 1 8번

좌표공간의 두 점 A$(2, 4, -3)$, B$(5, -2, 3)$에 대하여

구 $S: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S의 중심은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이다. (나) 구 S는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 지난다.

$a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

① -130 ② -132 ③ -134 ④ -136 ⑤ -138

Q. 왜 외분점 공식을 안 쓰려고 하나요?

A. 식이 못생겨서요. (−) 부호 때문에 실수하기도 쉽고..

이걸 페이지의 (i), (ii)를 비교해봅시다.

(i) 외분점 공식 (P) ⟶ 점과 점 사이의 거리 공식 (C, P)

(ii) 점과 점 사이의 거리 공식 (A, B) ⟶ $\overline{CP}$가 $\overline{AB}$의 몇 배인지 찾기

회색은 둘 다 해야 되니까 그렇다치고

초록은 직선 하나 딱 그려서 알아낼 수 있는 거라서

계산해야 되는 노랑보다 편합니다.

"외분점 공식 쓰지 말고 외우지도 마라"고 주장하는 건 절대 아니고

외분점 공식 풀이보다 유리한 풀이가 있을 가능성이 높으니

평소에 더 좋은 풀이를 고민해보고 연습해두면 좋겠습니다.

공간좌표 Level 2 1번

좌표공간의 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(-2,\,-3,\,1)$, B, $\mathrm{P}(a,\,b,\,c)$를 포함한 8개의 점을 꼭짓점으로 하는 정육면체 C와 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정육면체 C의 모든 모서리를 연장한 직선은 x축 또는 y축 또는 z축과 평행하다. (나) 두 점 A, B는 yz평면에 대하여 대칭이다.

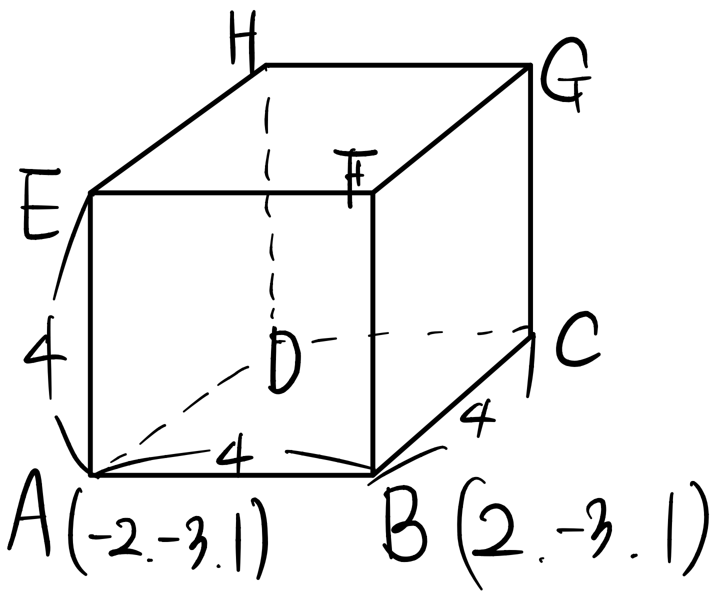
$b>0$, $c<0$, $a+b+c<0$일 때, abc의 값은?

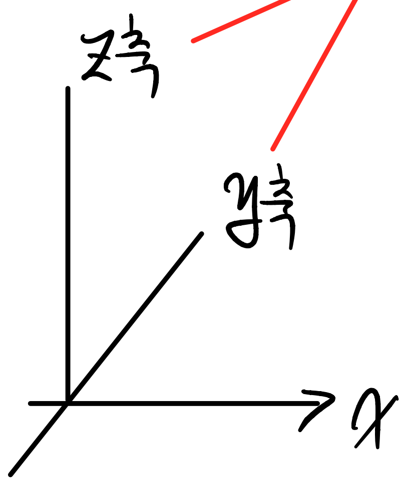
① ② ③

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

(나) 직선 AB는 x축과 평행하다.

무슨 방향이 양의 방향인지 당장은 모름.





① 평면 CDHG : $y = -3 \pm 4 = b = \boxed{1}$ or -7

② 평면 EFGH : $z = 1 \pm 4 = c = 5$ or $\boxed{-3}$

③ $a < 2$, 평면 ADHE : $x = -2$

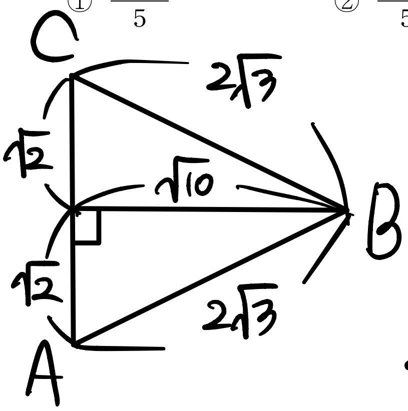
평면 BCGF : $x = 2$

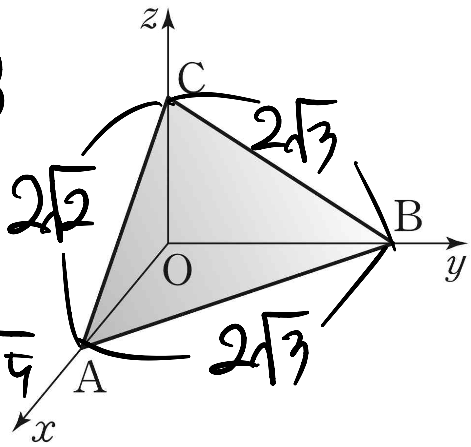
$\boxed{a = -2}$

공간좌표 Level 2 2번

좌표공간의 네 점 O$(0,0,0)$, A$(2,0,0)$, B$(0,2\sqrt{2},0)$, C$(0,0,2)$에 대하여 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 OH의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$





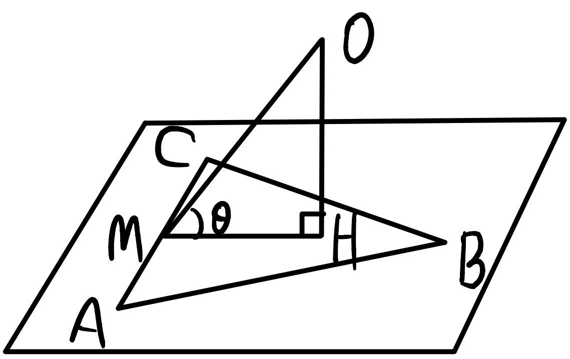
삼각형 ABC 넓이 $= 2\sqrt{5}$

삼각형 AOC 넓이 $= 2$

∴ 두 평면 ABC, AOC가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

교선 : 직선 AC

평면 ABC를 눕혀서 다시 그려보면



$\overline{AC}$ 중점 M $(1, 0, 1)$

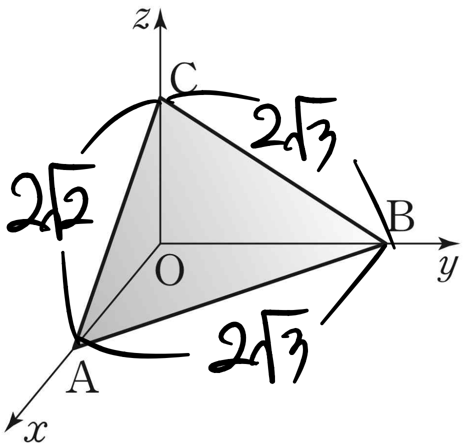
$\overline{OH} = \overline{OM} \times \sin\theta$

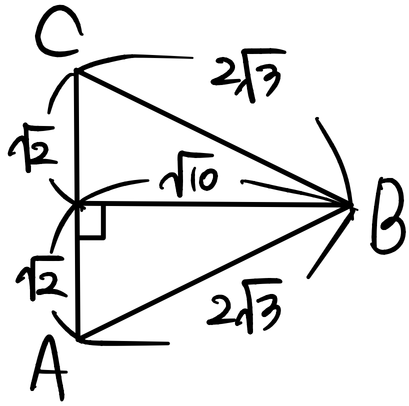
$= \sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

공간좌표 Level 2 2번

좌표공간의 네 점 O$(0, 0, 0)$, A$(2, 0, 0)$, B$(0, 2\sqrt{2}, 0)$, C$(0, 0, 2)$에 대하여 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 OH의 길이는?

① $\frac{2\sqrt{6}}{5}$　　② $\frac{2\sqrt{7}}{5}$　　③ $\frac{4\sqrt{2}}{5}$　　④ $\frac{6}{5}$　　⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$





3 × 사면체 OABC 부피

$= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \overline{OC} = ($삼각형 ABC 넓이$) \times \overline{OH}$

$\rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{5} \times \overline{OH}$

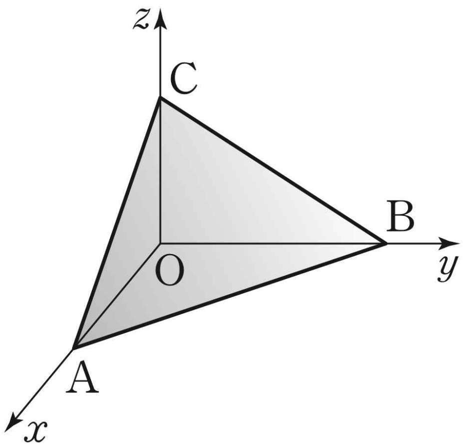
$\rightarrow \overline{OH} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

교과 외 NOTE 점 (x_1, y_1, z_1)과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$이다.

공간좌표 Level 2 2번

좌표공간의 네 점 O$(0,0,0)$, A$(2,0,0)$, B$(0,2\sqrt{2},0)$, C$(0,0,2)$에 대하여 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 OH의 길이는?

① $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{7}}{5}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$ ④ $\dfrac{6}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$



$abc \neq 0$인 세 실수 a, b, c에 대하여

세 점 $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ 지나는 평면의 방정식이

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 이므로 평면 ABC의 방정식은

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2\sqrt{2}}+\dfrac{z}{2}=1$ 에서 $\sqrt{2}x+y+\sqrt{2}z=2\sqrt{2}$ 이고

$\overline{OH}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+1+2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ 이다.

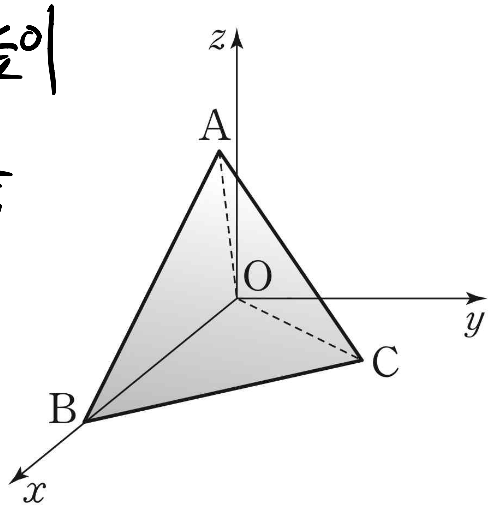
공간좌표 Level 2 3번

그림과 같이 좌표공간의 네 점 O$(0,0,0)$, A(a,b,c), B$(d,0,0)$, C$(e,f,0)$을 꼭짓점으로 하고 모든 모서리의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 직선 AC와 zx평면이 만나는 점을 P라 할 때, 점 P의 z좌표는? (단, a, b, c, d, e, f는 모두 양수이다.)

① $4\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{15}$ ④ $\sqrt{66}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

$C =$ 정사면체 높이

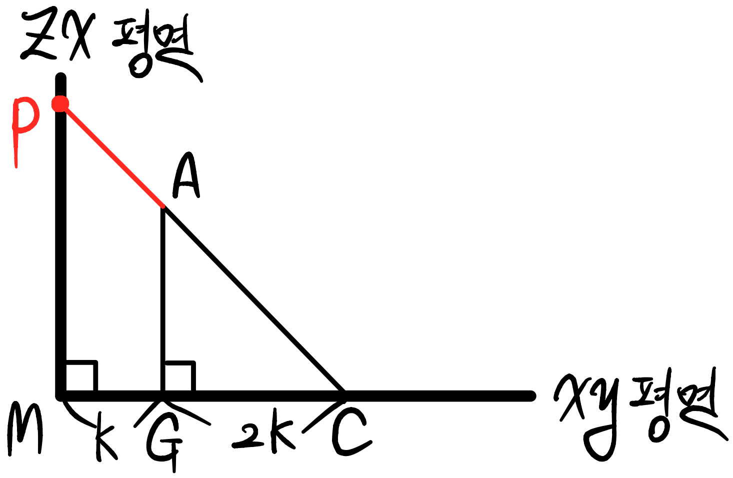
$= 6 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$



삼각형 OBC 무게중심 G, $\overline{OB}$ 중점 M

정사면체니까 네 점 A. C. G. M은 한 평면(α) 위에 있고,

$\alpha \perp xy$평면, $\alpha \perp zx$ 평면이므로 다음과 같이 단면화할 수 있다.



두 삼각형 ACG, PCM이 2 : 3 닮음이므로

P의 z좌표는 A의 z좌표의 $\frac{3}{2}$배이다. $\frac{3}{2} \times 2\sqrt{6} = \boxed{3\sqrt{6}}$

공간좌표 Level 2 4번

그림과 같이 좌표공간에서 z축 위의 점 A와 xy평면 위의 네 점 B, C, D, E를 꼭짓점으로 하는 정사각뿔 A−BCDE가 다음 조건을 만족시킨다.

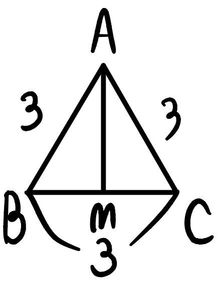
(가) 모든 모서리의 길이는 3이다. (나) 네 직선 BC, CD, DE, EB는 각각 x축 또는 y축과 평행하다.

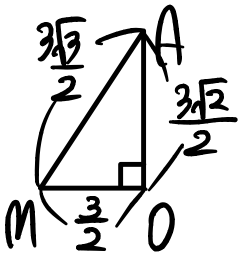
선분 AB 위의 점 P, 선분 AC 위의 점 Q, 선분 AD 위의 점 R(p, q, r), 선분 AE 위의 점 S에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′, S′이라 하면 도형 PQRS−P′Q′R′S′은 직육면체이다. 정사각뿔 A−BCDE의 부피를 V라 하면 직육면체 PQRS−P′Q′R′S′의 부피는 $\frac{1}{3}V$일 때, $8\sqrt{2}pqr$의 값을 구하시오.

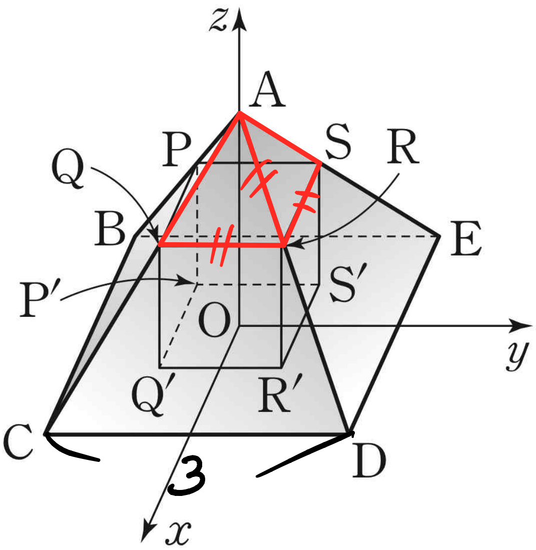
(단, 점 A의 z좌표, 점 D의 x좌표와 y좌표는 모두 양수이다.)

V부터 구해보면

$\overline{BC}$ 중점 M에 대하여







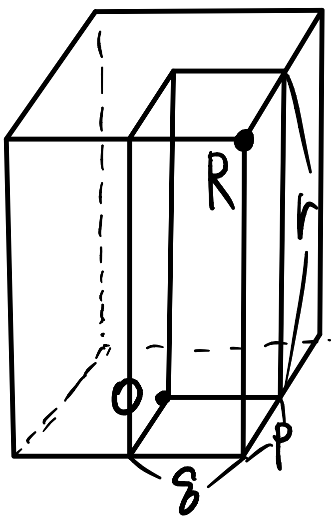
그러려면

$\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{AR} = \overline{AS}$

이어야 함.

$V = \frac{1}{3} \times (\text{BCDE 넓이}) \times \overline{OA}$

$= 3 \times \frac{3\sqrt{2}}{2}$



pqr의 값은

PQRS−P′Q′R′S′ 부피의 $\frac{1}{4}$이다.

$\therefore pqr = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}V\right) = \frac{1}{12}V$

$\therefore 8\sqrt{2}pqr = \frac{2\sqrt{2}}{3}V$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} = \boxed{6}$

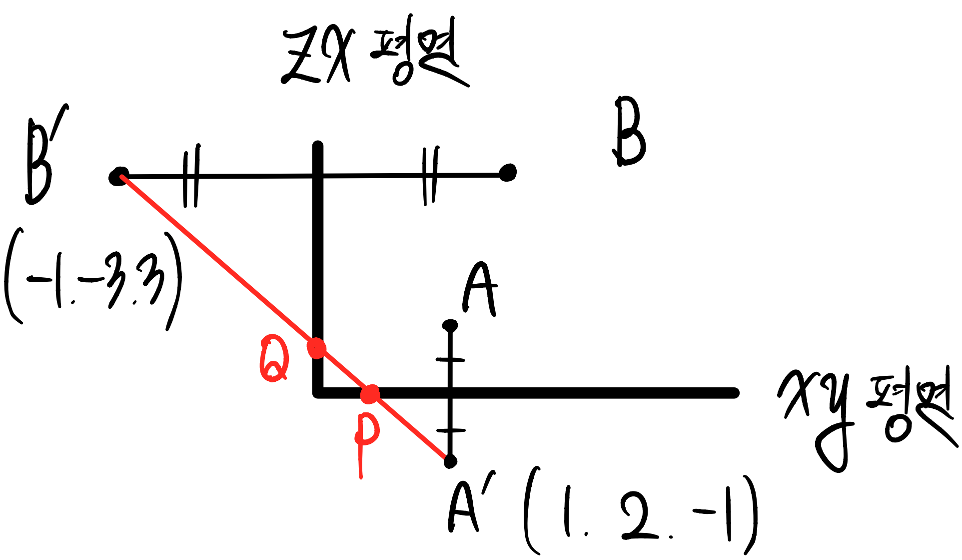
고선 : x축

공간좌표 Level 2 5번

좌표공간의 두 점 $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 3, 3)$과 xy평면 위의 점 P, zx평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}+\overline{BA}$의 최솟값은?

① $3(\sqrt{5}-1)$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3(\sqrt{5}+1)$ ④ $3(\sqrt{5}+2)$ ⑤ $3(\sqrt{5}+3)$

$\overline{BA}=3 \longrightarrow (\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 의 최솟값$) + 3 = ?$



애가 설마 $(3\sqrt{5}+$ 정수$)$ 꼴로 나오진 않겠지. 그냥 ③이 답임.

xy 평면 위 모든 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이다.

zx 평면 위 모든 점 Q에 대하여 $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$ 이다.

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'} \geq \overline{A'B'} = 3\sqrt{5}$

$\overline{A'B'}=\sqrt{2^2+5^2+4^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

구 중심 C(0.3.4), 반지름 길이 3 ⟶ 구가 zx 평면과 접함.

⟶ C에서 zx 평면에 내린 수선의 발 C′(0.0.4) ⟶ C′이 z축 위에 있으므로 구가 z축과 접함

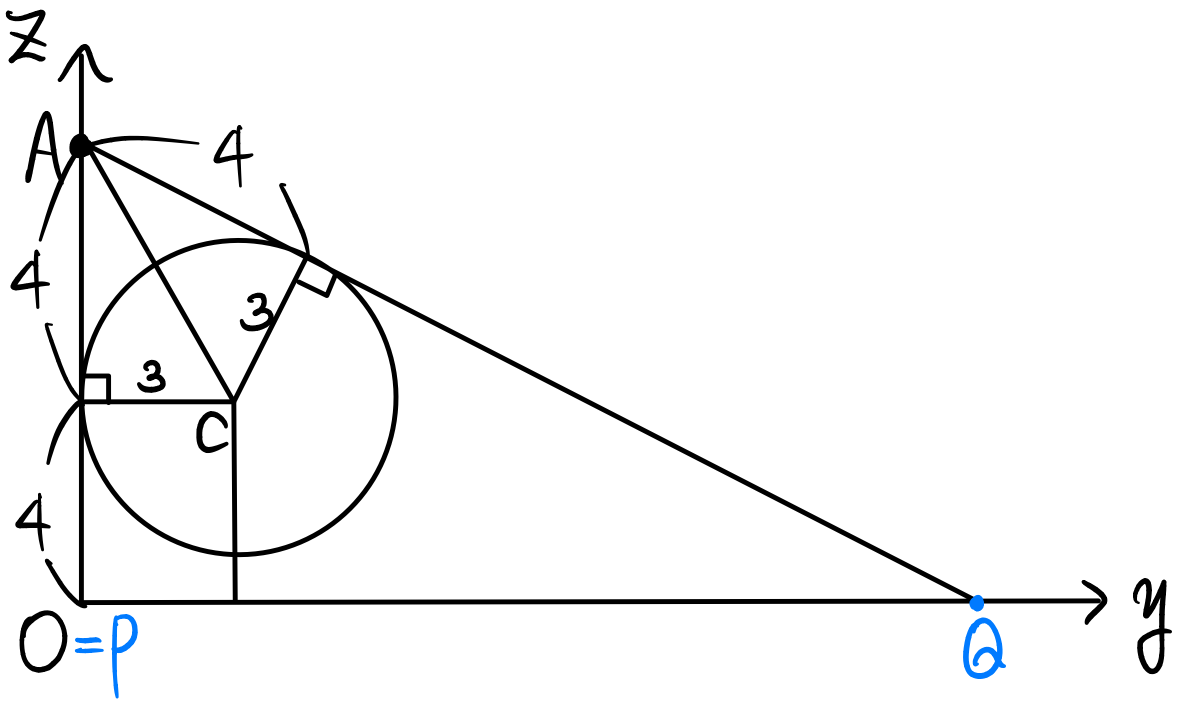
해설지에서는 노랑에서 바로 초록으로 넘어가던데 제대로 확인하고 넘어가면 좋겠네요.

공간좌표 Level 2 6번

좌표공간의 점 A(0, 0, 8)와 y축 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 직선 AP, AQ가 구 $S: x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$와 모두 접할 때, 선분 PQ의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

yz 평면만 관찰하자.

이유 : C가 yz평면 위의 점이고, z축 위의 점 A와 y축 (직선 PQ)를 포함하는 평면 APQ가 곧 yz평면이다.



원점 O가 y축 위의 점이고 직선 OA(z축)가 구 S와 접한다.

그러므로 P가 곧 O라고 할 수 있다.

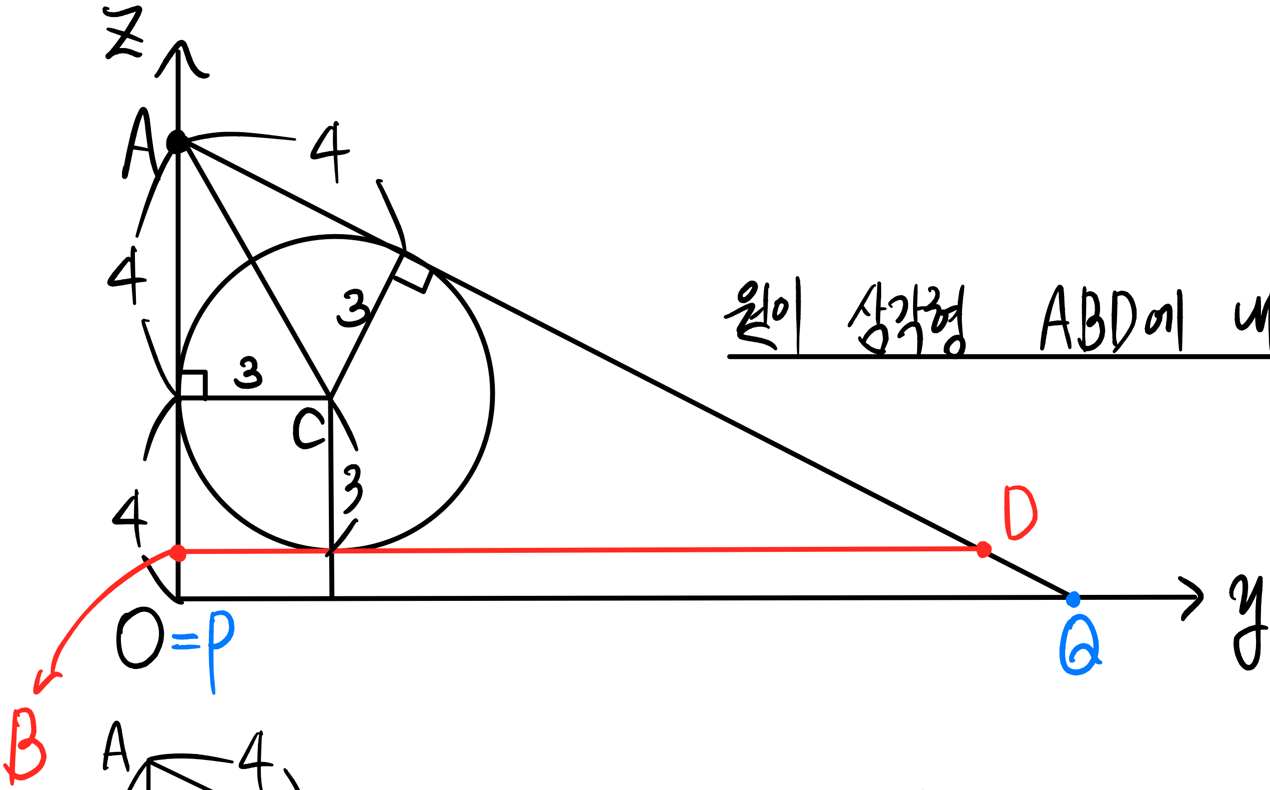
$\overline{OQ}$는 어떻게 구할까?

해설지에서는 열심히 계산해서 풀었던데 좀 다르게 풀어보자. (다음 페이지)

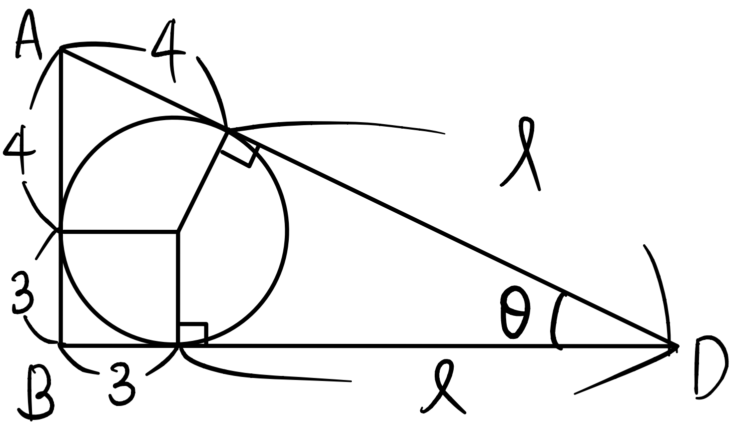
직선 $z=1$을 그려주자.

공간좌표 Level 2 6번

좌표공간의 점 A(0, 0, 8)와 y축 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 직선 AP, AQ가 구 $S: x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$와 모두 접할 때, 선분 PQ의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



원이 삼각형 ABD에 내접한다.



삼각형 ABD 넓이

$= \frac{1}{2} \times 7 \times (3+l)$

$= \frac{1}{2} \times (\text{둘레}) \times (\text{내접원 반지름 길이})$

$\rightarrow 7 \times (3+l) = (14+2l) \times 3$

$\rightarrow \underline{l=21}$

$\tan\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{7}{24} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}$

$\therefore \overline{OQ} = \frac{24}{7}\overline{OA} = \frac{192}{7}$

$\boxed{199}$

교과 외

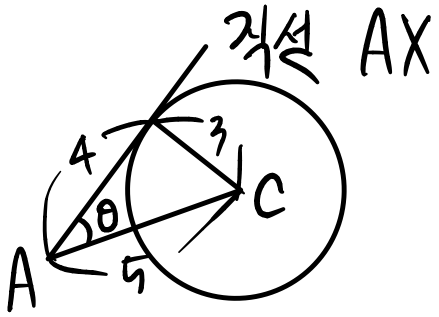
공간좌표 Level 2 6번

좌표공간의 점 A(0,0,8)와 y축 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 직선 AP, AQ가 구 $S: x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$와 모두 접할 때, 선분 PQ의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

y축 위의 점 X(0. t. 0)에 대하여 직선 AX와 구 S가 접한다. 가능한 점 X의 위치가 P.Q로 2개이다.

→ t에 대한 이차방정식을 풀고, PQ를 물어보니까 이차방정식의 두 실근의 차를 계산해야 되겠구나.

$\overline{AC}=5$



$\overrightarrow{AX}$와 $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기 $\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$

$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AX}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos\theta = 4|\overrightarrow{AX}|$

$\overrightarrow{AX}=(0.\ t.\ -8)$ $\overrightarrow{AC}=(0.\ 3.\ -4)$

$3t+32=4\sqrt{t^2+64}$

$\rightarrow \left(\frac{3}{4}t+8\right)^2 = t^2+64$

$\rightarrow \frac{9}{16}t^2+12t+64=t^2+64$

$\rightarrow \frac{7}{16}t^2=12t$

$\rightarrow t=0,\ t=\frac{16\times12}{7}=\frac{192}{7}$

$\boxed{199}$

ㄱ. $\overline{OB}=\overline{AB} \longrightarrow b=2$, $\overline{OB}=4 \longrightarrow a=2\sqrt{3}$

$\overline{OC}=\overline{AC} \longrightarrow e=2$

공간좌표 Level 3 1번

그림과 같이 좌표공간의 원점 O와 세 점 A$(0,0,4)$, B$(a,0,b)$, C(c,d,e)에 대하여 사면체 OABC가 정사면체일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c, d, e는 모두 양수이다.)

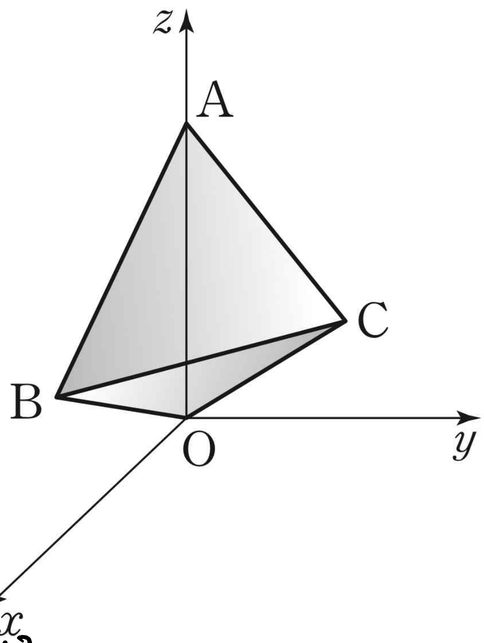
<보기>

ㄱ. $b=2$

ㄴ. $cd=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

ㄷ. 네 점 O, A, B, C를 지나는 구의 중심의 좌표를 (p,q,r)라 하면 $pqr=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

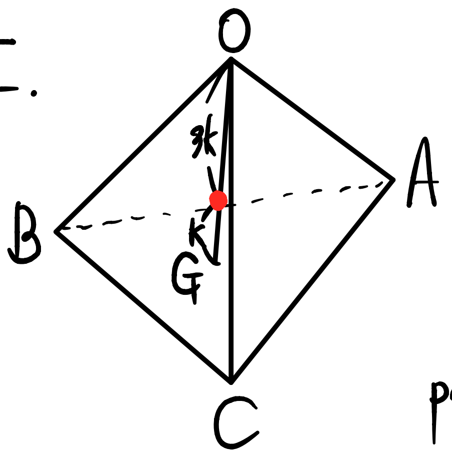
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄴ. $\overline{OC}=4 \longrightarrow c^2+d^2=12$ $\longrightarrow$ $-4\sqrt{3}c+12=4$

$\overline{BC}=4 \longrightarrow (c-2\sqrt{3})^2+d^2=16$ $\longrightarrow c=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $d=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

ㄷ.



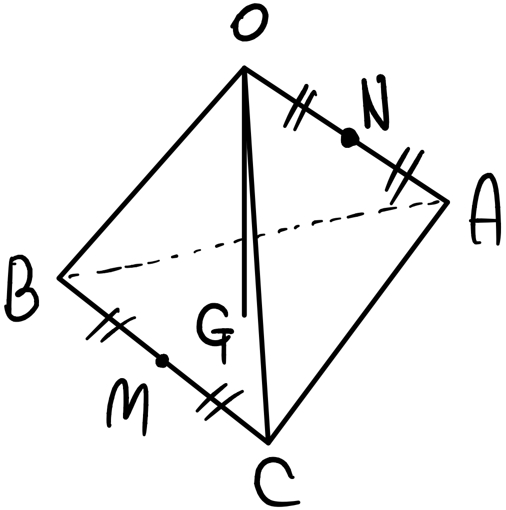
ABC 무게중심 $G(p', q', r')$

구 중심 = $\overline{OG}$ 3:1 내분점 (암기하는 게 좋음)

$\therefore p=\frac{3}{4}p'$, $q=\frac{3}{4}q'$, $r=\frac{3}{4}r'$

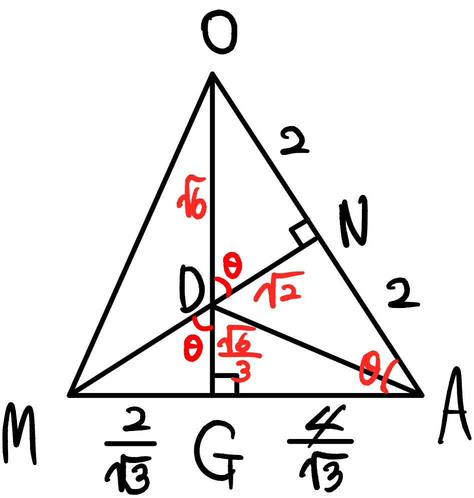
$pqr=\left(\frac{3}{4}\right)^3 p'q'r' = \frac{3^3}{4^3} \times \frac{8}{3\sqrt{3}} \times \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{8}{3} = \boxed{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$

ㄷ. 왜 구의 중심(D)이 $\overline{OG}$ 3:1 내분점?



$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$ 이므로 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HA}=\overline{HB}=\overline{HC}$ 이다.
즉 H = G이고, O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발도 G이므로
세 점 O, D, G는 한 직선 위에 있다.

$\overline{DB}=\overline{DC}$ 이므로 D는 M을 지나고 직선 BC와 수직인 평면 (평면 OAM) 위의 점이다.



$\overline{DO}=\overline{DA}$ 이므로

두 직선 DN, OA는 서로 수직이다.

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\theta=\sqrt{2}$

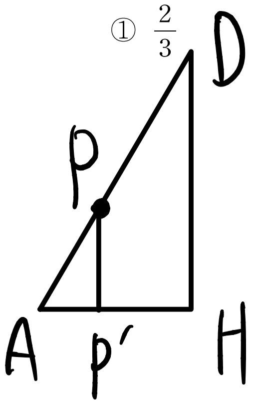
① D에서 xy 평면에 내린 수선의 발 H(1.1.0) ② $\overline{DH}=2$

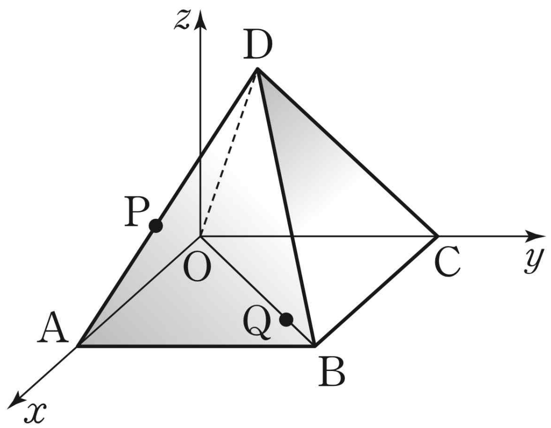
⇒ D(1.1.2)

공간좌표 Level 3 2번

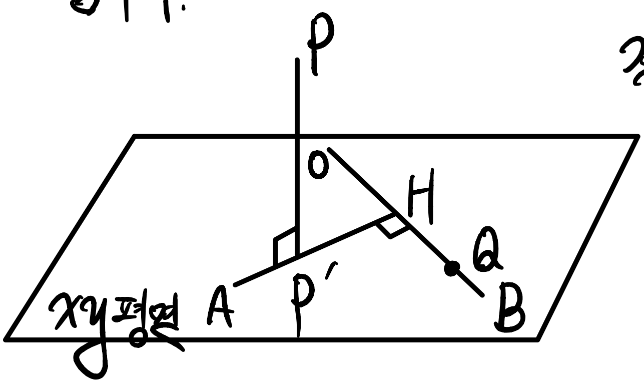
그림과 같이 좌표공간의 네 점 O$(0, 0, 0)$, A$(2, 0, 0)$, B$(2, 2, 0)$, C$(0, 2, 0)$과 z좌표가 양수인 점 D를 꼭짓점으로 하고 ① $\overline{DO}=\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=\sqrt{6}$ ② 인 정사각뿔 D$-$OABC가 있다. 선분 DA 위의 점 P와 선분 OB 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 $\mathrm{P}_1(a, b, c)$, $\mathrm{Q}_1(d, e, 0)$이라 할 때, $\frac{a+b+c}{d+e}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2





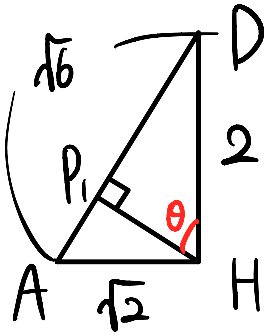
P′은 선분 AH 위의 점이다.



직선 PH와 직선 HB는 수직이다. (삼수선 정리)

$\overline{PQ} \ge \overline{PH} \to Q_1(1.1.0)$

$\overline{PH}$의 최솟값? (P는 선분 AD 위의 점)

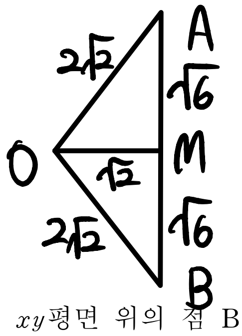


$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　$\overline{DP_1} = 2\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

∴ P_1은 $\overline{AD}$ 1:2 내분점

$\to P_1\left(\frac{5}{3} . \frac{1}{3} . \frac{2}{3}\right)$

일단 삼각형 모양 파악완



$\longrightarrow \angle AOB = 120^\circ$

공간좌표 Level 3 3번

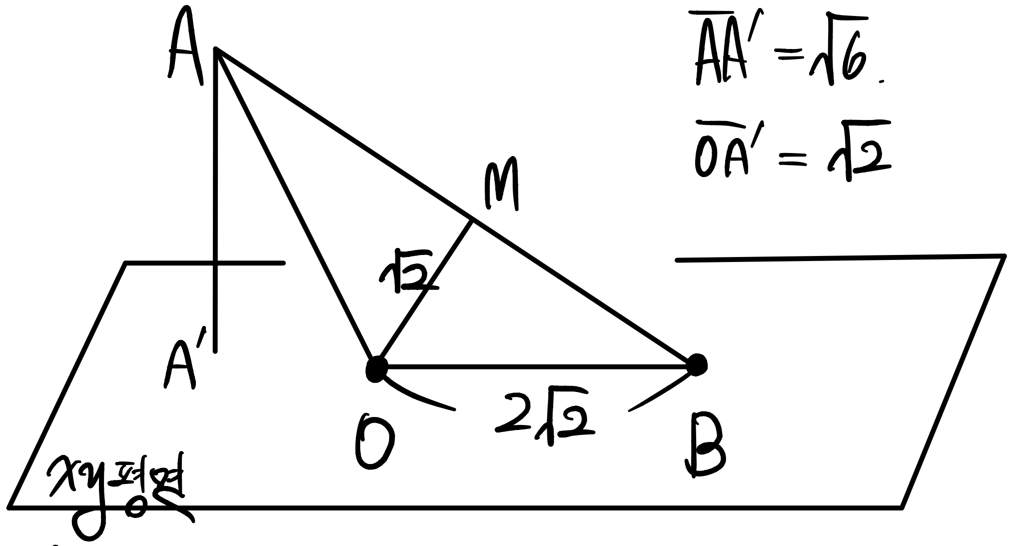
좌표공간의 원점 O, 점 $A(1, -1, \sqrt{6})$, xy평면 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

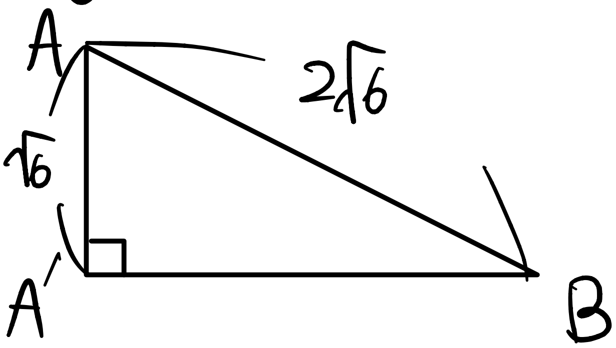
(가) $\overline{OA} = \overline{OB}$ $= 2\sqrt{2}$
(나) 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM} = \sqrt{2}$이다.

삼각형 AOB에서 $\angle$AOB를 4등분하는 세 직선이 선분 AB와 만나는 점 중에서 점 B에 가장 가까운 점을 $C(a, b, c)$라 할 때, $(3abc)^2$의 값을 구하시오.

$\overline{AA'} = \sqrt{6}$.

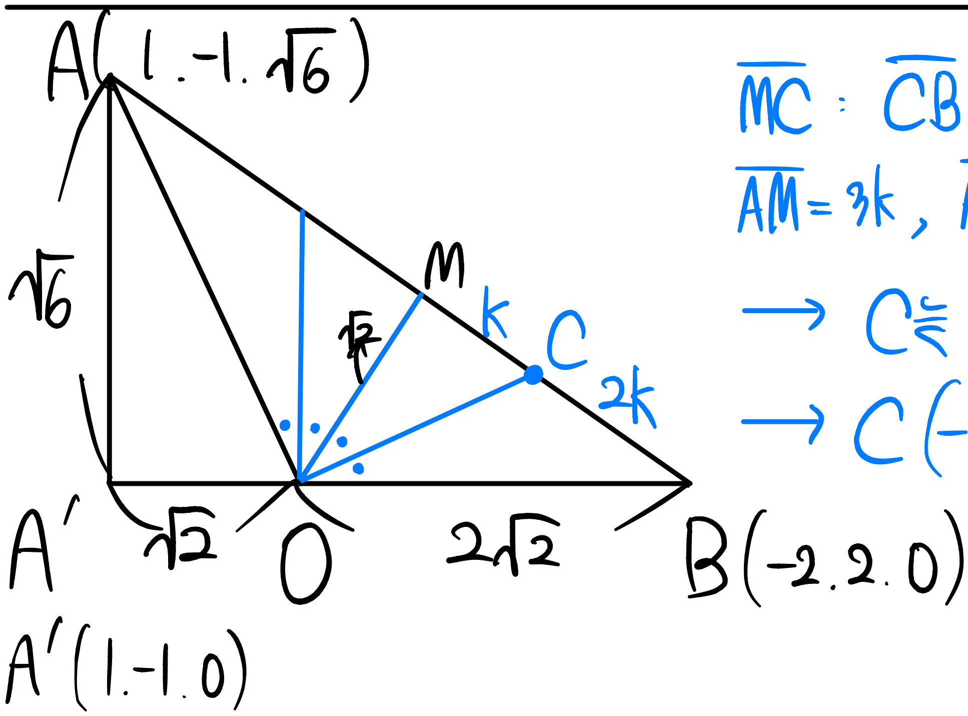
$\overline{OA'} = \sqrt{2}$





$\overline{A'B} = 3\sqrt{2} = \overline{A'O} + \overline{OB}$

$\therefore$ A', O, B는 한 직선 위에 있다.



$\overline{MC} : \overline{CB} = 1 : 2$

$\overline{AM} = 3k$, $\overline{AC} = 4k$

$\longrightarrow$ C는 $\overline{AB}$ 2:1 내분점

$\longrightarrow C\left(-1, 1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$(-\sqrt{6})^2 = \boxed{6}$

문제 좋았는데 C를 A에 가장 가까운 점이라고 했으면

더 좋았을 것 같아요.

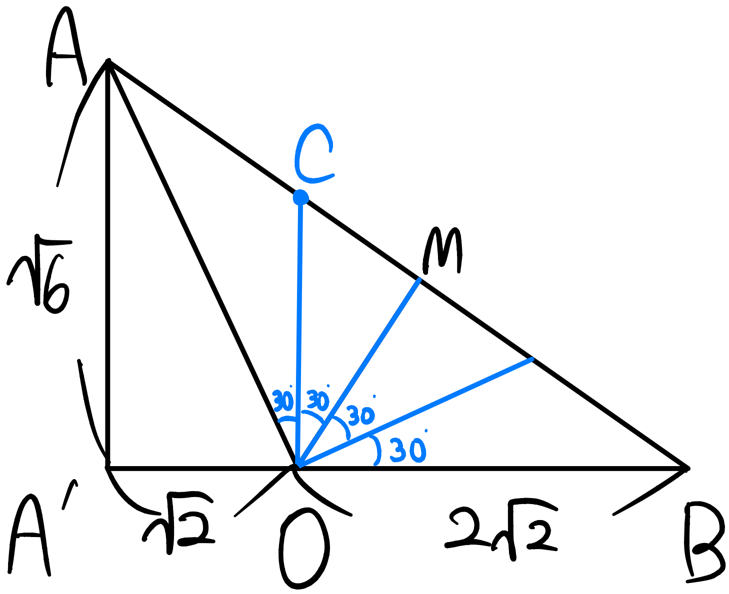
공간좌표 Level 3 3번

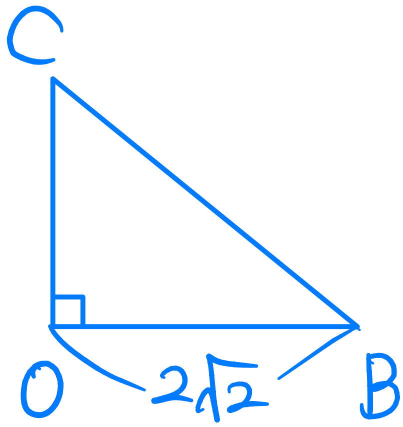
좌표공간의 원점 O, 점 A$(1, -1, \sqrt{6})$, xy평면 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OA} = \overline{OB}$ (나) 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM} = \sqrt{2}$이다.

삼각형 AOB에서 ∠AOB를 4등분하는 세 직선이 선분 AB와 만나는 점 중에서 점 ~~B~~ A에 가장 가까운 점을 C(a, b, c)라 할 때, ~~$(3abc)^2$~~의 값을 구하시오.

$(a+b+c)^2 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.





(i) AA′B, COB 3:2 닮음 $\longrightarrow \overline{OC} = \frac{2}{3}\overline{AA'} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

직선 AA′이 z축과 평행하므로 직선 OC도 z축과 평행

$\therefore C\left(0, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $(a+b+c)^2 = \frac{8}{3}$ $\boxed{//}$

(ii) 앞페이지에서처럼 C가 $\overline{AB}$의 2:1 내분점임을 확인

→ B 좌표 찾고나서 내분점 공식 → C 좌표 찾기

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$ $\overline{AC}=\sqrt{51}$ $\overline{BC}=3\sqrt{3}$ $\longrightarrow$ $\cos(\angle ABC)=\dfrac{12+27-51}{2\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}$

$\sin(\angle ABC)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. 삼각형 ABC 넓이 $=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\sin(\angle ABC)=6\sqrt{2}$

공간좌표 Level 3 4번

좌표공간의 세 점 A$(4, 0, 0)$, B$(2, 2, 2)$, C$(-3, 1, 1)$에 대하여 평면 α가 다음 조건을 만족시킨다.

$A'(4,0,0)$ $B'(2,2,0)$ $C'(-3,1,0)$

(가) 평면 α와 평면 ABC의 ℓ 교선은 xy평면 위에 있다. (나) 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 15°이다.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① $9\sqrt{3}$ ② $12\sqrt{3}$ ③ $15\sqrt{3}$ ④ $18\sqrt{3}$ ⑤ $21\sqrt{3}$

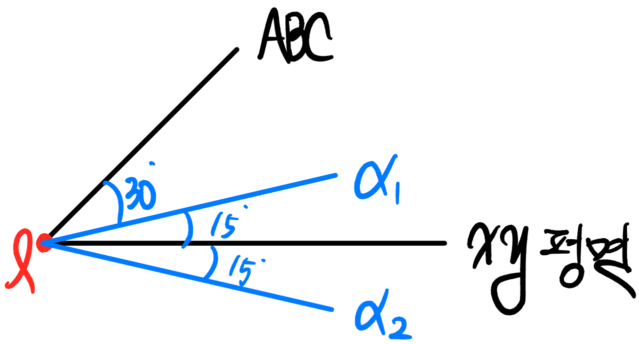
$\overline{A'B'}=2\sqrt{2}$ $\overline{B'C'}=\sqrt{26}$ $\overline{A'C'}=5\sqrt{2}$

$\cos(\angle B'A'C')=\dfrac{8+50-26}{2\times2\sqrt{2}\times5\sqrt{2}}=\dfrac{4}{5}$ $\longrightarrow$ 삼각형 $A'B'C'$ 넓이

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\times\dfrac{3}{5}=6$

$\therefore$ 평면 ABC와 xy 평면이 이루는 각의 크기 $=45^\circ$ $(\because 6\sqrt{2}\cos45^\circ=6)$

세 평면 α, ABC, xy평면이 직선 ℓ을 공유하므로 다음과 같이 단면화하자.



$M=6\sqrt{2}\cos30^\circ=3\sqrt{6}$

$m=6\sqrt{2}\cos60^\circ=3\sqrt{2}$

다른 풀이 : 평면 ABC, xy 평면이 이루는 각의 크기 구하기

(이면각의 정의)

공간좌표 Level 3 4번

좌표공간의 세 점 A$(4, 0, 0)$, B$(2, 2, 2)$, C$(-3, 1, 1)$에 대하여 평면 α가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 평면 α와 평면 ABC의 교선은 xy평면 위에 있다. (나) 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 15°이다.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

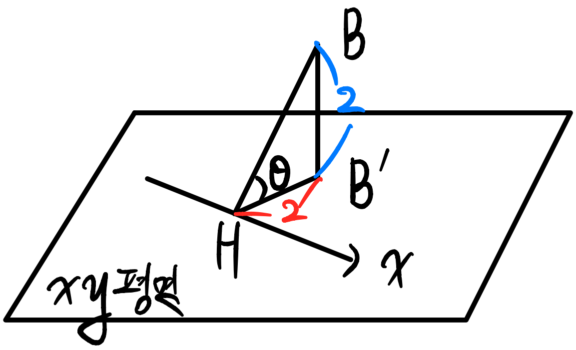
① $9\sqrt{3}$ ② $12\sqrt{3}$ ③ $15\sqrt{3}$ ④ $18\sqrt{3}$ ⑤ $21\sqrt{3}$

직선 BC와 xy 평면이 만나는 점 D$(?, ?, 0)$

B$(2, 2, 2)$ C$(-3, 1, 1)$ D$(-8, 0, 0)$

평면 ABC는 곧 평면 ABD와 같다.

직선 AD가 x축이다. (가)의 교선이 x축이다.



$\therefore \theta = 45^\circ$

고과 외 : 평면 ABC, xy 평면이 이루는 각의 크기 구하기

(평면의 방정식)

공간좌표 Level 3 4번

좌표공간의 세 점 A(4, 0, 0), B(2, 2, 2), C(−3, 1, 1)에 대하여 평면 α가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 평면 α와 평면 ABC의 교선은 xy평면 위에 있다. (나) 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $15°$ 이다.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① $9\sqrt{3}$ ② $12\sqrt{3}$ ③ $15\sqrt{3}$ ④ $18\sqrt{3}$ ⑤ $21\sqrt{3}$

세 점 A.B.C 의 좌표를 잘 관찰해보면 (y좌표) = (z좌표) 이다.

그러므로 평면 ABC 의 방정식은 $y-z=0$ 이다.

평면 ABC의 법선벡터가 $\vec{n_1}=(0, 1, -1)$ 이고

xy 평면의 법선벡터가 $\vec{n_2}=(0, 0, 1)$ 이므로

두 평면이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

$\theta=45°$

구의 중심의 좌표 (1. k. 5)

$x=1$ $z=5$

공간좌표 Level 3 5번

좌표공간에서 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 x축에 수직이고 점 $(1, 2, 3)$을 지나는 평면에 의하여 이등분된다.
(나) 구 S는 z축에 수직이고 점 $(3, 4, 5)$를 지나는 평면에 의하여 이등분된다.
(다) 구 S는 xy평면에 접한다.

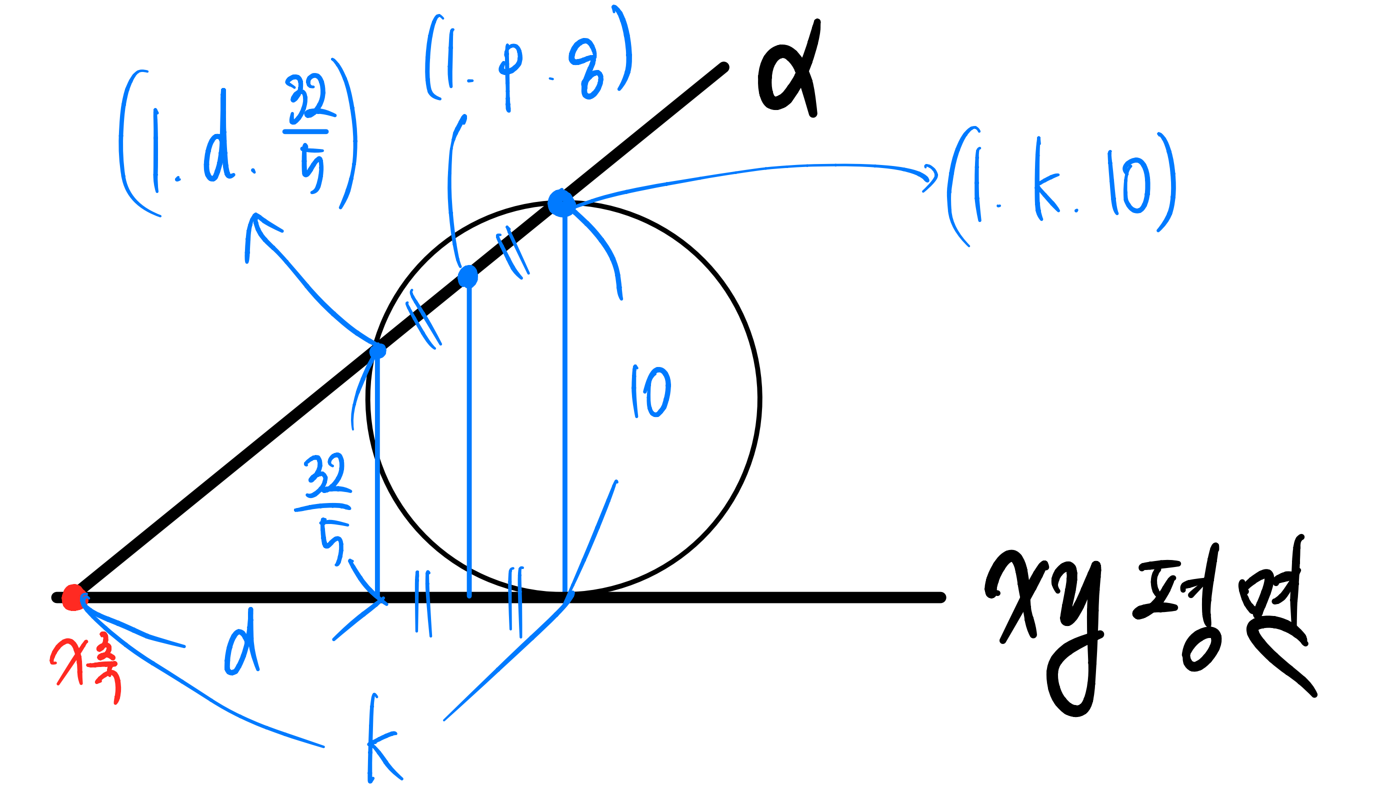
반지름 길이 5

구 S와 x축을 포함하는 평면 α가 만나서 생기는 원을 C라 하고, 원 C 위의 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 PH의 길이의 최댓값은 10이고 최솟값은 $\frac{32}{5}$일 때, 원 C의 중심의 x좌표와 y좌표의 합은? (단, 구 S의 중심의 y좌표는 양수이다.)

지름

① $\frac{176}{15}$ ② $\frac{59}{5}$ ③ $\frac{178}{15}$ ④ $\frac{179}{15}$ ⑤ 12

α와 xy평면이 x축을 공유하므로 다음과 같이 단면화하자.



$$1+p = 1+\frac{1}{2}(d+k) = ?$$

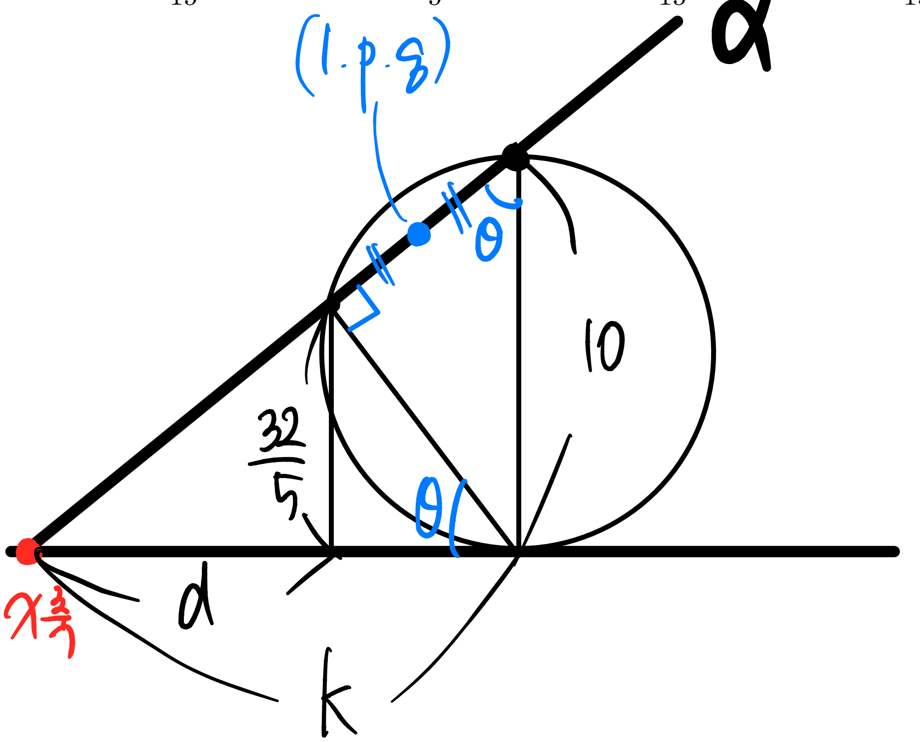
공간좌표 Level 3 5번

좌표공간에서 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 x축에 수직이고 점 $(1, 2, 3)$을 지나는 평면에 의하여 이등분된다.
(나) 구 S는 z축에 수직이고 점 $(3, 4, 5)$를 지나는 평면에 의하여 이등분된다.
(다) 구 S는 xy평면에 접한다.

구 S와 x축을 포함하는 평면 α가 만나서 생기는 원을 C라 하고, 원 C 위의 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 PH의 길이의 최댓값은 10이고 최솟값은 $\frac{32}{5}$일 때, 원 C의 중심의 x좌표와 y좌표의 합은? (단, 구 S의 중심의 y좌표는 양수이다.)

① $\frac{176}{15}$ ② $\frac{59}{5}$ ③ $\frac{178}{15}$ ④ $\frac{179}{15}$ ⑤ 12



xy 평면

$$10\sin^2\theta = \frac{32}{5}$$
$$\rightarrow \sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$d : k = \frac{32}{5} : 10 \longrightarrow d : k = 32 : 50 \quad d = 32\alpha \quad k = 50\alpha$$
$$\rightarrow p = 41\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{k}{10} = 5\alpha = \frac{4}{3} \quad \therefore \alpha = \frac{4}{15}, \quad \boxed{1+p = 1+\frac{164}{15} = \frac{179}{15}}$$

반지름 길이 (가) b

(나) $\sqrt{2}a$

$b=\sqrt{2}a$

공간좌표 Level 3 6번

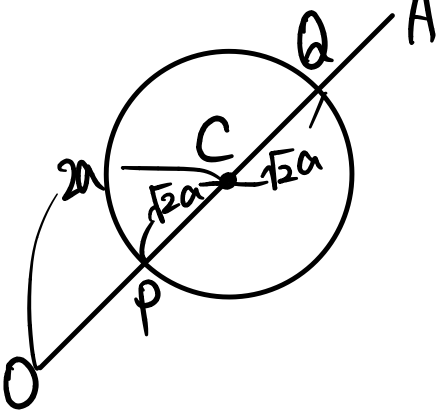
좌표공간에서 중심이 $\mathrm{C}(a, a, b)$인 구 S와 구 S의 외부에 있는 점 $\mathrm{A}(6, 6, 6\sqrt{2})$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 xy평면에 접한다.
(나) 구 S는 z축에 접한다.
(다) 구 S와 선분 OA가 만나는 두 점을 각각 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}} < \overline{\mathrm{OQ}})$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{OQ}} = 8$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{AQ}}$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$이고, O는 원점이다.)

① $32(\sqrt{2}-1)$ ② $16(2\sqrt{2}-1)$ ③ $32\sqrt{2}$ ④ $16(2\sqrt{2}+1)$ ⑤ $32(\sqrt{2}+1)$

세 점 $O(0.0.0)$ $C(a.a.\sqrt{2}a)$ $A(6.6.6\sqrt{2})$는 한 직선 위에 있다.



(다) $(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})a^2 = 8$

$2a^2 = 8 \quad \therefore a=2$

$C(2.2.2\sqrt{2})$ $A(6.6.6\sqrt{2}) \rightarrow \overline{CA} = 8$

$\overline{PQ} = 2\sqrt{2}a = 4\sqrt{2}$

$\overline{AQ} = \overline{AC} - \sqrt{2}a = 8-2\sqrt{2}$

$\boxed{32\sqrt{2}-16}$