지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

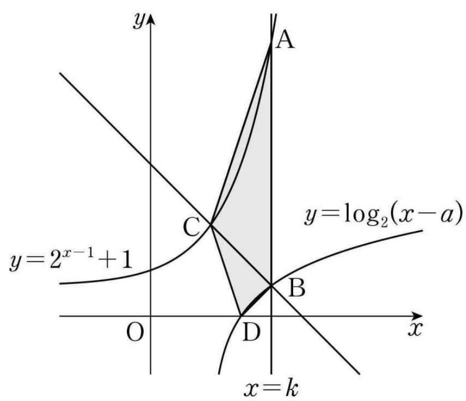
에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$)
〔2022년 3월 11〕



① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

1. 정답 ⑤ 〔2022년 3월 11〕

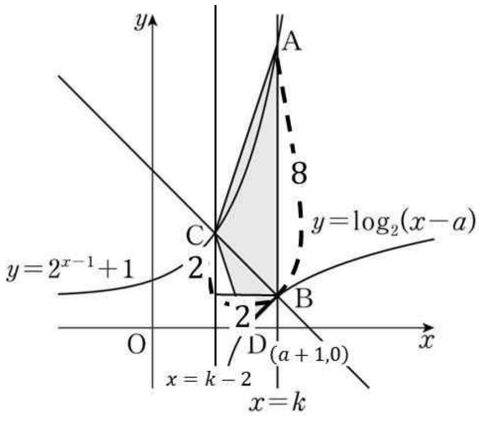
1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 문제부터 읽어볼게요. 직선 $x=k$가 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라고 한다네요. 그러면 $\mathrm{A}(k,\ 2^{k-1}+1)$, $\mathrm{B}(k,\ \log_2(k-a))$이네요. 그리고 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 $y=2^{x-1}+1$와 만나는 점을 C라고 한답니다.

대칭성이 중요한 지수로그함수에서 기울기가 -1인 직선을 괜히 주진 않았겠죠? 일단 이거 체크하고 가자구요.

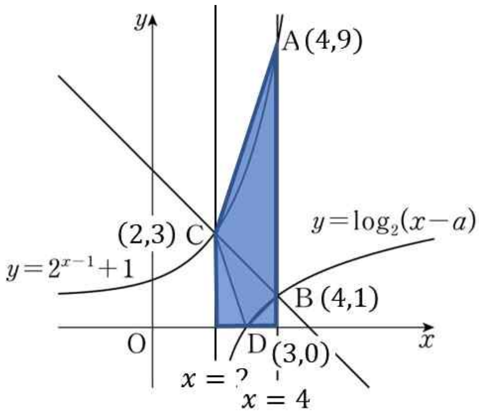
$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$랍니다. 바로 써먹을 수 있겠네요. $\overline{\mathrm{AB}}=8$이니까 $2^{k-1}+1-\log_2(k-a)=8$입니다. 정리하면 $2^{k-1}-7=\log_2(k-a)$이네요.

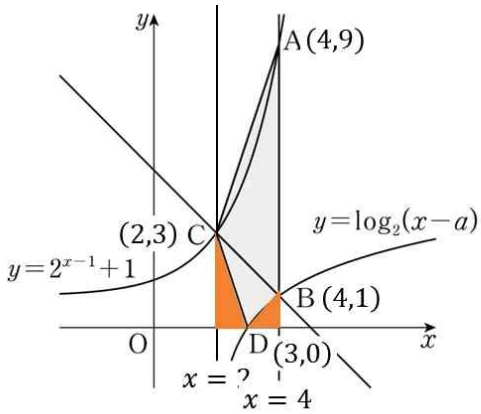
특히 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$는 기울기 -1과 연계해서 그림에 표시할 수 있겠어요. 그리고 D는 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점이니까 $x=a+1$입니다. $\mathrm{D}(a+1,\ 0)$이네요.



점 C는 $x=k-2$에서의 $y=2^{x-1}+1$의 함숫값이죠? 대각선 길이가 $2\sqrt{2}$인데 기울기가 -1이니까 $1:1:\sqrt{2}$ 관계가 성립하죠. $x=k$보다 2만큼 뒤로 간 곳이니까 $x=k-2$입니다. 따라서 $\mathrm{C}(k-2,\ 2^{k-3}+1)$입니다. 이러면 C의 y값은 B의 y값보다 2만큼 큰 거죠? 따라서 $\log_2(k-a)+2=2^{k-3}+1$입니다. 정리하면 $\log_2(k-a)=2^{k-3}-1$이네요. 이러면 $2^{k-1}-7=2^{k-3}-1$입니다. 정리하면 $2^{k-1}=\dfrac{1}{4}\times 2^{k-1}+6$이고 $\dfrac{3}{4}\times 2^{k-1}=6$이고 $2^{k-1}=8=2^3$입니다. $k-1=3$이고 $k=4$이네요. $\mathrm{A}(4,\ 9)$, $\mathrm{C}(2,\ 3)$입니다.

그리고 $1=\log_2(4-a)$이고 $a=2$이네요. $\mathrm{B}(4,\ 1)$입니다. 이제 ACDB의 넓이를 구해봅시다. 이거는 ACDB를 포함하는 큰 사다리꼴에서 작은 삼각형 두 개를 빼면 되겠네요.





왼쪽에서 오른쪽을 빼서 구하는 거죠.

큰 사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$(윗변 $3+$아랫변 9)$\times$높이 $2=12$입니다. 여기에서 왼쪽 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}$이고, 오른쪽 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$입니다. 이 둘을 빼면 $12-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=10$이네요.

답은 ⑤번입니다.

2. $a<2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x \le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은? 〔2022년 3월 12〕

(가) $x \ne 1$, $x \ne a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.
(나) $h(1)=h(a)$

① $-\dfrac{15}{6}$ ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\dfrac{11}{6}$

2. 정답 ③ 〔2022년 3월 12〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 함수끼리 사칙연산은 범위까지 그대로

일단 a는 2보다 큰 상수인데 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x \le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$랍니다. 일단 관찰부터 해보죠. $x \le 2$일 때는 $f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$이고, $x>2$일 때는 $f(x)=-x(x-a)$입니다. $x \le 2$일 때는 x축과 $x=1$, $x=3$에서 만나는, 최고차항의 계수가 1인 이차함수를 따라가다가 그 둘의 중점인 대칭축 $x=2$에서 딱 끊기는 모양이네요. 그 이후에는 x축과 $x=0$, $x=a$에서 만나는, 최고차항의 계수가 -1인 이차함수를 따라가는 모양이에요. 일단 $a>2$이니까 $f(x)$는 x축과 $x=a$에서 만나구요.

이때 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 있는데 $h(x)$는 연속인 함수라고 하네요. 그리고 (가)조건에서 $x \ne 1$, $x \ne a$일 때 $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$라고 합니다. 앞서 언급했던 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 모두 나왔네요. 그리고 (나)조건에서 $h(1)=h(a)$인데 $h(1)+h(3)$를 구하라고 합니다.

일단 연속인 조건부터 활용해볼까요? $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이니까 모든 점에서 좌극한값, 우극한값과 함숫값이 일치해야 해요. 일단 $h(x)$라는 함수부터 확인해봅시다. $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$인데 $g(x)$는 그냥 다항함수죠? 분모의 $f(x)$는 범위가 나뉜 함수구요. 그러면 일단 그대로 해봅시다.

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)}{(x-1)(x-3)} & (x \ne 1,\ x \le 2) \\ -\dfrac{g(x)}{x(x-a)} & (x \ne a,\ x>2) \end{cases}$$ 입니다.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 조건해석, 함수극한은 논리다

범위를 나눠서 확인해봐야겠죠? $x \le 2$일 때는 $h(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)(x-3)}$입니다. 나머지 부분은 분모가 0이 되지 않고 분자도 다항함수니까 연속성 판단을 하지 않아도 되지만 $x=1$이라면 극한값과 함숫값이 문제가 될 수 있겠네요. 일단 $h(x)$는 $x=1$에서도 연속이어야 하므로 $\lim\limits_{x\to1}h(x)=h(1)$이어야 합니다. $h(1)$은 값이 존재하므로 $\lim\limits_{x\to1}h(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{(x-1)(x-3)}$도 값이 존재해야겠죠? 극한값이 존재하는데 분모가 0으로 가니까 분자도 0으로 가야겠네요. $\lim\limits_{x\to1}g(x)=0$인데 $g(x)$는 다항함수이니까 연속이므로 $g(1)=0$입니다.

$x=a$에서도 마찬가지로 확인해봐야겠네요. $x>2$에서 $h(x)=-\dfrac{g(x)}{x(x-a)}$입니다. $x=a$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to a}h(x)=h(a)$이어야 하는데 $h(a)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}-\dfrac{g(x)}{x(x-a)}$의 값이 존재해야 합니다. 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로 분자도 0으로 가야겠네요. 따라서
$\lim_{x\to a}g(x)=g(a)=0$입니다.

$x=2$에서도 연속이어야하겠죠? 좌극한값이자 함숫값인 $-g(2)$와 우극한값인 $-\dfrac{g(2)}{2(2-a)}$이 같아야 합니다. 따라서 $-g(2)=-\dfrac{g(2)}{2(2-a)}$이고 $(2a-3)g(2)=0$입니다. $a=\dfrac{3}{2}$이거나 $g(2)=0$이네요. 그런데 $a>2$이어야 하니까 $g(2)=0$입니다.

3) 함수 구하기 - 인수정리

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 $g(1)=g(2)=g(a)=0$이죠? 인수정리에 의하여 $g(x)$는 $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-a)$라는 인수를 적어도 하나 가지니까 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$입니다.

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-a)}{(x-3)} & (x\neq 1,\ x\leq 2)\\[2ex] -\dfrac{(x-1)(x-2)}{x} & (x\neq a,\ x>2)\end{cases}$$ 이네요.

우리가 구해야 하는 건 $h(1)+h(3)$인데 a를 모르니까 못 구하겠어요. 그러고 보니 아까 $h(1)=h(a)$라고 했었죠? 이거 활용해봅시다. 다만 우리는 아직 $h(1)$, $h(a)$의 값은 구하지 못해요. 왜냐하면 우리가 아는 건 $x\neq 1$, $x\neq a$인 $h(x)$이거든요.

그러면 $h(x)$가 연속이라는 점을 활용해봅시다. $h(1)$, $h(a)$ 대신 $\lim_{x\to 1}h(x)=h(1)=\lim_{x\to a}h(x)=h(a)$라는 점을 이용하면 되죠. $\lim_{x\to 1}h(x)=\dfrac{1-a}{2}$이고 $\lim_{x\to a}h(x)=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{a}=\dfrac{(1-a)(a-2)}{a}$인데 이 둘이 같아야 하니까 $\dfrac{(1-a)}{2}=\dfrac{(1-a)(a-2)}{a}$입니다. $a>2$이니까 양변의 $1-a$는 지워도 되겠죠? 0이 되지 않으니까요. 그러면 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{(a-2)}{a}$이고 정리하면 $a=2a-4$입니다. $a=4$이네요.

$h(1)=-\dfrac{3}{2}$이고 $h(3)=-\dfrac{2}{3}$이므로 더하면 $-\dfrac{13}{6}$입니다. 답은 ③번이네요.

3. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? 〔2022년 3월 13〕

① $\frac{31}{5}$　　② $\frac{33}{5}$　　③ 7　　④ $\frac{37}{5}$　　⑤ $\frac{39}{5}$

3. 정답 ① 〔2022년 3월 13〕

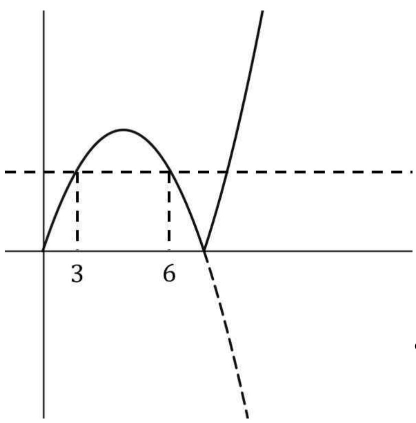
1) 등차수열 a_n은 $a+(n-1)d$로 놓기

일단 등차수열 $\{a_n\}$이 있답니다. 첫째항을 a라 하고 공차를 d라 하면 $a_n = a+(n-1)d$로 놓고 시작하자구요. 이때 첫째항인 a가 양수라네요.

첫째항부터 n항까지 합을 S_n이라 하는데 $|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$이랍니다. 절댓값이 나온 이상 값이 음수인지 양수인지 판단하는 건 필수겠죠? 그리고 S_n의 값 간의 수치 계산이 필요하니까 S_n의 그래프를 그려야 할 수도 있겠어요.

생각을 좀 해볼게요. 첫째항은 양수인데, 만약 공차도 양수라면? 더하면 합이 계속 증가하는데 $|S_3| = |S_6|$이 될 수가 있을까요? 말이 안 되죠. 무조건 S_6이 S_3보다 커야 합니다. 만약 공차가 양수라면요. 공차가 0인 것도 말이 안 되겠네요. 양수를 계속 더하는데 마찬가지로 S_6이 S_3보다 커야 합니다. 따라서 공차는 음수가 되어야겠네요.

공차가 음수라면 $S_n = \dfrac{n(a+a+(n-1)d)}{2} = \dfrac{n}{2}(2a+(n-1)d)$의 이차함수의 형태가 됩니다. 먼저



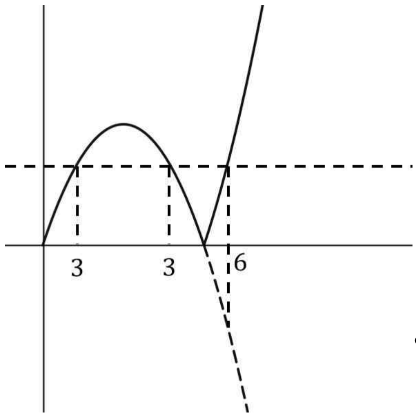
이런 경우 가능하겠죠? $S_3 = S_6$이고 둘 다 양수인 경우입니다. 따라서

$S_3 = \dfrac{(a+a+2d)}{2} \times 3 = 3(a+d)$이고 $S_6 = \dfrac{(a+a+5d)}{2} \times 6 = 3(2a+5d)$이므로 $3(a+d) = 3(2a+5d)$이고

$a = -4d$입니다. $S_n = \dfrac{dn(n-9)}{2}$이네요.

$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$를 계산해봅시다. $-9d = |11d| - 3$입니다. 이때 $d < 0$이므로 $-9d = -11d - 3$이고

$2d = -3$, $d = -\dfrac{3}{2}$이네요. $a = -4d = 6$입니다.



이런 경우도 가능해요. 이건 한 쪽은 양수, 한 쪽은 음수이거나 둘 다 0이어야 가능하겠네요. 어느 쪽이든 $S_3 = -S_6 = |S_{11}| - 3$입니다. 그리고 $|S_3| = |S_6| \geq 0$이니까 $|S_{11}| - 3 \geq 0$이죠? $|S_{11}| \geq 3$입니다.

이제 값을 넣어서 계산해볼게요. $S_3 = \dfrac{(a+a+2d)}{2} \times 3 = 3(a+d)$이고,

$-S_6 = -\dfrac{(a+a+5d)}{2} \times 6 = -3(2a+5d)$입니다. 이 둘이 같아야 하니까 $3(a+d) = -3(2a+5d)$이고

$3a+6d=0$입니다. $a+2d=a_3=0$이네요. $a=-2d$입니다. $a_n = -2d+(n-1)d = (n-3)d$이네요.

또한 $S_3 = -S_6 = |S_{11}| - 3$이니까 이것도 계산해보면 $\dfrac{(-2d+0)}{2} \times 3 = -3d = \left|\dfrac{(-2d+8d)}{2} \times 11\right| - 3$입니다.

정리하면 $-3d+3 = |33d|$이네요. 이때 $d<0$이니까 $-3d+3 = -33d$이고 $30d=-3$입니다.

$d = -\dfrac{1}{10}$이네요. 첫째항은 $a = -2d = \dfrac{1}{5}$입니다. 아까 계산한 6과 더하면 답은 $\dfrac{31}{5}$이네요. ①번입니다.

4. 수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오.

〔2022년 3월 20〕

4. 정답 70 〔2022년 3월 20〕

1) 문제해석

$1 < a_1 < 2$이고 $a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$ 인 a_n이 있답니다. $a_7 = -1$일 때 $40 \times a_1$을 구하라네요. 결국 뒤로 돌아가보라는 거죠? 천천히 케이스 나누면서 가보죠.

$n = 6$을 넣으면 $a_7 = -1 = \begin{cases} -2a_6 & (a_6 < 0) \\ a_6 - 2 & (a_6 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. 이때 위쪽은 불가능해요. $a_6 = \frac{1}{2}$이어야 하는데 그러면 $a_6 < 0$이 아니잖아요. 따라서 $-1 = a_6 - 2$이고 $a_6 = 1$입니다. $a_6 \geq 0$이구요.

$n = 5$를 넣으면 $a_6 = 1 = \begin{cases} -2a_5 & (a_5 < 0) \\ a_5 - 2 & (a_5 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. $-2a_5 = 1$해서 $a_5 = -\frac{1}{2}$도 가능하구요, $a_5 - 2 = 1$해서 $a_5 = 3$도 가능하네요. 각각 $a_5 < 0$, $a_5 \geq 0$도 만족시키구요. 이때부터 본격적으로 케이스를 나눠야겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $a_5 = -\frac{1}{2}$인 경우

$n = 4$를 넣으면 $a_5 = -\frac{1}{2} = \begin{cases} -2a_4 & (a_4 < 0) \\ a_4 - 2 & (a_4 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. 일단 위쪽은 택할 수 없어요. $a_4 = \frac{1}{4}$인데 음수가 아니니까요. 따라서 $a_4 - 2 = -\frac{1}{2}$이고 $a_4 = \frac{3}{2}$입니다.

$n = 3$을 넣으면 $a_4 = \frac{3}{2} = \begin{cases} -2a_3 & (a_3 < 0) \\ a_3 - 2 & (a_3 \geq 0) \end{cases}$ 이네요. 이러면 $a_3 = -\frac{3}{4}$이거나 $a_3 = \frac{7}{2}$입니다. 또 케이스가 나뉘네요.

2-1-1) $a_3 = -\frac{3}{4}$인 경우

$n = 2$를 넣으면 $a_3 = -\frac{3}{4} = \begin{cases} -2a_2 & (a_2 < 0) \\ a_2 - 2 & (a_2 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. 위쪽을 택하면 $a_2 = \frac{3}{8}$이니까 조건을 만족시키지

못하네요. 따라서 $-\frac{3}{4}= a_2 - 2$이고 $a_2 = \frac{5}{4}$입니다.

$n=1$을 넣으면 $a_2 = \frac{5}{4}=\begin{cases} -2a_1 & (a_1 < 0) \\ a_1 - 2 & (a_1 \geq 0) \end{cases}$입니다. $a_1 = -\frac{5}{8}$이거나 $a_1 = \frac{13}{4}$인데 둘 모두 $1 < a_1 < 2$이 아니죠?

2-1-2) $a_3 = \frac{7}{2}$인 경우

$n=2$를 넣으면 $a_3 = \frac{7}{2}=\begin{cases} -2a_2 & (a_2 < 0) \\ a_2 - 2 & (a_2 \geq 0) \end{cases}$입니다. $a_2 = -\frac{7}{4}$이거나 $a_2 = \frac{11}{2}$입니다. 만약 $a_2 = -\frac{7}{4}$이라면 $a_2 = -\frac{7}{4}=\begin{cases} -2a_1 & (a_1 < 0) \\ a_1 - 2 & (a_1 \geq 0) \end{cases}$입니다. 일단 위쪽은 불가능하구요, 가능한 건 아래쪽을 택해서 $-\frac{7}{4}= a_1 - 2$이고 $a_1 = \frac{1}{4}$가 되는 거네요. 근데 $1 < a_1 < 2$이 아니죠?

$a_2 = \frac{11}{2}$이라면 $a_2 = \frac{11}{2}=\begin{cases} -2a_1 & (a_1 < 0) \\ a_1 - 2 & (a_1 \geq 0) \end{cases}$입니다. $a_1 = -\frac{11}{4}$이거나 $a_1 = \frac{15}{2}$인데 둘 모두 $1 < a_1 < 2$이 아니에요. 다음 케이스로 가봅시다.

2-2) $a_5 = 3$인 경우

$n=4$를 넣으면 $a_5 = 3 =\begin{cases} -2a_4 & (a_4 < 0) \\ a_4 - 2 & (a_4 \geq 0) \end{cases}$입니다. $a_4 = -\frac{3}{2}$이거나 $a_4 = 5$로 또 케이스가 나뉘네요.

2-2-1) $a_4 = -\frac{3}{2}$인 경우

$n=3$을 넣으면 $a_4 = -\frac{3}{2}=\begin{cases} -2a_3 & (a_3 < 0) \\ a_3 - 2 & (a_3 \geq 0) \end{cases}$입니다. 위쪽을 택하면 $a_3 = \frac{3}{4}$로 양수가 되어버리니까 안 되구요, $-\frac{3}{2}= a_3 - 2$이고 $a_3 = \frac{1}{2}$입니다.

$n=2$를 넣으면 $a_3=\dfrac{1}{2}=\begin{cases} -2a_2 & (a_2<0) \\ a_2-2 & (a_2 \geq 0) \end{cases}$입니다. $a_2=-\dfrac{1}{4}$이거나 $a_2=\dfrac{5}{2}$이네요. $a_2=-\dfrac{1}{4}$이라면

$a_2=-\dfrac{1}{4}=\begin{cases} -2a_1 & (a_1<0) \\ a_1-2 & (a_1 \geq 0) \end{cases}$이고 위쪽은 택할 수 없으니까 $a_1=\dfrac{7}{4}$입니다. 이건 $1<a_1<2$이네요?

끝났어요. 모든 a_1의 값을 구하라는 게 아니었으니까 이거 하나겠죠? $40\times a_1=70$입니다.

나머지는..... 한 번 해보세요. 파이팅!

5. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x\|g(x)\| = \int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다.
(나) 방정식 $g(f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)dx$의 값을 구하시오. 〔2022년 3월 22〕

5. 정답 4 〔2022년 3월 22〕

1) 조건해석, 정적분의 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0이랍니다. 그럼 대충 $g(x)= x^3+\alpha x^2+\beta x$의 형태라는 거죠? $g(0)= 0$입니다.

이때 a가 $a>0$인데 (가)조건에서 $x|g(x)|= \int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$라네요. 정적분의 아래끝에 변수가 있네요? 일단 정적분 안쪽에서 적분변수와 상수를 분리해볼게요. $a\int_{2a}^{x}f(t)dt- \int_{2a}^{x}tf(t)dt$가 됩니다.

그리고 양변이 0이 되는 값을 넣어봅시다. 일단 $x=0$이 있겠죠? 넣으면 $\int_{2a}^{0}(a-t)f(t)dt= 0$입니다. 그리고 $x=2a$도 가능하네요. 넣으면 $2a|g(2a)|=0$입니다. 이때 $a>0$이므로 $g(2a)= 0$이네요.

이때 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이니까 $(a-x)f(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이죠? 완벽한 동치는 아니지만, 연속인 함수를 정적분한 $\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$은 미분가능하겠네요. 일단 우변만 미분해봅시다. $a\int_{2a}^{x}f(t)dt- \int_{2a}^{x}tf(t)dt$를 미분하면 $af(x)- xf(x)= (a-x)f(x)$입니다.

우변인 $\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이 미분가능하다면? 좌변인 $x|g(x)|$ 역시 미분가능하다는 거죠? 지금 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $g(0)= g(2a)= 0$인 삼차함수에요. 인수정리에 의하여 x, $(x-2a)$라는 인수를 적어도 하나 가지고 있다는 거죠. 이때 $x|g(x)|$에는 x라는 인수가 있으니까 결과적으로 $x|g(x)|$는 x라는 인수를 적어도 두 개 가지고 있는 거예요. 그런데 $(x-2a)$라는 인수는요? 하나만 있을 때 절댓값으로 씌워 올리면 미분불가능이 되는 건 다들 잘 아실 거예요. 그러면 결국 $g(x)$에서 자체적으로 두 개를 가져야겠네요. 따라서 $g(x)= x(x-2a)^2$입니다.

2) 합성함수는 치환, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

(나)조건에서 $g(f(x))= 0$의 서로 다른 실근의 개수가 4라고 합니다. 일단 안쪽의 함수를 치환해볼게요. $f(x)= k$라 해봅시다. 그러면 $g(k)= 0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하는 형태가 되네요. 일단 $k=0$이 있구요, $k=2a$이 있네요.

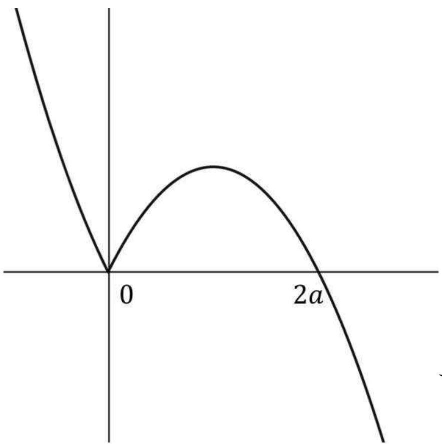
이제 $f(x)=0$과 $f(x)=2a$의 서로 다른 실근의 개수가 4개가 되도록 해야 해요. 이러면 일단 $f(x)$의 그래프를 알아야겠네요. $g(x)=x(x-2a)^2$이니까 $x\left|x(x-2a)^2\right|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$입니다. 이때 절댓값 안쪽에 있는 $x(x-2a)^2$는 $x \geq 0$일 때는 0보다 크거나 같고, $x<0$일 때는 0보다 작아요. 따라서

$x\left|x(x-2a)^2\right|=\begin{cases} x^2(x-2a)^2 & (x \geq 0) \\ -x^2(x-2a)^2 & (x<0) \end{cases}$입니다.

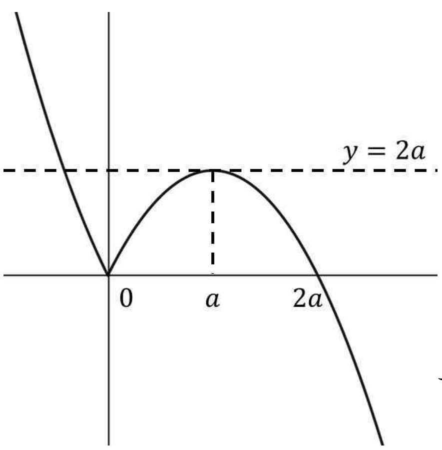
우리는 이 함수를 미분해야 해요. 따라서 $x\left|x(x-2a)^2\right|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$의 양변을 미분하면

$(a-x)f(x)=\begin{cases} 4x(x-a)(x-2a) & (x \geq 0) \\ -4x(x-a)(x-2a) & (x<0) \end{cases}$가 됩니다. 양변의 $(a-x)$를 제거해볼게요.

$f(x)=\begin{cases} -4x(x-2a) & (x \geq 0) \\ 4x(x-2a) & (x<0) \end{cases}$입니다.



요런 그래프네요. 이때 $f(x)=0$과 $f(x)=2a$의 서로 다른 실근의 개수가 4개가 되어야 하는데 이미 $f(x)=0$의 실근은 2개죠? 그러면 $f(x)=2a$의 실근이 겹치지 않도록 두 개가 되면 되겠네요. 그림을 보면 결국



요렇게 되어야 합니다. $f(x)=\begin{cases} -4x(x-2a) & (x \geq 0) \\ 4x(x-2a) & (x<0) \end{cases}$에 $f(a)=2a$를 넣어보면 $4a^2=2a$이고 $2a(2a-1)=0$인데 $a>0$이니까 $a=\frac{1}{2}$이네요.

3) 정적분 나누기, 이차함수와 x축으로 둘러싸인 넓이

마지막으로 $\int_{-2a}^{2a} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx$를 구해봅시다. 일단 함수가 나뉘어져 있으니까 $x=0$을 기준으로

$\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$를 계산해볼게요. 일단 $\int_{0}^{1} f(x)dx$은 이차함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이에요.

따라서 $\frac{4}{6}(1-0)^3 = \frac{2}{3}$입니다. $\int_{-1}^{0} f(x)dx$는 그냥 계산하죠.

$\int_{-1}^{0} (4x^2-4x)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{10}{3}$입니다. 둘을 더하면 $\frac{10}{3} + \frac{2}{3} = 4$이네요.