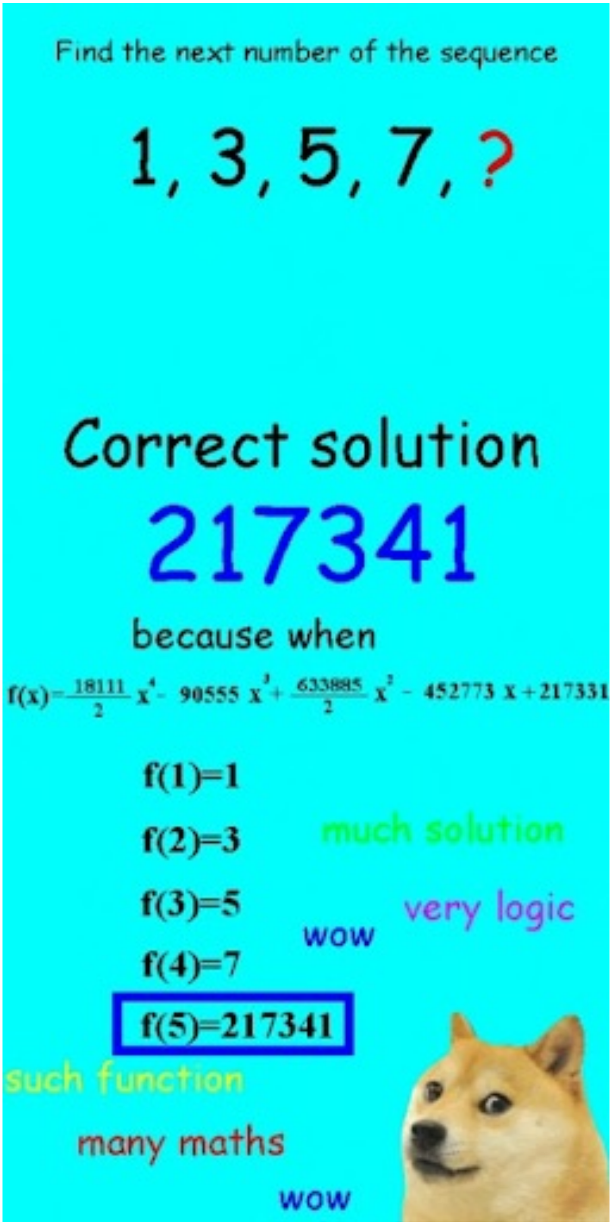
Introduction to Legendre Polynomial



xyo
889268

다음을 만족시키는 n차 다항함수 $P_n(x)$를 Legendre Polynomial이라 합니다.

$P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$

음이 아닌 두 정수 m, n에 대하여 $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{2}{2n+1} & (m=n) \end{cases}$

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$, $P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

여기까지 하겠습니다.

18학년도 경찰대 17번

음이 아닌 정수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1인 n차 다항함수 $P_n(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$
(나) 음이 아닌 서로 다른 정수 m, n에 대하여 $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=0$

$\int_0^1 P_3(x)dx$의 값은? [5점]

① $-\frac{1}{20}$　② $-\frac{1}{10}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{10}$　⑤ $\frac{1}{20}$

해설

Legendre Polynomial입니다.

$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$인 것 같습니다.

근데 문제에서 최고차항의 계수가 1이라네요. $P_3(x)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}(5x^3-3x)$입니다.

$\int_0^1 P_3(x)dx=\frac{1}{5}\times\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{20}$입니다.

18년 11월 교육청 고2 가형 7번

$\int_{-1}^{1}\left(4x^3+x^2-\frac{1}{2}x+a\right)dx=2$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

적분 구간이 $[-1,1]$입니다. 피적분함수 $4x^3+x^2-\frac{1}{2}x+a$를 Legendre Polynomial의 곱들의 선형 결합으로 표현해봅시다.

$$
\begin{aligned}
&4x^3+x^2-\frac{1}{2}x+a \\
&=\frac{8}{3}\times x\times\frac{1}{2}(3x^2-1)+x^2+\frac{5}{6}x+a \\
&=\frac{8}{3}\times x\times\frac{1}{2}(3x^2-1)+x\times x+\frac{5}{6}\times x\times 1+a\times 1\times 1 \\
&=\frac{8}{3}\times P_1(x)\times P_2(x)+P_1(x)\times P_1(x)+\frac{5}{6}\times P_1(x)\times P_0(x)+a\times P_0(x)\times P_0(x)
\end{aligned}
$$

4개의 항을 각각 적분해봅시다.

$$\int_{-1}^{1}\frac{8}{3}P_1(x)\times P_2(x)dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}P_1(x)\times P_1(x)dx=\frac{2}{2\times 1+1}=\frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{5}{6}P_1(x)\times P_0(x)dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}aP_0(x)\times P_0(x)dx=\frac{2a}{2\times 0+1}=2a$$

$\frac{2}{3}+2a=2$이므로 $a=\frac{2}{3}$입니다.

13학년도 9월 평가원 23번

$\int_{-2}^{2} x(3x+1)dx$의 값을 구하시오. [3점]

해설

적분구간이 $[-1,1]$이 아닙니다. 치환적분을 이용해 적분구간을 $[-1,1]$로 바꿔줍시다.
$x=2t$로 치환하면 되겠습니다.

$$\int_{-2}^{2} x(3x+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} 2t(6t+1)\times 2dt$$

$$=24\int_{-1}^{1} t^2 dt+4\int_{-1}^{1} tdt$$

$$=24\int_{-1}^{1} P_1(t)\times P_1(t)dt+4\int_{-1}^{1} P_1(t)\times P_0(t)dt$$

$$=24\times\frac{2}{2\times 1+1}+4\times 0=16$$

19년 10월 교육청 6번

$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$의 값은? [3점]

① 36　② 42　③ 48　④ 54　⑤ 60

해설

$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx-\int_{-3}^{3}(x^3+x^2)dx$입니다.

이는 곧 $\int_{-3}^{3}3x^2dx$입니다. 적분구간이 $[-1,1]$이 아닙니다. 치환적분을 이용해 적분구간을 $[-1,1]$로 바꿔줍시다. $x=3t$로 치환하면 되겠습니다.

$\int_{-3}^{3}3x^2dx$

$=\int_{-1}^{1}27t^2\times 3dt$

$=81\int_{-1}^{1}t^2dt$

$=81\int_{-1}^{1}P_1(t)\times P_1(t)dt=81\times\frac{2}{2\times 1+1}$

$=54$