제 2 교시

수학 영역

홀수형

공통									
1	④	2	③	3	②	4	②	5	⑤
6	①	7	①	8	②	9	①	10	⑤
11	①	12	①	13	⑤	14	③	15	②
16	32	17	12	18	3	19	14	20	64
21	34	22	31						
미적분									
23	③	24	⑤	25	②	26	④	27	③
28	②	29	25	30	30				

공통과목

1. 정답 : ④

생략

2. 정답 : ③

생략

3. 정답 : ②

생략

4. 정답 : ②

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 양변을 제곱하면,

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$, $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

5. 정답 : ⑤

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3+2x^2}{x^2+4x}=4$

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ 꼴

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow f(x)$의 일차항의 계수는 3이고, 상수항은 0이다.

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2+3x$, $f'(x)=3x^2+4x+3$

6. 정답 : ①

$\int_0^3 3t^2-at-6\,dt=0$

$\Rightarrow \left[t^3-\dfrac{a}{2}t^2-6t\right]_0^3=9-\dfrac{9a}{2}=0$

$\therefore\ a=2$

7. 정답 : ①

수열 a_n은 공비가 1인 등비수열이다.

8. 정답 : ②

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 아래의 (ⅰ), (ⅱ) 중 하나를 만족해야 한다.

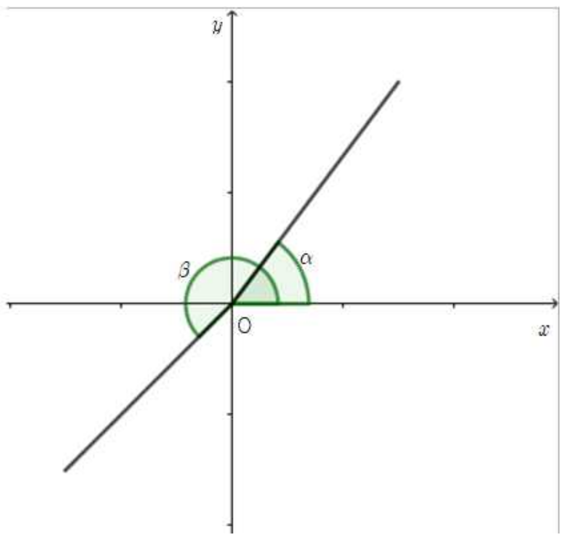
(ⅰ) $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\tan\beta=1$

(ⅱ) $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\tan\beta=-1$

(ⅰ)의 경우 α는 제1사분면의 각이고, β는 제1사분면 혹은 제3사분면의 각이다. 이때 β가 제1사분면의 각이면 $\alpha<\beta$를 만족할 수 없다.

(ⅱ)의 경우 α는 제3사분면의 각이고, β는 제2사분면의 각이다. 이 경우도 $\alpha<\beta$를 만족할 수 없다.

그러므로 α는 제1사분면, β는 제3사분면의 각이다.
이를 그림으로 나타내면 아래와 같다.



따라서 구하려는 값은 $\cos(\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9. 정답 : ①

$f(x)+(x-1)f'(x)=3x^2-2x+1$에서 양변을 부정적분 하면,

$\Rightarrow\ (x-1)f(x)=x^3-x^2+x+C$ $\quad x=1$을 대입하여

$\Rightarrow\ (x-1)f(x)=x^3-x^2+x-1$ $\quad$ 양변을 $(x-1)$로 나누면,

$\Rightarrow\ f(x)=x^2+1$

$f(1)+f'(2)=2+4=6$

10. 정답 : ⑤

(가): 3

(나): $k+1$

11. 정답 : ①

$2^x = t\ (t>0)$ 으로 치환하면

$\frac{1}{4}t^2 + (\sin y)t + 1 \le 0$

최고차항의 계수가 양수인 이차부등식에서 0 이하인 부분이 있으려면 판별식이 0 이상이어야 한다.

$\sin^2 y - 1 \ge 0$

$\Rightarrow \sin y = \pm 1$

그런데 $\sin y = 1$ 이면, $\frac{1}{4}t^2 + (\sin y)t + 1 \le 0$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(t+2)^2 \le 0$ 이므로 $t=-2$, 그러나 이는 $(t>0)$ 에 위배된다.

$\sin y = -1$ 이면, $\frac{1}{4}t^2 + (\sin y)t + 1 \le 0$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(t-2)^2 \le 0$ 이므로 $t=2$ 에서 성립. $x=1$ 을 얻는다.

$y=-\frac{\pi}{2}$ 일 때, $|x-y|$ 는 최솟값을 갖는다.

12. 정답 : ①

$\int_n^x f(t)dt = F(x)$ 라 하면, $F'(x) = f(x)$ 이고

$F(x) = (x-n)^k Q(x)$ (k는 4 이하의 자연수, $Q(n) \ne 0$) 이다.

주어진 극한은 $\frac{1}{2}$ 으로 수렴하고 분자가 0 으로 수렴하고 있다.

그러므로 분모도 0 으로 수렴해야하고, 분모와 분자가 갖는 $(x-n)$ 의 최저 차수가 일치해야 한다.

(분자) $= (x+n)(x-n)^k Q(x)$ 이므로

우리는 분모가 갖는 $(x-n)^k$ 의 개수를 구하면 된다.

(분모) $= (x-n)^2 F''(x)$ 으로 처리하여

$F''(x)$ 가 갖는 $(x-n)^{k-2}$ 관련식을 적어보면

$F''(x) = k(k-1)(x-n)^{k-2}Q(x) + \cdots$ 으로 처리하여

(분모) $= k(k-1)(x-n)^k Q(x) + \cdots$

$$\lim_{x\to n}\frac{(x+n)\int_n^x f(t)dt}{(x-n)^2 f'(x)} = \lim_{x\to n}\frac{(x+n)(x-n)^k Q(x)}{k(k-1)(x-n)^k Q(x)+\cdots}$$

$= \frac{2n}{k(k-1)}$

$= \frac{1}{2}$ 이다.

$4n = k(k-1)$ 을 만족시키는 자연수 n, k 의 순써상은

$n=3,\ k=4$ 뿐이므로 $F(x) = (x-3)^4$ 이다.

$\int_0^n f(t)dt = -F(0)$

$=-81$ 을 얻는다.

13. 정답 : ⑤

삼각형 ABP와 삼각형 DCP는 2:1 닮음이다.

$\overline{AP} = 2x$, $\overline{PD} = x$라 하고,

$S_1 - S_2$를 공통부분인 삼각형 BPC의 넓이를 배제하고 생각하면,

$\frac{1}{2}\times 5 \times x \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15}{4}\sqrt{7}$, $x=6$

$\overline{BP} = 2y$, $\overline{PC} = y$라 하면,

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$k^2 = (y+12)^2 + 10^2 - 2\times 10 \times (y+12) \times \frac{3}{4}$

삼각형 DBC에서 코사인법칙에 의해

$k^2 = (2y+6)^2 + 5^2 - 2\times 5 \times (2y+6) \times \frac{3}{4}$

두 식을 연립하면, $y=4$이고

이를 대입하면 $k^2 = 116$

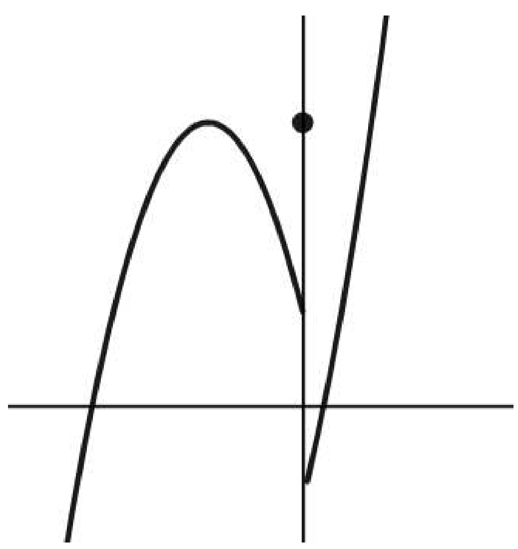
14. 정답 : ③

주어진 항등식을 정리하면 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x>0) \\ f(0) & (x=0) \\ -g(x) & (x<0) \end{cases}$ 이다.

$f(x)$ 가 연속함수 일 경우 (가) 조건을 만족시키기 위해서는 극값을 세 군데에서 가져야 한다. 이는 불가하므로 $f(x)$ 는 불연속함수임을 예상할 수 있다.

(나) 조건을 통해 함수 $f(x)$ 가 갖는 이차함수의 꼭짓점에 y 좌표가 6 임을 예상해 볼 수 있다.

그런데 이 경우 $h(6) - \lim_{t\to 6+} h(t) = 1$ 이므로 실근의 개수가 변하게 하는 요인이 부족하다. 그렇다면 또 다른 변수는 불연속점 $f(0)$ 의 y좌표가 6 인 경우를 생각해 볼 수 있는데

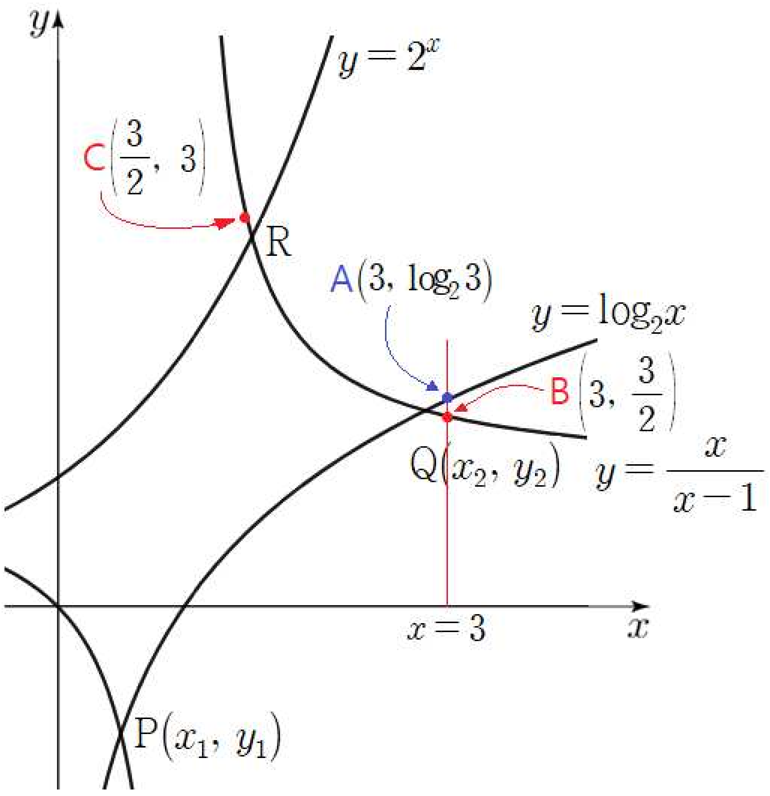


해당 개형은 모든 조건을 만족시키고, $\beta = 0$ 이다.

$g(0) = -2$ 를 이용하여 $g(x) = (x+2)^2 - 6$ 을 얻고

$f(0) + f(2) = 16$ 을 알 수 있다.

15. 정답 : ②



ㄱ. $y_1<-1$과 $x_2<3$에 대하여 알아보자.
직선 $y=-1$을 그어보면
방정식 $\log_2 x=-1$, $\frac{x}{x-1}=-1$의 실근은 $x=\frac{1}{2}$로 동일하므로
점 $P(x_1, y_1)$의 좌표는 $P\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$이다.
$x_2<3$을 조사하기 위해 직선 $x=3$을 그어보자.
$\frac{3}{2}<\log_2 3$이므로 $x_2<3$을 알 수 있다. 그러므로
ㄱ은 참이다.

ㄴ. 유리함수 $y=\frac{x}{x-1}$는 자기 자신을 역함수로 갖는 함수이므로
$y=x$에 대칭이다.
그러므로 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$에 각각 만나는 점 Q, R은
$y=x$에 대칭인 점이고, 직선 QR의 기울기는 -1이다.
$\angle PQR>\frac{\pi}{2}$은 직선 PQ의 기울기가 1보다 큰 지 묻는 것이다.
ㄱ의 풀이과정에서 표시한 점 $B\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$에 대해서
직선 PB의 기울기는 1이고 직선 PQ의 기울기는 직선 PB의
기울기보다 크므로 $\angle PQR>\frac{\pi}{2}$이다.
ㄴ은 참이다.

ㄷ. 점 $B\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$를 $y=x$에 대칭시켜 점 $C\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$를 표시하자.
직선 PC의 기울기는 4인데, 직선 PR의 기울기는 직선 PC의
기울기보다 작으므로
ㄷ은 거짓이다.

16. 정답 : 32
생략

17. 정답 : 12
$a_{k+1}+a_{k+2}=3$에 대하여 등차수열의 대칭성을 활용하면
$S_{k+2}-S_k=a_k+a_{k+1}=3$
$S_{2k+2}=(k+1)(a_k+a_{k+1})$
$=(k+1)3$
$=39$
$k=12$

18. 정답 : 3
함수 $f(x)$는 $a=-1$이어야 $x=1$에서 연속인 것을 이용하자.

$a=-1$일 경우
함수 $f(x)$와 $f(x-a+1)$이 $x=a$에서 각각 연속이므로
함수 $f(x)f(x-a+1)$ 또한 $x=a$에서 연속이다.

$a\neq-1$일 경우
함수 $f(x-a+1)$는 $x=a$에서 불연속인 함수이고
함수 $f(x)f(x-a+1)$가 $x=a$에서 연속이기 위해서는
$x=a$에서 $f(x)=0$이거나,
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 우선 불연속이어야 한다.
$f(a)=0$인 경우부터 찾아보면, $a=3$이고
$f(x)$가 $x=a$에서 불연속인 경우. $a=1$이면
$f(x)f(x-a+1)=\{f(x)\}^2$은
불연속 × 불연속 = 연속
이 도출되는 특수한 경우로 만족시킨다.
$-1+3+1=3$

19. 정답 : 14
$\sin 2x=\sin 3x$이려면,
$(2x+3x)=(2n-1)\pi$ 또는 $(2x-3x)=2n\pi$ 이어야 한다.
(단, n은 정수)
조건을 만족시키는 $x=\frac{\pi}{5},\ \frac{3}{5}\pi,\ \pi$가 있다.
$\frac{q}{p}=\frac{9}{5}$를 얻는다. $p+q=14$

20. 정답 : 64
조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$는
$f(-1)=1,\ f(1)=-1$이며 $-1\le x\le 1$에서 감소함수인 경우와
$f(-1)=-1,\ f(1)=1$이며 $-1\le x\le 1$에서 증가함수인 경우가 있다.

그래프 개형을 그려서 관찰하면 후자의 경우가
$f(4)$의 값이 더 크게나올 것을 알 수 있다.

$f(x)-x=a(x+1)x(x-1)$ 이라 하자. (단, $a>0$)
$f'(x)=a(3x^2-1)+1$ 에 대하여
$-1\le x\le 1$에서 $f'(x)\ge 0$이므로
$a\le 1$을 얻는다.
따라서 $f(4)$는 $a=1$일 때, 최댓값 64이다.

(역함수가 존재하려면 항상 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이여야 하는 것은 아닙니다.)

21. 정답 : 34

출제의도는 여러 가지수열
그것을 알아냈는가?

$a_n+a_{100-n}=\dfrac{n^2}{101}$ 에 양변에 $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}$ 을 하면,

$$a_{50}+\sum_{n=1}^{99}a_n=\frac{1}{101}\times\frac{50\times51\times101}{6}$$
$$=425 \cdots (\text{ㄱ})$$

$a_m+a_{m+1}=\dfrac{9(m+1)}{50}$ 에 $m=2M-1$을 대입
M이 자연수가 되면, m은 양의 홀수가 된다.
$a_{2M-1}+a_{2M}=\dfrac{9}{25}M$ 에 대하여
양변에 $\displaystyle\sum_{M=1}^{50}$ 을 하면,

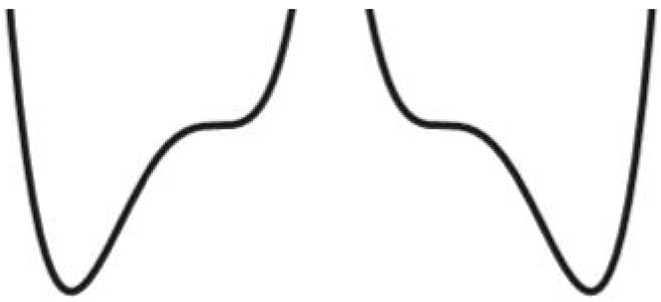
$$a_{100}+\sum_{M=1}^{99}a_M=\frac{9}{25}\times\frac{50\times51}{2}$$
$$=459 \cdots (\text{ㄴ})$$

(ㄴ)-(ㄱ)을 하면,
$a_{100}-a_{50}=34$

22. 정답 : 31

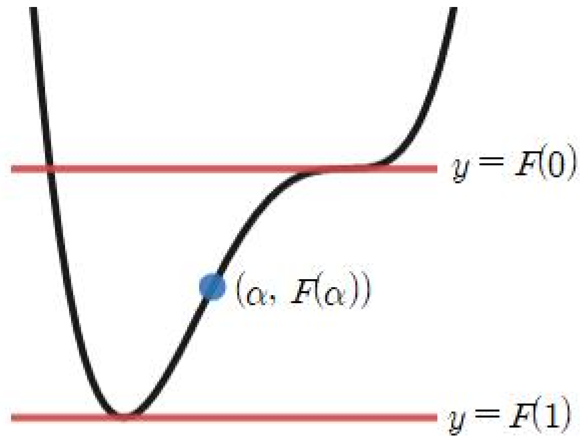
$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=F(x)$ 라 하자. $F(0)=0$ 이고
$g(x)=F(x)\times\{F(x)-F(1)\}$ 로 해석하자.
$g(x)=0$ 의 실근이 3 개 이므로 $F(x)=0$, $F(x)=F(1)$ 의 실근이 총 3 개 라는 것인데

(가): $F'(x)=0$ 의 실근이 2 개 이므로 가능한 개형으로



를 떠올릴 수 있다. $|g(x)|$ 가 미분가능하기 위해서는
$g(x)=0$ 일 때, $g'(x)=0$ 이어야 하는데
$g'(x)=2F'(x)\times\left(F(x)-\dfrac{F(1)}{2}\right)$ 이므로
$F(x)=0$ 또는 $F(1)$ 일 때, $2F'(x)=0$ 또는 $F(x)=\dfrac{F(1)}{2}$ 이어야 한다.
$F(1)\ne 0$ 이므로 $F(x)=0$ 또는 $F(1)$ 일 때
$F(x)=\dfrac{F(1)}{2}$ 를 만족시킬 수 없으며 $g(x)$ 가 미분가능하려면
$F(x)=0$ 또는 $F(1)$ 일 때 $F'(x)=0$ 이어야 한다는 결론이 나온다.

또한 (다) 조건을 만족시키는 점 $(\alpha, F(\alpha))$ 를 표시하면
조건을 만족시키는 $F(x)$ 의 개형은 아래와 같다.



사차함수의 비율관계를 통해
$F(x)=\dfrac{1}{4}x(x-4)^3$ 을 얻고 $F(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $-\dfrac{27}{4}$ 을 얻는다.

미적분

23. 정답 : ③

24. 정답 : ⑤
생략

25. 정답 : ②
생략

26. 정답 : ④
생략

27. 정답 : ③

$k^2 < a_{k+1} - a_k < (k+1)^2$ 로 정리하자. 각변에 $\sum_{k=1}^{n-1}$ 을 하면

$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} < a_n - a_1 < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$

샌드위치 정리에 의해 $a=3$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3} = \frac{1}{3}$을 알 수 있다.

28. 정답 : ②

$a_n a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $a_{n+1}a_{n+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 를 각각 나눠주면

$a_{n+2} = a_n \times \frac{1}{2}$을 얻는다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{a_2}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= 2(a_1 + a_2) = 5 = a_1 + a_2 = \frac{5}{2}$$

$a_n a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$에 $n=1$을 대입하면, $a_1 a_2 = \frac{1}{2}$

$(a_1 + a_2)^2 - 2(a_1 a_2) = \frac{21}{4}$

29. 정답 : 25

이차함수 넓이공식 $\left|\frac{k(\beta-\alpha)^3}{6}\right|$을 이용해 문제를 풀어보자

이차식 $x^2 - 2x - n = 0$에 대하여 $\beta + \alpha = 2$, $\beta\alpha = -n$

$(\beta-\alpha)^2 = 4+4n$ 이고, $(\beta-\alpha)^3 = (4+4n)^{\frac{3}{2}}$

$S_n = \frac{1}{6}(4+4n)^{\frac{3}{2}}$

$S_n^2 = \frac{1}{36}(4n+4)^3$

$\frac{q}{p} = \frac{16}{9}$

30. 정답 : 30

삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f(\alpha) = 0$을 만족시키는 α는 적어도 하나 존재한다.

$\alpha \neq 0$이면, $g(\alpha) = \lim_{n\to\infty}\frac{-\{f(\alpha)\}^{2n} + \alpha^3}{\{f(\alpha)\}^{2n-1} + 8\{f(\alpha)\}^2}$에서

$f(\alpha) = 0$이므로 $g(\alpha)$는 정의되지 않는다.

그러므로 $\alpha = 0$이고, $f(0) = 0$이다.

또한 $f(x) = 0$의 유일한 실근은 $x = 0$이어야 한다.

참고삼아 $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$를 검토해보면

$f(x) = xh(x)$로 보면 편리하다. (단, $h(x)$는 $h(x) \neq 0$인 이차함수)

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{-(xh(x))^{2n} + x^3}{(xh(x))^{2n-1} + 8\{(xh(x))\}^2}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{-x^{2n}(h(x))^{2n} + x^3}{x^{2n-1}(h(x))^{2n-1} + 8x^2(h(x))^2}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{-x^{2n-2}(h(x))^{2n} + x}{x^{2n-3}(h(x))^{2n-1} + 8(h(x))^2}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{-x^{2n-2}(h(x))^{2n} + x}{x^{2n-3}(h(x))^{2n-1} + 8(h(x))^2}\right\}$$
$$= \frac{0}{8h(0)^2}$$
$$= 0$$

인 것이 확인 가능하다.

한편, $f(\beta) = 1$을 만족시키는 $x = \beta$에 대하여

$g(x)$가 $x = \beta$에서 연속이기 위해서는

0의 한없이 가까운 양의 상수 h에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\{f(\beta)\}^{2n} + \beta^3}{\{f(\beta)\}^{2n-1} + 8\{f(\beta)\}^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\{1+h\}^{2n} + \beta^3}{\{1+h\}^{2n-1} + 8\{1+h\}^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\{1-h\}^{2n} + \beta^3}{\{1-h\}^{2n-1} + 8\{1-h\}^2}$$
$$\Rightarrow \frac{\beta^3 - 1}{9} = -1 = \frac{\beta^3}{8}$$

을 만족시켜야 하므로 $\beta = -2$를 얻는다.

또한 $f(x) = 1$의 유일한 실근은 $x = -2$이어야 한다.

마찬가지로

한편, $f(\gamma)=-1$을 만족시키는 $x=\gamma$에 대하여

$g(x)$가 $x=\gamma$에서 연속이기 위해서는

0의 한없이 가까운 양의 상수 h에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\{f(\gamma)\}^{2n}+\gamma^3}{\{f(\gamma)\}^{2n-1}+8\{f(\gamma)\}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\{-1+h\}^{2n}+\gamma^3}{\{-1+h\}^{2n-1}+8\{-1+h\}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\{-1-h\}^{2n}+\gamma^3}{\{-1-h\}^{2n-1}+8\{-1-h\}^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\gamma^3-1}{7}=1=\frac{\beta^3}{8}$$

을 만족시켜야 하므로 $\gamma=2$를 얻는다. 마찬가지로

또한 $f(x)=-1$의 유일한 실근은 $x=2$이어야 한다.

삼차함수 $f(x)$는

직선 $y=-\frac{1}{2}x$위의 세 점 $(-2,1)$, $(0,0)$, $(2,-1)$을 지나므로

$f(x)-\left(-\frac{1}{2}\right)x=a(x+2)x(x-2)$ 이고,

$f(x)=ax^3-\left(4a+\frac{1}{2}\right)x$가 성립한다.

그래프를 그려서 관찰하면, 실수 전체의 집합에서 정의된

기함수의 그래프 $y=f(x)$가 직선 $y=1$, $y=0$, $y=-1$과 각각

한 점에서만 만나기 위해서는 감소함수 이어야 함을 알 수 있다.

$f'(x)=3ax^2-\left(4a+\frac{1}{2}\right)\le 0$이어야 한다. (단, $a<0$)

$3ax^2-\left(4a+\frac{1}{2}\right)$는 $x=0$에서 최댓값 $-4a-\frac{1}{2}$을 만족시키므로

$-4a-\frac{1}{2}\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}\le a$를 얻는다.

그런데 $a=-\frac{1}{8}$일 경우 $f(x)=-\frac{1}{8}x^3$ 으로

$\lim_{x\to 0}g(x)$ 는 발산하므로 $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$ 을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-\frac{1}{8}<a<0$이고 $f(-3)=-15a+\frac{3}{2}$ 에서

$\frac{3}{2}<f(-3)<\frac{27}{8}$이다.