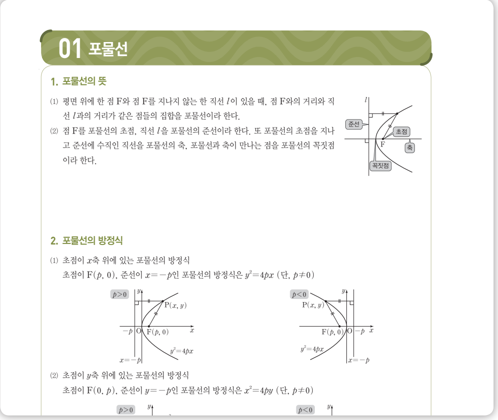
수능
특강

수학영역 **기하**

이 책의 차례 Contents

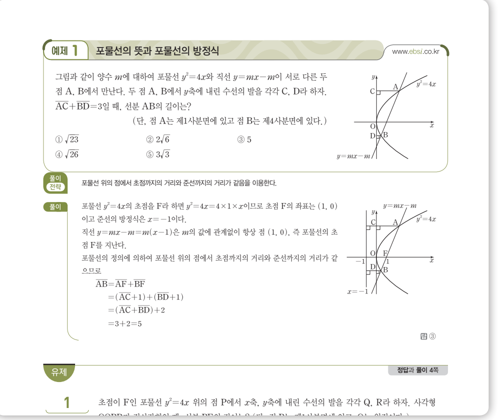
이 책의 구성과 특징 Structure

• 개념 정리



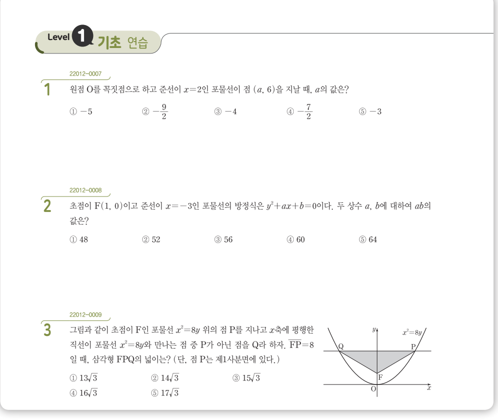
교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.

• 예제 & 유제



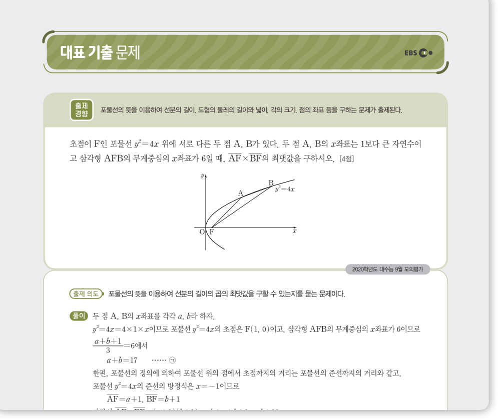
예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

• Level 1-Level 2-Level 3



Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

• 대표 기출 문제



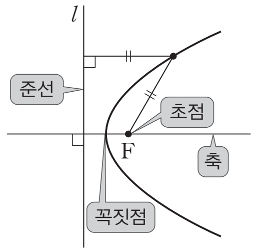
대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

01 포물선

1. 포물선의 뜻

(1) 평면 위에 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와의 거리와 직선 l과의 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.

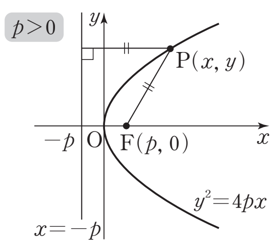
(2) 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라 한다. 또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 꼭짓점이라 한다.

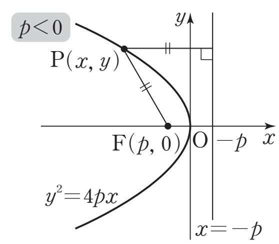


2. 포물선의 방정식

(1) 초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

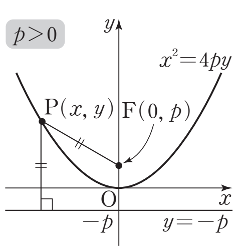
초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

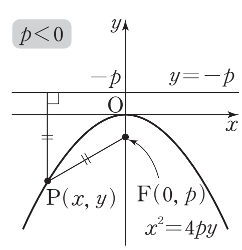




(2) 초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식

초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)





설명 0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.

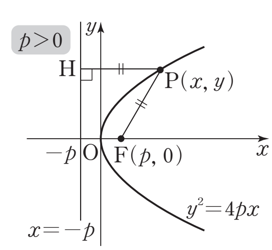
그림과 같이 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

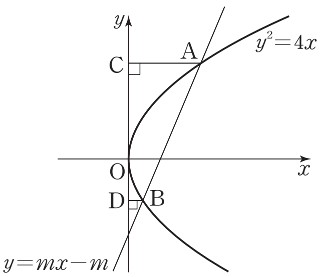
$$y^2=4px$$



예제 1 포물선의 뜻과 포물선의 방정식

그림과 같이 양수 m에 대하여 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=mx-m$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}+\overline{BD}=3$일 때, 선분 AB의 길이는?

(단, 점 A는 제1사분면에 있고 점 B는 제4사분면에 있다.)



① $\sqrt{23}$　② $2\sqrt{6}$　③ 5　④ $\sqrt{26}$　⑤ $3\sqrt{3}$

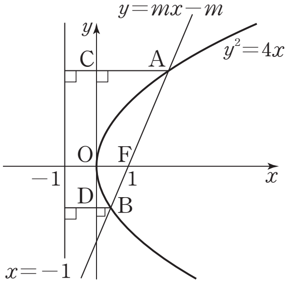
풀이 전략 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같음을 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=4x$의 초점을 F라 하면 $y^2=4x=4\times1\times x$이므로 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

직선 $y=mx-m=m(x-1)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$, 즉 포물선의 초점 F를 지난다.

포물선의 정의에 의하여 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같으므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{AF}+\overline{BF}\\&=(\overline{AC}+1)+(\overline{BD}+1)\\&=(\overline{AC}+\overline{BD})+2\\&=3+2=5\end{aligned}$$



답 ③

유제

정답과 풀이 4쪽

1 [22012-0001]

초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자. 사각형 OQPR가 정사각형일 때, 선분 PF의 길이는? (단, 점 P는 제1사분면에 있고, O는 원점이다.)

① $\sqrt{22}$　② $\sqrt{23}$　③ $2\sqrt{6}$　④ 5　⑤ $\sqrt{26}$

2 [22012-0002]

초점이 F, 준선이 l인 포물선 $y^2=ax$ 위의 점 $A(2, 2\sqrt{2})$에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 AHF의 둘레의 길이는? (단, a는 상수이다.)

① 8　② $6+\sqrt{6}$　③ $6+2\sqrt{2}$　④ $6+\sqrt{10}$　⑤ $6+2\sqrt{3}$

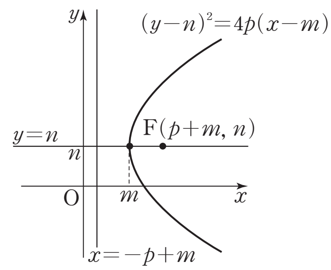
3. 포물선의 평행이동

(1) 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이다. 이때 포물선의 꼭짓점, 초점, 준선은 다음과 같이 평행이동한다.

$y^2=4px$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 →	$(y-n)^2=4p(x-m)$
$(0, 0)$	꼭짓점	(m, n)
$(p, 0)$	초점	$(p+m, n)$
$x=-p$	준선	$x=-p+m$

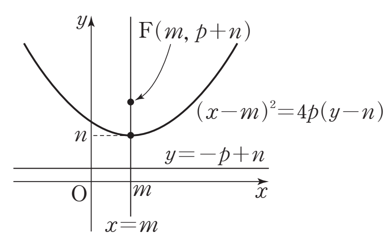


(2) 포물선 $x^2=4py$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(x-m)^2=4p(y-n)$$

이다. 이때 포물선의 꼭짓점, 초점, 준선은 다음과 같이 평행이동한다.

$x^2=4py$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 →	$(x-m)^2=4p(y-n)$
$(0, 0)$	꼭짓점	(m, n)
$(0, p)$	초점	$(m, p+n)$
$y=-p$	준선	$y=-p+n$



4. 포물선과 직선의 위치 관계

포물선과 직선의 방정식을 각각 $y^2=4px$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $y^2=4px$에 대입하여 정리하면

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

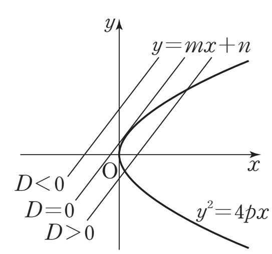
이다. 이때 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

따라서 $m\neq0$일 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 포물선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



예제 2 포물선의 평행이동

포물선 $(y+2)^2=-8x$의 초점을 F, 포물선 $(x-2)^2=4(y-3)$의 준선을 l이라 하자. 점 F를 중심으로 하고 직선 l에 접하는 원의 넓이는?

① π ② 4π ③ 9π ④ 16π ⑤ 25π

풀이 전략 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $(y-n)^2=4p(x-m)$임을 이용한다.

풀이 포물선 $(y+2)^2=-8x$는 포물선 $y^2=-8x$를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
이때 $y^2=-8x=4\times(-2)\times x$에서 포물선 $y^2=-8x$의 초점의 좌표는 $(-2, 0)$이므로 포물선 $(y+2)^2=-8x$의 초점 F의 좌표는 $(-2, -2)$이다.
포물선 $(x-2)^2=4(y-3)$은 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $x^2=4y$의 준선의 방정식은 $y=-1$이므로 포물선 $(x-2)^2=4(y-3)$의 준선 l의 방정식은 $y=2$이다.
따라서 점 $F(-2, -2)$에서 직선 $y=2$에 이르는 거리는 4이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 4이고 이 원의 넓이는

$4^2\pi=16\pi$

답 ④

유제

정답과 풀이 4쪽

3 [22012-0003]

포물선 $y^2+4y=4x-10$의 초점의 좌표는 (a, b)이고 준선의 방정식은 $x=c$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, c는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4 [22012-0004]

포물선 $y^2=6x$와 직선 $y=\frac{1}{4}x+n$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

5. 포물선의 접선

(1) 기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식

① 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$ (단, $m\neq0$)

② 포물선 $x^2=4py$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx-m^2p$

설명 ① 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m\neq0)$인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 포물선의 방정식 $y^2=4px$에 대입하여 정리한 x에 대한 이차방정식 $m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(mn-2p)^2-m^2n^2=4p(p-mn)=0$$

이때 $p\neq0$이므로 $p-mn=0$, 즉 $n=\frac{p}{m}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$이다.

② 포물선 $x^2=4py$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

포물선 $x^2=4py$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 포물선의 방정식 $x^2=4py$에 대입하여 정리한 x에 대한 이차방정식 $x^2-4pmx-4pn=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2pm)^2-(-4pn)=4p(pm^2+n)=0$$

이때 $p\neq0$이므로 $pm^2+n=0$, 즉 $n=-m^2p$

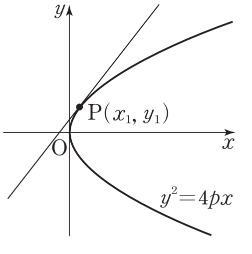
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx-m^2p$이다.

(2) 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

① 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$

② 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x=2p(y+y_1)$

설명 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.



$x_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m $(m\neq0)$이라 하면 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$ …… ㉠

또 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx+\frac{p}{m}$ …… ㉡

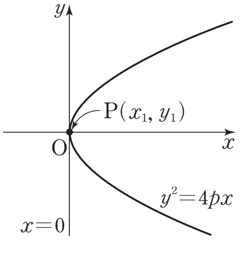
㉠과 ㉡은 같은 직선이므로 $-mx_1+y_1=\frac{p}{m}$

양변에 m을 곱해 얻은 m에 대한 이차방정식 $x_1m^2-y_1m+p=0$에서 $m=\frac{y_1\pm\sqrt{(-y_1)^2-4px_1}}{2x_1}$

이때 $y_1^{\,2}=4px_1$이므로 $m=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{2p}{y_1}$ $(y_1\neq0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{2p}{y_1}x-\frac{2p}{y_1}x_1+y_1$이고, $y_1^{\,2}=4px_1$이므로 정리하면

$y_1y=2p(x+x_1)$



$x_1=0$일 때 $y_1=0$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 $x=0$이고, 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선이 y축 (직선 $x=0$)이므로 $x_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.

예제 3 포물선의 접선의 방정식

초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 P$(3,\ 6)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 삼각형 PAF의 넓이는?

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

풀이 전략 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$임을 이용한다.

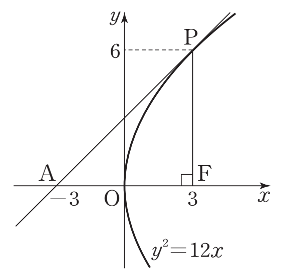
풀이 $y^2=12x=4\times3\times x$이므로 포물선 $y^2=12x$의 초점은 F$(3,\ 0)$이고,
이 포물선 위의 점 P$(3,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=2\times3\times(x+3)$

$y=x+3$

이때 이 접선이 x축과 만나는 점 A의 좌표는 $(-3,\ 0)$이다.
따라서 삼각형 PAF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AF}}\times\overline{\text{PF}}=\frac{1}{2}\times6\times6=18$



답 ④

유제

정답과 풀이 4쪽

5 [22012-0005]

기울기가 3이고 포물선 $y^2=8x$에 접하는 직선의 방정식은 $ax+by+2=0$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

6 [22012-0006]

점 $(2,\ -1)$에서 포물선 $x^2=4y$에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 할 때, $m_1\times m_2$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

Level 1 기초 연습

[22012-0007]

1 원점 O를 꼭짓점으로 하고 준선이 $x=2$인 포물선이 점 $(a,\ 6)$을 지날 때, a의 값은?

① -5 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -4 ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -3

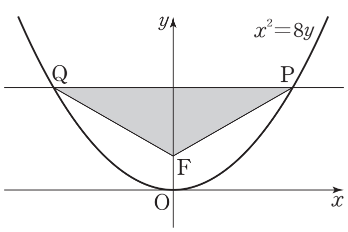
[22012-0008]

2 초점이 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고 준선이 $x=-3$인 포물선의 방정식은 $y^2+ax+b=0$이다. 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 48 ② 52 ③ 56 ④ 60 ⑤ 64

[22012-0009]

3 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $x^2=8y$ 위의 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 포물선 $x^2=8y$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{FP}}=8$일 때, 삼각형 FPQ의 넓이는? (단, 점 P는 제1사분면에 있다.)



① $13\sqrt{3}$ ② $14\sqrt{3}$ ③ $15\sqrt{3}$
④ $16\sqrt{3}$ ⑤ $17\sqrt{3}$

[22012-0010]

4 두 포물선 $y^2=12x$, $y^2-2y=4x+k$의 준선이 서로 일치할 때, 상수 k의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[22012-0011]

5 직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선이 포물선 $y^2=8x$에 접할 때, 상수 m의 값은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[22012-0012]

6 포물선 $y^2=12x$에 접하고 직선 $2x-y+3=0$과 평행한 직선의 방정식은 $y=ax+b$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[22012-0013]

7 초점이 F인 포물선 $x^2=8y$ 위의 점 $\mathrm{P}(4\sqrt{3},\ 6)$에서의 접선과 초점 F 사이의 거리는?

① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

[22012-0014]

8 초점이 F인 포물선 $y^2=ax\ (a>0)$ 위의 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\angle\mathrm{HPF}=\frac{\pi}{3}$이고 삼각형 PHF의 넓이가 $4\sqrt{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22012-0015]

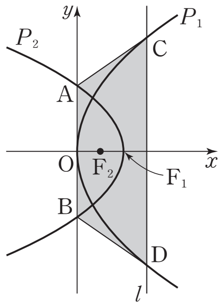
1 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. $\overline{PQ}=10$일 때, 상수 k의 값은?

① -10 ② $-\frac{19}{2}$ ③ -9 ④ $-\frac{17}{2}$ ⑤ -8

[22012-0016]

2 그림과 같이 포물선 P_1의 초점과 꼭짓점은 각각 점 $F_1(2,\ 0)$과 원점 O이고, 포물선 P_2의 초점과 꼭짓점은 각각 점 $F_2(1,\ 0)$과 점 $F_1(2,\ 0)$이다. 포물선 P_2와 y축이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고 포물선 P_2의 준선 l이 포물선 P_1과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABDC의 넓이는?

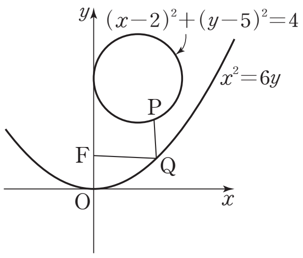
(단, 두 점 A, C의 y좌표는 양수이다.)



① $12\sqrt{2}$ ② $6(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ③ $12+6\sqrt{2}$
④ $6(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ ⑤ $6(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

[22012-0017]

3 그림과 같이 원 $(x-2)^2+(y-5)^2=4$ 위의 점 P와 초점이 F인 포물선 $x^2=6y$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{FQ}$의 최솟값은?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{19}{4}$ ③ 5
④ $\frac{21}{4}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

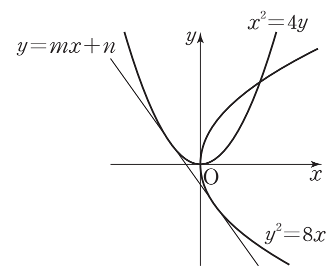
[22012-0018]

4 초점이 $\mathrm{F}(a,\ 0)$이고 준선이 $x=-3$인 포물선이 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$를 지난다. 이 포물선 위의 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$에 대하여 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{F}}=4^n+4$일 때, $\sum_{n=1}^{6} y_n$의 값은? (단, $a>0$)

① 248 ② 312 ③ 376 ④ 440 ⑤ 504

[22012-0019]

5 그림과 같이 두 포물선 $y^2=8x$, $x^2=4y$에 동시에 접하는 직선의 방정식은 $y=mx+n$이다. 두 상수 m, n에 대하여 m^3+n^3의 값은?



① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

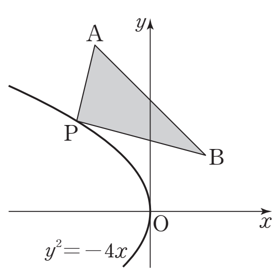
[22012-0020]

6 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$에서의 접선과 기울기가 같고 점 F를 지나는 직선을 l이라 하자. 직선 l이 포물선 $y^2=4x$와 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[22012-0021]

7 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$와 포물선 $y^2=-4x$ 위의 점 P를 꼭짓점으로 하는 삼각형 APB의 넓이의 최솟값은?



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

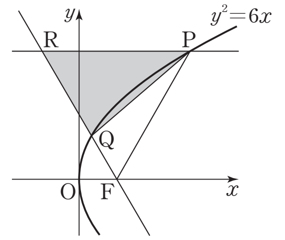
[22012-0022]

1 그림과 같이 포물선 $y^2=6x$의 초점을 F라 하자. 포물선 $y^2=6x$ 위의 제1사분면에 있는 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선과 두 점 Q, F를 지나는 직선이 만나는 점을 R라 할 때,

$\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FR}}$, $\overline{\mathrm{QF}}=2$

를 만족시킨다. 삼각형 PRQ의 넓이는?

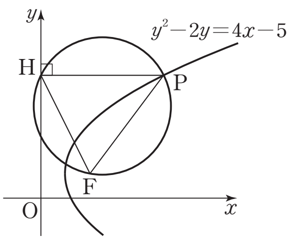
(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.)



① $4\sqrt{3}$　② $5\sqrt{3}$　③ $6\sqrt{3}$
④ $7\sqrt{3}$　⑤ $8\sqrt{3}$

[22012-0023]

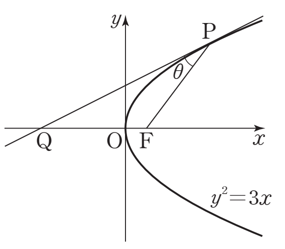
2 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2-2y=4x-5$ 위의 점 P(5, 5)에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 PHF의 외접원의 넓이는?



① $\dfrac{15}{2}\pi$　② $\dfrac{125}{16}\pi$　③ $\dfrac{65}{8}\pi$
④ $\dfrac{135}{16}\pi$　⑤ $\dfrac{35}{4}\pi$

[22012-0024]

3 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=3x$ 위의 점 P(3, 3)에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{QPF}=\theta$라 할 때, $\tan\theta+\tan 2\theta$의 값은?



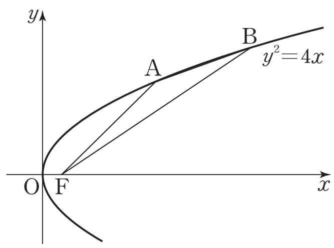
① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{3}{2}$　③ $\dfrac{5}{3}$
④ $\dfrac{11}{6}$　⑤ 2

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 포물선의 뜻을 이용하여 선분의 길이, 도형의 둘레의 길이와 넓이, 각의 크기, 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다.

초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 두 점 A, B의 x좌표는 1보다 큰 자연수이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6일 때, $\overline{\text{AF}}\times\overline{\text{BF}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



2020학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 포물선의 뜻을 이용하여 선분의 길이의 곱의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하자.

$y^2=4x=4\times1\times x$이므로 포물선 $y^2=4x$의 초점은 F$(1, 0)$이고, 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6이므로

$\frac{a+b+1}{3}=6$에서

$$a+b=17 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 포물선의 정의에 의하여 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 포물선의 준선까지의 거리와 같고,

포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$$\overline{\text{AF}}=a+1,\ \overline{\text{BF}}=b+1$$

따라서 $\overline{\text{AF}}\times\overline{\text{BF}}=(a+1)(b+1)=ab+a+b+1=ab+18$

㉠에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\text{AF}}\times\overline{\text{BF}}&=a(17-a)+18\\&=-a^2+17a+18\\&=-\left(a-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{361}{4}\end{aligned}$$

이때 a가 자연수이므로 $\overline{\text{AF}}\times\overline{\text{BF}}$의 값은 $a=8$ 또는 $a=9$일 때 최대이다.

따라서 $\overline{\text{AF}}\times\overline{\text{BF}}$의 최댓값은

$$8\times9+18=90$$

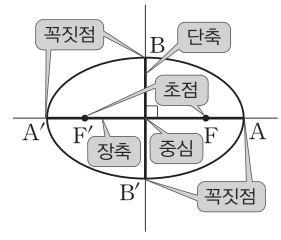
답 90

02 타원

1. 타원의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 타원의 초점이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A′이라 하고, 선분 FF′의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B′이라 할 때, 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 꼭짓점이라 하고, 선분 AA′을 타원의 장축, 선분 BB′을 타원의 단축이라 하며, 장축과 단축이 만나는 점을 타원의 중심이라 한다.



2. 타원의 방정식

(1) 초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식

두 초점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

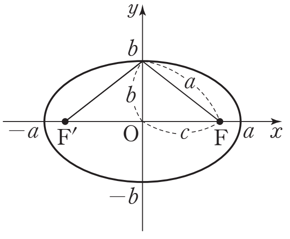
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

① 타원의 초점: F$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, F′$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

② 꼭짓점: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$ (단, $b>0$)

③ 장축의 길이: $2a$, 단축의 길이: $2b$

④ 중심: $(0,\ 0)$



(2) 초점이 y축 위에 있는 타원의 방정식

두 초점 F$(0,\ c)$, F′$(0,\ -c)$로부터의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은

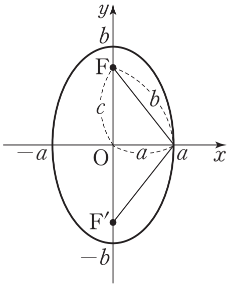
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } b>c>0,\ a^2=b^2-c^2)$$

① 타원의 초점: F$(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$, F′$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

② 꼭짓점: $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$ (단, $a>0$)

③ 장축의 길이: $2b$, 단축의 길이: $2a$

④ 중심: $(0,\ 0)$



설명 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a\ (a>c>0)$인 타원의 방정식을 구해 보자.

타원 위의 임의의 점을 P$(x,\ y)$라 하면

$$\overline{\text{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ \overline{\text{PF}'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\text{PF}}+\overline{\text{PF}'}=2a$이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

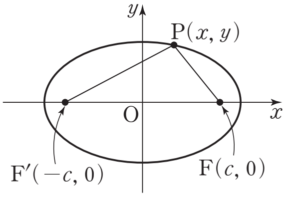
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

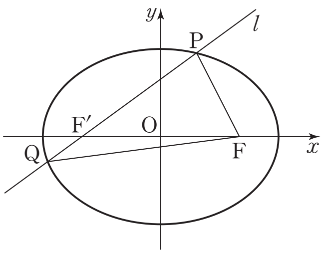
$a>c>0$이므로 $a^2-c^2=b^2\ (b>0)$이라 하면 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



예제 1 타원의 뜻

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원에서 점 F′을 지나는 직선 l이 타원과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 이 타원의 장축의 길이가 14일 때, 삼각형 PQF의 둘레의 길이는? (단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크고, 점 P는 제1사분면에 있고 점 Q는 제3사분면에 있다.)



① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

풀이 전략 타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 타원 위의 점 P에서 두 초점 F, F′까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=14$$

또한 점 Q도 타원 위의 점이므로

$$\overline{QF}+\overline{QF'}=14$$

따라서 삼각형 PQF의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PQ}+\overline{QF}+\overline{PF}&=(\overline{PF'}+\overline{F'Q})+\overline{QF}+\overline{PF}\\&=(\overline{PF}+\overline{PF'})+(\overline{QF}+\overline{QF'})\\&=14+14\\&=28\end{aligned}$$

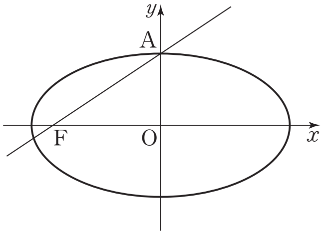
답 ②

유제

정답과 풀이 11쪽

1 [22012-0025]

그림과 같이 원점 O를 중심으로 하는 타원의 한 초점을 F라 하고, 이 타원의 한 꼭짓점을 A라 하자. 직선 AF의 방정식이 $y=\frac{2}{3}x+2$일 때, 이 타원의 장축의 길이는?



① 6 ② $2\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{11}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

2 [22012-0026]

좌표평면에서 두 점 A$(2,\ 0)$, B$(-2,\ 0)$에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 방정식은 $kx^2+ly^2=1$이다. 두 상수 k, l에 대하여 $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}$의 값은?

① 34 ② 38 ③ 42 ④ 46 ⑤ 50

3. 타원의 평행이동

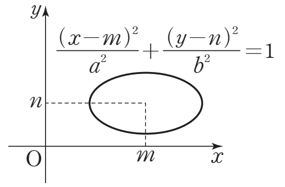
타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 타원의 초점, 꼭짓점, 중심은 다음과 같이 평행이동한다.

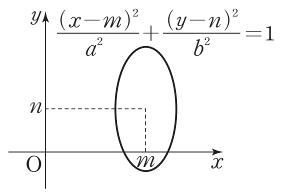
(1) $a>c>0$이고 $c^2=a^2-b^2$일 때

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 $\rightarrow$	$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$
$(c, 0)$, $(-c, 0)$	초점	$(c+m, n)$, $(-c+m, n)$
$(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$	꼭짓점	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$, $(m, b+n)$, $(m, -b+n)$
$(0, 0)$	중심	(m, n)



(2) $b>c>0$이고 $c^2=b^2-a^2$일 때

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 $\rightarrow$	$\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$
$(0, c)$, $(0, -c)$	초점	$(m, c+n)$, $(m, -c+n)$
$(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$	꼭짓점	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$, $(m, b+n)$, $(m, -b+n)$
$(0, 0)$	중심	(m, n)



4. 타원과 직선의 위치 관계

타원과 직선의 방정식을 각각 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

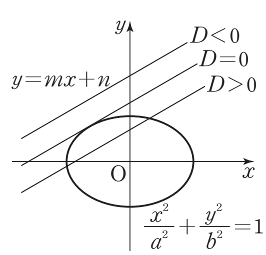
이다. 이때 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

따라서 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 타원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.



예제 2 타원과 직선의 위치 관계

직선 $y=-2x+k$가 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이 전략 타원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 한 문자에 대한 이차방정식을 만들고, 이차방정식의 판별식을 이용하여 타원과 직선의 위치 관계를 파악한다.

풀이 $y=-2x+k$를 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$에 대입하면

$$\frac{x^2}{5}+\frac{(-2x+k)^2}{2}=1$$

$$2x^2+5(-2x+k)^2=10$$

$$22x^2-20kx+5k^2-10=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

직선과 타원이 서로 다른 두 점에서 만나려면 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-10k)^2-22(5k^2-10)>0$$

$$100k^2-110k^2+220>0$$

$$10k^2<220,\ k^2<22$$

$$-\sqrt{22}<k<\sqrt{22}$$

따라서 구하는 정수 k는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4이고, 그 개수는 9이다.

답 ④

유제

정답과 풀이 11쪽

3 [22012-0027]

타원 $3x^2+2y^2-6x+12y+9=0$의 두 초점 사이의 거리는?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

4 [22012-0028]

타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$과 직선 $y=\sqrt{3}x+k$가 서로 만나지 않도록 하는 양의 정수 k의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

5. 타원의 접선

(1) 기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

설명 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$

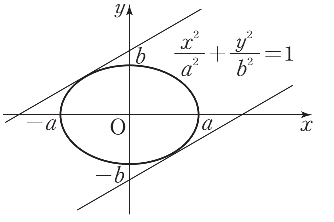
이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=4a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)=0$

이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로

$a^2m^2+b^2-n^2=0$, 즉 $n^2=a^2m^2+b^2$에서 $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$



(2) 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

설명 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$ …… ㉠

또 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ …… ㉡

㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로 y절편의 제곱이 같다.

즉, $(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2+b^2$

$(a^2-{x_1}^2)m^2+2x_1y_1m+b^2-{y_1}^2=0$

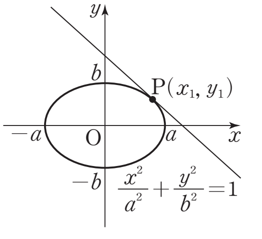
$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$에서 $a^2-{x_1}^2=\frac{a^2{y_1}^2}{b^2}$, $b^2-{y_1}^2=\frac{b^2{x_1}^2}{a^2}$이므로 대입하여 정리하면

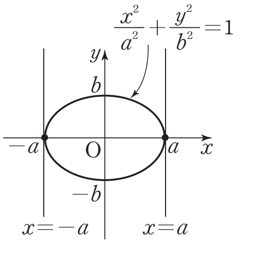
$\left(\frac{a}{b}y_1m+\frac{b}{a}x_1\right)^2=0$, 즉 $m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 $y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2{x_1}^2}{a^2y_1}+y_1$이고, $\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$이므로

$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

$y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고, 그림과 같이 타원 위의 점 $(a,\ 0)$과 점 $(-a,\ 0)$에서의 접선이 각각 직선 $x=a$와 직선 $x=-a$이므로 $y_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.





예제 3 타원의 접선의 방정식

좌표평면에서 두 점 A$(3,\ 0)$, B$(-3,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식이 $y=x+4$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값은?

① $4\sqrt{3}$　② $5\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{13}$　④ $3\sqrt{6}$　⑤ $2\sqrt{14}$

풀이 전략 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$임을 이용한다.

풀이 두 초점 A$(3,\ 0)$, B$(-3,\ 0)$이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식을

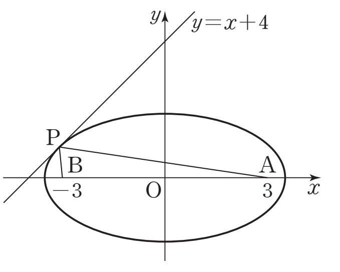
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면

$$a^2-b^2=3^2=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식이 $y=x+4$이므로 타원 ㉠에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식 $y=x\pm\sqrt{a^2+b^2}$에서

$$\sqrt{a^2+b^2}=4,\ a^2+b^2=16 \qquad \cdots\cdots ㉢$$



㉡, ㉢에서

$$2a^2=25,\ a^2=\frac{25}{2}$$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

이때 두 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 장축의 길이는

$$2a=5\sqrt{2}$$

따라서 타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=2a=5\sqrt{2}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 12쪽

5 [22012-0029]

타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(1,\ -3)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 8　② $\dfrac{17}{2}$　③ 9　④ $\dfrac{19}{2}$　⑤ 10

6 [22012-0030]

기울기가 1이고 타원 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$에 접하는 두 직선 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$　② $\sqrt{14}$　③ 4　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{5}$

Level 1 기초 연습

[22012-0031]

1 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$의 장축의 길이와 단축의 길이의 합은?

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

[22012-0032]

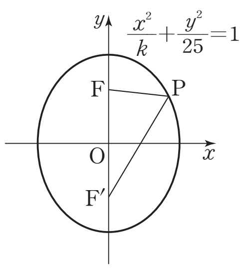
2 두 점 $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 초점으로 하는 타원의 장축의 길이와 단축의 길이를 각각 k, l이라 하자. $k+l=20$일 때, $k-l$의 값은?

① $\frac{16}{5}$ ② $\frac{18}{5}$ ③ 4 ④ $\frac{22}{5}$ ⑤ $\frac{24}{5}$

[22012-0033]

3 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{25}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 PFF′의 둘레의 길이가 16일 때, 상수 k의 값은?

(단, $0<k<25$이고, 점 F의 y좌표는 점 F′의 y좌표보다 크다.)

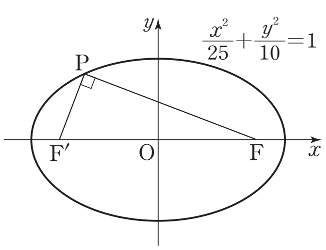


① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[22012-0034]

4 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{10}=1$ 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{FPF'}=90^\circ$일 때, $\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2$의 값은?

(단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크고, 점 P는 제2사분면에 있다.)

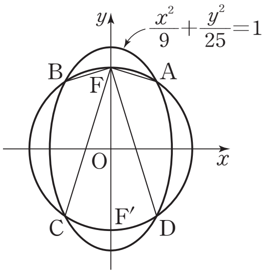


① $12\sqrt{5}$ ② $14\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{5}$
④ $18\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{5}$

[22012-0035]

5 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$의 두 초점 F, F′에 대하여 선분 FF′을 지름으로 하는 원이 타원과 만나는 서로 다른 네 점을 각각 A, B, C, D라 하자. $\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{FC}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값을 구하시오.

(단, 점 F의 y좌표는 점 F′의 y좌표보다 크다.)



[22012-0036]

6 직선 $y=mx+5$가 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$에 접할 때, 양수 m의 값은?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[22012-0037]

7 타원 $\frac{(x-a)^2}{4}+(y-b)^2=1$이 두 직선 $y=x$, $y=-x$와 모두 접할 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[22012-0038]

8 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선이 점 $(-5,\ k)$를 지날 때, k의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

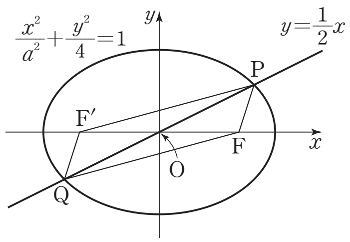
[22012-0039]

1 좌표평면 위의 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$과 타원 $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{10}=1$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

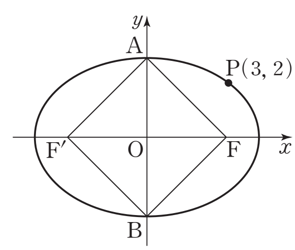
[22012-0040]

2 그림과 같이 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$이 있다. 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 사각형 PF$'$QF의 넓이가 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$일 때, 사각형 PF$'$QF의 둘레의 길이는 l이다. l^2의 값을 구하시오. (단, $a>2$, $c>0$이고, 점 P는 제1사분면에 있고 점 Q는 제3사분면에 있다.)



[22012-0041]

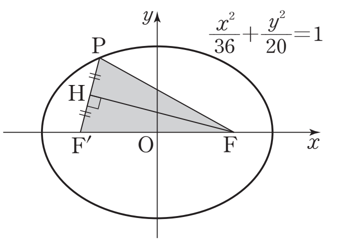
3 그림과 같이 점 P$(3,\ 2)$를 지나는 타원의 y축 위에 있는 두 꼭짓점 A, B와 x축 위에 있는 두 초점 F, F$'$을 꼭짓점으로 하는 사각형 AF$'$BF가 정사각형일 때, 이 타원의 장축의 길이는? (단, 점 A의 y좌표는 점 B의 y좌표보다 크고, 점 F의 x좌표는 점 F$'$의 x좌표보다 크다.)



① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{14}$ ③ $2\sqrt{15}$
④ 8 ⑤ $2\sqrt{17}$

[22012-0042]

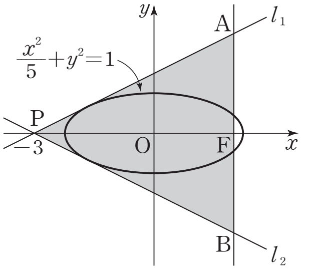
4 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 위에 점 P가 있다. 초점 F에서 선분 F′P에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 H가 선분 F′P의 중점일 때, 삼각형 PF′F의 넓이는?
(단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크고, 점 P는 제2사분면에 있다.)



① $4\sqrt{11}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{13}$
④ $4\sqrt{14}$ ⑤ $4\sqrt{15}$

[22012-0043]

5 그림과 같이 점 P$(-3,\ 0)$에서 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$에 그은 서로 다른 두 접선을 각각 l_1, l_2라 하자. 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$에서 x좌표가 양수인 초점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 APB의 넓이는?



① 10 ② $\frac{25}{2}$ ③ 15
④ $\frac{35}{2}$ ⑤ 20

[22012-0044]

6 직선 $y=mx+4$가 원 $x^2+y^2=1$과 만나지 않고 타원 $x^2+2y^2=4$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 m의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

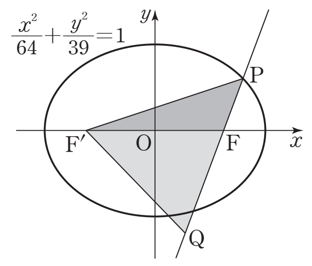
[22012-0045]

7 타원 $ax^2+by^2=24$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 -2일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는?
(단, $a>0$, $b>0$)

① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

[22012-0046]

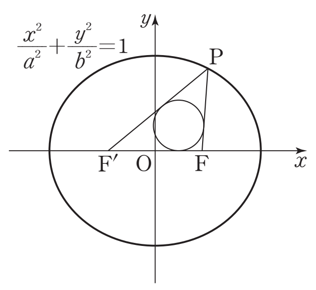
1 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$ 위에 점 P가 있다. 두 점 P, F를 지나는 직선 위의 점 Q에 대하여 삼각형 PF′F와 삼각형 QFF′의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이고 $S_1 : S_2=1 : 2$일 때, S_1+S_2의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크고, 점 P는 제1사분면에 있고 점 Q는 제4사분면에 있다.)



① $9\sqrt{35}$ ② $9\sqrt{37}$ ③ $9\sqrt{39}$
④ $10\sqrt{37}$ ⑤ $10\sqrt{39}$

[22012-0047]

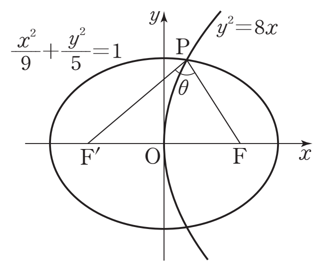
2 그림과 같이 두 초점이 F(4, 0), F′(−4, 0)인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 위에 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{PF}}=7$이고 삼각형 PF′F에 내접하는 원의 중심의 x좌표가 2일 때, a^2+b^2의 값은? (단, 점 P는 제1사분면에 있다.)



① 142 ② 144 ③ 146
④ 148 ⑤ 150

[22012-0048]

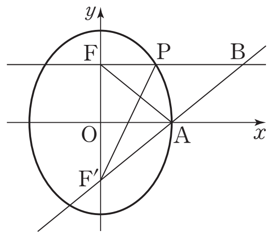
3 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$과 포물선 $y^2=8x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\angle\mathrm{F'PF}=\theta$라 할 때, $\cos\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



대표 기출 문제

출제 경향 타원의 뜻을 이용하여 주어진 도형의 둘레의 길이, 넓이, 점의 좌표 등을 구하는 문제가 출제된다. 또한 타원의 접선의 방정식을 구하거나 원, 포물선, 쌍곡선 등과 연관된 문제가 출제된다.

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$를 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{25}=1$이 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 직선 $y=c$가 직선 AF'과 만나는 점을 B, 직선 $y=c$가 타원과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P라 하자. 삼각형 BPF'의 둘레의 길이와 삼각형 BFA의 둘레의 길이의 차가 4일 때, 삼각형 AFF'의 넓이는? (단, $0<a<5$, $c>0$) [3점]



① $5\sqrt{6}$ ② $\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $\dfrac{7\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

2020학년도 대수능

출제 의도 타원의 뜻과 삼각형의 닮음비를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF}'}$이므로 두 직각삼각형 AFO, AF′O는 서로 합동이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF}'}$이고, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF}'}=10$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF}'}=5$

삼각형 F′AO와 삼각형 F′BF는 서로 닮은 도형이고 닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BF}}=2\overline{\mathrm{AO}}=2a$

그러므로 삼각형 BFA의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AB}}=2a+5+5=2a+10$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PF}}=p\ (0<p<5)$라 하면 $\overline{\mathrm{PF}'}=10-p$이므로 삼각형 BPF′의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{F'B}}=(2a-p)+(10-p)+10=2a-2p+20$ …… ㉡

삼각형 BPF′의 둘레의 길이와 삼각형 BFA의 둘레의 길이의 차가 4이므로 ㉠과 ㉡에서

$|(2a-2p+20)-(2a+10)|=4$, $|10-2p|=4$

$0<p<5$이므로 $p=3$

직각삼각형 PFF′에서 $\overline{\mathrm{FF}'}^2=\overline{\mathrm{PF}'}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2$이므로

$(2c)^2=(10-p)^2-p^2=7^2-3^2=40$

즉, $c^2=10$이므로 $c=\sqrt{10}$이고

$a=\sqrt{25-c^2}=\sqrt{25-10}=\sqrt{15}$

따라서 삼각형 AFF′의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2c\times a=ac=\sqrt{15}\times\sqrt{10}=5\sqrt{6}$

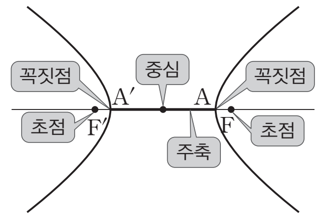
답 ①

03 쌍곡선

1. 쌍곡선의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 한다.

(2) 두 점 F, F′을 쌍곡선의 초점이라 한다. 두 초점을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, A′이라 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 꼭짓점이라 하고, 선분 AA′을 쌍곡선의 주축이라 하며, 주축의 중점을 쌍곡선의 중심이라 한다.



2. 쌍곡선의 방정식

(1) 초점이 x축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

두 초점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

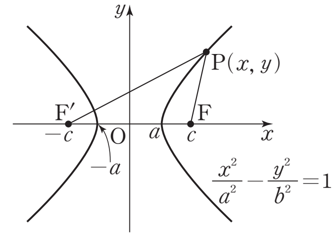
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2\text{)}$$

① 쌍곡선의 초점: F$(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, F′$(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

② 꼭짓점: $(a, 0)$, $(-a, 0)$

③ 주축의 길이: $2a$

④ 중심: $(0, 0)$



(2) 초점이 y축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

두 초점 F$(0, c)$, F′$(0, -c)$로부터의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

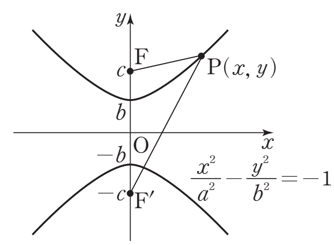
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2\text{)}$$

① 쌍곡선의 초점: F$(0, \sqrt{a^2+b^2})$, F′$(0, -\sqrt{a^2+b^2})$

② 꼭짓점: $(0, b)$, $(0, -b)$

③ 주축의 길이: $2b$

④ 중심: $(0, 0)$



설명 두 점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$으로부터 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

이고, 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}|=2a$이므로

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

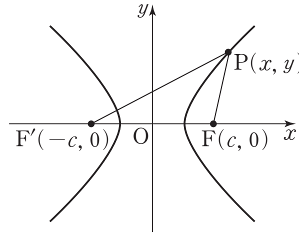
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

$c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2$으로 놓으면 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

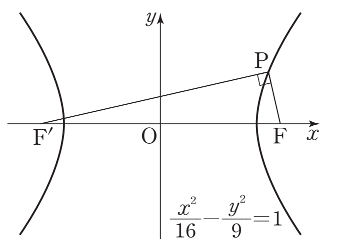
이고, 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



예제 1 쌍곡선의 방정식

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 선분 FF′을 빗변으로 하는 직각삼각형 PF′F의 넓이는?

(단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크다.)



① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

풀이 전략 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 차는 $2a$로 일정하고, 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{a^2+b^2}$임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=16+9=25$에서 $c=5$이므로 F$(5,\ 0)$, F′$(-5,\ 0)$이다.

$\overline{\mathrm{PF'}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{PF}}=\beta$ $(\alpha>\beta)$라 하면 $\angle \mathrm{F'PF}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=100$ ...... ㉠

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=\alpha-\beta=2\times4=8$ ...... ㉡

㉠에서 $(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=100$이므로 ㉡을 대입하면

$8^2+2\alpha\beta=100,\ 2\alpha\beta=36,\ \alpha\beta=18$

따라서 직각삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}\alpha\beta=\frac{1}{2}\times18=9$

답 ②

유제

정답과 풀이 18쪽

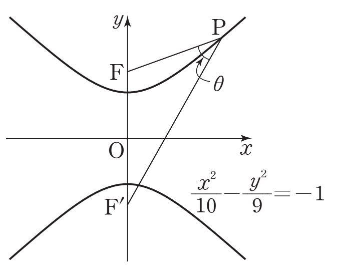
1 [22012-0049]

쌍곡선 $\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점으로부터의 거리의 차가 4인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이다. 두 양수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① $2\sqrt{10}$　② $\sqrt{42}$　③ $2\sqrt{11}$　④ $\sqrt{46}$　⑤ $4\sqrt{3}$

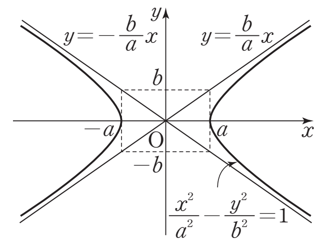
2 [22012-0050]

그림과 같은 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{9}=-1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 $\angle \mathrm{FPF'}=\theta$라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=1:2$일 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 F의 y좌표는 점 F′의 y좌표보다 크다.)



① $\frac{2}{3}$　② $\frac{25}{36}$　③ $\frac{13}{18}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{9}$

3. 쌍곡선의 점근선



쌍곡선 위의 점이 원점으로부터 한없이 멀어질 때, 쌍곡선에 한없이 가까워지는 직선을 쌍곡선의 점근선이라 한다.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

4. 쌍곡선의 평행이동

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다. 이때 쌍곡선의 초점, 점근선, 꼭짓점은 다음과 같이 평행이동한다.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 →	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
$(c, 0)$, $(-c, 0)$	초점	$(c+m, n)$, $(-c+m, n)$
$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$	점근선	$y-n=\frac{b}{a}(x-m)$, $y-n=-\frac{b}{a}(x-m)$
$(a, 0)$, $(-a, 0)$	꼭짓점	$(a+m, n)$, $(-a+m, n)$

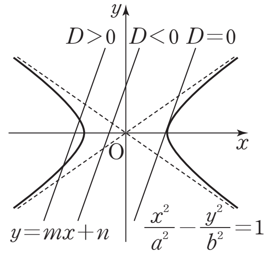
(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은 $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$이고, 마찬가지 방법으로 초점, 점근선, 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.

5. 쌍곡선과 직선의 위치 관계

쌍곡선과 직선의 방정식을 각각 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=mx+n$이라 할 때, $y=mx+n$을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이다. 이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 x에 대한 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.



따라서 $b^2-a^2m^2\neq0$일 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 쌍곡선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0 \Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

예제 2 쌍곡선의 점근선

두 초점이 $\mathrm{F}(2\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-2\sqrt{5},\ 0)$이고 두 직선 $y=2x$, $y=-2x$를 점근선으로 하는 쌍곡선의 주축의 길이는?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ 4　④ $4\sqrt{2}$　⑤ 8

풀이 전략

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$임을 이용한다.

풀이

주어진 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

두 초점이 $\mathrm{F}(2\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-2\sqrt{5},\ 0)$이고 두 직선 $y=2x$, $y=-2x$가 점근선이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2=20$ ...... ㉠

$\dfrac{b}{a}=2$, $b=2a$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+4a^2=20$

$5a^2=20$, $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=4$

답 ③

유제

정답과 풀이 19쪽

3

[22012-0051]

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$의 한 초점 F와 한 점근선 l 사이의 거리는?

(단, 점 F의 x좌표는 양수이고, 점근선 l의 기울기는 양수이다.)

① $\sqrt{3}$　② 2　③ $\sqrt{5}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{7}$

4

[22012-0052]

쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{5}=1$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 쌍곡선이 직선 $y=3x+1$과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양의 정수 k의 최솟값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

6. 쌍곡선의 접선의 방정식

(1) 기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (\text{단, } a^2m^2-b^2>0)$$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}\ (\text{단, } b^2-a^2m^2>0)$$

설명 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

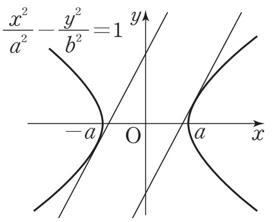
$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0$$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=4a^2b^2(-a^2m^2+n^2+b^2)=0$$

이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $n^2=a^2m^2-b^2$에서 $a^2m^2-b^2>0$이면 $n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$



(2) 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$

설명 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1\neq0$일 때 접선의 기울기를 m $(m\neq0)$이라 하면 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 2개의 직선 중 하나가 ㉠과 같은 직선이므로 y절편의 제곱이 같다.

즉, $(-mx_1+y_1)^2=a^2m^2-b^2$

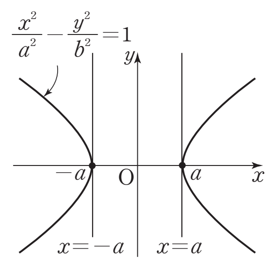
$$(a^2-{x_1}^2)m^2+2x_1y_1m-(b^2+{y_1}^2)=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$에서 ${x_1}^2-a^2=\frac{a^2{y_1}^2}{b^2}$, $b^2+{y_1}^2=\frac{b^2{x_1}^2}{a^2}$이므로 ㉢에 대입하면 $\left(\frac{a}{b}y_1m-\frac{b}{a}x_1\right)^2=0$, 즉 $m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 $y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x-\frac{b^2{x_1}^2}{a^2y_1}+y_1$이고, $\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$이므로

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

$y_1=0$일 때 $x_1=a$, $x_1=-a$이므로 이 식에 대입하면 접선의 방정식은 각각 $x=a$, $x=-a$이고, 그림과 같이 쌍곡선 위의 점 $(a, 0)$과 점 $(-a, 0)$에서의 접선이 각각 직선 $x=a$와 직선 $x=-a$이므로 $y_1=0$일 때에도 이 식은 성립한다.



예제 3 쌍곡선의 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선이 직선 $y=x+2$와 평행할 때, $a+b$의 값은?

(단, 점 P는 제1사분면에 있다.)

① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $\sqrt{14}$　⑤ 4

풀이 전략

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대하여

(1) 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $a^2m^2-b^2>0$)

(2) 쌍곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$임을 이용한다.

풀이

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선이 직선 $y=x+2$와 평행하므로

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3-1}$, 즉 $y=x\pm\sqrt{2}$ …… ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{3}-by=1$, 즉 $y=\frac{a}{3b}x-\frac{1}{b}$ …… ㉡

점 P는 제1사분면에 있으므로 $a>0,\ b>0$

㉠, ㉡에서 $\frac{a}{3b}=1,\ \sqrt{2}=\frac{1}{b}$

따라서 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$a+b=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

답 ①

유제

정답과 풀이 19쪽

5 [22012-0053]

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 y절편은?

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{3}$　④ $-\frac{1}{4}$　⑤ $-\frac{1}{5}$

6 [22012-0054]

직선 $y=3x+4$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5a^2}=1$에 접할 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, $a>0$)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

[22012-0055]

1 두 초점이 F(4, 0), F′(−4, 0)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P에 대하여 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=6$일 때, $3a^2+b^2$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$)

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

[22012-0056]

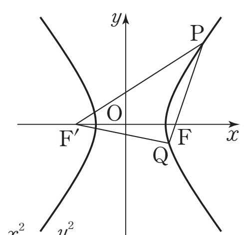
2 두 초점이 F(0, 3), F′(0, −3)이고 점 P(4, 5)를 지나는 쌍곡선의 주축의 길이는?

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

[22012-0057]

3 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에 대하여 점 F를 지나는 직선이 이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 40일 때, 선분 PQ의 길이는?

(단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크고, 두 점 P, Q의 x좌표는 양수이다.)



① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

[22012-0058]

4 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=3:2$일 때, $\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2$의 값은?

① 300 ② 350 ③ 400 ④ 450 ⑤ 500

[22012-0059]

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 점근선과 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이는? (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.)

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

[22012-0060]

6 직선 $2x-3y-4=0$이 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 점근선일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $b>0$)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[22012-0061]

7 직선 $y=2x+3$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{a}=1$에 접할 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는? (단, $a>0$)

① 6 ② $2\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

[22012-0062]

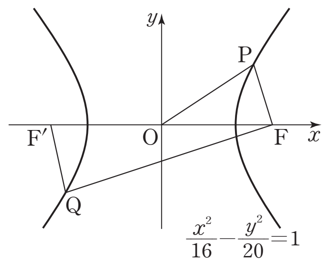
8 쌍곡선 $x^2-y^2=3$ 위의 점 P$(2, -1)$에서의 접선이 이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 원점 O와 두 점 A, B를 지나는 원의 넓이는?

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

[22012-0063]

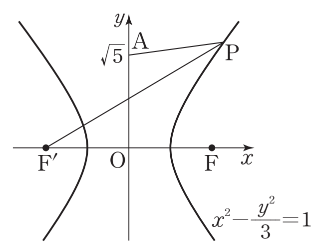
1 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$이 있다. 이 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 제3사분면에 있는 점 Q에 대하여 삼각형 OFP는 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OP}}$인 이등변삼각형이고 삼각형 FF′Q는 $\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{FQ}}$인 이등변삼각형일 때, $(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{F'Q}})^2$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크다.)



[22012-0064]

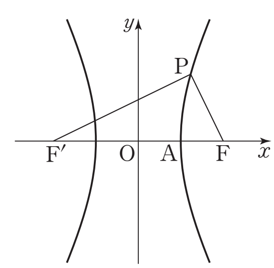
2 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 쌍곡선 위의 제1사분면에 있는 점 P와 점 A$(0, \sqrt{5})$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최소일 때, 선분 PF′의 길이는? (단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크다.)



① $\frac{22}{7}$　② $\frac{23}{7}$　③ $\frac{24}{7}$　④ $\frac{25}{7}$　⑤ $\frac{26}{7}$

[22012-0065]

3 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선의 한 꼭짓점을 A$(a, 0)$ $(a>0)$이라 하자. 이 쌍곡선 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+c$의 값은? (단, O는 원점이다.)



(가) $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+2\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}$

(나) 삼각형 OAP의 넓이가 $\frac{3}{2}$이다.

① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{2}$

[22012-0066]

4 좌표평면에서 기울기가 2인 직선 l 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> 직선 l과 직선 $x=1$이 만나는 점을 Q라 하면 $2\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이다.

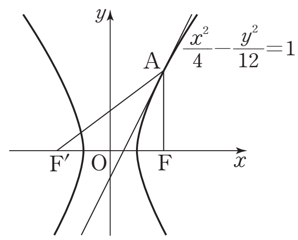
점 $\mathrm{A}(10,\ 0)$에 대하여 $|\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{AP}}|$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ 8 ⑤ $4\sqrt{5}$

[22012-0067]

5 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선의 기울기가 2일 때, 삼각형 AF′F의 둘레의 길이를 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크다.)



[22012-0068]

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선에 평행하고 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$에 접하는 두 직선을 각각 l_1, l_2라 하자. 점 $(a,\ 0)$과 직선 l_1 또는 직선 l_2 사이의 거리가 1이 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

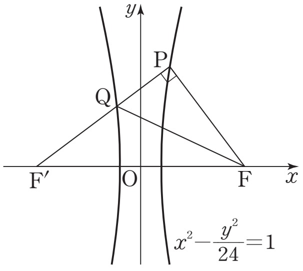
[22012-0069]

7 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$이 제2사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 P에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l은 쌍곡선 $(x-m)^2-\frac{(y+2\sqrt{2})^2}{n}=1$의 한 점근선이다. 두 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? (단, $n>0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22012-0070]

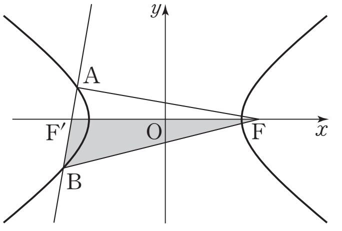
1 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 할 때, 점 F'을 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 두 직선 PF, PF′이 서로 수직일 때, 삼각형 QF′F의 둘레의 길이는?
(단, 점 P는 제1사분면에 있고 점 Q는 제2사분면에 있다.)



① 20 ② $\frac{102}{5}$ ③ $\frac{104}{5}$ ④ $\frac{106}{5}$ ⑤ $\frac{108}{5}$

[22012-0071]

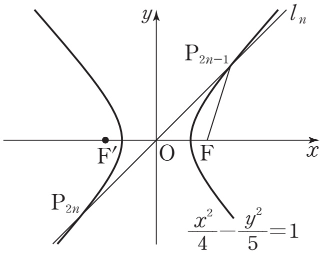
2 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{3},\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선이 있다. 점 F′을 지나는 직선이 이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AF}'}=2-\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AF}}=2+\sqrt{2}$일 때, 삼각형 BFF′의 넓이는?
(단, 점 A는 제2사분면에 있고 점 B는 제3사분면에 있다.)



① $\frac{4+3\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{4+4\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$ ④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{6+5\sqrt{2}}{7}$

[22012-0072]

3 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이 있다. 자연수 n에 대하여 원점 O를 지나는 직선 l_n이 이 쌍곡선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P_{2n-1}, P_{2n}이라 하자. $\overline{\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{F}}=n+1$일 때, $\sum_{n=1}^{20}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{F}}$의 값은?
(단, 점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표보다 크고, 점 P_{2n-1}은 제1사분면에 있고 점 P_{2n}은 제3사분면에 있다.)



① 130 ② 140 ③ 150 ④ 160 ⑤ 170

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 쌍곡선의 뜻, 점근선 등을 이용하여 쌍곡선의 방정식, 도형의 둘레의 길이와 넓이, 각의 크기, 점의 좌표 등을 구하거나 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식 또는 기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식 등을 구하는 문제가 다양한 도형과 연관되어 출제된다.

평면에 한 변의 길이가 10인 정삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PC}}=2$를 만족시키는 점 P에 대하여 선분 PA의 길이가 최소일 때, 삼각형 PBC의 넓이는? [4점]

① $20\sqrt{3}$ ② $21\sqrt{3}$ ③ $22\sqrt{3}$ ④ $23\sqrt{3}$ ⑤ $24\sqrt{3}$

2020학년도 대수능

출제 의도 쌍곡선의 뜻을 이용하여 선분의 길이가 최소일 때, 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 선분 BC의 중점이 원점 O, 직선 BC가 x축, 직선 OA가 y축이고 세 점 A, B, C의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(0, 5\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(-5, 0)$, $\mathrm{C}(5, 0)$인 좌표평면을 생각하자.

$\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PC}}=2$를 만족시키는 점 P는 두 점 $\mathrm{B}(-5, 0)$, $\mathrm{C}(5, 0)$이 초점이고, 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이다.

이 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라 하면

$$2a=2,\ a=1$$

$$b^2=25-a^2=24$$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$이다.

점 P의 좌표를 (p, q)라 하면 $p^2-\frac{q^2}{24}=1$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PA}}^2&=p^2+(q-5\sqrt{3})^2\\&=1+\frac{q^2}{24}+(q-5\sqrt{3})^2\\&=\frac{25}{24}\left(q-\frac{24\sqrt{3}}{5}\right)^2+4\end{aligned}$$

따라서 $q=\frac{24\sqrt{3}}{5}$일 때 선분 PA의 길이가 최소이고, 이때 삼각형 PBC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times10\times\frac{24\sqrt{3}}{5}=24\sqrt{3}$$

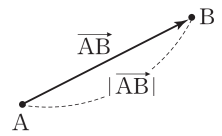
답 ⑤

04 벡터의 연산

1. 벡터의 뜻

(1) 크기와 방향을 모두 가지는 양을 벡터라 하고, 특히 평면 위의 벡터를 평면벡터라 한다.

(2) 그림과 같이 방향이 주어진 선분을 이용하여 벡터를 나타낸다. 점 A에서 점 B로 향하는 방향과 크기가 주어진 선분 AB를 벡터 AB라 하고, 기호 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$로 나타낸다.
이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 시점, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 종점이라 한다.



(3) 선분 AB의 길이를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 크기라 하고, 기호 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$로 나타낸다.

(4) 크기가 1인 벡터를 단위벡터라 한다.

(5) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}}$와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 영벡터라 하고, 이것을 기호 $\vec{0}$로 나타낸다.
이때 영벡터의 크기는 0이고, 그 방향은 생각하지 않는다.

(6) 벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 기호

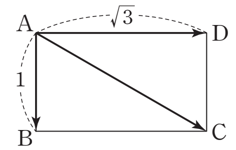
$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \cdots$$

로 나타내고, 벡터 $\vec{a}$의 크기는 기호

$$|\vec{a}|$$

로 나타낸다.

예 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=2$이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$는 시점이 점 A, 종점이 점 C이고 크기가 2인 벡터이다.



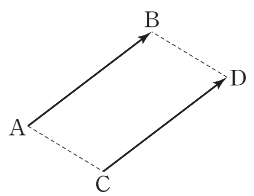
2. 서로 같은 벡터

(1) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 시점의 위치가 달라도 그 크기와 방향이 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 하고, 기호

$$\vec{a}=\vec{b}$$

로 나타낸다.

(2) 시점과 종점이 주어진 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 평행이동하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$와 겹칠 수 있으면 두 벡터는 크기와 방향이 같으므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$이다.

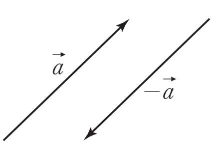


3. 크기가 같고, 방향이 반대인 벡터

(1) 벡터 $\vec{a}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터를 기호

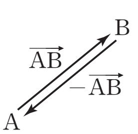
$$-\vec{a}$$

로 나타낸다.



(2) $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$가 성립한다.

(3) 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$는 방향이 반대이고 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이다.



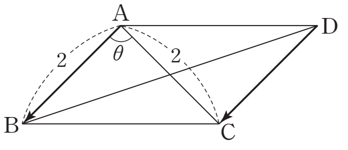
예제 1 벡터의 크기

넓이가 4인 사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2$일 때, $|\overrightarrow{BD}|^2$의 값을 구하시오.

풀이 전략 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기 $|\overrightarrow{AB}|$는 선분 AB의 길이이므로 사각형의 넓이와 코사인법칙을 이용하여 사각형의 대각선의 길이를 구한다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$이므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

$\angle BAC=\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$라 하자.



평행사변형 ABCD의 넓이가 4이므로 삼각형 ABC의 넓이는 2이다.

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\theta=2$에서

$\sin\theta=1$이므로 $\theta=90^\circ$

즉, 삼각형 ABC는 $\angle BAC=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BC}=2\sqrt{2}$, $\angle ABC=\angle ACB=45^\circ$

평행사변형 ABCD에서 $\overline{AD}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$이고, $\angle CAD=\angle ACB=45^\circ$이므로

$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=90^\circ+45^\circ=135^\circ$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$|\overrightarrow{BD}|^2=\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos 135^\circ=2^2+(2\sqrt{2})^2-2\times2\times2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=20$$

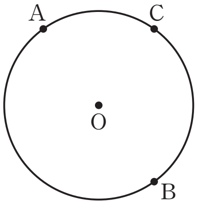
답 20

유제

정답과 풀이 25쪽

1 [22012-0073]

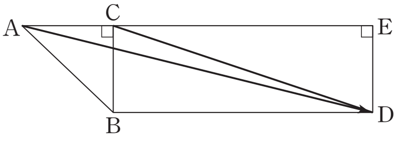
그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 5인 원 위에 서로 다른 세 점 A, B, C가 있다. $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$이고 $|\overrightarrow{AC}|=6$일 때, $|\overrightarrow{BC}|$의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

2 [22012-0074]

한 평면에 그림과 같이 $\angle ACB=90^\circ$, $\overline{CA}=\overline{CB}$인 직각이등변삼각형 ABC와 직사각형 CBDE가 있다. $3|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$이고 $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{10}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{AD}$의 크기는?



① $\sqrt{14}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 4
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

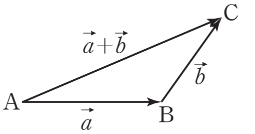
4. 벡터의 덧셈

(1) 벡터의 덧셈

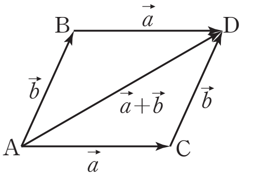
① 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{AC}$로 나타나는 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하며, 이것을 기호

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \text{ 또는 } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

로 나타낸다.



② 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$에 대하여 그림과 같이 사각형 ACDB가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$이다.
즉, 두 벡터의 합 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{AD}$이다.



참고 두 벡터의 합은 한 벡터의 시점을 다른 벡터의 종점과 일치시키거나 두 벡터의 시점을 일치시켜 구한다.

(2) 벡터의 덧셈에 대한 성질

임의의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 영벡터 $\vec{0}$에 대하여

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

② $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

③ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

④ $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

5. 벡터의 뺄셈

(1) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고, 이것을 기호

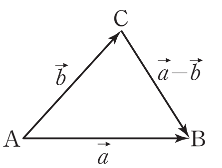
$$\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$$

로 나타낸다.

(2) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$일 때,
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$이므로 $\vec{b}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}$에서

$$\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

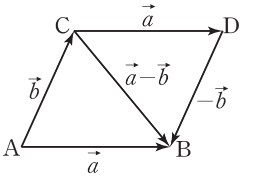
즉, 벡터 $\overrightarrow{CB}$는 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차 $\vec{a}-\vec{b}$이다.



(3) 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$에 대하여 그림과 같이 사각형 ABDC가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면

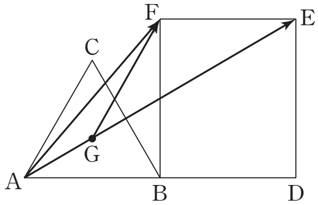
$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

이다.
따라서 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$는 두 벡터 $\vec{a}$, $-\vec{b}$의 합과 같다.



예제 2 벡터의 덧셈과 뺄셈

그림과 같이 한 평면 위에 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 무게중심이 G인 정삼각형 ABC와 $\overline{\mathrm{ED}}=4$인 직사각형 BDEF가 있다. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{GF}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}$의 크기가 6일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$의 값은? (단, 점 B는 선분 AD 위의 점이다.)



① 2　② $\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{3}$

풀이 전략 벡터의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 주어진 벡터를 간단히 하고 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\overline{\mathrm{AB}}$임을 이용한다.

풀이

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}+(\overrightarrow{\mathrm{GF}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}})=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+(\overrightarrow{\mathrm{GF}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}})=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{GE}}$

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{GF}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}$의 크기가 6이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{GE}}|=\overline{\mathrm{GE}}=6$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{CM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=3$

$\overline{\mathrm{GM}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{CM}}=\dfrac{1}{3}\times3=1$

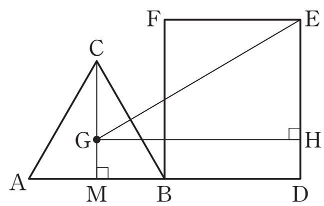
점 G에서 선분 ED에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{HD}}=\overline{\mathrm{GM}}=1$, $\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{ED}}-\overline{\mathrm{HD}}=4-1=3$

직각삼각형 EGH에서

$\overline{\mathrm{GH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{GE}}^2-\overline{\mathrm{EH}}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|=\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{GH}}-\overline{\mathrm{MB}}=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$



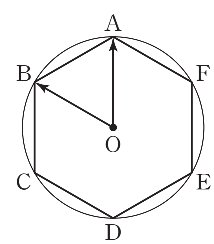
답 ⑤

유제

정답과 풀이 25쪽

3 [22012-0075]

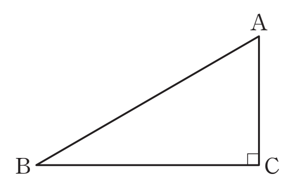
그림과 같이 중심이 O인 원에 내접하는 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{6}$일 때, 이 원의 둘레의 길이는?



① 2π　② $2\sqrt{2}\pi$　③ $2\sqrt{3}\pi$
④ 4π　⑤ $2\sqrt{5}\pi$

4 [22012-0076]

그림과 같이 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}$인 직각삼각형 ABC에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　② $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　③ $\sqrt{3}$
④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

6. 벡터의 실수배

(1) 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 실수배라 한다.

(2) 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, $k\vec{a}$는

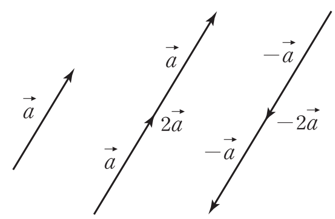
(i) $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

(ii) $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

(iii) $k=0$이면 $\vec{0}$이다.

② $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

설명 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{a}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 2배인 벡터이다. 이것을 $2\vec{a}$로 나타낸다. 또 $(-\vec{a})+(-\vec{a})$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 2배인 벡터이다. 이것을 $-2\vec{a}$로 나타낸다.



(3) 벡터의 실수배의 기본 성질

두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

② $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

③ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

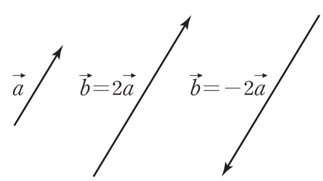
(4) 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터는 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$이다.

7. 벡터의 평행

(1) 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 또는 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하고, 기호

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

로 나타낸다.



(2) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

(3) 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 네 실수 k, l, m, n에 대하여

$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b} \Longleftrightarrow k=m,\ l=n$

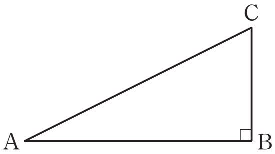
8. 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

(1) 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

(2) 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

예제 3 벡터의 실수배

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{BC}}$이고 $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 삼각형 ABC에 대하여 $|2\overrightarrow{\mathrm{AC}}-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

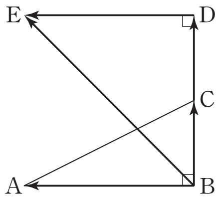


① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

풀이 전략 두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
$$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a},\ (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a},\ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$$

풀이
$$2\overrightarrow{\mathrm{AC}}-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{AC}}-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$인 점 D와 $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$인 점 E를 잡으면 삼각형 EDB는 $\angle\mathrm{D}=90^\circ$인 직각삼각형이다.



㉠에서
$$2\overrightarrow{\mathrm{AC}}-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}$$

그러므로 $|2\overrightarrow{\mathrm{AC}}-3\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=\overline{\mathrm{BE}}=2$

$\overline{\mathrm{BC}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2x$, $\overline{\mathrm{DB}}=2\overline{\mathrm{BC}}=2x$

$\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{DB}}=2\sqrt{2}x=2$에서 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 직각삼각형 ABC의 넓이는
$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times2x\times x=x^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 26쪽

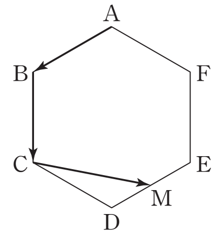
5 [22012-0077]

영벡터가 아니고 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
$$\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{q}=3\vec{a}-\vec{b},\ \vec{r}=2\vec{a}+m\vec{b}$$
일 때, 두 벡터 $\vec{p}-2\vec{r}$, $\vec{q}$가 서로 평행하도록 하는 실수 m의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{6}$

6 [22012-0078]

그림과 같이 정육각형 ABCDEF에 대하여 선분 DE의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{CM}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{BC}}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

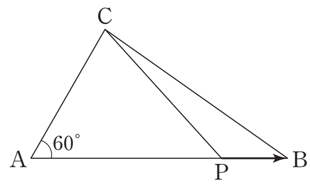


① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

Level 1 기초 연습

[22012-0079]

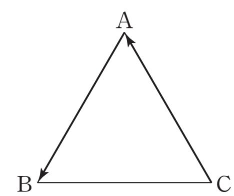
1 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{CAB}=60^{\circ}$인 삼각형 ABC의 변 AB 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 APC의 넓이가 $\frac{7}{4}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 크기는?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{5}{12}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{12}$　⑤ $\frac{2}{3}$

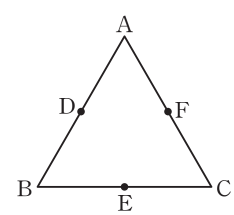
[22012-0080]

2 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$의 값을 구하시오.



[22012-0081]

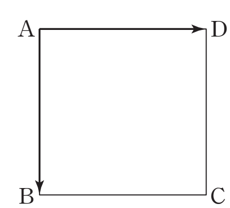
3 그림과 같이 정삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{FC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=6$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는?



① $2\sqrt{3}$　② $3\sqrt{3}$　③ $4\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{3}$　⑤ $6\sqrt{3}$

[22012-0082]

4 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에 대하여 $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|$의 값은?



① $\sqrt{15}$　② 4　③ $\sqrt{17}$
④ $3\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{19}$

[22012-0083]

5 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=4\vec{a}+2\vec{b}$$

라 하자. $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$일 때, 두 실수 k, l에 대하여 $2k+l$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[22012-0084]

6 삼각형 ABC에서 $m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22012-0085]

7 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

$$\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b},\ \vec{q}=\vec{a}+k\vec{b}$$

라 하자. 두 벡터 $\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{p}-\vec{q}$가 서로 평행할 때, 실수 k의 값은?

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

[22012-0086]

8 한 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=2\vec{a}+3\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=k\vec{a}-2\vec{b}$$

이다. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k의 값은?

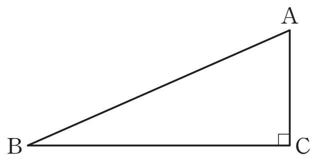
(단, 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

Level 2 기본 연습

[22012-0087]

1 그림과 같이 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC의 변 AB 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PC}|$의 값은?

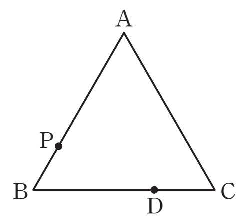


(가) $|\overrightarrow{AB}|=4|\overrightarrow{BP}|$, $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$
(나) $|\overrightarrow{AC}|=4$, $|\overrightarrow{QC}|=\sqrt{14}$

① $\sqrt{42}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{46}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

[22012-0088]

2 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC에서 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하자. 변 AB 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}|$의 최댓값은?



① $\sqrt{70}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{74}$
④ $2\sqrt{19}$ ⑤ $\sqrt{78}$

[22012-0089]

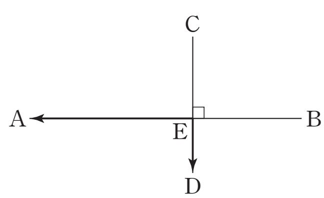
3 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=2$, $\angle DAB=30°$인 사각형 ABCD와 그 내부의 한 점 P가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{AB}|$의 값은?

(가) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$
(나) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{PA}=\vec{0}$

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

[22012-0090]

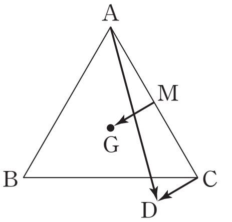
4 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{CD}=1$인 두 선분 AB, CD가 점 E에서 서로 수직으로 만나고 $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}|$의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
④ $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

[22012-0091]

5 그림과 같이 정삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 AC의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 되도록 점 D를 잡으면 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=a\overrightarrow{\mathrm{AB}}+b\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시킨다. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

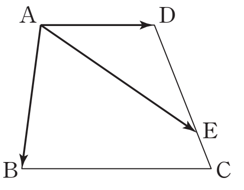


① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

[22012-0092]

6 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}/\!/\overline{\mathrm{BC}}$인 사다리꼴 ABCD가 있다. $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:5$이고 변 DC를 $3:1$로 내분하는 점을 E라 할 때, $m\overrightarrow{\mathrm{AE}}=n\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$를 만족시킨다. 두 실수 m, n에 대하여 mn의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 3

[22012-0093]

7 영벡터가 아닌 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k가 다음 조건을 만족시킬 때, $k+\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$의 값을 구하시오.

(가) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하고, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$는 서로 평행하지 않다.
(나) $2\vec{a}+k(2\vec{c}-3\vec{a})+2\vec{b}=8\vec{c}$

[22012-0094]

8 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

$$\vec{a}+3\vec{x}=k\vec{a}+\vec{b},\ \vec{x}+2\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$$

를 만족시키는 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은?

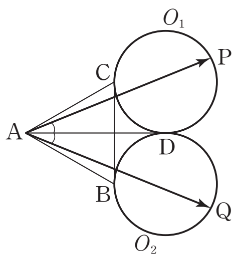
① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

[22012-0095]

1 한 평면에 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 반지름의 길이가 같은 두 원 O_1, O_2가 있다. 그림과 같이 두 원 O_1, O_2는 점 D에서만 만나고 직선 BC와 각각 두 점 C, B에서 접한다. 원 O_1 위의 한 점 P와 원 O_2 위의 한 점 Q에 대하여

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$, $\angle PAD=\angle QAD$

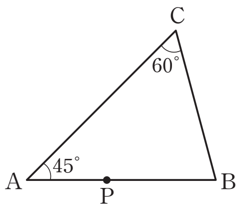
일 때, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값과 최솟값의 합은?



① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{3}$ ③ $2+3\sqrt{3}$
④ $3+4\sqrt{3}$ ⑤ $4+4\sqrt{3}$

[22012-0096]

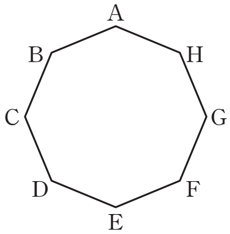
2 그림과 같이 $\angle A=45°$, $\angle C=60°$인 삼각형 ABC의 변 AB 위의 점 P에 대하여 점 Q가 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$를 만족시킨다. 점 Q가 나타내는 도형의 길이가 $2\sqrt{2}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{BC}$의 크기는?



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[22012-0097]

3 한 평면 위에 있는 정팔각형 ABCDEFGH와 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.



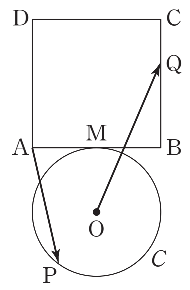
(가) $2\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{CH}+3\overrightarrow{DP}$
(나) $|\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AD}|=6\sqrt{2}$

사각형 EHBP의 넓이가 $p+q\sqrt{2}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 자연수이다.)

[22012-0098]

4 한 평면에 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 변 AB와 변 AB의 중점 M에서 접하고 반지름의 길이가 1, 중심이 O인 원 C가 있다. 원 C 위의 점 P와 변 BC 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최소일 때 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값을 m, $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대일 때 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값을 M이라 하자. m^2+M^2의 값을 구하시오.

(단, 점 O는 사각형 ABCD의 외부에 있다.)



[22012-0099]

5 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC와 실수 k에 대하여 점 P가

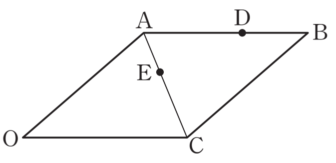
$$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$$

를 만족시킨다. $|\overrightarrow{BP}|$의 값이 최소가 되도록 하는 실수 k의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

[22012-0100]

6 그림과 같이 평행사변형 OCBA의 변 AB를 3 : 2로 내분하는 점 D와 대각선 AC를 2 : k로 내분하는 점 E가 있다. 세 점 O, E, D가 한 직선 위에 있도록 하는 양수 k의 값은?



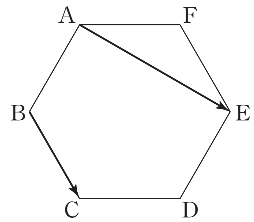
① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3

④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

대표 기출 문제

출제 경향 벡터의 연산의 성질 또는 두 벡터의 평행 조건을 이용하여 벡터의 크기를 구하거나 벡터의 종점이 나타내는 도형이 어떤 도형인지를 파악하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]

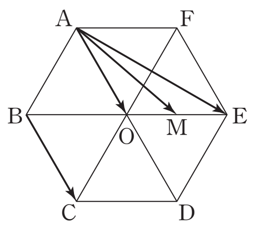


① $\sqrt{6}$　　② $\sqrt{7}$　　③ $2\sqrt{2}$　　④ 3　　⑤ $\sqrt{10}$

2022학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 벡터의 연산의 성질을 이용하여 벡터의 크기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하고 선분 OE의 중점을 M이라 하자.



$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$이므로

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AM} \quad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 AOM에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2&=\overline{AO}^2+\overline{OM}^2-2\times\overline{AO}\times\overline{OM}\times\cos 120^\circ\\&=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AM}=\frac{\sqrt{7}}{2}$이므로 ㉠에서

$$|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|=|2\overrightarrow{AM}|=2\overline{AM}=2\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$$

답 ②

대표 기출 문제

출제 경향 평면도형에서 벡터의 연산 또는 벡터의 평행 조건 등을 이용하여 도형의 성질들을 파악하고, 벡터의 크기나 도형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$

ㄴ. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2017학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 직사각형 ABCD에서 조건을 만족시키는 점 P의 위치를 정하고, 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지를 묻는 문제이다.

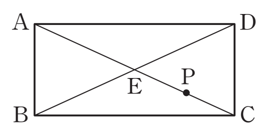
풀이 ㄱ. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$에서

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$이므로

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$$

따라서 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$이다. (참)

ㄴ. 선분 BD의 중점을 E라 하면



$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EP})+(\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EP})$$
$$=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}-2\overrightarrow{EP}=-2\overrightarrow{EP}$$

ㄱ에서 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$이므로

$$\overrightarrow{PE}=-\overrightarrow{PC}$$

두 벡터 $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{PC}$는 서로 방향이 반대이고 크기가 같으므로 점 P는 선분 EC의 중점이다.

따라서 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ADC의 넓이는 삼각형 ADP의 넓이의 $\frac{4}{3}$이므로 삼각형 ADC의 넓이는 $3\times\frac{4}{3}=4$이다.

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $4\times2=8$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

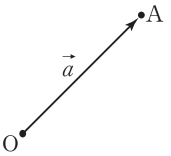
답 ⑤

05 평면벡터의 성분과 내적

1. 위치벡터

(1) 평면에서 정해진 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$를 점 O에 대한 점 A의 위치벡터라 한다.

설명 평면에서 한 점 O를 고정시키면 임의의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$인 벡터 $\vec{a}$가 유일하게 정해진다. 역으로 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$인 점 A도 유일하게 정해진다. 그러므로 시점을 한 점 O로 고정하면 점 A와 이 점의 위치를 나타내는 벡터 $\overrightarrow{OA}$는 일대일로 대응한다.
참고로 점 O에 대한 점 A의 위치벡터를 간단히 점 A의 위치벡터라 한다.



(2) 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하면

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

(3) 내분점의 위치벡터

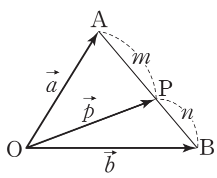
① 평면에서 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

설명 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이고 $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$이므로 $\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$

이때 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$이므로

$$\vec{p}=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$



② 평면에서 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 선분 AB의 중점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

③ 평면에서 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(4) 외분점의 위치벡터

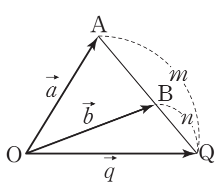
평면에서 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$는

$$\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

설명 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이고 $\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$이므로 $\overrightarrow{AQ}=\frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})$

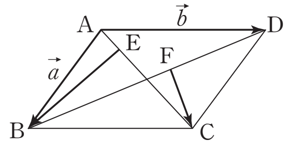
이때 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}$이므로

$$\vec{q}=\vec{a}+\frac{m}{m-n}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$



예제 1 위치벡터

그림과 같이 평행사변형 ABCD의 대각선 AC를 1 : 4로 내분하는 점을 E, 대각선 BD를 3 : 2로 내분하는 점을 F라 하자. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

풀이 전략 벡터의 덧셈과 뺄셈, 벡터의 실수배와 내분점의 위치벡터를 이용한다.

풀이 점 E는 대각선 AC를 1 : 4로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\vec{a}-\left(\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)=\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 F는 대각선 BD를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=(\vec{a}+\vec{b})-\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\left(\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}\right)+\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)=\frac{7}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

따라서 $m=\frac{7}{5}$, $n=\frac{1}{5}$이므로 $m+n=\frac{7}{5}+\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$

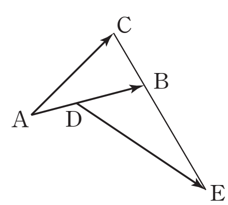
답 ④

유제

정답과 풀이 33쪽

1 [22012-0101]

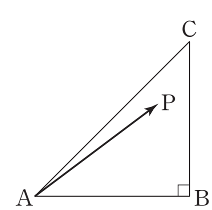
그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 D, 변 BC를 2 : 3으로 외분하는 점을 E라 할 때, $\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 두 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

2 [22012-0102]

그림과 같이 $\overline{AB}=4$이고 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형 ABC와 그 내부의 점 P가 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AP}|$의 값은?

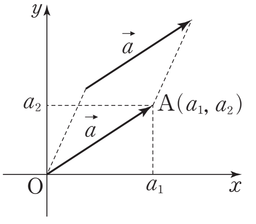


① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

2. 평면벡터의 성분

(1) 평면벡터의 성분

좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하고 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$를 종점으로 하는 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$로 나타낸다. 이때 두 실수 a_1, a_2를 벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, a_1을 x성분, a_2를 y성분이라 한다.



(2) 평면벡터의 성분과 연산

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

① 크기: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

② 두 벡터가 서로 같을 조건

$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1$이고 $a_2=b_2$

③ 덧셈: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

④ 뺄셈: $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

⑤ 실수배: $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수이다.)

⑥ 두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2),\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

설명 (1) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{E}_1(1,\ 0)$, $\mathrm{E}_2(0,\ 1)$의 원점 O에 대한 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_2}=\vec{e_2}$라 하면 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낸다.

(2) 좌표평면에서 원점을 O, 두 점을 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$라 하자.

① 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이이므로

$$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

② $\vec{a}=\vec{b}$이면 두 벡터에 대응하는 성분이 서로 같으므로 $a_1=b_1$, $a_2=b_2$이다.

역도 성립한다.

③ $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$

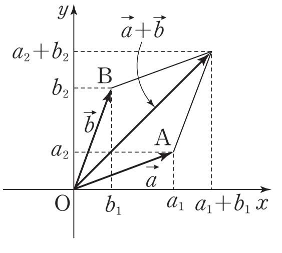
$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$

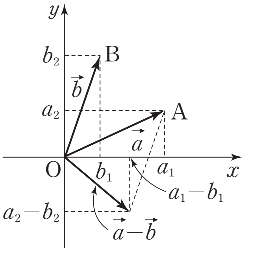
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

④ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$

$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}$

$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$





⑤ $k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}$

$=(ka_1,\ ka_2)$

⑥ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

예제 2 평면벡터의 성분

좌표평면에서 세 점 A$(-2,\ 5)$, B$(0,\ 1)$, C$(1,\ -1)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=2$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이는?

① $\frac{\pi}{4}$　　② $\frac{\pi}{2}$　　③ π　　④ 2π　　⑤ 4π

풀이 전략 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이고, $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$일 때 $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$임을 이용한다.

풀이 원점 O에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2,\ 5)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-4\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(-2,\ 5)+(0,\ 1)+(2,\ -2)-4(x,\ y)\\&=(-4x,\ -4y+4)\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=2$에서

$$\sqrt{(-4x)^2+(-4y+4)^2}=4\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\frac{1}{2},\ x^2+(y-1)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(0,\ 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$$

답 ①

유제

정답과 풀이 34쪽

3 [22012-0103]

세 벡터 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ 2)$, $\vec{c}=(-7,\ 3)$에 대하여 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$일 때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 실수이다.)

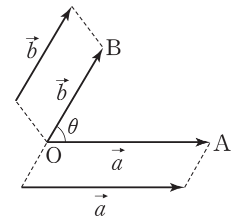
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

4 [22012-0104]

좌표평면에서 세 점 A$(3,\ 4)$, B$(-2,\ 1)$, C$(0,\ -2)$에 대하여 점 D$(a,\ b)$가 $\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{0}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

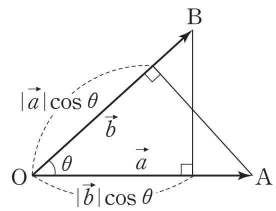
3. 평면벡터의 내적



(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 한 점 O를 잡아서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$가 되도록 두 점 A, B를 정할 때, $\angle\mathrm{AOB}$의 크기 θ는 점 O의 위치에 관계없이 일정하고, $\theta=\angle\mathrm{AOB}\ (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라 한다.

(2) 벡터의 내적



영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$\begin{cases} |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta & (0^\circ\le\theta\le90^\circ) \\ -|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta) & (90^\circ<\theta\le180^\circ) \end{cases}$$

를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$와 같이 나타낸다.

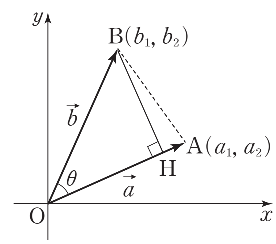
참고 ① 〈수학 I〉에서 공부한 삼각함수를 이용하면 다음과 같이 간단하게 평면벡터의 내적을 정의할 수 있다.
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$일 때, $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$와 같이 나타낸다.
즉, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

② $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

(3) 평면벡터의 내적과 성분

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$



설명 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하자.
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 각각 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2)$로 나타낼 때,
점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta,\ |\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\big||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|-|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\big|=\big||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta\big|$$

이때 직각삼각형 BHA에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\overline{\mathrm{OB}}\sin\theta)^2+(\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta)^2$$

이를 정리하면 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$

따라서 $(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

이를 정리하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$이다.

위의 식은 $90^\circ<\theta<180^\circ$일 때에도 성립하며 $\theta=0^\circ$ 또는 $\theta=90^\circ$ 또는 $\theta=180^\circ$일 때에도 성립한다.

〈수학 I〉에서 공부한 삼각함수를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

좌표평면에서 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

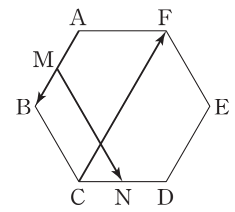
$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$$

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$$

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

예제 3 평면벡터의 내적

그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 두 변 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=-3$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$의 값은?



① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

풀이 전략

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta & (0^\circ\le\theta\le90^\circ)\\ -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta) & (90^\circ<\theta\le180^\circ)\end{cases}$$

임을 이용한다.

풀이

정육각형 ABCDEF의 한 변의 길이를 a $(a>0)$이라 하자.
사다리꼴 ABCD에서 $\overline{\mathrm{BC}}/\!/\overline{\mathrm{AD}}$이고 두 점 M, N은 각각 두 변 AB, CD의 중점이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{AD}})=\frac{1}{2}(a+2a)=\frac{3}{2}a$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|=\overline{\mathrm{CF}}=2a$$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$가 이루는 각의 크기인 120°와 같으므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}&=-|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|\times\cos(180^\circ-120^\circ)\\&=-\frac{3}{2}a\times2a\times\frac{1}{2}=-3\end{aligned}$$

에서 $a^2=2$, $a=\sqrt{2}$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$가 이루는 각의 크기는 180°이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}&=-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{CF}}|\times\cos(180^\circ-180^\circ)\\&=-\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times1=-4\end{aligned}$$

답 ③

유제

정답과 풀이 34쪽

5
[22012-0105]

두 벡터 $\vec{a}=(5,\ x)$, $\vec{b}=(-2,\ 2)$에 대하여 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{b}=7$일 때, 실수 x의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

6
[22012-0106]

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$을 만족시키는 점 P와 점 A 사이의 거리의 최댓값은?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

4. 평면벡터의 내적의 성질

(1) 벡터의 내적의 성질

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

③ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

설명 세 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$, $\vec{c}=(c_1, c_2)$에 대하여

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=b_1a_1+b_2a_2=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$

$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(2) 벡터의 크기와 내적

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

② $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

5. 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

(1) 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0°\le\theta\le 180°)$라 할 때

① $\vec{a}\cdot\vec{b}\ge 0$이면 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

② $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이면 $\cos(180°-\theta)=-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

설명 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0°\le\theta\le 180°)$라 할 때

① $\vec{a}\cdot\vec{b}\ge 0$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

② $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180°-\theta)$이므로 $\cos(180°-\theta)=-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

(2) 벡터의 평행 조건과 수직 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① 평행 조건: $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

② 수직 조건: $\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

설명 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,

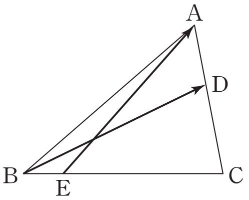
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta & (0°\le\theta\le 90°)\\ -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180°-\theta) & (90°<\theta\le 180°)\end{cases}$ 에서

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$이면 $\theta=0°$ 또는 $\theta=180°$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$이고, $\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\theta=90°$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이다.

한편, 이들의 역도 성립한다.

예제 4 평면벡터의 크기와 내적

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=2$, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$인 삼각형 ABC에서 변 AC를 $2:3$으로 내분하는 점을 D, 변 BC를 $1:4$로 내분하는 점을 E라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{EA}}$의 크기는?



① $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\sqrt{3}$

풀이 전략

(1) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta\ (0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

(2) $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$, $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

풀이

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$라 하면 $|\vec{a}|=\overline{\mathrm{AB}}=3$, $|\vec{b}|=\overline{\mathrm{AC}}=2$이고

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3\times2\times\frac{1}{2}=3$$

점 D는 변 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{2}{5}\vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{2}{5}\vec{b}-\vec{a}$$

점 E는 변 BC를 $1:4$로 내분하는 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{1+4}=\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{4}{5}\vec{a}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{EA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2$$

$$=\left|\left(\frac{2}{5}\vec{b}-\vec{a}\right)+\left(\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{4}{5}\vec{a}\right)\right|^2=\left|\frac{3}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{a}\right|^2$$

$$=\left(\frac{3}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{a}\right)=\frac{9}{25}|\vec{b}|^2-\frac{6}{25}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{25}|\vec{a}|^2$$

$$=\frac{9}{25}\times2^2-\frac{6}{25}\times3+\frac{1}{25}\times3^2=\frac{27}{25}$$

따라서 구하는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{EA}}$의 크기는 $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{EA}}|=\sqrt{\dfrac{27}{25}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

답 ③

유제

정답과 풀이 34쪽

7 [22012-0107]

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=3$을 만족시킬 때, $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

8 [22012-0108]

두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 1)$, $\vec{b}=(k,\ -k)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°일 때, k^2의 값은? (단, k는 실수이다.)

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

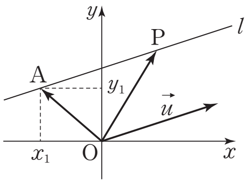
6. 직선의 방정식

(1) 평면에서 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 위의 점을 P라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$ (단, t는 실수)

이다. 이때 벡터 $\vec{u}$를 직선의 방향벡터라 한다.

(2) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b)$인 직선 l 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 그 직선 l의 방정식은



$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b} \text{ (단, } ab\neq0)$$

특히, 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

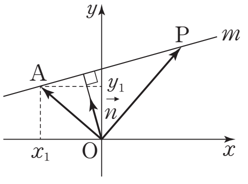
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ (단, } x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$$

(3) 평면에서 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 위의 점을 P라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$

이다. 이때 벡터 $\vec{n}$을 직선의 법선벡터라 한다.

(4) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a, b)$인 직선 m 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 그 직선 m의 방정식은



$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

7. 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\overrightarrow{u_1}=(a_1, b_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2, b_2)$일 때

(1) 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\leq\theta\leq90^\circ)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면

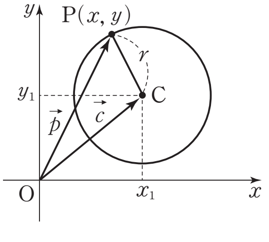
$\overrightarrow{u_1}=k\overrightarrow{u_2} \Longleftrightarrow a_1=ka_2,\ b_1=kb_2$ (단, k는 0이 아닌 실수)

(3) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면

$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0 \Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

8. 원의 방정식

좌표평면에서 점 $\mathrm{C}(x_1, y_1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하고 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라 하면



$|\vec{p}-\vec{c}|=r \Longleftrightarrow (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$

이므로 $(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_1, y-y_1)=r^2$에서

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$

예제 5 직선과 원의 방정식

www.ebsi.co.kr

좌표평면에서 두 직선 l: $\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{k}$, m: $3x=1-2y$가 점 (a, b)에서 서로 수직으로 만날 때, $k+a+b$의 값은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

풀이 전략 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 할 때, 두 직선 l, m이 서로 수직이면 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$임을 이용한다.

풀이 직선 l: $\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{k}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(3, k)$

직선 m: $3x=1-2y$, 즉 $\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면 $\vec{v}=(2, -3)$

두 직선 l, m이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$에서

$(3, k)\cdot(2, -3)=0$, $6-3k=0$, $k=2$

$\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=t$ (t는 실수)라 하면 $x=3t-2$, $y=2t-3$

이므로 직선 l 위의 점은 $(3t-2, 2t-3)$으로 나타낼 수 있다.

두 직선 l, m의 교점의 좌표를 구하기 위해 $x=3t-2$, $y=2t-3$을 $3x=1-2y$에 대입하면

$3(3t-2)=1-2(2t-3)$, $13t=13$, $t=1$

즉, 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $(1, -1)$이다.

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로 $k+a+b=2+1+(-1)=2$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 35쪽

9 [22012-0109]

좌표평면에서 점 $(-2, a)$를 지나고 직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}$와 평행한 직선을 l이라 하자. 직선 l이 점 $(0, 6)$을 지날 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10 [22012-0110]

좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$, P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라 하자.

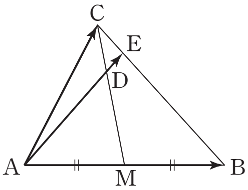
$$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=0$$

을 만족시키는 점 P에 대하여 삼각형 OBP의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 x축 위의 점이 아니다.)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

[22012-0111]

1 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB의 중점을 M, 선분 CM을 1 : 2로 내분하는 점을 D, 선분 AD의 연장선이 변 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=a\overrightarrow{\mathrm{AB}}+b\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?



① -1　② $-\frac{4}{5}$　③ $-\frac{3}{5}$　④ $-\frac{2}{5}$　⑤ $-\frac{1}{5}$

[22012-0112]

2 두 벡터 $\vec{a}=(3, 1)$, $\vec{b}=(1, -2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[22012-0113]

3 좌표평면 위의 두 점 A$(3, 2)$, B$(-1, 5)$에 대하여 평면벡터 $\vec{p}$가 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 반대 방향이고 $|\vec{p}|=10$을 만족시킬 때, 벡터 $\vec{p}$의 모든 성분의 합은?

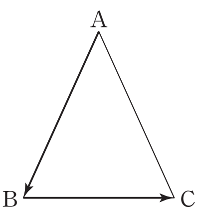
① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[22012-0114]

4 좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 위의 점 P와 세 점 A$(4, 1)$, B$(5, 0)$, C$(6, -4)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$의 최댓값을 구하시오.

[22012-0115]

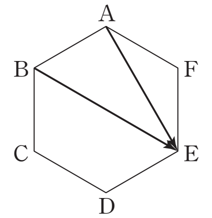
5 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형 ABC에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-3$일 때, 선분 BC의 길이는?



① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

[22012-0116]

6 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정육각형 ABCDEF에서 $|2\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2$의 값을 구하시오.



[22012-0117]

7 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$이고 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$가 서로 수직이다. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$)

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[22012-0118]

8 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 2x-1)$, $\vec{b}=(-x,\ 2)$가 서로 수직일 때, 실수 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22012-0119]

9 좌표평면에서 두 직선 $\frac{x+1}{4}=\frac{2-y}{3}$, $\frac{x-3}{2}=y-1$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[22012-0120]

10 좌표평면에서 두 점 A$(2,\ 1)$, P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라 하자. $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=k$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=x-2$가 접하도록 하는 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[22012-0121]

1 한 평면에서 길이가 15인 선분 AB의 중점을 C, 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 할 때, 직선 AB 위에 있지 않은 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AQ}+3\overrightarrow{PA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DQ}+3\overrightarrow{RD}=\vec{0}$
(나) $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{DR}=0$

$\overline{AP}=4$일 때, 삼각형 CBR의 넓이를 구하시오.

[22012-0122]

2 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$와 실수 t에 대하여 $|2\vec{a}-t\vec{b}|^2$의 값은 $t=\frac{1}{2}$에서 최소일 때, $|2\vec{a}-\vec{b}|^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22012-0123]

3 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 모든 실수 t에 대하여 $|\vec{a}+t\vec{b}|\geq 1$을 만족시킨다. $|\vec{a}-\vec{b}|$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{15}$

[22012-0124]

4 실수 k에 대하여 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$
(나) $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 최댓값은 10이고 최솟값은 k이다.

$\left|\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, m보다 크고 M보다 작은 자연수의 개수가 1이 되도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

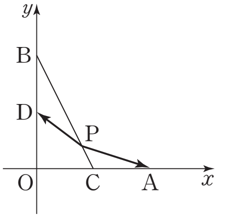
[22012-0125]

5 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$과 직선 $y=-2x+1$ 위의 점 중 A가 아닌 점 B에 대하여 y축이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[22012-0126]

6 좌표평면에서 두 점 A$(2, 0)$, B$(0, 2)$에 대하여 두 선분 OA, OB의 중점을 각각 C, D라 하자. 선분 BC 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}}$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

[22012-0127]

7 좌표평면에서 $\vec{u}=(1, 0)$이고 곡선 $y=x^2+2$ 위의 점 P에 대하여 $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하자. 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라 할 때, $\cos\theta$의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

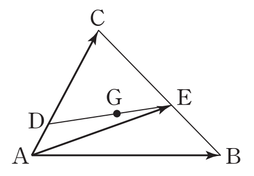
[22012-0128]

8 좌표평면 위의 네 점 A$(-a, 3)$, B$(a, 2)$, C$(b, 2)$, D$(2b, 1)$에 대하여 $a<b$이고 두 직선 AB, CD가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 최솟값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

[22012-0129]

1 그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 변 AC를 $1:3$으로 내분하는 점을 D라 하자. 직선 DG가 변 BC와 만나는 점을 E라 할 때, $\overrightarrow{AE}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 두 실수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은?



① $-\frac{2}{5}$　② $-\frac{1}{5}$　③ 0　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{2}{5}$

[22012-0130]

2 좌표평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 각각 2, $2\sqrt{3}$인 두 원을 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 세 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, C와 원 O_2 위의 점 D가 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$를 만족시킨다. 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ\le\theta\le180^\circ)$라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 C의 y좌표는 양수이다.)

① $-\frac{2\sqrt{6}}{7}$　② $-\frac{\sqrt{21}}{7}$　③ $-\frac{3\sqrt{2}}{7}$　④ $-\frac{\sqrt{15}}{7}$　⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{7}$

[22012-0131]

3 t가 양수일 때, 원 $(x-2t)^2+(y+t)^2=t^2$ 위의 점 P와 점 $A(3, 4)$에 대하여 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q, 최솟값을 $f(t)$라 하자. 점 $R(t, f(t))$에 대하여 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}>340$을 만족시키는 자연수 t의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 평면도형에서 벡터의 연산과 내적의 성질을 이용하여 두 벡터가 이루는 각의 크기나 내적을 구하는 문제가 출제된다. 또한 두 벡터의 성분을 이용하여 내적을 계산하는 문제가 출제된다.

좌표평면 위의 두 점 A$(6,\ 0)$, B$(8,\ 6)$에 대하여 점 P가

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$$

을 만족시킨다. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

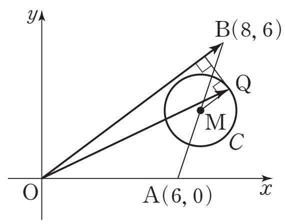
2019학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 벡터의 연산과 내적의 성질을 이용하여 두 벡터의 내적을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|2\overrightarrow{PM}|=\sqrt{10}$에서 $|\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

그러므로 점 P는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원 위의 점이다. 이 원을 C라 하자.

원 C 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값은 점 P가 직선 OB에 수직인 직선과 원 C가 접하는 두 점 중에서 선분 OP의 길이가 더 긴 점일 때 최대이므로 이때의 점 P, 즉 점 Q를 나타내면 그림과 같다.



두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0°<\theta<90°)$라 하면

$|\overrightarrow{OA}|=6$, $|\overrightarrow{MQ}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MQ}|\cos\theta=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\cos\theta \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편, 직선 OB에 수직이고 점 Q를 지나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로 $\overline{OB}\,/\!/\,\overline{MQ}$

그러므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기 θ와 같다.

또한 $|\overrightarrow{OA}|=6$, $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{8^2+6^2}=10$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$에서

$$(6,\ 0)\cdot(8,\ 6)=6\times10\times\cos\theta,\ 48=60\cos\theta,\ \cos\theta=\frac{4}{5}$$

㉠에서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$

답 ③

06 공간도형

1. 공간에서 직선과 평면의 위치 관계

(1) 평면의 결정 조건

① 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점　② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

③ 한 점에서 만나는 두 직선　④ 평행한 두 직선

(2) 서로 다른 두 직선의 위치 관계

① 한 점에서 만난다.　② 평행하다.　③ 꼬인 위치에 있다.

(3) 직선과 평면의 위치 관계

① 포함된다.　② 한 점에서 만난다.　③ 평행하다.

(4) 서로 다른 두 평면의 위치 관계

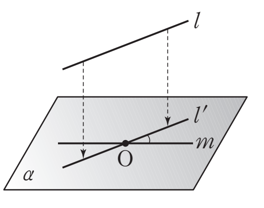
① 만난다.　② 평행하다.

참고 ① 서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 도형은 직선이고 이 직선을 두 평면의 교선이라 한다.

② 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않을 때, 두 평면은 평행하다고 하고 기호로 $\alpha /\!/ \beta$와 같이 나타낸다.

2. 공간에서 두 직선이 이루는 각

두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 m 위에 한 점 O를 잡고, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 l'을 그으면 두 직선 l', m은 점 O에서 만나므로 한 평면을 결정한다. 이때 두 직선 l', m이 이루는 각을 두 직선 l, m이 이루는 각이라 한다.



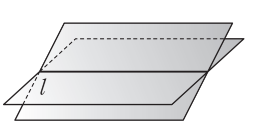
참고 ① 일반적으로 두 직선이 이루는 각의 크기는 크기가 크지 않은 것을 택한다.

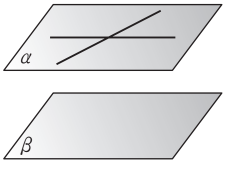
② 두 직선이 이루는 각이 직각일 때 두 직선 l, m은 수직이라 하고, 기호로 $l \perp m$과 같이 나타낸다.

3. 공간에서 직선과 평면의 평행

(1) 두 직선 l, m이 평행할 때, 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 모든 평면은 직선 m과 평행하다.

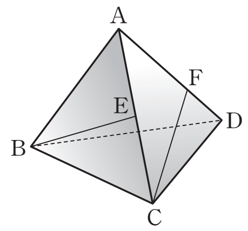
(2) 두 평면 α, β가 평행할 때, 평면 α 위에 있는 모든 직선은 평면 β와 평행하다.





예제 1 공간에서 두 직선이 이루는 각

그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD에서 선분 AC의 중점을 E, 선분 AD를 2 : 1로 내분하는 점을 F라 하자. 두 직선 BE, CF가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{15}}{21}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$　③ $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$　④ $\dfrac{2\sqrt{6}}{21}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$

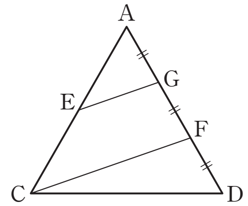
풀이 전략 꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기는 어느 한 직선을 평행이동하여 두 직선이 만날 때 이루는 각의 크기와 같다.

풀이 점 E가 선분 AC의 중점이므로 선분 BE의 길이는 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 높이이다. 즉,

$$\overline{BE}=\overline{BC}\times\sin 60^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

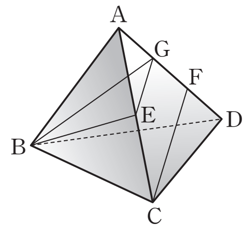
선분 AD를 1 : 2로 내분하는 점을 G라 하면 점 F가 선분 AD를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{AG}=\overline{GF}=\overline{FD}=2$$



점 E는 선분 AC의 중점이고, 점 G는 선분 AF의 중점이므로 두 삼각형 AEG, ACF는 서로 닮은 도형이고 닮음비는 1 : 2이다.

따라서 $\overline{CF}\,/\!/\,\overline{EG}$이므로 두 직선 BE, CF가 이루는 예각의 크기는 두 직선 BE, EG가 이루는 예각의 크기와 같다. 즉, $\theta=\angle BEG$이다.



한편, 삼각형 CDF에서

$$\overline{CF}^2=\overline{CD}^2+\overline{FD}^2-2\times\overline{CD}\times\overline{FD}\times\cos 60^\circ=6^2+2^2-2\times6\times2\times\frac{1}{2}=28$$

이므로 $\overline{CF}=2\sqrt{7}$이고

$$\overline{EG}=\frac{1}{2}\times\overline{CF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}=\sqrt{7}$$

또한 $\overline{AB}=\overline{CD}=6$, $\overline{AG}=\overline{FD}=2$, $\angle BAG=\angle CDF=60^\circ$이므로 두 삼각형 ABG, DCF는 서로 합동이고

$$\overline{BG}=\overline{CF}=2\sqrt{7}$$

따라서 삼각형 BEG에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{BE}^2+\overline{EG}^2-\overline{BG}^2}{2\times\overline{BE}\times\overline{EG}}=\frac{(3\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{7})^2}{2\times3\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{21}$$

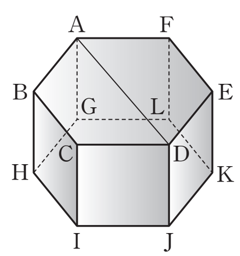
답 ③

유제

정답과 풀이 42쪽

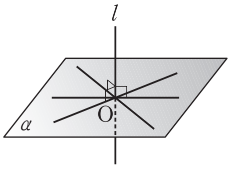
1 [22012-0132]

그림과 같은 정육각기둥 ABCDEF−GHIJKL의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AD와 평행한 직선의 개수를 a, 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 b라 할 때, ab의 값을 구하시오.



4. 공간에서 직선과 평면의 수직 관계

공간에서 직선 l과 평면 α 위의 모든 직선이 수직일 때, 직선 l은 평면 α와 수직이라 하고, 기호로 $l\perp\alpha$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 α의 수선, 직선 l과 평면 α가 만나는 점 O를 수선의 발이라 한다.



참고 직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선과 각각 수직이면 $l\perp\alpha$이다.

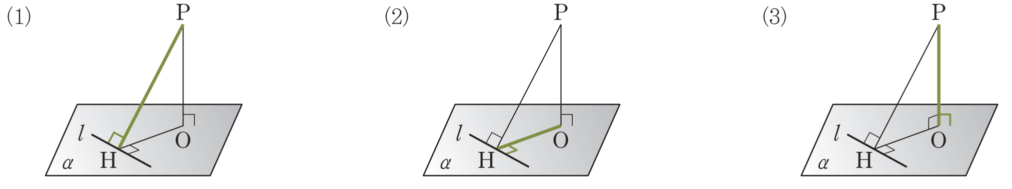
5. 삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 한 점 O, 평면 α에 포함되고 점 O를 지나지 않는 한 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H에 대하여 다음과 같은 세 가지 성질이 성립한다. 이를 삼수선의 정리라 한다.

(1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$

(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$

(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이면 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$

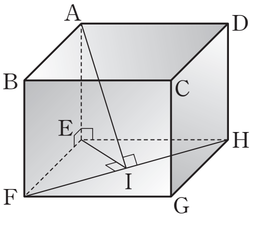


설명 (1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이므로 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
이때 직선 l은 평면 α에 포함되므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 PH는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이므로 직선 PO는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
이때 직선 l은 평면 α에 포함되므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PO와 직선 PH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 OH는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이다.

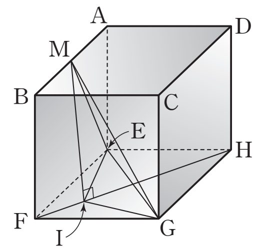
(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이므로 직선 l은 직선 PH와 직선 OH를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.
이때 직선 PO는 평면 PHO에 포함되고, 직선 l은 평면 PHO 위에 있는 모든 직선과 수직이므로 $\overline{\mathrm{PO}}\perp l$이다.
또한 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이므로 직선 PO는 직선 OH와 직선 l을 포함하는 평면 α와 수직이다.
즉, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$이다.

예 그림과 같은 직육면체 ABCD−EFGH의 한 꼭짓점 A에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하자. $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$, $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{EH}}$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}\perp$(평면 EFGH)이고 $\overline{\mathrm{AI}}\perp\overline{\mathrm{FH}}$이므로 삼수선의 정리 (2)에 의하여 $\overline{\mathrm{EI}}\perp\overline{\mathrm{FH}}$이다.



예제 2 삼수선의 정리

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하고, 점 M에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 삼각뿔 M$-$IGE의 부피는?



① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$

④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

풀이 전략 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 P에서 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\text{OH}}\perp l$이다.

풀이 주어진 입체도형이 정육면체이므로 선분 EF의 중점을 J라 하면 두 직선 AE, MJ가 평행하고 직선 AE와 평면 EFGH가 수직이므로

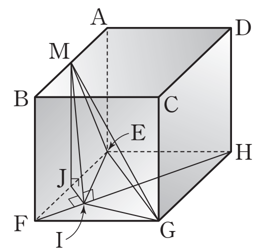
$\overline{\text{MJ}}\perp$(평면 EFGH) ······ ㉠

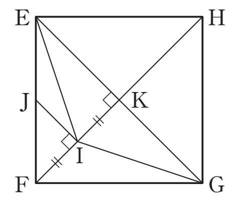
점 M에서 선분 FH에 내린 수선의 발이 I이므로

$\overline{\text{MI}}\perp\overline{\text{FH}}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\text{IJ}}\perp\overline{\text{FH}}$

정사각형 EFGH에서 두 대각선 EG, FH가 만나는 점을 K라 하면 점 K는 선분 FH의 중점이고, 두 삼각형 JFI, EFK는 닮음비가 1 : 2이므로 $\overline{\text{FI}}=\overline{\text{IK}}$이다.





정육면체 ABCD$-$EFGH의 한 모서리의 길이가 4이므로

$\overline{\text{EG}}=\overline{\text{FH}}=4\sqrt{2}$

$\overline{\text{FI}}=\overline{\text{IK}}=\frac{1}{4}\times\overline{\text{FH}}=\sqrt{2}$

따라서 삼각뿔 M$-$IGE의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{1}{3}\times(\text{삼각형 IGE의 넓이})\times\overline{\text{MJ}}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\text{EG}}\times\overline{\text{IK}}\right)\times\overline{\text{MJ}}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)\times4=\frac{16}{3}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 42쪽

2 [22012-0133]

사면체 OABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC는 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{BC}}=2$인 직각이등변삼각형이다.
(나) 직선 OC는 두 직선 AC, BC와 모두 수직이다.
(다) $\overline{\text{OC}}=4$

두 직선 OA, AB가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\sin^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

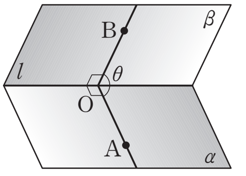
6. 이면각

(1) 반평면

평면 위의 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 반평면이라 한다.

(2) 이면각

직선 l을 공유하는 두 개의 반평면 α와 β로 이루어진 도형을 이면각이라 한다.
이때 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α와 β를 각각 이면각의 면이라 한다.



(3) 이면각의 크기

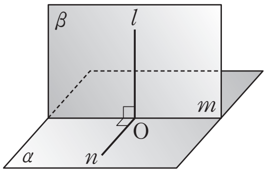
이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 각각 반평면 α, β 위에 그을 때, $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기 θ를 이면각의 크기라 한다.

(4) 두 평면이 이루는 각

서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서 크기가 크지 않은 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라 한다.

참고 ① 두 평면 α, β에서 이면각의 크기가 $90°$일 때, 두 평면 α, β는 서로 수직이라 하고, 기호로 $\alpha\perp\beta$와 같이 나타낸다.

② 직선 l이 평면 α에 수직일 때, 직선 l을 포함하는 평면 β는 평면 α와 수직임을 보이자.
그림과 같이 두 평면 α, β의 교선을 m이라 하고, 직선 l과 평면 α의 교점을 O라 하자.
평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m과 수직인 직선 n을 그으면 $l\perp\alpha$이므로 $l\perp n$이다.
이때 $l\perp m$, $m\perp n$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 두 직선 l, n이 이루는 각의 크기와 같다.
따라서 $\alpha\perp\beta$이다.

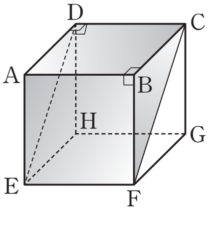


예 1 그림과 같은 정육면체 ABCD$-$EFGH에서

① $\overline{\text{DC}}\perp\overline{\text{AD}}$, $\overline{\text{DC}}\perp\overline{\text{ED}}$이고 $\angle\text{ADE}=45°$이므로 두 평면 ABCD, EFCD가 이루는 예각의 크기는 $45°$이다.

② $\overline{\text{AB}}\perp\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{AB}}\perp\overline{\text{BF}}$이고 $\angle\text{CBF}=90°$이므로 두 평면 ABCD, AEFB가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.

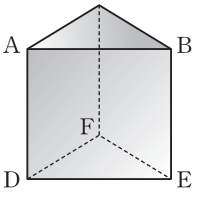
즉, (평면 ABCD)$\perp$(평면 AEFB)이다.



예 2 그림과 같이 면 ABC와 면 DEF가 정삼각형이고 면 ADEB, 면 CFEB, 면 ADFC가 직사각형인 삼각기둥 ABC$-$DEF에서 두 평면 ADFC, CFEB가 이루는 예각의 크기는 두 평면 ADFC, CFEB의 교선 CF 위의 한 점 F를 지나고 직선 CF에 각각 수직인 두 직선 DF, EF가 이루는 예각의 크기와 같다.
이때 삼각형 DEF가 정삼각형이므로

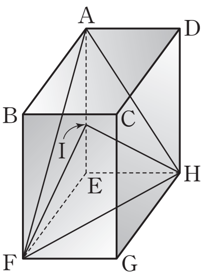
$$\angle\text{DFE}=60°$$

즉, 두 평면 ADFC, CFEB가 이루는 예각의 크기는 $60°$이다.



예제 3 이면각

그림과 같이 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=3$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 선분 AE를 $2:1$로 내분하는 점을 I라 하고, 두 평면 AFH, IFH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $8\sin^2\theta$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 때에는 두 평면의 교선 위의 한 점을 지나고 교선에 수직이 되도록 두 평면 위에 각각 그은 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하면 된다.

풀이 꼭짓점 E에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{AE}\perp$(평면 EFGH), $\overline{IE}\perp$(평면 EFGH)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AJ}\perp\overline{FH}$, $\overline{IJ}\perp\overline{FH}$

따라서 이면각의 정의에 의하여 $\theta=\angle AJI$

점 I는 길이가 3인 선분 AE를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{AI}=2$, $\overline{IE}=1$

직각삼각형 EFH에서 $\overline{FH}=\sqrt{\overline{EF}^2+\overline{EH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

직각삼각형 EFH의 넓이에서 $\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{EH}=\frac{1}{2}\times\overline{FH}\times\overline{EJ}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=\frac{1}{2}\times4\times\overline{EJ}$, $\overline{EJ}=\sqrt{3}$

직각삼각형 IEJ에서 $\overline{IJ}=\sqrt{\overline{IE}^2+\overline{EJ}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

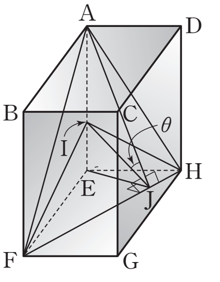
$\overline{IJ}:\overline{IE}:\overline{EJ}=2:1:\sqrt{3}$이므로 $\angle IJE=30^\circ$

또한 직각삼각형 AEJ에서 $\overline{AJ}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EJ}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{AJ}:\overline{AE}:\overline{EJ}=2\sqrt{3}:3:\sqrt{3}=2:\sqrt{3}:1$이므로

$\angle AJE=60^\circ$, $\theta=\angle AJE-\angle IJE=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

따라서 $8\sin^2\theta=8\sin^2 30^\circ=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=2$



답 ②

유제

정답과 풀이 43쪽

3 [22012-0134]

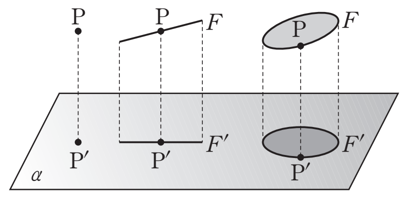
빗변의 길이가 4이고 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형 ABC를 포함하는 평면 α가 있다. $\overline{OA}\perp\alpha$, $\overline{OA}=2$를 만족시키는 점 O에 대하여 두 직선 OB, AB가 이루는 예각의 크기를 θ_1, 평면 OBC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_1\times\cos\theta_2$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

7. 정사영

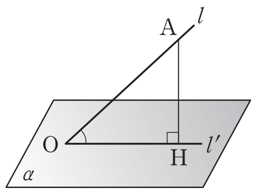
(1) 정사영

한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라 한다. 또한 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라 한다.



(2) 직선과 평면이 이루는 각

직선 l과 평면 α가 한 점에서 만나고 수직이 아닐 때, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영 l'과 직선 l이 이루는 각을 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라 한다. 즉, 직선 l이 평면 α와 점 O에서 만나고 수직이 아닐 때 직선 l 위의 O가 아닌 한 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AOH에서 $\angle$AOH의 크기가 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기이다.



참고 직선 l과 평면 α가 서로 평행할 때, 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 0°이다.

(3) 정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라 하면

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$$

설명 $0^\circ < \theta < 90^\circ$일 때, 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하면

$\overline{\mathrm{AA'}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{BB'}} \perp \alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AA'}} /\!/ \overline{\mathrm{BB'}}$이다.

점 A에서 직선 BB′에 내린 수선의 발을 C라 하면 사각형 AA′B′C는 직사각형이므로

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{A'B'}} /\!/ \overline{\mathrm{AC}}$이다.

따라서 $\angle\mathrm{BAC} = \theta$이고 직각삼각형 BAC에서 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$이므로

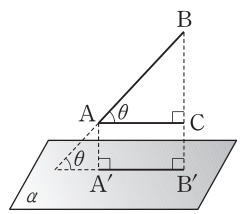
$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$$

가 성립한다.

한편, $\theta = 0^\circ$ 또는 $\theta = 90^\circ$일 때에도

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos\theta$$

가 성립한다.

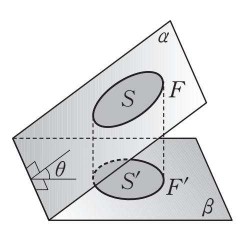


(4) 정사영의 넓이

평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 하고, 두 도형 F, F'의 넓이를 각각 S, S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$이면

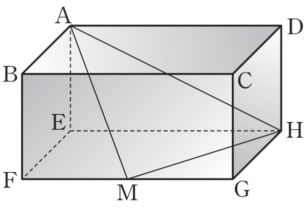
$$S' = S \cos\theta$$

참고 등식 $S' = S\cos\theta\,(0^\circ \le \theta < 90^\circ)$는 $S = \dfrac{S'}{\cos\theta}$ 또는 $\cos\theta = \dfrac{S'}{S}$으로 변형하여 사용할 수 있다.



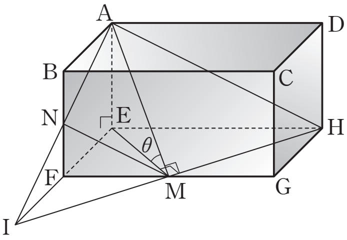
예제 4 정사영

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AE}=2$, $\overline{AD}=4$인 직육면체 ABCD−EFGH에 대하여 선분 FG의 중점을 M이라 하자. 이 직육면체와 세 점 A, M, H를 지나는 평면이 만나서 생기는 도형을 T라 하고, 도형 T의 평면 EFGH 위로의 정사영을 T'이라 하자. 두 도형 T, T'이 이루는 예각의 크기를 θ, 두 도형 T, T'의 넓이를 각각 S, S'이라 할 때, $S\times S'\times\cos\theta$의 값을 구하시오.



풀이 전략 평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 할 때, 두 도형 F, F'의 넓이가 각각 S, S'이고 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$이면 $S'=S\cos\theta$이다.

풀이 두 직선 FE, MH가 만나는 점을 I라 하고 두 직선 AI, BF가 만나는 점을 N이라 하면 직육면체 ABCD−EFGH와 세 점 A, M, H를 지나는 평면이 만나서 생기는 도형 T는 사각형 ANMH이다.



이때 사각형 ANMH의 평면 EFGH 위로의 정사영인 도형 T'은 사각형 EFMH이다.

점 M은 선분 FG의 중점이므로 $\overline{FM}=\overline{MG}=2$이고 도형 T', 즉 사각형 EFMH는 사다리꼴이므로 도형 T'의 넓이 S'은

$$S'=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times(\overline{EH}+\overline{FM})=\frac{1}{2}\times 2\times(4+2)=6$$

따라서 $S\times S'\times\cos\theta=S'\times(S\cos\theta)=S'\times S'=6\times 6=36$

답 36

참고 $\overline{EM}\perp\overline{MH}$, $\overline{AE}\perp$(평면 EFGH)이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AM}\perp\overline{MH}$이고,

$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EM}^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$$

이므로 두 도형 T, T'이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

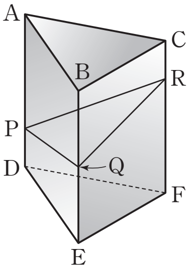
$$\cos\theta=\frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

유제

정답과 풀이 43쪽

4 [22012-0135]

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 4인 정삼각기둥 ABC−DEF가 있다. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 BE의 중점을 Q, 선분 CF를 1 : 3으로 내분하는 점을 R라 하고 두 평면 PQR, DEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

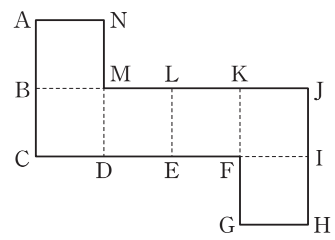


① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

Level 1 기초 연습

[22012-0136]

1 그림과 같은 전개도로 만들어지는 정육면체에 대하여 다음 중 직선 AC와 꼬인 위치에 있는 직선은?



① 직선 KL ② 직선 FI ③ 직선 FJ
④ 직선 HL ⑤ 직선 GH

[22012-0137]

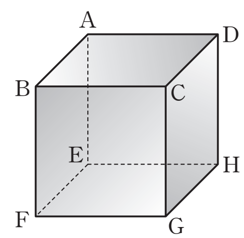
2 서로 다른 세 직선 l, m, n과 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $l \perp m$이고 $l \perp n$이면 $m \perp n$이다.
ㄴ. $l /\!/ \alpha$이고 $m /\!/ \alpha$이면 $l /\!/ m$이다.
ㄷ. $\alpha /\!/ \beta$이고 $\beta /\!/ \gamma$이면 $\alpha /\!/ \gamma$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[22012-0138]

3 그림과 같이 정육면체 ABCD$-$EFGH의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중에서 두 직선 AF, EH와 모두 수직인 서로 다른 직선의 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[22012-0139]

4 평면 α 위의 서로 다른 세 점 A, B, H와 평면 α 위에 있지 않은 점 O가 다음 조건을 만족시킨다.

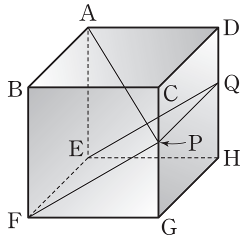
(가) $\overline{\text{OA}}=6$, $\overline{\text{OB}}=8$, $\overline{\text{OH}}=4$
(나) $\overline{\text{OH}} \perp \alpha$, $\overline{\text{OA}} \perp \overline{\text{AB}}$

점 A에서 직선 BH에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 선분 BI의 길이는?

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

[22012-0140]

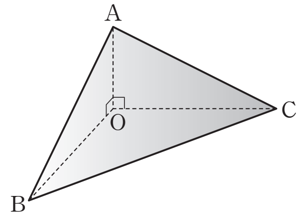
5 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여 $\overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{QH}}$인 두 점 P, Q가 각각 선분 CG, DH 위에 있다. 두 평면 EFPQ, EFGH가 이루는 예각의 크기가 30°일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 값은?



① $30-6\sqrt{3}$　② $30-5\sqrt{3}$　③ $30-4\sqrt{3}$
④ $30-3\sqrt{3}$　⑤ $30-2\sqrt{3}$

[22012-0141]

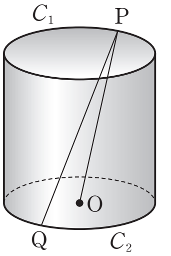
6 그림과 같이 모서리 OA가 두 모서리 OB, OC와 모두 수직이고, $\overline{\mathrm{OA}}=1$, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=2$인 사면체 OABC가 있다. 두 평면 ABC, OBC가 이루는 예각의 크기가 45°일 때, 삼각형 OBC의 넓이는?



① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

[22012-0142]

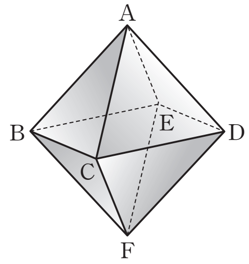
7 그림과 같이 밑면의 지름의 길이와 높이가 서로 같은 원기둥에 대하여 한 밑면을 C_1, 다른 한 밑면을 C_2, 원 C_2의 중심을 O라 하자. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=5$일 때, 선분 PQ의 원 C_2를 포함하는 평면 위로의 정사영의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{15}$
④ $2\sqrt{5}$　⑤ 5

[22012-0143]

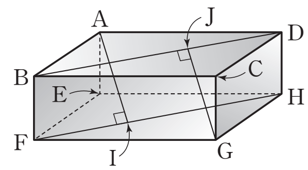
1 그림과 같은 정팔면체 ABCDEF의 모든 꼭짓점 중에서 3개 이상의 꼭짓점을 포함하는 서로 다른 평면의 개수는 a이다. 이 a개의 평면 중에서 직선 AB를 포함하는 평면의 개수를 b, 직선 AB와 한 점에서 만나는 평면의 개수를 c, 직선 AB와 평행한 평면의 개수를 d라 할 때, $ab-cd$의 값은?



① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

[22012-0144]

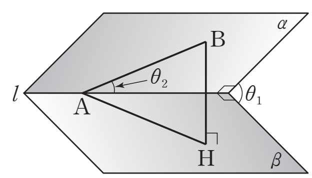
2 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=\sqrt{2}$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 점 A에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I, 점 G에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 J라 할 때, 선분 IJ의 길이는?



① $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ② $\frac{11\sqrt{11}}{20}$ ③ $\frac{3\sqrt{11}}{5}$
④ $\frac{13\sqrt{11}}{20}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{11}}{10}$

[22012-0145]

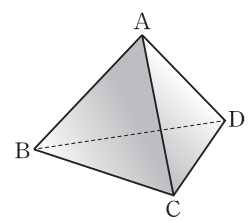
3 그림과 같이 이면각의 크기가 θ_1이고 교선이 l인 두 반평면 α, β가 있다. 교선 l 위의 한 점 A와 평면 α 위의 한 점 B에 대하여 직선 AB와 교선 l이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하고 점 B에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\theta_1+\theta_2=90^\circ$, $\overline{AB}=12$, $\overline{BH}=3\sqrt{3}$일 때, $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$의 값은?
(단, $0^\circ<\theta_1<\theta_2<90^\circ$)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

[22012-0146]

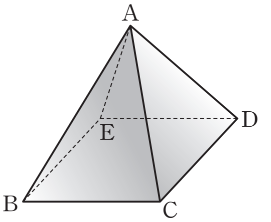
4 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 ABCD가 있다. 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos 2\theta$의 값은?



① $-\frac{8}{9}$ ② $-\frac{7}{9}$ ③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{5}{9}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$

[22012-0147]

5 그림과 같이 밑면은 정사각형이고 네 옆면은 모두 합동인 이등변삼각형인 정사각뿔 A$-$BCDE가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) 선분 BC의 길이는 유리수이고, $\overline{AC}^2-\dfrac{\overline{BC}^2}{4}=8$이다.

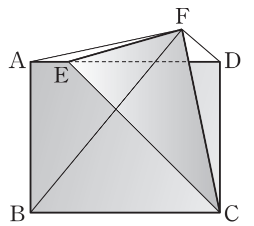
(나) 정사각뿔 A$-$BCDE의 겉넓이는 $4+8\sqrt{2}$이다.

두 평면 ACD, BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{8}$ ⑤ $\dfrac{1}{10}$

[22012-0148]

6 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}>2$인 직사각형 ABCD에 대하여 선분 AD 위에 $\overline{DE}=2$인 점 E가 있다. 선분 CE를 접는 선으로 하여 평면 ABCD와 이루는 각의 크기가 45°가 되도록 삼각형 DEC를 접어 올려 생긴 삼각형을 삼각형 FEC라 하자. 두 평면 FAB, FCD가 평면 ABCD와 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하자.

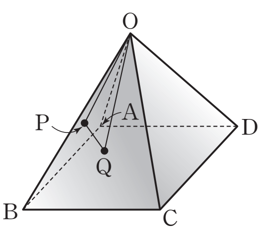


$\tan\theta_1 \tan\theta_2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$일 때, 삼각형 FAB의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이는? (단, 점 F의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 CDE의 내부에 존재한다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[22012-0149]

7 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정사각뿔 O$-$ABCD에서 두 삼각형 OAB, OBC의 무게중심을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 OPQ의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이는?

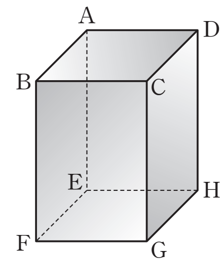


① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2

④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

[22012-0150]

1 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD를 한 밑면으로 하는 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. $\overline{\mathrm{AE}}>1$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

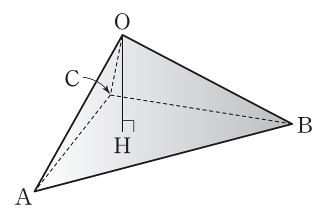


보기
ㄱ. 두 직선 AB, DG가 이루는 예각의 크기는 45°보다 크다.
ㄴ. 두 직선 AF, EG가 이루는 예각의 크기는 60°보다 크다.
ㄷ. 두 직선 AG, DF가 이루는 예각의 크기가 30°이면 $\overline{\mathrm{AF}}^2=7+4\sqrt{3}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[22012-0151]

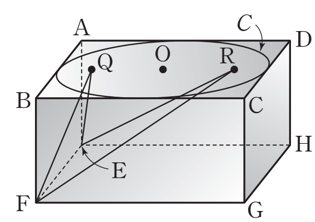
2 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OB}}=3$, $\overline{\mathrm{OC}}=1$인 사면체 OABC에 대하여 꼭짓점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 ABC의 내심이다. $\angle\mathrm{BOC}-\angle\mathrm{AOC}=10^\circ$일 때, $(\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{AC}})^2=a+b\cos 10^\circ$이다. $a+b$의 값은?
(단, a, b는 정수이고, $\cos 10^\circ$는 무리수이다.)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[22012-0152]

3 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}>2$인 직육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여 타원 C가 다음 조건을 만족시킨다.



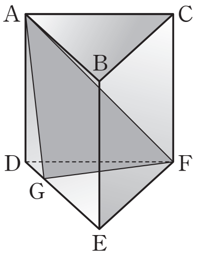
(가) 타원 C는 네 꼭짓점에서 직사각형 ABCD의 네 변에 각각 접한다.
(나) 타원 C의 중심을 O라 하면 두 평면 OEF, OGH가 서로 수직이다.

타원 C의 두 초점 중 점 A에 가까운 점을 Q, 나머지 한 초점을 R라 하고, 두 평면 QEF, REF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos^2\theta=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[22012-0153]

4 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 삼각기둥 ABC$-$DEF가 있다. 선분 DE를 $1:3$으로 내분하는 점을 G라 하고, 평면 AGF와 삼각기둥 ABC$-$DEF의 세 개의 옆면이 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2, θ_3이라 할 때, $\dfrac{\cos\theta_j}{\cos\theta_i}$의 최댓값은?

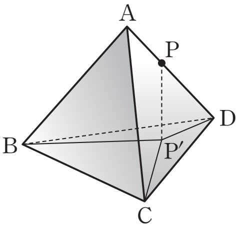
(단, i, j는 모두 1 이상 3 이하인 자연수이다.)



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

[22012-0154]

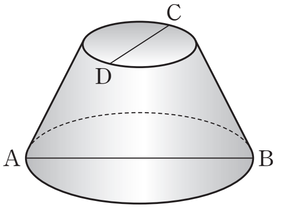
5 그림과 같이 정사면체 ABCD에서 모서리 AD를 $1:n$으로 내분하는 점을 P라 하자. 점 P의 평면 BCD 위로의 정사영을 P′이라 하고 세 삼각형 P′BC, P′CD, P′DB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1=S_2+2S_3$일 때, 양수 n의 값은?



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

[22012-0155]

6 그림과 같이 한 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원이고 다른 한 밑면은 길이가 2인 선분 CD를 지름으로 하는 원이며 높이는 2인 원뿔대가 있다. 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60°일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는?



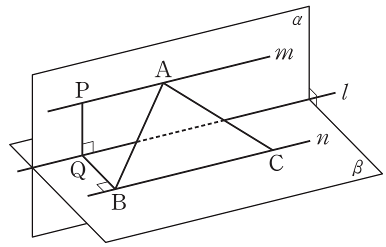
① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{2}{7}\pi$ ③ $\frac{9}{28}\pi$ ④ $\frac{5}{14}\pi$ ⑤ $\frac{11}{28}\pi$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 수직으로 만나는 두 평면의 교선에 평행한 직선이 주어진 상황에서 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이와 삼각형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

좌표공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α 위의 직선 m과 평면 β 위의 직선 n은 각각 직선 l과 평행하다. 직선 m 위의 $\overline{\mathrm{AP}}=4$인 두 점 A, P에 대하여 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 직선 n에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=3$, $\overline{\mathrm{QB}}=4$이고, 점 B가 아닌 직선 n 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]



① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

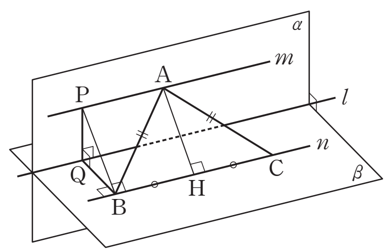
2022학년도 수능 예시문항

출제 의도 삼수선의 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 선분 PQ가 두 평면 α, β의 교선인 l에 수직이고, 두 평면 α, β가 수직으로 만나므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{QB}}$이다.

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\beta$이다.

이때 $\overline{\mathrm{QB}}\perp n$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PB}}\perp n$이다.



직각삼각형 PQB에서

$$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QB}}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

두 직선 m, n이 평행하고, 직선 m 위의 두 점 A, P에서 직선 n에 내린 수선의 발이 각각 H, B이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PB}}=5,\ \overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AP}}=4$$

이때 점 H는 선분 BC의 중점이므로

$$\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BH}}=2\times4=8$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

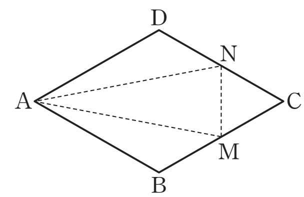
$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times8\times5=20$$

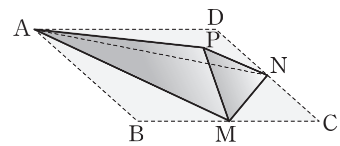
답 ②

출제 경향 도형의 길이 또는 넓이를 구하고, 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 길이 또는 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle\text{BAD}=\frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD 모양의 종이가 있다. 변 BC와 변 CD의 중점을 각각 M과 N이라 할 때, 세 선분 AM, AN, MN을 접는 선으로 하여 사면체 PAMN이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D가 합쳐지는 점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]





2020학년도 대수능

출제 의도 이면각의 뜻과 삼수선의 정리를 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

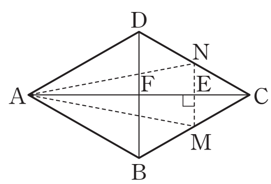
풀이 두 점 M, N은 각각 두 변 BC, CD의 중점이므로 $\overline{\text{MN}}=\frac{1}{2}\overline{\text{BD}}=\frac{1}{2}\times4=2$

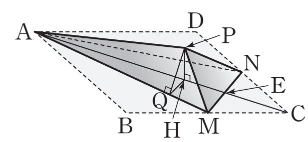
두 삼각형 ABD, BCD는 모두 정삼각형이므로 두 선분 MN, AC의 중점을 각각 E, F라 하면

$\overline{\text{AE}}=\frac{3}{2}\overline{\text{AF}}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\right)=3\sqrt{3}$

삼각형 AMN의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\text{MN}}\times\overline{\text{AE}}=3\sqrt{3}$





점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H,

점 P에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\text{HQ}}\perp\overline{\text{AM}}$이므로 평면 AMN과 평면 PAM이 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$라 하면 $\theta=\angle\text{HQP}$이다.

$\overline{\text{AM}}=\sqrt{\overline{\text{AE}}^2+\overline{\text{ME}}^2}=2\sqrt{7}$이고 $\angle\text{APM}=\angle\text{ABC}=120^\circ$이므로 삼각형 PAM의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AP}}\times\overline{\text{MP}}\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AM}}\times\overline{\text{PQ}}$, $\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\overline{\text{PQ}}$, $\overline{\text{PQ}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

한편, $\overline{\text{HE}}=k$라 하면 두 직각삼각형 AHP, EHP에서

$\overline{\text{AP}}^2-\overline{\text{AH}}^2=\overline{\text{EP}}^2-\overline{\text{EH}}^2$, 즉 $4^2-(3\sqrt{3}-k)^2=(\sqrt{3})^2-k^2$이므로 $k=\frac{7\sqrt{3}}{9}$

따라서 직각삼각형 PHE에서 $\overline{\text{PH}}=\sqrt{\overline{\text{PE}}^2-\overline{\text{HE}}^2}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$

이때 직각삼각형 PHQ에서 $\overline{\text{HQ}}=\sqrt{\overline{\text{PQ}}^2-\overline{\text{PH}}^2}=\frac{10\sqrt{21}}{63}$이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{\text{HQ}}}{\overline{\text{PQ}}}=\frac{5}{9}$

그러므로 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는 $S\times\cos\theta=3\sqrt{3}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로 $p+q=3+5=8$

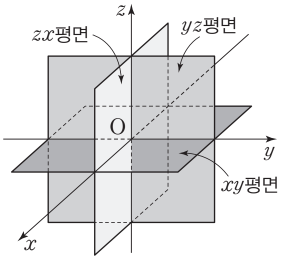
답 8

07 공간좌표

1. 공간좌표

(1) 좌표공간

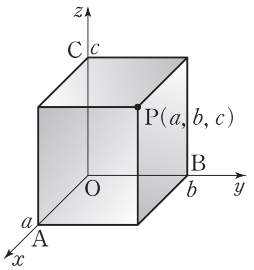
그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그어 각각 x축, y축, z축이라 하고, 점 O를 원점이라 한다. 이때 x축, y축, z축을 통틀어 좌표축이라 하고, 좌표축으로 정해진 공간을 좌표공간이라 한다. 또 x축과 y축을 포함하는 평면을 xy평면, y축과 z축을 포함하는 평면을 yz평면, z축과 x축을 포함하는 평면을 zx평면이라 하고, 이 세 평면을 통틀어 좌표평면이라 한다.



(2) 공간좌표

그림과 같이 좌표공간의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나면서 x축, y축, z축과 수직인 평면이 각각 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라 하면 점 P와 세 실수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 일대일로 대응된다.

이와 같이 좌표공간의 점 P에 대응하는 세 실수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 점 P의 공간좌표라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$와 같이 나타낸다. 이때 a, b, c를 각각 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라 한다.



(3) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$의 수선의 발의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$

② 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a,\ b,\ 0)$, $(0,\ b,\ c)$, $(a,\ 0,\ c)$

예 점 $\mathrm{P}(1,\ -2,\ 3)$에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(1,\ 0,\ 0)$, xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(1,\ -2,\ 0)$이다.

(4) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 대칭이동시킨 점의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 x축, y축, z축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$(a,\ -b,\ -c)$, $(-a,\ b,\ -c)$, $(-a,\ -b,\ c)$

② 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 xy평면, yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$(a,\ b,\ -c)$, $(-a,\ b,\ c)$, $(a,\ -b,\ c)$

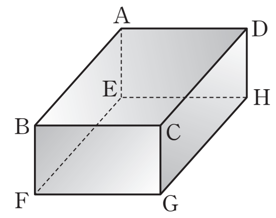
③ 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는

$(-a,\ -b,\ -c)$

예 점 $\mathrm{P}(1,\ -2,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-1,\ -2,\ -3)$, yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-1,\ -2,\ 3)$, 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-1,\ 2,\ -3)$이다.

예제 1 공간좌표

좌표공간에 있는 직육면체 ABCD－EFGH가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) 세 직선 AB, AD, AE는 각각 x축, y축, z축에 평행하다.
(나) 두 점 B, G의 x좌표의 합은 8이다.
(다) 두 점 D, G의 y좌표의 합은 6이다.

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{C}'(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a+2b+3c$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

풀이 전략 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각 $(a, b, 0)$, $(0, b, c)$, $(a, 0, c)$이다.

풀이 직선 AB가 x축에 평행하므로 평면 BFGC는 x축에 수직이다.
따라서 세 점 B, C, G의 x좌표는 서로 같고, 조건 (나)에 의하여 두 점 B, G의 x좌표는 모두 4이므로 점 C의 x좌표도 4이다.
또한 직선 AD가 y축에 평행하므로 평면 CGHD는 y축에 수직이다.
따라서 세 점 C, D, G의 y좌표는 서로 같고, 조건 (다)에 의하여 두 점 D, G의 y좌표는 모두 3이므로 점 C의 y좌표도 3이다.
점 C의 좌표를 $(4,\ 3,\ t)$라 하면 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발 C′의 좌표는 $(4,\ 3,\ 0)$이다.
따라서 $a=4$, $b=3$, $c=0$이므로 $a+2b+3c=4+2\times3+3\times0=10$

답 ③

유제

정답과 풀이 53쪽

1 [22012-0156]

좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, 점 Q를 z축에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 점 R의 좌표가 $(2,\ 4,\ -3)$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

2 [22012-0157]

좌표공간에 있는 직사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B는 xy평면에 대하여 대칭이다.
(나) 두 점 A, C는 원점에 대하여 대칭이다.
(다) 점 D의 좌표는 $(-2,\ -2,\ 3)$이다.

점 A의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, abc의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

2. 좌표공간의 두 점 사이의 거리

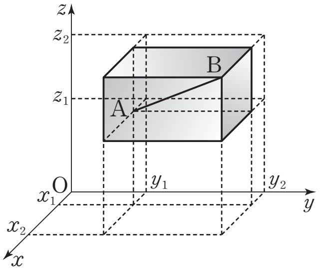
(1) 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(2) 좌표공간의 원점 O와 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$$

설명 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 직선 AB가 세 좌표평면에 평행하지 않은 경우, 그림과 같이 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하고 세 좌표평면에 평행한 6개의 평면으로 이루어진 직육면체를 생각하면 선분 AB는 직육면체의 대각선이다.



이때 직육면체의 세 모서리의 길이가

$|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$

이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

또한 직선 AB가 세 좌표평면 중 어느 한 평면에 평행한 경우에도 위의 식은 성립한다.

참고 ① 두 점 A, B가 xy평면 위에 있을 때에는 z좌표가 0이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

즉, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리에 대한 공식과 일치함을 알 수 있다.

② 두 점 A, B가 x축 위에 있을 때에는 y좌표와 z좌표가 모두 0이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

즉, 수직선 위의 두 점 사이의 거리에 대한 공식과 일치함을 알 수 있다.

예 ① 두 점 $A(1, -2, 3)$, $B(-2, 2, -2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+\{2-(-2)\}^2+(-2-3)^2}=5\sqrt{2}$$

② 원점 O와 점 $A(1, -2, 3)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$$

예제 2 좌표공간의 두 점 사이의 거리

좌표공간의 두 점 A$(4,\ -3,\ 2)$, B$(2,\ -2,\ 4)$에 대하여 직선 AB와 yz평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{\sqrt{2}}{3}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

풀이 전략

(1) 좌표공간의 두 점 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

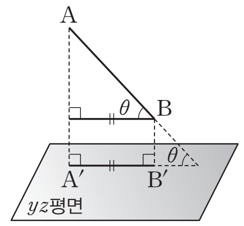
(2) 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라 하면

$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$

풀이

두 점 A$(4,\ -3,\ 2)$, B$(2,\ -2,\ 4)$에서 yz평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면

A′$(0,\ -3,\ 2)$, B′$(0,\ -2,\ 4)$



이므로 두 선분 AB, A′B′의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+\{-2-(-3)\}^2+(4-2)^2}=3$

$\overline{A'B'}=\sqrt{(0-0)^2+\{-2-(-3)\}^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}$

직선 AB와 yz평면이 이루는 각의 크기가 θ이므로 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$

답 ④

유제

정답과 풀이 53쪽

3 [22012-0158]

좌표공간의 두 점 A$(1,\ 3,\ 5)$, B$(-4,\ -2,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 1　② $\frac{6}{5}$　③ $\frac{7}{5}$　④ $\frac{8}{5}$　⑤ $\frac{9}{5}$

4 [22012-0159]

좌표공간의 세 점 A$(1,\ 2,\ -1)$, B$(-1,\ 1,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

3. 선분의 내분점과 외분점

(1) 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

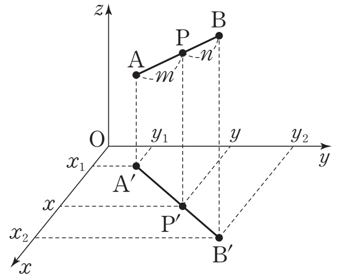
$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

② 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

③ 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

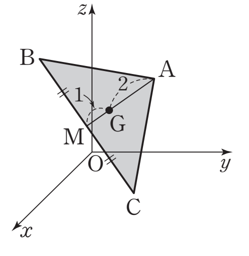


설명 좌표공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 $P(x, y, z)$라 하자.
세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라 하면
$A'(x_1, y_1, 0)$, $B'(x_2, y_2, 0)$, $P'(x, y, 0)$이고
$\overline{A'P'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \overline{PB} = m : n$이다.
따라서 선분 A′B′의 내분점의 좌표를 xy평면 위에서 생각하면
$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$이다. 마찬가지로 세 점 A, B, P의 yz평면(또는 zx평면) 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 z좌표를 구하면
$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$이므로 점 P의 좌표는 $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$이다.
또 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표도 같은 방법으로 구할 수 있다.

(2) 좌표공간에서 삼각형의 무게중심

좌표공간의 삼각형 ABC에 대하여 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$일 때, 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$



설명 변 BC의 중점을 $M(x_4, y_4, z_4)$라 하면

$$x_4=\frac{x_2+x_3}{2},\ y_4=\frac{y_2+y_3}{2},\ z_4=\frac{z_2+z_3}{2}$$

무게중심 G의 좌표를 (x, y, z)라 하면 점 G는 선분 AM을 $2 : 1$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2x_4+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{2y_4+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

$$z=\frac{2z_4+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

즉, $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$이다.

예제 3 공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 A$(a,\ 3,\ -6)$, B$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -2,\ b\right)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 P, $4:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 P는 yz평면 위에 있고, 점 Q는 xy평면 위에 있을 때, 선분 PQ의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 좌표공간의 두 점 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$이다.

풀이 점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}+3\times a}{2+3},\ \frac{2\times(-2)+3\times3}{2+3},\ \frac{2\times b+3\times(-6)}{2+3}\right),\ \text{즉 } \mathrm{P}\left(\frac{3(a+\sqrt{3})}{5},\ 1,\ \frac{2b-18}{5}\right)$$

이때 점 P가 yz평면 위에 있으므로 점 P의 x좌표는 0이다.

$\frac{3(a+\sqrt{3})}{5}=0$에서 $a=-\sqrt{3}$

점 Q는 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{Q}\left(\frac{4\times\frac{3\sqrt{3}}{2}+1\times(-\sqrt{3})}{4+1},\ \frac{4\times(-2)+1\times3}{4+1},\ \frac{4\times b+1\times(-6)}{4+1}\right),\ \text{즉 } \mathrm{Q}\left(\sqrt{3},\ -1,\ \frac{4b-6}{5}\right)$$

이때 점 Q가 xy평면 위에 있으므로 점 Q의 z좌표는 0이다.

$\frac{4b-6}{5}=0$에서 $b=\frac{3}{2}$

따라서 P$(0,\ 1,\ -3)$, Q$(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$이므로 선분 PQ의 길이는

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(-1-1)^2+\{0-(-3)\}^2}=4$$

답 ④

유제

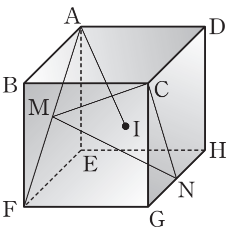
정답과 풀이 53쪽

5 [22012-0160]

좌표공간의 두 점 A, B$(1,\ 1,\ 2)$에 대하여 선분 AB의 중점이 M$(3,\ -1,\ 0)$이고, 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $|a|+|b|+|c|$의 값을 구하시오.

6 [22012-0161]

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에서 두 선분 AF, GH의 중점을 각각 M, N이라 하고 삼각형 CMN의 무게중심을 I라 할 때, 선분 AI의 길이는?



① $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{41}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{42}}{3}$

④ $\frac{\sqrt{43}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{11}}{3}$

4. 구의 방정식

(1) 구

공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 구라 한다. 이때 정점을 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라 한다.

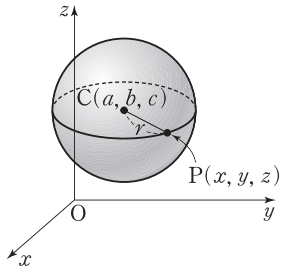
(2) 구의 방정식

좌표공간에서 중심이 점 $C(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$



예 ① 중심이 점 $(1,\ -2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은

$$(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-3)^2=4^2$$

즉, $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=25$

(3) 방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이 나타내는 도형

방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$을 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

이므로 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 이 방정식은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

예 방정식 $x^2+y^2+z^2-2x-6y+6z+10=0$은

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=3^2$$

이므로 이 방정식은 중심이 점 $(1,\ 3,\ -3)$이고 반지름의 길이가 3인 구를 나타낸다.

또한 중심의 y좌표가 3, z좌표가 -3이므로 이 구는 zx평면과 xy평면에 접한다.

참고 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이 좌표평면 또는 좌표축에 접할 조건은 다음과 같다.

① xy평면에 접하는 경우: $r=|c|$

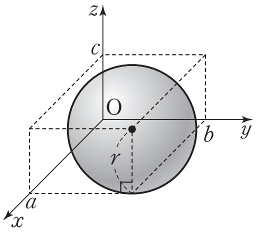
② yz평면에 접하는 경우: $r=|a|$

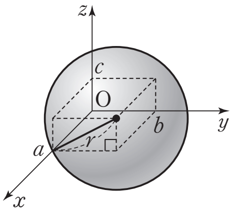
③ zx평면에 접하는 경우: $r=|b|$

④ x축에 접하는 경우: $r=\sqrt{b^2+c^2}$

⑤ y축에 접하는 경우: $r=\sqrt{a^2+c^2}$

⑥ z축에 접하는 경우: $r=\sqrt{a^2+b^2}$





예제 4 구의 방정식

좌표공간의 두 구

S_1: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-5=0$, S_2: $(x-a)^2+y^2+(z-2)^2=2$

의 중심 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$일 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

풀이 전략

(1) 중심이 점 $\mathrm{C}(a, b, c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이다.

(2) 방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2-4D>0)$이 나타내는 도형은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구이다.

풀이

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-5=0$에서 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(2\sqrt{2})^2$

이므로 구 S_1은 중심이 점 $(1, 1, 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 구이다.

구 S_2: $(x-a)^2+y^2+(z-2)^2=(\sqrt{2})^2$은 중심이 점 $(a, 0, 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 구이다.

두 구 S_1, S_2의 중심 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{(a-1)^2+(0-1)^2+(2-1)^2}=3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{a^2-2a+3}=3\sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-2a-15=0, \ (a-5)(a+3)=0$$

$$a=5 \text{ 또는 } a=-3$$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $5+(-3)=2$

답 2

유제

정답과 풀이 54쪽

7 [22012-0162]

좌표공간에서 원점 O를 지나는 직선이 구 $x^2+y^2+z^2-8x-2y+2z+14=0$과 한 점 P에서만 만날 때, 선분 OP의 길이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{14}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

8 [22012-0163]

좌표공간에서 중심이 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$ $(a>0, b>0, c>0)$이고 반지름의 길이가 r인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 x축과 y축에 모두 접한다.
(나) 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이는 8π이다.

$\overline{\mathrm{OP}}=3\sqrt{2}$일 때, r^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

Level 1 기초 연습

[22012-0164]

1 좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -3,\ a)$, $\mathrm{B}(7,\ 1,\ b)$, $\mathrm{C}(c,\ d,\ -5)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 점 A, B에서 z축에 내린 수선의 발은 일치한다.
> (나) 두 점 A, C는 원점에 대하여 대칭이다.

$ab+cd$의 값은?

① 20　② 21　③ 22　④ 23　⑤ 24

[22012-0165]

2 좌표공간의 점 P를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 A, y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 B라 하자. $\mathrm{A}(a-b,\ a+b,\ -2)$, $\mathrm{B}(2b-a,\ 5,\ c)$일 때, abc의 값은?

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

[22012-0166]

3 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ t,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ -4,\ t)$에 대하여 선분 AB의 길이를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 최솟값은?

① $4\sqrt{2}$　② $\sqrt{34}$　③ 6　④ $\sqrt{38}$　⑤ $2\sqrt{10}$

[22012-0167]

4 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ 5,\ 6)$과 xy평면 위의 점 P, zx평면 위의 점 Q에 대하여 두 선분 AP, BQ의 길이의 합이 최소일 때 두 점 P, Q의 위치를 각각 P′, Q′이라 하자. 선분 P′Q′의 길이는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

[22012-0168]

5 좌표공간의 세 점 A$(3,\ 1,\ 2)$, B$(-1,\ 5,\ 0)$, C$(7,\ 6,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 선분 OG의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\sqrt{15}$　② $2\sqrt{5}$　③ 5　④ $\sqrt{30}$　⑤ $\sqrt{35}$

[22012-0169]

6 좌표공간의 두 점 A$(-1,\ 5,\ 3\sqrt{2})$, B$(a,\ -1,\ \sqrt{2})$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $2:1$로 외분하는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=16$일 때, 양수 a의 값은?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

[22012-0170]

7 좌표공간의 두 점 A$(0,\ -3,\ -4)$, B$(2,\ 1,\ 0)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 구 S가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

[22012-0171]

8 좌표공간의 두 점 A$(2,\ 4,\ -3)$, B$(5,\ -2,\ 3)$에 대하여 구 S: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 구 S의 중심은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이다.
> (나) 구 S는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 지난다.

$a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

① -130　② -132　③ -134　④ -136　⑤ -138

[22012-0172]

1 좌표공간의 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ -3,\ 1)$, B, $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 포함한 8개의 점을 꼭짓점으로 하는 정육면체 C와 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

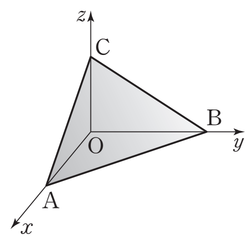
> (가) 정육면체 C의 모든 모서리를 연장한 직선은 x축 또는 y축 또는 z축과 평행하다.
> (나) 두 점 A, B는 yz평면에 대하여 대칭이다.

$b>0$, $c<0$, $a+b+c<0$일 때, abc의 값은?

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

[22012-0173]

2 좌표공간의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$에 대하여 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 OH의 길이는?

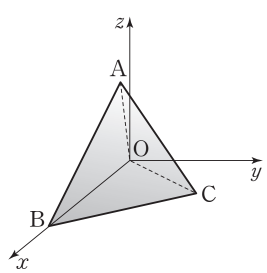


① $\frac{2\sqrt{6}}{5}$　② $\frac{2\sqrt{7}}{5}$　③ $\frac{4\sqrt{2}}{5}$　④ $\frac{6}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

[22012-0174]

3 그림과 같이 좌표공간의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$, $\mathrm{B}(d,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(e,\ f,\ 0)$을 꼭짓점으로 하고 모든 모서리의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 직선 AC와 zx평면이 만나는 점을 P라 할 때, 점 P의 z좌표는?

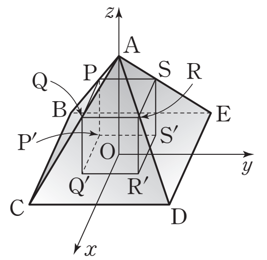
(단, a, b, c, d, e, f는 모두 양수이다.)



① $4\sqrt{3}$　② $3\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{15}$　④ $\sqrt{66}$　⑤ $6\sqrt{2}$

[22012-0175]

4 그림과 같이 좌표공간에서 z축 위의 점 A와 xy평면 위의 네 점 B, C, D, E를 꼭짓점으로 하는 정사각뿔 A$-$BCDE가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) 모든 모서리의 길이는 3이다.
(나) 네 직선 BC, CD, DE, EB는 각각 x축 또는 y축과 평행하다.

선분 AB 위의 점 P, 선분 AC 위의 점 Q, 선분 AD 위의 점 R(p, q, r), 선분 AE 위의 점 S에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′, S′이라 하면 도형 PQRS$-$P′Q′R′S′은 직육면체이다. 정사각뿔 A$-$BCDE의 부피를 V라 하면 직육면체 PQRS$-$P′Q′R′S′의 부피가 $\frac{1}{3}V$일 때, $8\sqrt{2}pqr$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 z좌표, 점 D의 x좌표와 y좌표는 모두 양수이다.)

[22012-0176]

5 좌표공간의 두 점 A$(1, 2, 1)$, B$(-1, 3, 3)$과 xy평면 위의 점 P, zx평면 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}}+\overline{\text{BA}}$의 최솟값은?

① $3(\sqrt{5}-1)$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3(\sqrt{5}+1)$ ④ $3(\sqrt{5}+2)$ ⑤ $3(\sqrt{5}+3)$

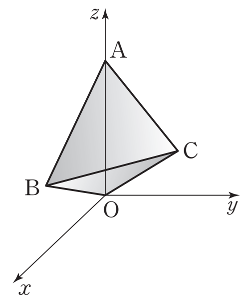
[22012-0177]

6 좌표공간의 점 A$(0, 0, 8)$과 y축 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 직선 AP, AQ가 구 S: $x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$와 모두 접할 때, 선분 PQ의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

Level 3 실력 완성

[22012-0178]

1 그림과 같이 좌표공간의 원점 O와 세 점 $\mathrm{A}(0, 0, 4)$, $\mathrm{B}(a, 0, b)$, $\mathrm{C}(c, d, e)$에 대하여 사면체 OABC가 정사면체일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c, d, e는 모두 양수이다.)

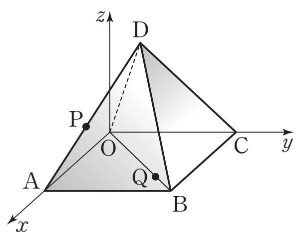


보기
ㄱ. $b=2$
ㄴ. $cd=\frac{8\sqrt{2}}{3}$
ㄷ. 네 점 O, A, B, C를 지나는 구의 중심의 좌표를 (p, q, r)라 하면 $pqr=\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[22012-0179]

2 그림과 같이 좌표공간의 네 점 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$, $\mathrm{A}(2, 0, 0)$, $\mathrm{B}(2, 2, 0)$, $\mathrm{C}(0, 2, 0)$과 z좌표가 양수인 점 D를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{6}$인 정사각뿔 D$-$OABC가 있다. 선분 DA 위의 점 P와 선분 OB 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 $\mathrm{P}_1(a, b, c)$, $\mathrm{Q}_1(d, e, 0)$이라 할 때, $\frac{a+b+c}{d+e}$의 값은?



① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

[22012-0180]

3 좌표공간의 원점 O, 점 $\mathrm{A}(1, -1, \sqrt{6})$, xy평면 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$
(나) 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{2}$이다.

삼각형 AOB에서 $\angle$AOB를 4등분하는 세 직선이 선분 AB와 만나는 점 중에서 점 B에 가장 가까운 점을 $\mathrm{C}(a, b, c)$라 할 때, $(3abc)^2$의 값을 구하시오.

[22012-0181]

4 좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(4, 0, 0)$, $\mathrm{B}(2, 2, 2)$, $\mathrm{C}(-3, 1, 1)$에 대하여 평면 α가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 평면 α와 평면 ABC의 교선은 xy평면 위에 있다.
(나) 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 15°이다.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① $9\sqrt{3}$ ② $12\sqrt{3}$ ③ $15\sqrt{3}$ ④ $18\sqrt{3}$ ⑤ $21\sqrt{3}$

[22012-0182]

5 좌표공간에서 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 x축에 수직이고 점 $(1, 2, 3)$을 지나는 평면에 의하여 이등분된다.
(나) 구 S는 z축에 수직이고 점 $(3, 4, 5)$를 지나는 평면에 의하여 이등분된다.
(다) 구 S는 xy평면에 접한다.

구 S와 x축을 포함하는 평면 α가 만나서 생기는 원을 C라 하고, 원 C 위의 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 PH의 길이의 최댓값은 10이고 최솟값은 $\frac{32}{5}$일 때, 원 C의 중심의 x좌표와 y좌표의 합은? (단, 구 S의 중심의 y좌표는 양수이다.)

① $\frac{176}{15}$ ② $\frac{59}{5}$ ③ $\frac{178}{15}$ ④ $\frac{179}{15}$ ⑤ 12

[22012-0183]

6 좌표공간에서 중심이 점 $\mathrm{C}(a, a, b)$인 구 S와 구 S의 외부에 있는 점 $\mathrm{A}(6, 6, 6\sqrt{2})$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 xy평면에 접한다.
(나) 구 S는 z축에 접한다.
(다) 구 S와 선분 OA가 만나는 두 점을 각각 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=8$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{AQ}}$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$이고, O는 원점이다.)

① $32(\sqrt{2}-1)$ ② $16(2\sqrt{2}-1)$ ③ $32\sqrt{2}$ ④ $16(2\sqrt{2}+1)$ ⑤ $32(\sqrt{2}+1)$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 좌표공간에서 점 또는 직선의 xy평면 위로의 정사영과 이차곡선의 위치 관계를 묻는 문제가 출제된다.

좌표공간에 점 $A(9,\ 0,\ 5)$가 있고, xy평면 위에 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$이 있다. 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}$의 최댓값을 구하시오. [3점]

2012학년도 대수능

출제 의도 좌표공간의 한 점에서 xy평면에 내린 수선의 발을 구하고, 직선과 평면의 수직 관계를 이용하여 좌표공간의 점과 xy평면 위에 있는 타원 위의 점 사이의 거리의 최댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 $A(9,\ 0,\ 5)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면
$H(9,\ 0,\ 0)$이므로

$$\overline{AH}=\sqrt{(9-9)^2+(0-0)^2+(0-5)^2}=5$$

한편, xy평면 위에 있는 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 위의 점 P는 xy평면 위에 있으므로

$$\angle AHP=90^\circ$$

따라서 직각삼각형 AHP에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HP}^2}=\sqrt{5^2+\overline{HP}^2} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

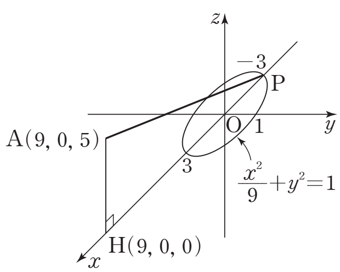
이때 그림에서 $\overline{HP}$는 점 P가 $(-3,\ 0,\ 0)$일 때 최댓값

$$\sqrt{(-3-9)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}=12$$

를 갖는다.

따라서 ㉠에서 $\overline{AP}$의 최댓값은

$$\sqrt{5^2+12^2}=13$$



답 13

대표 기출 문제

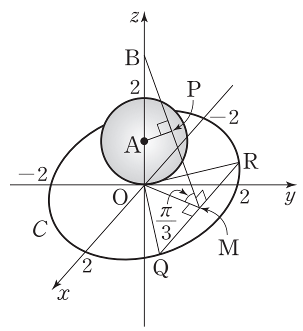
출제 경향 좌표공간에서 한 점과 구 위의 점 사이의 거리에 대한 문제, 구와 평면이 접할 조건, 구와 평면이 만나서 생기는 원에 대한 문제, 구의 평면 위로의 정사영에 대한 문제가 출제된다.

좌표공간에 구 S: $x^2+y^2+(z-1)^2=1$과 xy평면 위의 원 C: $x^2+y^2=4$가 있다. 구 S와 점 P에서 접하고 원 C 위의 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 xy평면과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 점 P의 z좌표가 1보다 클 때, 선분 QR의 길이는? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

2018학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 좌표공간에서 구와 평면이 접할 조건을 이해하고, 삼수선의 정리를 이용하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 구한 다음, 원의 현의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.



풀이 구 S의 중심 $(0,\ 0,\ 1)$을 A라 하고, 구 S와 점 P에서 접하고 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 z축과 만나는 점을 B라 하자.

이등변삼각형 OQR에서 선분 QR의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{BO}}\perp(xy$평면$)$, $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$$

이때 xy평면과 평면 BQR의 교선은 직선 QR이고

$\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$, $\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이므로 xy평면과 평면 BQR가 이루는 예각의 크기는

$$\angle\mathrm{OMB}=\frac{\pi}{3}$$

직각삼각형 BAP에서 $\angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{6}$이고 선분 AP의 길이는 구 S의 반지름의 길이인 1이므로

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$, 즉 $\frac{1}{2}=\frac{1}{\overline{\mathrm{AB}}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로

$$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=1+2=3$$

따라서 직각삼각형 BOM에서

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OM}}}$, 즉 $\sqrt{3}=\frac{3}{\overline{\mathrm{OM}}}$이므로

$$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{3}$$

따라서 이등변삼각형 OQR에서

$$\overline{\mathrm{QR}}=2\overline{\mathrm{QM}}=2\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=2\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=2$$

답 ④

고1~2 내신 중점 로드맵

과목	고교 입문		기초	기본	특화	+ 단기
국어	고등 예비 과정	내 등급은?	윤혜정의 나비효과 입문편 /나비효과 입문편 워크북 어휘가 독해다!	기본서 올림포스	국어 특화: 국어 독해의 원리 / 국어 문법의 원리	단기 특강
영어			정승익의 수능 개념 잡는 대박구문	기본서 올림포스 전국연합 학력평가 기출문제집	영어 특화: Grammar POWER / Reading POWER / Listening POWER / Voca POWER	
수학			기초 50일 수학 / 초급 올림포스 닥터링 매쓰 디렉터의 고1 수학 개념 끝장내기	수학 특화 수학의 왕도	고급 올림포스 고난도	
한국사 사회		인공지능: 수학과 함께하는 고교 AI 입문 / 수학과 함께하는 AI 기초		기본서 개념완성 / 개념완성 문항편	고등학생을 위한 多담은 한국사 연표	
과학						

과목	시리즈명	특징	수준	권장 대상
전과목	고등예비과정	예비 고등학생을 위한 과목별 단기 완성		예비 고1
국/영/수	내 등급은?	고1 첫 학력평가 + 반 배치고사 대비 모의고사		예비 고1
	올림포스	내신과 수능 대비 EBS 대표 국어 · 수학 · 영어 기본서		고1~2
	올림포스 전국연합학력평가 기출문제집	전국연합학력평가 문제 + 개념 기본서		고1~2
	단기 특강	단기간에 끝내는 유형별 문항 연습		고1~2
한/사/과	개념완성 & 개념완성 문항편	개념 한 권 + 문항 한 권으로 끝내는 한국사 · 탐구 기본서		고1~2
국어	윤혜정의 나비효과 입문편/워크북	윤혜정 선생님과 함께 개념과 패턴으로 국어 입문		예비 고1~고2
	어휘가 독해다!	7개년 학평 · 모평 · 수능 출제 필수 어휘 학습		예비 고1~고2
	국어 독해의 원리	내신과 수능 대비 문학 · 독서(비문학) 특화서		고1~2
	국어 문법의 원리	필수 개념과 필수 문항의 언어(문법) 특화서		고1~2
영어	정승익의 수능 개념 잡는 대박구문	정승익 선생님과 CODE로 이해하는 영어 구문		예비 고1~고2
	Grammar POWER	구문 분석 트리로 이해하는 영어 문법 특화서		고1~2
	Reading POWER	수준과 학습 목적에 따라 선택하는 영어 독해 특화서		고1~2
	Listening POWER	수준별 수능형 영어듣기 모의고사		고1~2
	Voca POWER	영어 교육과정 필수 어휘와 어원별 어휘 학습		고1~2
수학	50일 수학	50일 만에 완성하는 중학~고교 수학의 맥		예비 고1~고2
	매쓰 디렉터의 고1 수학 개념 끝장내기	스타강사 강의, 손글씨 풀이와 함께 고1 수학 개념 정복		예비 고1~고1
	올림포스 닥터링	친절한 개념 설명을 통해 쉽게 연습하는 수학 유형		고1~2
	올림포스 고난도	1등급을 위한 고난도 유형 집중 연습		고1~2
	수학의 왕도	직관적 개념 설명과 세분화된 문항 수록 수학 특화서		고1~2
한국사	고등학생을 위한 多담은 한국사 연표	연표로 흐름을 잡는 한국사 학습		예비 고1~고2
기타	수학과 함께하는 고교 AI 입문/AI 기초	파이선 프로그래밍, AI 알고리즘에 필요한 수학 개념 학습		예비 고1~고2

고2~N수 수능 집중 로드맵

과목: 국어, 영어, 수학, 한국사 사회, 과학

수능 입문
- 수능 감(感)잡기 (국어, 영어)
- 수능특강 Light (수학)
- 강의노트 수능개념 (전과목)

기출 / 연습
- 수능 기출의 미래
- 수능특강Q 미니모의고사

연계+연계 보완
- 수능연계교재의 국어 어휘
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA
- 연계: 수능특강, 수능완성
- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능완성 사용설명서

고난도
- 수능연계완성 3/4주 특강 (고난도 · 신유형)
- 수능의 7대 함정
- 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴

모의고사
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION
- 고난도 시크릿X 봉투모의고사

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 소재 · 유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집		전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사		전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문 · 자료 · 문항 분석		전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품 · 지문과 연결된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석		국/수/영/사/과
	박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회 · 문화 표 분석 문항의 패턴 연습		사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION	신규 문항 2회분으로 국어 · 수학 · 영어 논스톱 모의고사		국/수/영
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사		국/수/영

MEMO