수능특강 수학영역 **미적분**

정답과 풀이

한눈에 보는 정답

01 수열의 극한

유제 본문 5~9쪽

1 ④ 2 ③ 3 ④ 4 ② 5 ①
6 ④

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ③ 4 ② 5 ③
6 ② 7 ③ 8 ④

Level 2 기본 연습 본문 12~13쪽

1 ② 2 ② 3 ① 4 ⑤ 5 ④
6 ① 7 ④ 8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ③ 2 ③ 3 17

02 급수

유제 본문 17~21쪽

1 ① 2 ③ 3 ③ 4 16 5 ④
6 ①

Level 1 기초 연습 본문 22쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ②

Level 2 기본 연습 본문 23~24쪽

1 ④ 2 ④ 3 ④ 4 ① 5 ③
6 ⑤ 7 ①

Level 3 실력 완성 본문 25~26쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ② 4 ①

03 여러 가지 함수의 미분

유제 본문 29~37쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ③ 4 ⑤ 5 ④
6 ④ 7 4 8 ② 9 ⑤ 10 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 ③ 2 ① 3 20 4 ③ 5 ②
6 ④ 7 ② 8 ① 9 ② 10 ②

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ④ 2 24 3 ③ 4 ③ 5 3
6 ① 7 ③ 8 ④

Level 3 실력 완성 본문 42쪽

1 ④ 2 11 3 ②

04 여러 가지 미분법

유제 본문 45~53쪽

1 ③ 2 ② 3 ③ 4 ③ 5 15
6 ④ 7 ③ 8 ② 9 ⑤ 10 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 54~55쪽

1 ③ 2 ③ 3 ⑤ 4 ③ 5 ②
6 ⑤ 7 ① 8 ① 9 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 56~57쪽

1 ② 2 ③ 3 ① 4 ⑤ 5 ①
6 ③ 7 ② 8 ③

Level 3 실력 완성

본문 58쪽

1 ⑤ 2 12 3 ⑤

05 도함수의 활용

유제

본문 61~69쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ⑤ 4 8 5 10
6 ③ 7 7 8 ⑤ 9 ④

Level 1 기초 연습

본문 70~71쪽

1 ② 2 ② 3 ① 4 ⑤ 5 ②
6 ② 7 ② 8 ④ 9 ④

Level 2 기본 연습

본문 72~73쪽

1 ② 2 ② 3 ④ 4 ④ 5 ③
6 ③ 7 ② 8 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 74쪽

1 ④ 2 41 3 ②

06 여러 가지 적분법

유제

본문 77~81쪽

1 ① 2 ③ 3 ③ 4 ② 5 ①
6 14

Level 1 기초 연습

본문 82~83쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ② 5 ④
6 ① 7 ③ 8 ④

Level 2 기본 연습

본문 84~85쪽

1 ② 2 ④ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 ① 7 ③

Level 3 실력 완성

본문 86쪽

1 ① 2 24 3 ③

07 정적분의 활용

유제

본문 89~97쪽

1 ④ 2 ② 3 ② 4 ③ 5 ④
6 ③ 7 4 8 ① 9 14

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ③ 2 ① 3 4 4 ② 5 ①
6 ① 7 ③ 8 ⑤ 9 12

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ① 5 ③
6 ④ 7 19 8 ④

Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 ② 2 ① 3 ④

01 수열의 극한

유제 본문 5~9쪽

1 ④ 2 ③ 3 ④ 4 ② 5 ① 6 ④

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2a_n+1}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{3}=\frac{1}{2}$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{2a_n+1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n(4a_n+k)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(4a_n+k)=\frac{1}{4}\left(4\times\frac{1}{4}+k\right)=\frac{1}{4}(1+k)$$

따라서 $\frac{1}{4}(1+k)=1$에서

$k=3$

답 ④

2 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n+b_n}=-1$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)=1-(-1)=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_n+b_n}-\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)=2-(-1)=3$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n+b_n}{a_n-b_n}\times(a_n-b_n)\right\}=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

답 ③

참고

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}=2$, $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\frac{3}{4}$에서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{a_n+b_n}\times(a_n+b_n)\right\}=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{an}{bn+3}=\frac{1}{2}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{an}{bn+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{b+\frac{3}{n}}=\frac{a}{b+0}=\frac{a}{b}$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$에서 $b=2a$ …… ㉠

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n^2+3n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{a+b+0}{1+0}=a+b$$

이므로 $a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{4}{3}$

따라서

$ab=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$

답 ④

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$=\frac{1+1}{2(1+1)}=\frac{1}{2}$$

답 ②

5 $\lim_{n\to\infty}\frac{a\times3^{n+1}+4^{-n}}{3^{n-1}+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a\times3^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{1}{3}\times3^n+(-2)^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3a+\left(\frac{1}{12}\right)^n}{\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{3a+0}{\frac{1}{3}+0}=9a$$

따라서 $9a=\frac{3}{4}$에서

$a=\frac{1}{12}$

답 ①

6 $a_n=\overline{\mathrm{OA}_n}$

$$=\sqrt{(2^n)^2+(3^{n-1})^2}$$

$$=\sqrt{4^n+9^{n-1}}$$

$b_n=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$

$$=\sqrt{(2^{n+1}-2^n)^2+(3^n-3^{n-1})^2}$$

$$=\sqrt{4^n+4\times 9^{n-1}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+4\times 9^{n-1}}{4^n+9^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+4}{4\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+1}$$

$$=\frac{0+4}{0+1}=4$$

답 ④

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ②	2 ⑤	3 ③	4 ②	5 ③
6 ②	7 ③	8 ④		

1 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-2)=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\{(3a_n-2)+2\}$$

$$=\frac{1}{3}(4+2)=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_n(a_n+2)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n+2)$$

$$=2\times(2+2)=8$$

답 ②

2 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=4$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$

$$=4\times4-2\times(-2)=20$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}+\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^2+(b_n)^2}{a_nb_n}=\frac{20}{-2}=-10$$

답 ⑤

3 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+\sqrt{4n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\sqrt{4+\frac{2}{n}}}$$

$$=\frac{2-0}{3+2}=\frac{2}{5}$$

답 ③

4 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+1}}{(n^2+4n)-(n^2+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+1}}{4n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{4-\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1+1}{4-0}=\frac{1}{2}$$

답 ②

5 $$\lim_{n\to\infty}\frac{an}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{2+\frac{5}{n}}$$

$$=\frac{a}{2+0}=\frac{a}{2}$$

이므로 $\frac{a}{2}=\frac{3}{8}$에서 $a=\frac{3}{4}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b\times 3^{n+1}}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3b}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{3b}{1+0}=3b$$

이므로 $3b=\frac{3}{4}$에서 $b=\frac{1}{4}$

따라서

$a+b=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

답 ③

6 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1>0$이므로 부등식

$n+2<a_n<n+3$

의 각 변을 $2n-1$로 나누면

$$\frac{n+2}{2n-1}<\frac{a_n}{2n-1}<\frac{n+3}{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

그러므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

$\frac{a_n}{2n-1}=b_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$이고,

$\frac{a_{n+1}}{2n+1}=b_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\frac{1}{2}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}b_nb_{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 ②

7
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{4\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{9}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n}{4\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{9}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\times 6^n}{4\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\times 6^n+3\times\left(\frac{1}{9}\right)^n\times 6^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}}{4+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{4+0}=\frac{1}{6}$$

답 ③

8 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하려면 $-1<r\le1$이어야 하므로

수열 $\left\{\left(\frac{x^2+x+2}{8}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$$-1<\frac{x^2+x+2}{8}\le1$$

이어야 한다. 이때

$$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

이므로 $\frac{x^2+x+2}{8}\le1$이면 수열 $\left\{\left(\frac{x^2+x+2}{8}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

$x^2+x+2\le8$에서

$x^2+x-6\le0$, $(x+3)(x-2)\le0$

$-3\le x\le2$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{x^2+x+2}{8}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2이고, 그 개수는 6이다.

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 12~13쪽

1 ②	2 ②	3 ①	4 ⑤	5 ④
6 ①	7 ④	8 ⑤		

1
$$a_n=n^{p-10}\left(n^2+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$=n^{p-10}\left(n^4+2n+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n^{10-p}}\times\frac{n^6+2n^3+1}{n^2}$$

$$=\frac{n^6+2n^3+1}{n^{12-p}}$$

이므로

$12-p<6$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

$12-p=6$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

$12-p>6$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면 $12-p\ge6$, 즉 $p\le6$이므로 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 자연수 p의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 합은 21이다.

답 ②

2 $\frac{3-a_n}{a_n+2}=b_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{2}{3}$이고,

$3-a_n=b_n(a_n+2)$에서

$(b_n+1)a_n=3-2b_n$ …… ㉠

이때 $b_n=-1$이면

$0\times a_n=3+2$, 즉 $0=5$가 되어 모순이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $b_n\ne-1$이고 ㉠에서

$$a_n=\frac{3-2b_n}{b_n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2b_n}{b_n+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(3-2b_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n+1)}$$

$$=\frac{3-2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1}=1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2)(3-a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n+2)\times\lim_{n\to\infty}(3-a_n)$$

$$=(1+2)\times(3-1)$$

$$=6$$

답 ②

3 $\lim_{n\to\infty}nb_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)b_n\times\frac{n}{2n+1}\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n+1)b_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$=8\times\frac{1}{2}=4$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\{n(a_n+b_n)-nb_n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}nb_n$$

$$=3-4=-1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(4n-1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left(na_n\times\frac{4n-1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}na_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n}$$

$$=-1\times4=-4$$

답 ①

4 $x_n=\frac{3\times3a_{n+1}-1\times2a_n}{3-1}=\frac{9}{2}a_{n+1}-a_n$

이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 상수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}a_{n+1}-a_n\right)$$

$$=\frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}a_{n+1}-\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\frac{9}{2}\alpha-\alpha=\frac{7}{2}\alpha$$

따라서 $\frac{7}{2}\alpha=\frac{7}{8}$에서 $\alpha=\frac{1}{4}$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$

답 ⑤

5 $\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{4n^2+an}-3n$

$=\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)+\left(\sqrt{4n^2+an}-2n\right)$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+an}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{4n^2+an}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{4+\frac{a}{n}}+2}$$

$$=\frac{a}{2+2}=\frac{a}{4}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{4n^2+an}-3n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)+\left(\sqrt{4n^2+an}-2n\right)\right\}$$

$$=1+\frac{a}{4}$$

$1+\frac{a}{4}=\frac{7}{6}$에서 $\frac{a}{4}=\frac{1}{6}$

따라서 $a=\frac{2}{3}$

답 ④

6 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d\neq0)$이라 하면

$a_{n+1}=1+nd$, $a_{2n+1}=1+2nd$

$$S_n=\frac{n\{2+(n-1)d\}}{2}=\frac{dn^2+(2-d)n}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_{n+1}a_{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{dn^2+(2-d)n}{2(dn+1)(2dn+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d+\frac{2-d}{n}}{2\left(d+\frac{1}{n}\right)\left(2d+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{d+0}{2(d+0)(2d+0)}=\frac{1}{4d}$$

$\frac{1}{4d}=\frac{1}{2}$에서 $d=\frac{1}{2}$

따라서

$a_5=1+4d=1+4\times\frac{1}{2}=3$

답 ①

7 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\times r^{n+1}}{2^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r\times\left(\dfrac{3r}{2}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{2}{3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{r\times\left(\frac{3r}{2}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{r\times\left(\frac{3r}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\times\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right]$$
$$=\frac{2}{3}\times(1+0)=\frac{2}{3}$$

등비수열 $\left\{\left(\dfrac{3r}{2}\right)^n\right\}$이 0이 아닌 수 α에 수렴하면 $\alpha=1$이고 공비는 1이다.

그러므로 $\dfrac{3r}{2}=1$에서 $r=\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}s^n=\lim_{n\to\infty}\{(r^n+s^n)-r^n\}$$
$$=1-0=1$$

따라서 $s=1$이므로

$r+s=\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}$

답 ④

참고

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ 또는 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$이고

① $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$이면 $-1<r<1$이다.

② $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$이면 $r=1$이다.

8 $S_n=\dfrac{\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+6^{n+k}}{20\times 4^n+8\times 6^n}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+6^{n+k}}{20\times 4^n+8\times 6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+6^k}{20\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+8}$$
$$=\frac{0+6^k}{0+8}=\frac{6^k}{8}$$

$\dfrac{6^k}{8}=\dfrac{1}{2}$에서 $6^k=4$

따라서

$k=\log_6 4=2\log_6 2$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ③ 2 ③ 3 17

1 $f(0)=0$이므로

$f(x)=px^2+qx$ ($p\neq0$, p, q는 상수)로 놓으면

$a_n=f(2n)=4pn^2+2qn$

$b_n=n^3f\left(\dfrac{1}{n}\right)=n^3\left(\dfrac{p}{n^2}+\dfrac{q}{n}\right)=qn^2+pn$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{7n+4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4pn^2+2qn)+(qn^2+pn)}{7n+4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4p+q)n^2+(p+2q)n}{7n+4}$$

에서

$4p+q>0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{7n+4}=\infty$

$4p+q<0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{7n+4}=-\infty$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{7n+4}=2$이려면 $4p+q=0$이어야 한다.

즉, $q=-4p$ …… ㉠

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{7n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+2q)n}{7n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{p+2q}{7+\frac{4}{n}}$$
$$=\frac{p+2q}{7+0}=\frac{p-8p}{7}$$
$$=-p$$

이므로 $-p=2$에서 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면 $q=8$

따라서 $f(x)=-2x^2+8x$이므로

$f(1)=6$

답 ③

2 조건 (가)에서 $\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0$이므로 $0<p<1$이다.

(i) $0<p<\dfrac{1}{2}$일 때

$\dfrac{1}{2}<1-p<1$이므로

$0<\dfrac{p}{1-p}<1$, $0<\dfrac{1}{2(1-p)}<1$, $0<\dfrac{1}{4(1-p)}<1$

그러므로 조건 (나)에서 좌변의 분모, 분자를 $(1-p)^n$으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p^n+4(1-p)^{n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2p^{n+1}+5(1-p)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^n+4(1-p)+\left\{\frac{1}{4(1-p)}\right\}^n}{2p\left(\frac{p}{1-p}\right)^n+5+\left\{\frac{1}{2(1-p)}\right\}^n}$$

$$=\frac{0+4(1-p)+0}{0+5+0}$$

$$=\frac{4}{5}(1-p)$$

$\frac{4}{5}(1-p)=\frac{2}{3}$에서 $1-p=\frac{5}{6}$

따라서 $p=\frac{1}{6}$

(ii) $p=\frac{1}{2}$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p^n+4(1-p)^{n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2p^{n+1}+5(1-p)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+5\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{7}+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{3}{7}+0=\frac{3}{7}$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{1}{2}<p<1$일 때

$0<1-p<\frac{1}{2}$이므로

$0<\frac{1-p}{p}<1,\ 0<\frac{1}{2p}<1,\ 0<\frac{1}{4p}<1$

그러므로 조건 (나)에서 좌변의 분모, 분자를 p^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p^n+4(1-p)^{n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2p^{n+1}+5(1-p)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^n+\left(\frac{1}{4p}\right)^n}{2p+5\left(\frac{1-p}{p}\right)^n+\left(\frac{1}{2p}\right)^n}$$

$$=\frac{1+0+0}{2p+0+0}$$

$$=\frac{1}{2p}$$

$\frac{1}{2p}=\frac{2}{3}$

따라서 $p=\frac{3}{4}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 실수 p의 값은 $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$이므로 모든 p의 값의 합은

$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{11}{12}$

답 ③

3 삼각형 $A_nB_nC_n$은 $\angle C_n=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{A_nC_n}=\sqrt{(2n)^2-(\sqrt{3n-1})^2}=\sqrt{4n^2-3n+1}$

두 직각삼각형 $B_nC_nH_n$, $B_nA_nC_n$이 서로 닮음이므로

$\overline{B_nH_n}:\overline{B_nC_n}=\overline{B_nC_n}:\overline{B_nA_n}$에서

$\overline{B_nH_n}=\frac{\overline{B_nC_n}^2}{\overline{B_nA_n}}=\frac{3n-1}{2n}$

$\overline{A_nD_n}=\overline{A_nC_n}=\sqrt{4n^2-3n+1}$

이므로

$\overline{B_nD_n}=\overline{A_nB_n}-\overline{A_nD_n}$

$=2n-\sqrt{4n^2-3n+1}$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{B_nD_n}\times\overline{B_nH_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n-\sqrt{4n^2-3n+1})\times\frac{3n-1}{2n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-3n+1})\times\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+\sqrt{4n^2-3n+1}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\sqrt{4-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2}$$

$$=\frac{3-0}{2+2}\times\frac{3-0}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{9}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=9$이므로

$p+q=17$

답 17

02 급수

유제				본문 17~21쪽
1 ①	2 ③	3 ③	4 16	5 ④
6 ①				

1 $a_n=\dfrac{3n}{2n+1}$에서 $a_1=1$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$$
$$=a_{n+1}-a_1$$
$$=\frac{3n+3}{2n+3}-1$$
$$=\frac{n}{2n+3}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$$

답 ①

2 $a_1=S_1=\dfrac{a+b}{4}=1$이므로

$a+b=4$ …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합이 S_n이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{3n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{a+0}{3+0}=\frac{a}{3}$$

$\dfrac{a}{3}=2$에서 $a=6$

㉠에서 $b=4-a=4-6=-2$이므로

$$S_n=\frac{6n-2}{3n+1}$$

따라서

$$a_2=S_2-S_1=\frac{10}{7}-1=\frac{3}{7}$$

답 ③

3 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(na_n\times\frac{1}{n^2}\right)=0$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)a_n+3n}{3n+\sqrt{4n^2+9n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+\frac{a_n}{n}+3}{3+\sqrt{4+\frac{9}{n}}}$$
$$=\frac{0+0+3}{3+2}=\frac{3}{5}$$

답 ③

4 모든 자연수 n에 대하여 $b_{2n-1}=b_{2n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_{2n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_{2n})=4$$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_{2n})-b_{2n}\}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_{2n})-\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}$$
$$=4-1=3$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=p$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=p$이다.

$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(b_{2k-1}+b_{2k})=\sum_{k=1}^{n}2b_{2k}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_{2k}=2\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=2\times1=2$$

그러므로 $p=2$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+pb_n)=4\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=4\times3+2\times2=16$$

답 16

참고

$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=1$에서 $\lim_{n\to\infty}b_{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-b_{2n})=2-0=2$$

5 $a_1=S_1=2-4=-2$

$n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{2-n}-4)-(2^{3-n}-4)=-2^{2-n}$$

$a_1=-2^{2-1}=-2$이므로

$$a_n=-2^{2-n}=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n\geq1)$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -2이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

수열 $\{a_na_{n+1}\}$에서

$a_1a_2=-2\times(-1)=2$

$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\times\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 수열 $\{a_na_{n+1}\}$은 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$

답 ④

6 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r, s라 하자.

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$-1<r<1$, $-1<s<1$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r}=5$에서 $1-r=\frac{1}{5}$, $r=\frac{4}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{2}{1-s}=4$에서 $1-s=\frac{1}{2}$, $s=\frac{1}{2}$

이므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이

$a_1b_1=1\times2=2$

이고, 공비가

$rs=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$

인 등비수열이다.

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{a_1b_1}{1-rs}=\frac{2}{1-\frac{2}{5}}=\frac{10}{3}$

답 ①

Level 1 기초 연습 본문 22쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ②

1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n+\frac{1}{n(n+1)}\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=4-1=3$$

답 ③

2 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{1+0}=2$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)+\frac{2n}{n+1}\right\}$$
$$=0+2=2$$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+3n}{4n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{4-\frac{1}{n}}=\frac{2+3}{4-0}=\frac{5}{4}$

답 ⑤

3 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=12$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=9$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\{(a_n+2b_n)+2(2a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)+\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)$$
$$=\frac{1}{5}\times12+\frac{2}{5}\times9=6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{2a_n-(2a_n-b_n)\}$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)$$
$$=2\times6-9=3$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=6+3=9$$

답 ④

4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+a}+3^{n-1}}{6^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2^a\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2^a\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=2^a\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$=2^{a-1}+\frac{1}{3}$

이므로 $2^{a-1}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$에서

$2^{a-1}=2$

따라서 $a=2$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 23~24쪽

1 ④	2 ④	3 ④	4 ①	5 ③
6 ⑤	7 ①			

1 $a_1=b_1=a$라 하면

$a_n=a\times 2^{n-1}$, $b_n=a\times 3^{n-1}$이므로

$S_n=\frac{3^n\times a\times 2^{n-1}+2^n\times a\times 3^{n-1}}{6^{n+1}+3^{n+1}}$

$=\frac{\frac{a}{2}\times 6^n+\frac{a}{3}\times 6^n}{6^{n+1}+3^{n+1}}$

$=\frac{\frac{5}{6}a\times 6^n}{6^{n+1}+3^{n+1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{6}a\times 6^n}{6^{n+1}+3^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{6}a}{6+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$=\frac{\frac{5}{6}a}{6+0}$

$=\frac{5}{36}a$

따라서 $\frac{5}{36}a=\frac{5}{9}$에서

$a=4$

답 ④

2 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$

$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$=-\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{1}{n+2}$

이므로

$r=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{1}{n+2}\right\}$

$=-\frac{1}{2}$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{6}$

답 ④

3 두 직선 $x-ay+2a=0$, $y=n+2$가 만나는 점의 y좌표는 $n+2$이므로 x좌표를 구하면

$x-a(n+2)+2a=0$에서 $x=an$

즉, $x_n=an$, $y_n=n+2$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_ny_n}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_ky_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ak(k+2)}$

$=\frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2a}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2a}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_ny_n}=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2a}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2a}\times\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{3}{4a}$

따라서 $\dfrac{3}{4a}=\dfrac{1}{8}$에서

$a=6$

답 ④

4 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면 $-1<r<1$이다.

수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 $a_1b_1=8$, 공비가 r^2인 등비수열이고 $r^2<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\dfrac{a_1b_1}{1-r^2}=\dfrac{8}{1-r^2}=9$에서

$1-r^2=\dfrac{8}{9}$, $r^2=\dfrac{1}{9}$

$r=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $r=\dfrac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{a_1}{1-r}=3$에서

$a_1=3(1-r)$

$r=-\dfrac{1}{3}$이면 $a_1=3\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=4$

$a_1b_1=8$에서 $4b_1=8$, $b_1=2$

$r=\dfrac{1}{3}$이면 $a_1=3\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=2$

$a_1b_1=8$에서 $2b_1=8$, $b_1=4$

그러므로 $(a_1)^2+(b_1)^2=20$

따라서 두 수열 $\{(a_n)^2\}$, $\{(b_n)^2\}$은 첫째항이 각각 $(a_1)^2$, $(b_1)^2$이고 공비가 모두 $r^2=\dfrac{1}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=\dfrac{(a_1)^2}{1-r^2}+\dfrac{(b_1)^2}{1-r^2}=\dfrac{(a_1)^2+(b_1)^2}{1-r^2}$

$=\dfrac{20}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{45}{2}$

답 ①

5 $(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(a^n)$

$=\dfrac{1}{(a^n)^2}=\dfrac{1}{a^{2n}}=\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^n$

이므로 수열 $\{(f\circ g)(n)\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a^2}$이고 공비가 $\dfrac{1}{a^2}$인 등비수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(f\circ g)(n)=\dfrac{9}{7}$이므로

$0<\dfrac{1}{a^2}<1$, 즉 $a^2>1$이고

$\dfrac{\dfrac{1}{a^2}}{1-\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{9}{7}$에서 $\dfrac{1}{a^2-1}=\dfrac{9}{7}$

$a^2-1=\dfrac{7}{9}$, $a^2=\dfrac{16}{9}$

$a>0$이므로 $a=\dfrac{4}{3}$

$(f\circ g)\left(\dfrac{n}{2}\right)=f\left(a^{\frac{n}{2}}\right)=\dfrac{1}{\left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{a^n}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

에서 수열 $\left\{(f\circ g)\left(\dfrac{n}{2}\right)\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{3}{4}$이고 공비가 $\dfrac{3}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(f\circ g)\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{3}{4}}=3$

즉, $b=3$

따라서 $ab=\dfrac{4}{3}\times3=4$

답 ③

6 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3}\{(2a_n-b_n)+(a_n+b_n)\}$

$=\dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)+\dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

$=\dfrac{1}{3}\times2+\dfrac{1}{3}\times7=3$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{a_1}{1-\dfrac{1}{2}}=2a_1=3$에서 $a_1=\dfrac{3}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$=7-3=4$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{b_1}{1-\dfrac{2}{3}}=3b_1=4$에서 $b_1=\dfrac{4}{3}$

따라서 수열 $\{(-1)^{n+1}a_nb_n\}$은 첫째항이

$(-1)^2\times a_1b_1=1\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}=2$

이고, 공비가

$-1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$

인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_nb_n=\dfrac{2}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{2}$

답 ⑤

7 점 B_1의 y좌표는 $\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$이므로

$\overline{A_1B_1}=6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$

선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하면

$\overline{C_1D_1}=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}=\frac{5}{3}$이므로

$c_1=4+\frac{5}{3}=\frac{17}{3}$

점 A_2의 x좌표는 $\frac{3}{2}x=\frac{8}{3}$에서 $x=\frac{16}{9}$이므로

점 A_2의 좌표는 $\left(\frac{16}{9}, \frac{8}{3}\right)$이다.

점 B_2의 y좌표는 $\frac{2}{3}\times\frac{16}{9}=\frac{32}{27}$이므로

$\overline{A_2B_2}=\frac{8}{3}-\frac{32}{27}=\frac{40}{27}$

선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하면

$\overline{C_2D_2}=\frac{1}{2}\overline{A_2B_2}=\frac{20}{27}$이므로

$c_2=\frac{16}{9}+\frac{20}{27}=\frac{68}{27}$

점 A_3의 x좌표는 $\frac{3}{2}x=\frac{32}{27}$에서 $x=\frac{64}{81}$이므로

점 A_3의 좌표는 $\left(\frac{64}{81}, \frac{32}{27}\right)$이다.

점 B_3의 y좌표는 $\frac{2}{3}\times\frac{64}{81}=\frac{128}{243}$이므로

$\overline{A_3B_3}=\frac{32}{27}-\frac{128}{243}=\frac{160}{243}$

선분 A_3B_3의 중점을 D_3이라 하면

$\overline{C_3D_3}=\frac{1}{2}\overline{A_3B_3}=\frac{80}{243}$이므로

$c_3=\frac{64}{81}+\frac{80}{243}=\frac{272}{243}$

$\vdots$

그러므로 수열 $\{c_n\}$은 $\frac{17}{3}, \frac{68}{27}, \frac{272}{243}, \cdots$이고,

$\frac{c_2}{c_1}=\frac{c_3}{c_2}=\cdots=\frac{c_{n+1}}{c_n}=\cdots=\frac{4}{9}$

이다.

따라서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $\frac{17}{3}$이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\frac{\frac{17}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{51}{5}$$

답 ①

참고

점 A_n의 x좌표를 a_n이라 하면 점 A_n의 y좌표는 $\frac{3}{2}a_n$,

점 B_n의 x좌표는 a_n, 점 B_n의 y좌표는 $\frac{2}{3}a_n$,

점 A_{n+1}의 x좌표는 a_{n+1}, 점 A_{n+1}의 y좌표는 $\frac{2}{3}a_n$이므로

$\frac{2}{3}a_n=\frac{3}{2}a_{n+1}$에서 $a_{n+1}=\frac{4}{9}a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=4$이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이다.

선분 A_nB_n의 중점을 D_n이라 하면 삼각형 $A_nD_nC_n$이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{C_nD_n}=\overline{A_nD_n}=\frac{1}{2}\overline{A_nB_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a_n-\frac{2}{3}a_n\right)=\frac{5}{12}a_n$

따라서 점 C_n의 x좌표는

$c_n=a_n+\overline{C_nD_n}=a_n+\frac{5}{12}a_n=\frac{17}{12}a_n$

이므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $\frac{17}{12}a_1=\frac{17}{3}$이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이다.

Level 3 실력 완성

본문 25~26쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** ② **4** ①

1
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+3}=a_5+a_7+a_9+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p}{(2n+3)(2n+5)}$$

에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+3}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{(2k+3)(2k+5)}$$
$$=\frac{p}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+5}\right)$$
$$=\frac{p}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}$$
$$=\frac{p}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+3}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{p}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+5}\right)$$
$$=\frac{p}{2}\left(\frac{1}{5}-0\right)=\frac{p}{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+4}=a_6+a_8+a_{10}+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-2n-4}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+4}$는 첫째항이 $\frac{1}{64}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+4} = \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{48}$$

급수 $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합을 T_n이라 하면

$$\lim_{n\to\infty} T_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_{2k+3} + a_{2k+4})$$
$$= \frac{p}{10} + \frac{1}{48}$$
$$\lim_{n\to\infty} T_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (T_{2n} - a_{2n+4})$$
$$= \lim_{n\to\infty} T_{2n} - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4}$$
$$= \frac{p}{10} + \frac{1}{48} - 0$$
$$= \frac{p}{10} + \frac{1}{48}$$

이고 $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{12}$에서 $\lim_{n\to\infty} T_{2n} = \lim_{n\to\infty} T_{2n-1} = \frac{1}{12}$이므로

$\frac{p}{10} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}$, $\frac{p}{10} = \frac{1}{16}$

따라서 $p = \frac{5}{8}$

답 ③

2 조건 (가)에서

$a_1 - a_2 < b_1$

$a_2 - a_3 < b_2$

$a_3 - a_4 < b_3$

$\vdots$

$a_n - a_{n+1} < b_n$

이므로 $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) < \sum_{k=1}^{n} b_k$이다.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1})$$
$$= a_1 - a_{n+1}$$
$$= 2 - \frac{n+4}{3n+2}$$
$$= \frac{5n}{3n+2}$$

이고 $\sum_{k=1}^{n} b_k = T_n$이므로 $\frac{5n}{3n+2} < T_n$

그러므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{3n+2} \le \lim_{n\to\infty} T_n$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{3+\frac{2}{n}} = \frac{5}{3},$$

$\lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = p$이므로

$\frac{5}{3} \le p$ ...... ㉠

$\lim_{n\to\infty} T_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T_n = p$

이므로 조건 (나)에서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} (T_n + T_{n+1}) \le \lim_{n\to\infty} \frac{30n^2+52n+15}{9n^2+15n+4}$$

$$2p \le \lim_{n\to\infty} \frac{30+\frac{52}{n}+\frac{15}{n^2}}{9+\frac{15}{n}+\frac{4}{n^2}} = \frac{10}{3}$$

$p \le \frac{5}{3}$ ...... ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$p = \frac{5}{3}$

답 ⑤

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n+3}{n+1}\right) = 1$이므로

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n+3}{n+1}\right) = 0$이다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n+3}{n+1}\right) + \frac{2n+3}{n+1}\right\}$$
$$= 0 + 2 = 2$$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 p라 하면 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = pn + q$ (q는 상수)

로 놓을 수 있다. 이때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{pn+q}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(p + \frac{q}{n}\right) = p$$

이므로 $p = 2$이다.

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n+3}{n+1}\right) = 1$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+q}{n} - \frac{2n+3}{n+1}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(2 + \frac{q}{n}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{q-1}{n}\right)$이고

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q-1}{n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{q-1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{q-1}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-1=0$

이때 $q\neq1$이면

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{q-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q-1}{n}=\frac{1}{q-1}\times0=0$

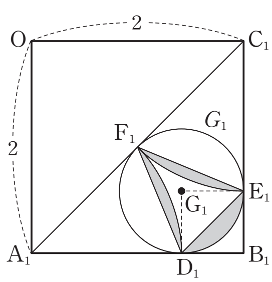
이 되어 모순이므로 $q=1$이다.

따라서 $a_n=2n+1$이므로

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n+1)=\frac{10(3+21)}{2}=120$

답 ②

4



R_1

그림 R_1에서 원 G_1의 중심을 $\mathrm{G_1}$이라 하자.

$\overline{\mathrm{A_1D_1}}=\overline{\mathrm{A_1F_1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_1C_1}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{D_1B_1}}=2-\sqrt{2}$

사각형 $\mathrm{D_1B_1E_1G_1}$은 정사각형이므로

$\overline{\mathrm{G_1D_1}}=\overline{\mathrm{G_1E_1}}=2-\sqrt{2}$

즉, 원 G_1의 반지름의 길이가 $2-\sqrt{2}$이다.

그러므로 원 G_1의 호 $\mathrm{D_1E_1}$과 선분 $\mathrm{D_1E_1}$로 둘러싸인 부분의 넓이는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $\mathrm{G_1D_1E_1}$의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{G_1D_1E_1}$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$\frac{1}{2}\times(2-\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times(2-\sqrt{2})^2$

$=\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\pi-3+2\sqrt{2}$

부채꼴 $\mathrm{A_1D_1F_1}$의 호 $\mathrm{D_1F_1}$과 선분 $\mathrm{D_1F_1}$로 둘러싸인 부분의 넓이는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $\mathrm{A_1D_1F_1}$의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{A_1D_1F_1}$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

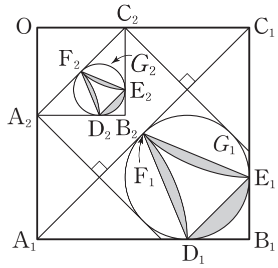
부채꼴 $\mathrm{C_1E_1F_1}$의 호 $\mathrm{E_1F_1}$과 선분 $\mathrm{E_1F_1}$로 둘러싸인 부분의 넓이도 같은 방법으로 구하면

$\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로

$S_1=\left(\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\pi-3+2\sqrt{2}\right)+2\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=(2-\sqrt{2})\pi-3+\sqrt{2}$



R_2

그림 R_2에서 선분 $\mathrm{A_2C_2}$의 길이는 원 G_1의 지름의 길이와 같다. 즉, $\overline{\mathrm{A_2C_2}}=2(2-\sqrt{2})$이므로

$\overline{\mathrm{OA_2}}=2(2-\sqrt{2})\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$

두 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$, $\mathrm{OA_2B_2C_2}$의 닮음비는

$2:(2\sqrt{2}-2)=1:(\sqrt{2}-1)$

이므로 넓이의 비는

$1^2:(\sqrt{2}-1)^2=1:(3-2\sqrt{2})$

이다. 같은 방법으로 하면 두 정사각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$, $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$의 넓이의 비는 $1:(3-2\sqrt{2})$이므로

$r=3-2\sqrt{2}$로 놓으면 $0<r<1$이고

$S_n=S_1+rS_1+r^2S_1+\cdots+r^{n-1}S_1$

이다. 즉, S_n은 첫째항이 S_1이고 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다. 따라서

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{S_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{S_1}{1-r}$

$=\frac{(2-\sqrt{2})\pi-3+\sqrt{2}}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{(2-\sqrt{2})\pi-3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}$

$=\frac{\{(2-\sqrt{2})\pi-(3-\sqrt{2})\}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=\frac{\sqrt{2}\pi-2\sqrt{2}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\pi-2)-1}{2}$

답 ①

03 여러 가지 함수의 미분

유제 본문 29~37쪽

1 ⑤	2 ⑤	3 ③	4 ⑤	5 ④
6 ④	7 4	8 ②	9 ⑤	10 ⑤

1 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{4^x-2^x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-e^x}{x}\times\frac{x}{4^x-2^x}\right)$ …… ㉠

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)-(e^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2-\frac{e^x-1}{x}\right)$

$=2\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}-\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

$=2\times1-1=1$

$\lim_{x\to0}\frac{4^x-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(4^x-1)-(2^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{4^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$

$=\ln4-\ln2=\ln2$

이므로 ㉠에서

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{4^x-2^x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-e^x}{x}\times\frac{x}{4^x-2^x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{4^x-2^x}{x}}$

$=1\times\frac{1}{\ln2}=\frac{1}{\ln2}$

답 ⑤

다른 풀이

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{4^x-2^x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(e^x-1)}{2^x(2^x-1)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{e}{2}\right)^x\times\frac{e^x-1}{2^x-1}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{e}{2}\right)^x\times\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{2^x-1}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{e}{2}\right)^x\times\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{\frac{2^x-1}{x}}\right\}$

$=1\times1\times\frac{1}{\ln2}=\frac{1}{\ln2}$

2 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{\sqrt{3x+b}-2}=8$에서 $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(\sqrt{3x+b}-2)=0$에서 $\sqrt{b}=2$, $b=4$

한편 $a=0$이면 $\ln(ax+1)=0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{\sqrt{3x+b}-2}=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a\neq0$이고

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{\sqrt{3x+b}-2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{\sqrt{3x+4}-2}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times ax\times\frac{\sqrt{3x+4}+2}{(\sqrt{3x+4}-2)(\sqrt{3x+4}+2)}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times ax\times\frac{\sqrt{3x+4}+2}{3x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times(\sqrt{3x+4}+2)\times\frac{a}{3}\right\}$

$=1\times4\times\frac{a}{3}=\frac{4}{3}a$

즉, $\frac{4}{3}a=8$에서 $a=6$

따라서

$a+b=6+4=10$

답 ⑤

3 $f(x)=(x-1)e^x$에서

$f'(x)=(x-1)'\times e^x+(x-1)\times(e^x)'$

$=e^x+(x-1)e^x$

$=xe^x$

이므로

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{1}{x+a}\right\}$

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}\frac{1}{x+a}$

$=f'(a)\times\frac{1}{2a}$

$=ae^a\times\frac{1}{2a}=\frac{e^a}{2}$

한편 $f(a)=(a-1)e^a$이므로

$(a-1)e^a=\frac{e^a}{2}$, $\left(a-\frac{3}{2}\right)e^a=0$

$e^a>0$이므로 $a-\frac{3}{2}=0$에서 $a=\frac{3}{2}$

답 ③

4 $f(x)=\log_3 9x\times\log_9 3x$

$=(\log_3 9+\log_3 x)(\log_9 3+\log_9 x)$

$=(2+\log_3 x)\left(\frac{1}{2}+\log_9 x\right)$

이므로

$$f'(x)=(2+\log_3 x)'\times\left(\frac{1}{2}+\log_9 x\right)+(2+\log_3 x)\times\left(\frac{1}{2}+\log_9 x\right)'$$

$$=\frac{1}{x\ln 3}\times\left(\frac{1}{2}+\log_9 x\right)+(2+\log_3 x)\times\frac{1}{x\ln 9}$$

따라서

$$f'(3)=\frac{1}{3\ln 3}\times\left(\frac{1}{2}+\log_9 3\right)+(2+\log_3 3)\times\frac{1}{3\ln 9}$$

$$=\frac{1}{3\ln 3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+(2+1)\times\frac{1}{3\times 2\ln 3}$$

$$=\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{2\ln 3}$$

$$=\frac{5}{6\ln 3}$$

답 ⑤

5 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$이고 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\cos\beta=\frac{1}{3}$이고 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

답 ④

6 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서

$0<\alpha+\beta<\pi$이고, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$

$$\sin^2(\alpha+\beta)=1-\cos^2(\alpha+\beta)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$에서 $\sin(\alpha+\beta)>0$이므로

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2$$

한편 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}>0$이므로

$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$이고

$$\cos^2(\alpha-\beta)=1-\sin^2(\alpha-\beta)=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos(\alpha-\beta)>0$이므로

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{3}{4}$$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan 2\alpha=\tan\{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\}$$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\times\tan(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{-2+\frac{3}{4}}{1-(-2)\times\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}$$

답 ④

7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos^3 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-\cos x}\times\frac{1}{1+\cos x+\cos^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\times\frac{1}{1+\cos x+\cos^2 x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{\sin^2 x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x+\cos^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x+\cos^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\times\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\cos x+\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{1}\times\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

따라서 $6\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos^3 x}=6\times\frac{2}{3}=4$

답 4

8 $0<t<\frac{\pi}{4}$에서 두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}(t, \tan 2t)$, $\mathrm{B}(t, \sin t)$이고, 두 직선 OA, OB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$라 하면

$\tan\alpha(t)=\frac{\tan 2t}{t}$, $\tan\beta(t)=\frac{\sin t}{t}$이고

$$\begin{aligned}\tan\theta(t)&=|\tan\{\alpha(t)-\beta(t)\}|\\&=\left|\frac{\tan\alpha(t)-\tan\beta(t)}{1+\tan\alpha(t)\times\tan\beta(t)}\right|\\&=\left|\frac{\frac{\tan 2t}{t}-\frac{\sin t}{t}}{1+\frac{\tan 2t}{t}\times\frac{\sin t}{t}}\right|\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\frac{\tan 2t}{t}&=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\times\frac{1}{\cos 2t}\times 2\right)\\&=1\times1\times2\\&=2\end{aligned}$$

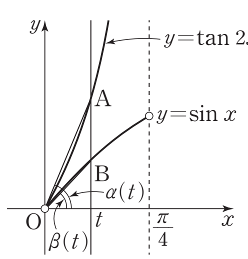
이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\tan\theta(t)&=\lim_{t\to 0+}\left|\frac{\frac{\tan 2t}{t}-\frac{\sin t}{t}}{1+\frac{\tan 2t}{t}\times\frac{\sin t}{t}}\right|\\&=\left|\frac{2-1}{1+2\times1}\right|\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ②

참고

$0<x<\frac{\pi}{4}$에서 두 함수 $y=\tan 2x$, $y=\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $0<t<\frac{\pi}{4}$에서 $\tan 2t>\sin t$는 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}\tan 2t-\sin t&=\frac{\sin 2t}{\cos 2t}-\sin t\\&=\frac{2\sin t\cos t-\sin t\cos 2t}{\cos 2t}\\&=\frac{\sin t\,(2\cos t-\cos 2t)}{\cos 2t}\quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}2\cos t-\cos 2t&=2\cos t-(2\cos^2 t-1)\\&=-2\cos^2 t+2\cos t+1\\&=-2\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이고, $0<t<\frac{\pi}{4}$에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos t<1$이므로

$1<2\cos t-\cos 2t<\sqrt{2}$

또 $0<2t<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\cos 2t<1$이므로

㉠에서 $0<t<\frac{\pi}{4}$일 때

$\tan 2t-\sin t>0$

따라서 $\tan 2t>\sin t$이다.

9 $f(x)=e^x\cos x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(e^x)'\times\cos x+e^x\times(\cos x)'\\&=e^x\times\cos x+e^x\times(-\sin x)\\&=e^x(\cos x-\sin x)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x(\cos x-\sin x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to 0}e^x\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\&=1\times1=1\end{aligned}$$

답 ⑤

10 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점 P의 x좌표를 α라 하자.

$f(\alpha)=0$에서

$\sin\alpha-2\cos\alpha=0$, $\sin\alpha=2\cos\alpha$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에 ㉠을 대입하면

$(2\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$, $5\cos^2\alpha=1$, $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이므로 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

㉠에서 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $f'(x)=\cos x+2\sin x$이므로 구하는 접선의 기울기는

$$\begin{aligned}f'(\alpha)&=\cos\alpha+2\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{4\sqrt{5}}{5}\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 ③	2 ①	3 20	4 ③	5 ②
6 ④	7 ②	8 ①	9 ②	10 ②

1 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2^{2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)-(2^{2x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(e^{2x}-1)-(2^{2x}-1)}{2x}\times2\right\}$

$=2\left(\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}-\lim_{x\to0}\frac{2^{2x}-1}{2x}\right)$

$=2(1-\ln 2)$

$=2-2\ln 2$

답 ③

2 $\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x^2+2x+a)}{b(x+1)^2}=\frac{1}{4}$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}\ln(x^2+2x+a)=\ln(a-1)=0$에서 $a=2$

$\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x^2+2x+2)}{b(x+1)^2}=\lim_{x\to-1}\frac{\ln\{1+(x^2+2x+1)\}}{b(x+1)^2}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{\ln\{1+(x+1)^2\}}{b(x+1)^2}$

$(x+1)^2=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{\ln\{1+(x+1)^2\}}{b(x+1)^2}=\frac{1}{b}\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{b}$

따라서 $\frac{1}{b}=\frac{1}{4}$에서 $b=4$이므로

$a+b=2+4=6$

답 ①

3 $f(x)=(x^2-4x-4)e^x$에서

$f'(x)=(2x-4)e^x+(x^2-4x-4)e^x$

$=(x^2-2x-8)e^x$

$f'(x)=0$에서

$(x^2-2x-8)e^x=0$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서

$\alpha^2+\beta^2=(-2)^2+4^2$

$=20$

답 20

4 방정식 $f(x)=2$, 즉 $e^x(e^x-1)=2$에서

$(e^x)^2-e^x-2=0$, $(e^x+1)(e^x-2)=0$

모든 실수 x에 대하여 $e^x+1>0$이므로

$e^x=2$, $x=\ln 2$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 만나는 점 P의 좌표는 $(\ln 2,\ 2)$이다.

$f'(x)=e^x(e^x-1)+e^x\times e^x=e^x(2e^x-1)$

이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(\ln 2)=e^{\ln 2}(2e^{\ln 2}-1)$

$=2\times3=6$

답 ③

5 $f(x)=x\ln kx=x(\ln k+\ln x)$이므로

$f'(x)=(\ln k+\ln x)+x\times\frac{1}{x}$

$=\ln k+\ln x+1$

한편

$\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)-\{f(e-h)-f(e)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(e+h)-f(e)}{h}+\frac{f(e-h)-f(e)}{-h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(e-h)-f(e)}{-h}$

$=f'(e)+f'(e)$

$=2f'(e)$

즉, $2f'(e)=2$에서 $f'(e)=1$

이때 $f'(e)=\ln k+\ln e+1=\ln k+2$이므로

$\ln k+2=1$에서 $\ln k=-1$

따라서 $k=\frac{1}{e}$

답 ②

6 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$이므로

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이므로 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 삼각함수의 성질과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\cos\left(\frac{5}{3}\pi+\alpha\right)=\cos\left\{\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\alpha\right\}$

$=\cos\left\{2\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right\}$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\times\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\times\sin\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

답 ④

7 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-a$, $\tan\alpha\tan\beta=-2$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-a}{1-(-2)}=-\frac{a}{3}$$

따라서 $-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$에서 $a=-2$

답 ②

8 $$\lim_{x\to0}\frac{x}{2x+\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{2x+\sin 2x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\frac{\sin 2x}{2x}\times2}$$
$$=\frac{1}{2+1\times2}=\frac{1}{4}$$

답 ①

9 $$\tan x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x=\frac{\sin x\times(1-\cos x)}{\cos x}$$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\ln(1+x^3)}\times\sin x\times(1-\cos x)\times\frac{1}{\cos x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^3}{\ln(1+x^3)}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\cos x}\right\}$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}}=\frac{1}{1}=1$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$$
$$=1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\ln(1+x^3)}\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

답 ②

10 $f(x)=a\sin x+b\cos x$라 하자.

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$을 지나므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$에서

$a\sin\frac{\pi}{2}+b\cos\frac{\pi}{2}=3$, 즉 $a=3$

$f(x)=3\sin x+b\cos x$에서

$f'(x)=3\cos x-b\sin x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$에서

$3\cos\frac{\pi}{2}-b\sin\frac{\pi}{2}=1$, 즉 $b=-1$

따라서 $a+b=3+(-1)=2$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

1 ④	2 24	3 ③	4 ③	5 3
6 ①	7 ③	8 ④		

1 $f(x)\ln(1+2x)=4-ae^{-x}$

위 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=4-a$, $a=4$

$x\neq0$이면 $\ln(1+2x)\neq0$이므로

$$f(x)=\frac{4(1-e^{-x})}{\ln(1+2x)}\ \left(x>-\frac{1}{2},\ x\neq0\right)$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

그러므로

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4(1-e^{-x})}{\ln(1+2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4e^{-x}(e^x-1)}{x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0} 2e^{-x}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}}$$

$$=2\times 1\times\frac{1}{1}=2$$

따라서 $a\times f(0)=4\times 2=8$

답 ④

2 조건 (가)에 의하여

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{2x}=3$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\ln\{1+f(x)\}=0$에서 $\ln\{1+f(0)\}=0$

$1+f(0)=1$, $f(0)=0$이므로 $b=0$

그러므로 $f(x)=3x^2+ax$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2+ax)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+3x^2+ax)}{3x^2+ax}\times\frac{3x^2+ax}{2x}\right\} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $3x^2+ax=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2+ax)}{3x^2+ax}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

또

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+ax}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+a}{2}=\frac{0+a}{2}=\frac{a}{2}$$

그러므로

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+3x^2+ax)}{3x^2+ax}\times\frac{3x^2+ax}{2x}\right\}=1\times\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

조건 (나)에 의하여

$\frac{a}{2}=3$, $a=6$

따라서 $f(x)=3x^2+6x$이므로

$f(2)=3\times 2^2+6\times 2=24$

답 24

3 $f(x)=\frac{4^{-x}}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^x$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^x\times\ln\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^x\times(-2\ln 2)$$

$$=-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^x$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=-2\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=-2\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

답 ③

4 $$|\ln 3x|=\begin{cases}-\ln 3x & \left(0<x<\frac{1}{3}\right)\\ \ln 3x & \left(x\ge\frac{1}{3}\right)\end{cases}$$

직선 $y=x-t$가 함수 $y=|\ln 3x|$의 그래프와 접할 때, 접점의 x좌표를 구해 보자.

$x\ge\frac{1}{3}$일 때, $y=\ln 3x$에서

$$y'=(\ln 3+\ln x)'=\frac{1}{x}$$

이므로 곡선 $y=\ln 3x$ 위의 점 $(a, \ln 3a)$에서의 접선의 기울기가 1이 되도록 하는 a의 값은

$\frac{1}{a}=1$, $a=1$

즉, 직선 $y=x-t$가 곡선 $y=\ln 3x\left(x\ge\frac{1}{3}\right)$ 위의 점 $(1, \ln 3)$에서 접하므로

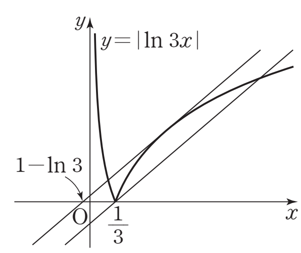
$\ln 3=1-t$에서 $t=1-\ln 3$

한편 $0<x<\frac{1}{3}$일 때, $y=-\ln 3x$에서

$$y'=(-\ln 3x)'=(-\ln 3-\ln x)'=-\frac{1}{x}<0$$

이므로 접선의 기울기가 1이 되도록 하는 곡선 $y=-\ln 3x\left(0<x<\frac{1}{3}\right)$ 위의 점은 존재하지 않는다.

그러므로 실수 t의 값의 범위에 따른 함수 $f(t)$는 다음과 같다.



(i) $t<1-\ln 3$일 때

직선 $y=x-t$는 함수 $y=|\ln 3x|$의 그래프와 한 점에서 만나므로

$f(t)=1$

(ii) $t=1-\ln 3$일 때

직선 $y=x-t$는 함수 $y=|\ln 3x|$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로

$f(1-\ln 3)=2$

(iii) $1-\ln 3<t<\frac{1}{3}$일 때

직선 $y=x-t$는 함수 $y=|\ln 3x|$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나므로

$f(t)=3$

(iv) $t=\frac{1}{3}$일 때

직선 $y=x-t$는 함수 $y=|\ln 3x|$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로

$f\left(\frac{1}{3}\right)=2$

(v) $t>\frac{1}{3}$일 때

직선 $y=x-t$는 함수 $y=|\ln 3x|$의 그래프와 한 점에서 만나므로

$f(t)=1$

(i)~(v)에 의하여 함수 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \left(t<1-\ln 3 \text{ 또는 } t>\frac{1}{3}\right) \\ 2 & \left(t=1-\ln 3 \text{ 또는 } t=\frac{1}{3}\right) \\ 3 & \left(1-\ln 3<t<\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

따라서 $\lim_{t\to\alpha+} f(t)\neq\lim_{t\to\alpha-} f(t)$를 만족시키는 α의 값은

$\alpha=1-\ln 3$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$이므로 그 합은

$(1-\ln 3)+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}-\ln 3$

답 ③

5 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 α만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=g(x)$라 하면

$$\begin{aligned} g(x)&=f(x-\alpha) \\ &=2\sin(x-\alpha)+\cos(x-\alpha) \end{aligned}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로

$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$ …… ㉠

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\alpha<\frac{\pi}{4}$이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)>0$이고, ㉠의 양변을 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$로 나누면

$2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+1=0$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{1}{2}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\times\tan\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

이므로

$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$, $2-2\tan\alpha=-1-\tan\alpha$

따라서 $\tan\alpha=3$

답 3

6 원 C는 반지름의 길이가 2이고, x축에 접하는 원이므로 원 C의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표를 $(a, 2)$ $(a>0)$으로 놓을 수 있다.

점 C와 직선 $y=\frac{4}{3}x$, 즉 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이인 2와 같으므로

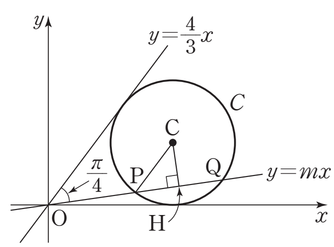
$\frac{|4\times a-3\times 2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$, $|4a-6|=10$

$4a-6=10$에서 $a=4$

$4a-6=-10$에서 $a=-1$

$a>0$이므로 $a=4$

그러므로 점 C의 좌표는 $(4, 2)$이다.



한편 두 직선 $y=\frac{4}{3}x$, $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$, $\tan\beta=m$이고

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} \tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &=\frac{\frac{4}{3}-m}{1+\frac{4}{3}\times m}=\frac{4-3m}{3+4m} \end{aligned}$$

이때 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$, 즉 $\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

$\frac{4-3m}{3+4m}=1$, $4-3m=3+4m$, $m=\frac{1}{7}$

점 C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=\frac{1}{7}x$, 즉 $x-7y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|4-7\times2|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\dfrac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 CPH에서

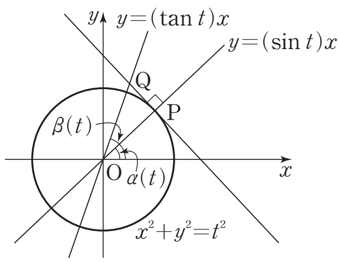
$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=(2\sqrt{2})^2=8$

답 ①

7



그림과 같이 직선 $y=(\sin t)x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\alpha(t)$, 직선 $y=(\tan t)x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\beta(t)$라 하면

$\tan\alpha(t)=\sin t$, $\tan\beta(t)=\tan t$,

$\angle\mathrm{POQ}=\beta(t)-\alpha(t)$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\angle\mathrm{POQ})=\tan\{\beta(t)-\alpha(t)\}=\frac{\tan\beta(t)-\tan\alpha(t)}{1+\tan\beta(t)\times\tan\alpha(t)}=\frac{\tan t-\sin t}{1+\tan t\times\sin t}$$

$\overline{\mathrm{OP}}=t$이고, 원 위의 점 P에서 그은 접선은 선분 OP와 수직이므로 직각삼각형 POQ에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OP}}\times\tan(\angle\mathrm{POQ})=\dfrac{t(\tan t-\sin t)}{1+\tan t\times\sin t}$

그러므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{t^4}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{t^4}\times\frac{t(\tan t-\sin t)}{1+\tan t\times\sin t}\right\}=\lim_{t\to0+}\left(\frac{\tan t-\sin t}{t^3}\times\frac{1}{1+\tan t\times\sin t}\right)\quad\cdots\cdots ㉠$$

이고

$$\lim_{t\to0+}\frac{\tan t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{\sin t}{\cos t}-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t\times(1-\cos t)}{t^3\cos t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t\times(1-\cos t)\times(1+\cos t)}{t^3\cos t\times(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3\times\frac{1}{\cos t}\times\frac{1}{1+\cos t}\right\}$$

$$=1^3\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{t^4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+0}=\frac{1}{2}$$

답 ③

참고

$$\tan t-\sin t=\frac{\sin t}{\cos t}-\sin t=\frac{\sin t-\sin t\cos t}{\cos t}=\frac{(1-\cos t)\sin t}{\cos t}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$에서

$0<1-\cos t<1$, $0<\sin t<1$, $0<\cos t<1$

따라서 ㉠에서 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $\tan t-\sin t>0$이므로

$\tan t>\sin t$이다.

8 $f(x)=x\sin x$에서 $f'(x)=\sin x+x\cos x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{xf'(x)-f(x)}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x\sin x+x^2\cos x)-x\sin x}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\cos x}{2x-\pi}$$

이때 $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{xf'(x)-f(x)}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\cos x}{2x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}+t\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+t\right)^2\times\left(-\frac{\sin t}{2t}\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+t\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sin t}{t}\right\}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1=-\frac{\pi^2}{8}$$

답 ④

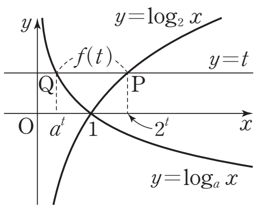
Level 3 실력 완성 본문 42쪽

1 ④ **2** 11 **3** ②

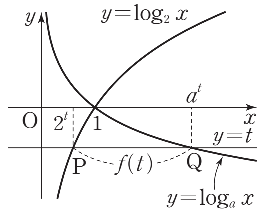
1 $\log_2 x=t$에서 $x=2^t$이므로 $\mathrm{P}(2^t,\ t)$

$\log_a x=t$에서 $x=a^t$이므로 $\mathrm{Q}(a^t,\ t)$

실수 t의 값의 부호에 따라 두 점 P, Q를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



[$t>0$인 경우]



[$t<0$인 경우]

그러므로 실수 t에 대하여 함수 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} 2^t-a^t \ (t>0) \\ a^t-2^t \ (t<0) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(2t)-f(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(2^{2t}-a^{2t})-(2^t-a^t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(2^{2t}-2^t)-(a^{2t}-a^t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2^t(2^t-1)-a^t(a^t-1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left(2^t\times\frac{2^t-1}{t}\right)-\lim_{t\to 0+}\left(a^t\times\frac{a^t-1}{t}\right)$$

$$=1\times\ln 2-1\times\ln a=\ln\frac{2}{a}$$

이므로 $\ln\frac{2}{a}=3\ln 2$

$\frac{2}{a}=8,\ a=\frac{1}{4}$

그러므로 함수 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} 2^t-\left(\frac{1}{4}\right)^t \ (t>0) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^t-2^t \ (t<0) \end{cases}$$

이때 함수 $f(t)$의 도함수 $f'(t)$는

$t>0$일 때,

$$f'(t)=2^t\ln 2-\left(\frac{1}{4}\right)^t\ln\frac{1}{4}=2^t\ln 2+\left(\frac{1}{4}\right)^t\ln 4$$

$t<0$일 때,

$$f'(t)=\left(\frac{1}{4}\right)^t\ln\frac{1}{4}-2^t\ln 2=-\left(\frac{1}{4}\right)^t\ln 4-2^t\ln 2$$

따라서

$f'(1)-f'(-1)$

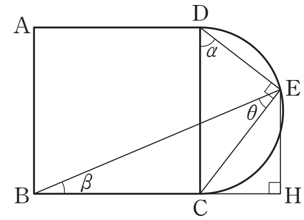
$$=\left(2\ln 2+\frac{1}{4}\ln 4\right)-\left(-4\ln 4-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$=\left(2\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2\right)+\left(8\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$=11\ln 2$$

답 ④

2



반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{CED}=\frac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{EDC}=\alpha$라 하면 직각삼각형 DCE에서 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$$

그러므로 $\overline{\mathrm{CD}}=5k,\ \overline{\mathrm{EC}}=4k,\ \overline{\mathrm{DE}}=3k$ ($k>0$인 상수)로 놓을 수 있다.

한편 점 E에서 선분 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle\mathrm{ECH}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{ECD}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{EDC}\right)=\angle\mathrm{EDC}$$

즉, $\angle\mathrm{ECH}=\alpha$이므로 직각삼각형 ECH에서

$$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{EC}}\cos\alpha=4k\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}k$$

$$\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{EC}}\sin\alpha=4k\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}k$$

$\angle\mathrm{EBH}=\beta$라 하면 직각삼각형 EBH에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CH}}=5k+\frac{12}{5}k=\frac{37}{5}k$이므로

$$\tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{EH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\frac{\frac{16}{5}k}{\frac{37}{5}k}=\frac{16}{37}$$

이때 $\angle\mathrm{BEC}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{EBC}+\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{ECH}$이므로

$\beta+\theta=\alpha$에서 $\theta=\alpha-\beta$

그러므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

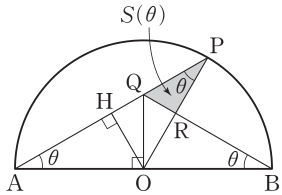
$$=\frac{\frac{4}{3}-\frac{16}{37}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{16}{37}}=\frac{148-48}{111+64}=\frac{4}{7}$$

즉, $\tan(\angle\mathrm{BEC})=\frac{4}{7}$이므로 $p=7,\ q=4$

따라서 $p+q=7+4=11$

답 11

3



점 O는 반원의 중심이므로 삼각형 PAO는 $\overline{OA}=\overline{OP}=1$인 이등변삼각형이고, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH는 선분 AP를 수직이등분하므로

$\overline{AP}=2\overline{AH}=2\cos\theta$

또 $\angle QAB=\angle QBA=\theta$에서 $\overline{QA}=\overline{QB}$이므로 점 Q는 선분 AB의 수직이등분선, 즉 점 O를 지나고 선분 AB에 수직인 직선 위의 점이다. 이때 직각삼각형 QAO에서

$\dfrac{\overline{AO}}{\overline{AQ}}=\cos\theta$, $\overline{AQ}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

그러므로

$\overline{PQ}=\overline{AP}-\overline{AQ}=2\cos\theta-\dfrac{1}{\cos\theta}$

한편 $\angle APO=\angle PAO=\theta$이므로 $\angle POB=2\theta$이고,

삼각형 ROB에서

$\angle ORB=\pi-(\angle ROB+\angle RBO)=\pi-3\theta$

삼각형 ROB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{OR}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{OB}}{\sin(\pi-3\theta)}$이고 $\overline{OB}=1$이므로

$\overline{OR}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

그러므로

$\overline{PR}=\overline{OP}-\overline{OR}=1-\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(2\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)\times\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\times\sin\theta$$

이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{2}\times\left(2\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)\times\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to 0+}\left(2\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)\times\lim_{\theta\to 0+}\left(1-\frac{1}{3}\times\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}\right)\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\times(2-1)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times 1=\frac{1}{3}$$

답 ②

04 여러 가지 미분법

유제				본문 45~53쪽
1 ③	2 ②	3 ③	4 ③	5 15
6 ④	7 ③	8 ②	9 ⑤	10 ⑤

1 $f(2)=\dfrac{2+2}{2^2}=1$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(2+h)-1\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}=x^{-1}+2x^{-2}$이므로

$$f'(x)=-x^{-1-1}+2\times(-2x^{-2-1})=-x^{-2}-4x^{-3}$$
$$=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}$$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(2+h)-1\}=f'(2)=-\frac{1}{4}-\frac{4}{8}=-\frac{3}{4}$$

답 ③

2 $f(x)=\tan x+\sec x$에서

$$f'(x)=(\tan x)'+(\sec x)'$$
$$=\sec^2 x+\sec x\tan x$$
$$=\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2+\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

$f'(x)=2$에서

$\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}=2$, $1+\sin x=2\cos^2 x$

$1+\sin x=2(1-\sin^2 x)$

$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$\sin x=-1$ 또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

그런데 $f(x)=\tan x+\sec x$에서 $\cos x\neq 0$, 즉 $\sin x\neq 1$이고 $\sin x\neq -1$이어야 하므로

$\sin x=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$이고

$\alpha_1=\dfrac{\pi}{6}$, $\alpha_2=\dfrac{5}{6}\pi$, $\alpha_3=2\pi+\alpha_1$, $\alpha_4=2\pi+\alpha_2$, $\cdots$이므로

$$f(\alpha_4)=\tan\left(2\pi+\frac{5}{6}\pi\right)+\sec\left(2\pi+\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$=\tan\frac{5}{6}\pi+\sec\frac{5}{6}\pi$$

$$=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$=-\sqrt{3}$$

답 ②

3 $f(x)=\sin \pi x$에서

$f'(x)=\cos \pi x\times(\pi x)'=\pi \cos \pi x$이므로

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\pi \cos \frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

답 ③

4 $f(x)=\ln(e^x+1)$에서

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}$$
$$=\frac{(e^x+1)-1}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1} \quad \cdots\cdots (*)$$

x의 값이 증가하면 e^x+1의 값이 증가하고 $\frac{1}{e^x+1}$의 값은 감소하므로 $f'(x)$는 증가한다.

그러므로 닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f'(x)$는 $x=a$에서 최대이고 최댓값은

$f'(a)=\frac{e^a}{e^a+1}=\frac{4}{5}$

$5e^a=4e^a+4$, $e^a=4$

따라서 $a=\ln 4=2\ln 2$

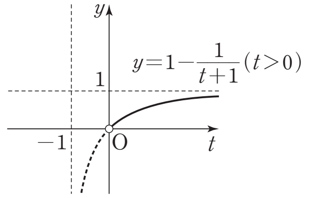
답 ③

참고

$(*)$에서 $e^x=t\ (t>0)$으로 놓으면

$1-\frac{1}{e^x+1}=1-\frac{1}{t+1}$

이므로 유리함수 $y=1-\frac{1}{t+1}\ (t>0)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$가 증가함을 보일 수 있다.



5 $x=(t+1)\sqrt{t}=t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}-1}+\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{t}+\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{3t+1}{2\sqrt{t}}$$

$y=t+\frac{1}{t}=t+t^{-1}$에서

$$\frac{dy}{dt}=1+(-1)\times t^{-1-1}=1-t^{-2}=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{3t+1}{2\sqrt{t}}}=\frac{2\sqrt{t}(t^2-1)}{t^2(3t+1)}$$

따라서 $t=4$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값 m은

$m=\frac{4\times15}{16\times13}=\frac{15}{52}$

이므로

$52m=15$

답 15

6 $x=\cos^3\theta+\cos\theta$에서

$$\frac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta\times(-\sin\theta)-\sin\theta$$
$$=-3\sin\theta\cos^2\theta-\sin\theta$$

$y=\sin^2\theta\cos\theta$에서

$$\frac{dy}{d\theta}=2\sin\theta\times\cos\theta\times\cos\theta+\sin^2\theta\times(-\sin\theta)$$
$$=2\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta}{-3\sin\theta\cos^2\theta-\sin\theta}$$
$$=\frac{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}{-3\cos^2\theta-1}$$
$$=\frac{2\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)}{-3\cos^2\theta-1}$$
$$=\frac{3\cos^2\theta-1}{-3\cos^2\theta-1}$$

점 P에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{3\cos^2\theta-1}{-3\cos^2\theta-1}=\frac{1}{2}$$

$6\cos^2\theta-2=-3\cos^2\theta-1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

따라서 점 P의 y좌표는

$$y=\sin^2\theta\cos\theta$$
$$=(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$
$$=\frac{8}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{27}$$

답 ④

7 $x+\tan y=2$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(\tan y)=\frac{d}{dx}(2)$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(\tan y)=\sec^2 y\times\frac{dy}{dx}$$

이므로

$$1+\sec^2 y\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sec^2 y}=-\cos^2 y$$

따라서 점 $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$-\cos^2\frac{\pi}{4}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

답 ③

8 곡선 $x+\log_2(x+y)=y$가 직선 $y=x+2$와 점 P에서 만나므로 점 P의 x좌표를 구하면

$x+\log_2(x+x+2)=x+2$에서

$\log_2(2x+2)=2$

$2x+2=4$, $x=1$

$x=1$을 $y=x+2$에 대입하면 $y=3$

그러므로 P$(1, 3)$이다.

$x+\log_2(x+y)=y$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}\{\log_2(x+y)\}=\frac{d}{dx}(y) \quad \cdots\cdots ㉠$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}\{\log_2(x+y)\}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\ln(x+y)}{\ln 2}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{d}{dx}\{\ln(x+y)\}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{\frac{d}{dx}(x+y)}{x+y}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}$$
$$=\frac{1}{(x+y)\ln 2}+\frac{1}{(x+y)\ln 2}\times\frac{dy}{dx}$$

이므로 ㉠에서

$$1+\frac{1}{(x+y)\ln 2}+\frac{1}{(x+y)\ln 2}\times\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

$$(x+y)\ln 2+1+\frac{dy}{dx}=(x+y)\ln 2\times\frac{dy}{dx}$$

$$\{(x+y)\ln 2-1\}\frac{dy}{dx}=(x+y)\ln 2+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)\ln 2+1}{(x+y)\ln 2-1}\left(\text{단, } x+y\neq\frac{1}{\ln 2}\right)$$

따라서 점 P$(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{4\ln 2+1}{4\ln 2-1}$$

답 ②

9 $h(x)=\{g(x)\}^2$에서 $h'(x)=2g(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=2g(1)g'(1)$ ⋯⋯ ㉠

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$에서

$$f(a)=\frac{2}{1+e^{a+1}}=1$$

$1+e^{a+1}=2$, $e^{a+1}=1$

$a+1=0$, 즉 $a=-1$

그러므로 $g(1)=-1$이고 $f(-1)=1$이다. ⋯⋯ ㉡

$$f(x)=\frac{2}{1+e^{x+1}}=2(1+e^{x+1})^{-1}\text{에서}$$

$$f'(x)=-2(1+e^{x+1})^{-2}\times(1+e^{x+1})'$$
$$=\frac{-2e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2}$$

이므로 $f'(-1)=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

㉡과 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(1)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$h'(1)=2g(1)g'(1)=2\times(-1)\times(-2)=4$

답 ⑤

10 $f(x)=x\sin 2x$에서

$$f'(x)=(x)'\times\sin 2x+x\times(\sin 2x)'$$
$$=\sin 2x+x\cos 2x\times(2x)'$$
$$=\sin 2x+2x\cos 2x$$
$$f''(x)=\cos 2x\times(2x)'+(2x)'\times\cos 2x$$
$$+2x\times(-\sin 2x)\times(2x)'$$

$=2\cos 2x+2\cos 2x-4x\sin 2x$

$=4\cos 2x-4x\sin 2x$

따라서

$f''\left(\frac{3}{4}\pi\right)=0-3\pi\times(-1)=3\pi$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 54~55쪽

1 ③	2 ③	3 ⑤	4 ③	5 ②
6 ⑤	7 ①	8 ①	9 ⑤	

1 $f'(x)=\frac{(x^2-2x)'\times(x+1)-(x^2-2x)\times(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=\frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x)}{(x+1)^2}$

$=\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

이므로

$f'(1)=\frac{1}{4}$

답 ③

2 $(g\circ f)(x)=e^{2x}$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=2e^{2x}$

$x=0$을 대입하면

$g'(f(0))f'(0)=2$

$f(0)=1$, $f'(0)=2$이므로

$g'(1)\times 2=2$

따라서 $g'(1)=1$

답 ③

3 $f(x)=2\sin^2 x-\cos^4 x$에서

$f'(x)=2\times 2\sin x\times\cos x-4\cos^3 x\times(-\sin x)$

$=4\sin x\cos x+4\sin x\cos^3 x$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{8}=3$

답 ⑤

4 $x=\ln 2t$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{(2t)'}{2t}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}$

$y=t^2-6t$에서 $\frac{dy}{dt}=2t-6$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-6}{\frac{1}{t}}$

$=2t^2-6t=2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}\ (t>0)$

따라서 $\frac{dy}{dx}$는 $t=\frac{3}{2}$에서 최소이고 최솟값은

$-\frac{9}{2}$이다.

답 ③

5 $x\left(y+\frac{1}{2}\right)=e^y$에서 $xy+\frac{1}{2}x=e^y$

y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{d}{dx}(e^y)$

$y+x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}=e^y\frac{dy}{dx}$

$(e^y-x)\frac{dy}{dx}=y+\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\frac{1}{2}}{e^y-x}=\frac{2y+1}{2(e^y-x)}$ (단, $e^y\neq x$)

따라서 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$

답 ②

6 $f(x)=\tan\frac{x}{2}$에서

$f'(x)=\sec^2\frac{x}{2}\times\left(\frac{x}{2}\right)'$

$=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

따라서

$g'\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sec^2\frac{\pi}{6}}$

$=2\cos^2\frac{\pi}{6}=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=\frac{3}{2}$

답 ⑤

7 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(2)=3$

또한 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=5$

$f(2)=3$, $f'(2)=5$이므로 $g(3)=2$이고

$g'(3)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{5}$

따라서

$g(3)+g'(3)=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$

답 ①

8 $f(x)=(x+1)e^x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x+1)'\times e^x+(x+1)\times(e^x)'\\&=e^x+(x+1)e^x\\&=(x+2)e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=(x+2)'\times e^x+(x+2)\times(e^x)'\\&=e^x+(x+2)e^x\\&=(x+3)e^x\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f'(1-h)-f'(1)}{h}&=-\lim_{h\to 0}\frac{f'(1-h)-f'(1)}{-h}\\&=-f''(1)\\&=-4e\end{aligned}$$

답 ①

9 $f(x)=ax^2+\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$에서

$f'(x)=2ax+4\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$

$f''(x)=2a-16\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$

이므로

$$\begin{aligned}f''\left(\frac{\pi}{3}\right)&=2a-16\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\&=2a-16\sin\frac{3}{2}\pi\\&=2a+16\end{aligned}$$

따라서 $2a+16=20$에서

$a=2$

답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 56~57쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ⑤	5 ①
6 ③	7 ②	8 ③		

1 $g(x)=4^{x^2+1}=(2^2)^{x^2+1}=(2^{x^2+1})^2=\{f(x)\}^2$에서

$g'(x)=2f(x)f'(x)$이므로

$\frac{g'(n)}{f'(n)}=\frac{2f(n)f'(n)}{f'(n)}=2f(n)=2\times 2^{n^2+1}=2^{n^2+2}$

따라서 $\log_2\frac{g'(n)}{f'(n)}=n^2+2$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}\log_2\frac{g'(n)}{f'(n)}&=\sum_{n=1}^{5}(n^2+2)\\&=\frac{5\times 6\times 11}{6}+2\times 5\\&=55+10=65\end{aligned}$$

답 ②

참고

$f(x)=2^{x^2+1}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=2^{x^2+1}\ln 2\times(x^2+1)'\\&=2x\times 2^{x^2+1}\ln 2\\&=x\times 2^{x^2+2}\ln 2\end{aligned}$$

$g(x)=4^{x^2+1}$에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=4^{x^2+1}\ln 4\times(x^2+1)'\\&=2x\times 4^{x^2+1}\times 2\ln 2\\&=x\times 4^{x^2+2}\ln 2\\&=x\times 2^{2(x^2+2)}\ln 2\end{aligned}$$

$\frac{g'(n)}{f'(n)}=\frac{n\times 2^{2(n^2+2)}\ln 2}{n\times 2^{n^2+2}\ln 2}=2^{n^2+2}$

2 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$에서

$$\begin{aligned}a&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\times x\right\}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\times\lim_{x\to 0}x\\&=1\times 0=0\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}f'(a)=f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x}-0}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1\end{aligned}$$

이므로 $b=f'(a)=1$

$x\neq 0$일 때,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left\{\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right\}'\\&=\frac{\{\ln(1+x^2)\}'\times x-\ln(1+x^2)\times(x)'}{x^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\times x-\ln(1+x^2)\times 1}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}-\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

이므로

$f'(b)=f'(1)=1-\ln 2$

답 ③

3 $t=t_1\ (t_1>0)$에 대응하는 점의 좌표를 $(b,\ -2)$라 하면

$b=\frac{2}{3}t_1\sqrt{t_1},\ -2=\frac{1}{2}t_1^2+at_1$ …… ㉠

$x=\frac{2}{3}t\sqrt{t}=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}-1}=t^{\frac{1}{2}}=\sqrt{t}$,

$y=\frac{1}{2}t^2+at$에서 $\frac{dy}{dt}=t+a$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{t+a}{\sqrt{t}}$ (단, $t>0$)

$t=t_1$에 대응하는 점에서의 접선이 직선 $y=-2$이므로

$\frac{dy}{dx}=0$에서

$\frac{t_1+a}{\sqrt{t_1}}=0$, 즉 $t_1=-a$

㉠에서 $-2=\frac{1}{2}\times(-a)^2+a\times(-a)=-\frac{1}{2}a^2$

$a^2=4$

이때 $t_1=-a>0$에서 $a<0$이므로 $a=-2,\ t_1=2$

$b=\frac{2}{3}\times 2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

따라서 $ab=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$

답 ①

4 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $|\tan x-1|=0$, 즉 $\tan x=1$이려면

$x=\frac{\pi}{4}$

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$g(x)=(x-a)(\tan x-1)$이라 하면

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}$에서 $f(x)=-g(x)$

$\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $f(x)=g(x)$

그러므로 함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하면

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 미분가능하다.

함수 $g(x)$는 미분가능한 함수이고 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{-\left\{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=-g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하려면

$-g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 즉 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

$g'(x)=(\tan x-1)+(x-a)\sec^2 x$이므로

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0+\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\times 2=0$에서 $a=\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}$에서

$f(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)|\tan x-1|=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(\tan x-1)$

이고

$f'(x)=-(\tan x-1)-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\times\sec^2 x$

따라서

$f'(-a)=f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2+\frac{\pi}{2}\times 2=\pi+2$

답 ⑤

5 $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}+1$에 대하여

$f'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}$

모든 실수 x에 대하여 $2e^{2x}>0,\ 2e^{-2x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$f'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}\ge 2\sqrt{2e^{2x}\times 2e^{-2x}}=4$

(단, 등호는 $2e^{2x}=2e^{-2x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

즉, $f'(x)\ge f'(0)=4$이므로 함수 $f(x)$의 역함수 $y=g(x)$에 대하여

$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}\le\frac{1}{f'(0)}$ …… ㉠

이때 $f(0)=1$에서 $g(1)=0$이므로

$f'(0)=\frac{1}{g'(1)}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$g'(x) \le \dfrac{1}{f'(0)} = g'(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x \ne 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > f'(0)$을 만족시키므로 역함수 $g(x)$는 $x \ne 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) < g'(1)$이다.

따라서 $a=1$이고

$g'(a) = g'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{4}$

이므로

$a + g'(a) = \dfrac{5}{4}$

답 ①

6 함수 $f(x) = \cos 3x - 2\sin 3x$에서

$f'(x) = -3\sin 3x - 6\cos 3x$

$f''(x) = -9\cos 3x + 18\sin 3x$

$f(x) = f''(x)$에서

$\cos 3x - 2\sin 3x = -9\cos 3x + 18\sin 3x$

$\cos 3x = 2\sin 3x$

이때 $\cos 3x = 0$이면 $\sin 3x = 0$이고

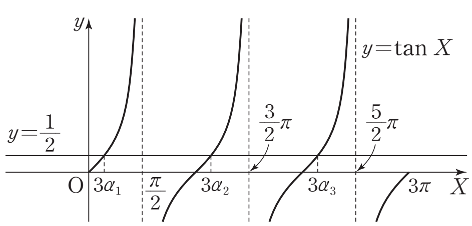
$\sin^2 3x + \cos^2 3x \ne 1$이 되어 모순이다.

그러므로 $\cos 3x \ne 0$이다.

$\cos 3x = 2\sin 3x$의 양변을 $\cos 3x$로 나누면

$\tan 3x = \dfrac{1}{2}$

$3x = X$라 하면 $0 \le X \le 3\pi$이고 함수 $y = \tan X$의 주기가 π이므로 그림과 같이 함수 $y = \tan X$의 그래프와 직선 $y = \dfrac{1}{2}$이 서로 다른 세 점에서 만난다. 이때 $\tan 3x = \dfrac{1}{2}$의 세 실근이 α_1, α_2, α_3이므로 $\tan X = \dfrac{1}{2}$의 세 실근은 $3\alpha_1$, $3\alpha_2$, $3\alpha_3$이다.



$\tan X = \dfrac{1}{2}$에서

$\dfrac{\sin X}{\cos X} = \dfrac{1}{2}$, 즉 $\cos X = 2\sin X$

$\sin^2 X + \cos^2 X = 1$에서 $\sin^2 X + 4\sin^2 X = 1$

$\sin^2 X = \dfrac{1}{5}$이므로 $\sin X = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\sin X = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$0 < 3\alpha_1 < \dfrac{\pi}{2}$이고 $3\alpha_2 = 3\alpha_1 + \pi$, $3\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\pi$이므로

$\sin(3\alpha_1) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\sin(3\alpha_2) = \sin(3\alpha_1 + \pi) = -\sin(3\alpha_1) = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$\sin(3\alpha_3) = \sin(3\alpha_1 + 2\pi) = \sin(3\alpha_1) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서

$\sin(3\alpha_1) - \sin(3\alpha_2) + \sin(3\alpha_3) = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

답 ③

7 $g(x) = \dfrac{f(x)+1}{\sin^2(\pi x)+1}$에서

$g'(x)$

$= \dfrac{f'(x)\{\sin^2(\pi x)+1\} - \{f(x)+1\} \times 2\pi \sin(\pi x)\cos(\pi x)}{\{\sin^2(\pi x)+1\}^2}$ …… ㉠

조건 (가)의 양변을 미분하면

$-g'(-x) = -g'(x)$, 즉 $g'(-x) = g'(x)$ …… ㉡

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(-x) = -g(x)$, 즉 $g(x) = -g(-x)$이므로

$\dfrac{f(x)+1}{\sin^2(\pi x)+1} = -\dfrac{f(-x)+1}{\sin^2(-\pi x)+1}$

$f(x) + 1 = -f(-x) - 1$

즉, $f(x) + f(-x) = -2$ …… ㉢

㉢에 $x=0$을 대입하면

$f(0) + f(0) = -2$에서 $f(0) = -1$

조건 (나)에서 $f(-1) = f(0) + 4 = 3$

㉢에 $x=1$을 대입하면 $f(1) + f(-1) = -2$에서

$f(1) = -5$

㉡에서 $g'(1) = g'(-1)$이고 ㉠에서 $g'(-1) = f'(-1)$이므로

$g'(1) = f'(-1)$ …… ㉣

조건 (나)에서 $f'(-1) = f(1) + 3 = -2$ …… ㉤

㉣, ㉤에서 $g'(1) = -2$

답 ②

8 직선 $y = -2x + t$가 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표가 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ $(\alpha(t) > 0,\ \beta(t) < 0)$이므로

$\log_2\{\alpha(t)+1\} = -2\alpha(t) + t$ …… ㉠

$\{\beta(t)\}^2 = -2\beta(t) + t$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\log_2\{\alpha(t)+1\} + 2\alpha(t) = \{\beta(t)\}^2 + 2\beta(t)$ …… ㉢

$\alpha(k) = 3$이라 하면 구하는 기울기는 $t = k$일 때

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}$의 값, 즉 $\dfrac{\beta'(k)}{\alpha'(k)}$이다.

㉢에서 $\{\beta(k)\}^2+2\beta(k)-8=0$

$\{\beta(k)+4\}\{\beta(k)-2\}=0$

$\beta(k)<0$이므로 $\beta(k)=-4$

㉠의 양변을 미분하면

$\dfrac{\alpha'(t)}{\{\alpha(t)+1\}\ln 2}=-2\alpha'(t)+1$

이 식에 $t=k$를 대입하면 $\alpha(k)=3$이므로

$\dfrac{\alpha'(k)}{4\ln 2}=-2\alpha'(k)+1$, 즉 $\alpha'(k)=\dfrac{4\ln 2}{8\ln 2+1}$

㉡의 양변을 미분하면 $2\beta(t)\beta'(t)=-2\beta'(t)+1$

이 식에 $t=k$를 대입하면 $\beta(k)=-4$이므로

$-8\beta'(k)=-2\beta'(k)+1$, 즉 $\beta'(k)=-\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 기울기는

$\dfrac{\beta'(k)}{\alpha'(k)}=\beta'(k)\times\dfrac{1}{\alpha'(k)}=-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{8\ln 2+1}{4\ln 2}$

$=-\dfrac{8\ln 2+1}{24\ln 2}$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 58쪽

1 ⑤　　2 12　　3 ⑤

1 조건 (가)에서 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\ln|f(x)+1|$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+1\neq0$이다.

이때 조건 (나)에서 $1\le f(2)<10$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x)>-1$ …… ㉠

$g(x)=\ln|f(x)+1|=\ln\{f(x)+1\}$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=0$이므로 $g(1)=0$

$g(1)=\ln\{f(1)+1\}=0$에서 $f(1)+1=1$이므로

$f(1)=0$ …… ㉡

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=4$

이고 $g(x)=\ln\{f(x)+1\}$에서 $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)+1}$

$g'(1)=\dfrac{f'(1)}{f(1)+1}=\dfrac{f'(1)}{0+1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=4$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $f(1)=0$, $f'(1)\neq0$이므로 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=a(x-1)(x-b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$, $b\neq1$)

로 놓을 수 있다.

이때 ㉠을 만족시키려면 $a>0$이어야 한다.

$f'(x)=a\{(x-b)+(x-1)\}$

㉢에서 $f'(1)=a(1-b)=4$이므로

$b=1-\dfrac{4}{a}$ …… ㉣

곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\dfrac{1+b}{2}$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은

$f\left(\dfrac{1+b}{2}\right)=a\times\dfrac{b-1}{2}\times\dfrac{1-b}{2}=\dfrac{a}{4}\times\left(-\dfrac{4}{a}\right)\times\dfrac{4}{a}=-\dfrac{4}{a}$

㉠에서 $-\dfrac{4}{a}>-1$이고 $a>0$이므로 $a>4$

$f(2)=a\times1\times\left(1+\dfrac{4}{a}\right)=a+4>8$

이고 조건 (나)에서 $f(2)$는 10보다 작은 자연수이므로

$f(2)=9$

즉, $f(2)=a+4=9$에서 $a=5$

㉣에서 $b=\dfrac{1}{5}$

따라서 $f(x)=5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)=(x-1)(5x-1)$이고

$g(x)=\ln\{(x-1)(5x-1)+1\}$이므로

$g(3)=\ln(2\times14+1)=\ln 29$

답 ⑤

2 $f(x)=(x^2+a)e^{-2x}$에서

$f'(x)=2xe^{-2x}-2(x^2+a)e^{-2x}=-2(x^2-x+a)e^{-2x}$

$f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이고,

$f'(k)\neq0$이면 $(f^{-1})'(c)=\dfrac{1}{f'(k)}$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키려면 $f'(k)=0$이고 $f'(x)=0$인 x가 $x=k$뿐이어야 한다.

$f'(x)=-2(x^2-x+a)e^{-2x}=0$에서 $x^2-x+a=0$

이차방정식 $x^2-x+a=0$의 실근이 $x=k$뿐이어야 하므로

$x^2-x+a=(x-k)^2=x^2-2kx+k^2$

$2k=1$이고 $a=k^2$

$k=\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{1}{4}$

이때

$f(x)=\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)e^{-2x}$,

$f'(x)=-2\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)e^{-2x}=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2e^{-2x}$

$c=f(k)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)e^{-1}=\frac{1}{2e}$

$g(x)=x^3+bx$에서 $g'(x)=3x^2+b$

$h=f\circ g$에서 $h^{-1}=(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$이고

$g(0)=0$에서 $g^{-1}(0)=0$이므로

$$\begin{aligned}h^{-1}(f(0))&=g^{-1}(f^{-1}(f(0)))\\&=g^{-1}(0)=0\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}(h^{-1})'(f(0))&=\frac{1}{h'(h^{-1}(f(0)))}\\&=\frac{1}{h'(0)}=\frac{1}{f'(g(0))g'(0)}\\&=\frac{1}{f'(0)g'(0)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}\times b}=-12e\end{aligned}$$

에서 $b=\frac{1}{6e}$

따라서 $\frac{c}{ab}=\frac{\frac{1}{2e}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{6e}}=12$

답 12

참고

두 함수 $f(x)=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)e^{-2x}$, $g(x)=x^3+\frac{1}{6e}x$는

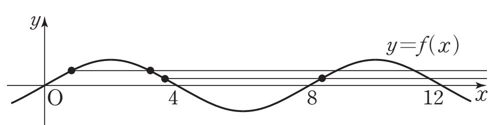
모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2e^{-2x}\le0$, $g'(x)=3x^2+\frac{1}{6e}>0$

이므로 각각 역함수가 존재한다.

3 ㄱ. 함수 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 x축에 평행한 직선 중 $x\ge t$인 부분을 나타내면 그림과 같다.



이때 $t>0$에서 함수 $g(t)$는

$0<t<2$일 때, $t_1=4-t$이므로 $g(t)=4-2t$

$2\le t<6$일 때, $t_1=12-t$이므로 $g(t)=12-2t$

⋮

이때

$\lim_{t\to2-}g(t)=0$, $\lim_{t\to2+}g(t)=8$, $g(2)=8$

이므로 $\alpha_1=2$, $g(\alpha_1)=g(2)=8$에서

$\alpha_1+g(\alpha_1)=10$ (참)

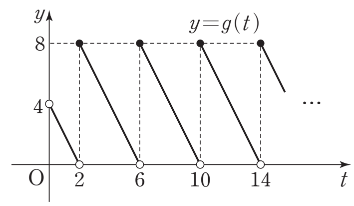
ㄴ. $0<t<2$일 때, $g(t)=4-2t$

$4n-2\le t<4n+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$\frac{t+t_1}{2}=4n+2$에서 $t_1=8n+4-t$이므로

$g(t)=t_1-t=8n+4-2t$

함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$\alpha_k=4k-2$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

모든 자연수 k에 대하여

$\lim_{t\to\alpha_k-}g(t)=\lim_{t\to(4k-2)-}g(t)=0$,

$g(\alpha_k)=g(4k-2)=8$

이므로 $g(\alpha_k)-\lim_{t\to\alpha_k-}g(t)=8$ (참)

ㄷ. $h(t)=g(\sqrt{t})$라 하면

$0<t<2^2$일 때, $h(t)=g(\sqrt{t})=4-2\sqrt{t}$이고

$h'(t)=-2\times\frac{1}{2\sqrt{t}}=-\frac{1}{\sqrt{t}}$ …… ㉠

$(4n-2)^2\le t<(4n+2)^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$h(t)=g(\sqrt{t})=8n+4-2\sqrt{t}$이고

$$\begin{aligned}h'(t)&=-2\times\frac{1}{2\sqrt{t}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{t}}\ (\text{단, } t\ne(4n-2)^2)\end{aligned}$$ …… ㉡

$0<\alpha_1=2<2^2$이고, $\alpha_k=4k-2$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$는 모든 자연수 n에 대하여

$\alpha_k=4k-2\ne(4n-2)^2$

이므로 ㉠, ㉡에서

$h'(\alpha_k)=-\frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

그러므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\alpha_k}\frac{t-\alpha_k}{g(\sqrt{t})-g(\sqrt{\alpha_k})}&=\lim_{t\to\alpha_k}\frac{1}{\frac{h(t)-h(\alpha_k)}{t-\alpha_k}}\\&=\frac{1}{h'(\alpha_k)}=-\sqrt{\alpha_k}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{t\to\alpha_k}\frac{t-\alpha_k}{g(\sqrt{t})-g(\sqrt{\alpha_k})}\right\}^2&=\sum_{k=1}^{10}(-\sqrt{\alpha_k})^2=\sum_{k=1}^{10}(4k-2)\\&=\frac{10(2+38)}{2}=200\ (\text{참})\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 도함수의 활용

유제 본문 61~69쪽

1 ⑤	2 ⑤	3 ⑤	4 8	5 10
6 ③	7 7	8 ⑤	9 ④	

1 $f(x)=\cos 2x+1$에서 $f'(x)=-2\sin 2x$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+1=1$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=-2x+\frac{\pi}{2}+1$

이 직선이 점 $\left(\frac{1}{2},\ a\right)$를 지나므로

$a=-1+\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}$

답 ⑤

2 곡선 $x^2-xy-2y^2=a^2$에 $y=0$을 대입하면 $x^2=a^2$

$x=a$ 또는 $x=-a$

그러므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-a,\ 0)$, $(a,\ 0)$이다.

$x^2-xy-2y^2=a^2$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(xy)-\frac{d}{dx}(2y^2)=\frac{d}{dx}(a^2)$

$2x-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-4y\frac{dy}{dx}=0$

$(x+4y)\frac{dy}{dx}=2x-y$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+4y}$ (단, $x\neq-4y$)

$a\neq0$이므로 두 점 $(-a,\ 0)$, $(a,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 각각

$\frac{-2a-0}{-a+0}=2$, $\frac{2a-0}{a+0}=2$

두 점 $(-a,\ 0)$, $(a,\ 0)$에서의 두 접선 l_1, l_2의 방정식은 각각

$y=2(x+a)$, $y=2(x-a)$

즉, $y=2x+2a$, $y=2x-2a$

평행한 두 직선 $y=2x+2a$, $y=2x-2a$ 사이의 거리는 점 $(-a,\ 0)$과 직선 $y=2x-2a$ 사이의 거리와 같다. 즉, 점 $(-a,\ 0)$과 직선 $2x-y-2a=0$ 사이의 거리가 4이므로

$\frac{|2\times(-a)-1\times0-2a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=4$

$a>0$이므로 $4a=4\sqrt{5}$

따라서 $a=\sqrt{5}$

답 ⑤

3 $f(x)=ax^2+\cos x$에서

$f'(x)=2ax-\sin x$, $f''(x)=2a-\cos x$

변곡점 P의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$이므로

$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2a-\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

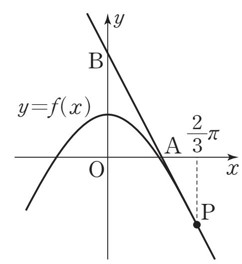
에서 $a=-\frac{1}{4}$

점 P에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{2}{3}\pi-\sin\frac{2}{3}\pi$

$=-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$

점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점 A, B에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$는 직선 AB의 기울기의 절댓값과 같으므로



$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\left|f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right|=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$

답 ⑤

참고

$f''(x)=-\frac{1}{2}-\cos x$에서 $x=\frac{2}{3}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 점 P는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

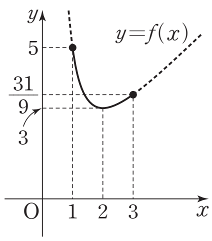
4 $f(x)=x+\frac{4}{x^2}=x+4x^{-2}$에서

$f'(x)=1-8x^{-3}=\frac{x^3-8}{x^3}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	3	↗	$\frac{31}{9}$



따라서 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이고 최댓값 $M=5$, $x=2$에서 최소이고 최솟값 $m=3$이므로
$M+m=8$

답 8

5 $f(x)=x^2e^{-x}$에서

$f'(x)=2xe^{-x}+x^2\times e^{-x}\times(-1)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$
$\qquad =x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 $g(0)=0$, $g(2)=0$

$t\ne 0$, $t\ne 2$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (t, t^2e^{-t})에서의 접선의 방정식은

$y=t(2-t)e^{-t}(x-t)+t^2e^{-t}$

$y=t(2-t)e^{-t}x+t^2(t-1)e^{-t}$

이므로 이 접선의 x절편은

$g(t)=\frac{t^2-t}{t-2}$ (단, $t\ne 0$, $t\ne 2$)

이때 $g(0)=0$이므로

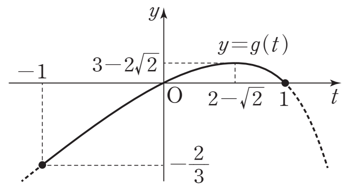
$$g(t)=\begin{cases}\frac{t^2-t}{t-2} & (t\ne 2)\\ 0 & (t=2)\end{cases}$$

$$g'(t)=\frac{(2t-1)(t-2)-(t^2-t)}{(t-2)^2}=\frac{t^2-4t+2}{(t-2)^2}\ (t\ne 2)$$

$g'(t)=0$에서 $t^2-4t+2=0$, $t=2\pm\sqrt{2}$

$-1\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{2}{3}$	↗	$3-2\sqrt{2}$	↘	0



닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $g(t)$는 $t=2-\sqrt{2}$에서 최대이고 최댓값은 $3-2\sqrt{2}$, $t=-1$에서 최소이고 최솟값은 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$3-2\sqrt{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3}-2\sqrt{2}$

이므로 $m=\frac{7}{3}$, $n=-2$

따라서

$30(m+n)=30\left\{\frac{7}{3}+(-2)\right\}=10$

답 10

6 $e^x>0$이므로 방정식 $x+ke^{-x}=0$의 실근은 방정식 $xe^x+k=0$의 실근과 같다.

$xe^x=-k$에서 $f(x)=xe^x$이라 하면 방정식 $x+ke^{-x}=0$의 실근이 존재하기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 만나야 한다.

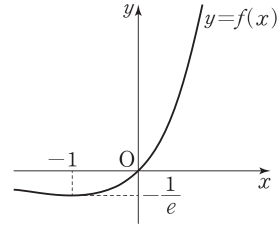
$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

이때 $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$, $\lim_{x\to\infty} xe^x=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $x+ke^{-x}=0$의 실근이 존재하려면

$-k\ge -\frac{1}{e}$, 즉 $k\le\frac{1}{e}$

이므로 k의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.

답 ③

7 $\tan x-\sqrt{3}\ge 4x-k$에서 $4x-\tan x+\sqrt{3}-k\le 0$

$f(x)=4x-\tan x+\sqrt{3}-k$라 하면

$$f'(x)=4-\sec^2 x=4-\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{(2\cos x+1)(2\cos x-1)}{\cos^2 x}$$

$0\le x<\frac{\pi}{2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}$

$0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}-k$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}\pi-k$	$\searrow$	

$0\le x<\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$4x-\tan x+\sqrt{3}-k\le 0$이 성립하려면

$\frac{4}{3}\pi-k\le 0$

$k\ge\frac{4}{3}\pi$이므로 k의 최솟값은 $\frac{4}{3}\pi$이다.

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$p+q=3+4=7$

답 7

8 $x=t+\sin t$에서 $\frac{dx}{dt}=1+\cos t$, $\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$

$y=\cos 2t$에서 $\frac{dy}{dt}=-2\sin 2t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\cos 2t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(-\sin t)^2+(-4\cos 2t)^2}$$
$$=\sqrt{\sin^2 t+16\cos^2 2t}$$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

답 ⑤

9 $x=at-\ln t$에서 $\frac{dx}{dt}=a-\frac{1}{t}$

$y=\ln t$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$

이므로 시각 $t\ (t>0)$에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{t^2}-\frac{2a}{t}+a^2}$$
$$=\sqrt{2\left(\frac{1}{t}-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}}$$

따라서 $\frac{1}{t}=\frac{a}{2}$, 즉 $t=\frac{2}{a}$에서 점 P의 속력은 최소이고 최솟값은

$\sqrt{\frac{a^2}{2}}=2$

$a^2=8$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 70~71쪽

1 ②	2 ②	3 ①	4 ⑤	5 ②
6 ②	7 ②	8 ④	9 ④	

1 $f(x)=\ln x$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t, \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=f'(t)(x-t)$

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$

$y=\frac{1}{t}x-1+\ln t$

이 직선이 $y=mx$와 같으려면

$m=\frac{1}{t}$, $-1+\ln t=0$

$-1+\ln t=0$에서 $t=e$

따라서 $m=\frac{1}{e}$

답 ②

2 $x=e^{t-1}$에서 $\frac{dx}{dt}=e^{t-1}$

$y=e^{-2t}+t$에서 $\frac{dy}{dt}=-2e^{-2t}+1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2e^{-2t}+1}{e^{t-1}}$$

$t=0$일 때

$x=e^{0-1}=\frac{1}{e}$, $y=e^0+0=1$,

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2e^0+1}{e^{0-1}}=-e$

이므로 점 $\left(\frac{1}{e},\ 1\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-e\left(x-\frac{1}{e}\right)$

$y=-ex+2$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=-e+2$

답 ②

3 $f(x)=x+\frac{4}{x}=x+4x^{-1}$에서

$f'(x)=1-4x^{-2}$

$=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$x\neq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

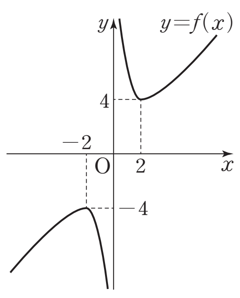
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘		↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값 $\alpha=-4$, $x=2$에서 극소이고 극솟값 $\beta=4$이므로

$\alpha-\beta=-4-4=-8$

답 ①

참고



4 $f(x)=e^{\sin 3x+kx}$에서

$f'(x)=e^{\sin 3x+kx}\times(\sin 3x+kx)'$

$=e^{\sin 3x+kx}\times(3\cos 3x+k)$

$e^{\sin 3x+kx}>0$이므로 $f'(x)=0$에서

$3\cos 3x+k=0$

$-3\leq 3\cos 3x\leq 3$이고, 함수 $f(x)$의 극값이 존재하려면 $3\cos 3x+k=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 하므로

$-3<-k<3$, 즉 $-3<k<3$

이어야 한다.

따라서 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이고 그 개수는 5이다.

답 ⑤

5 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}=(x^2+1)^{-1}$이라 하면

$f'(x)=-(x^2+1)^{-2}\times2x=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$=-\frac{2(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^3}$

$=\frac{2(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)>0$이고,

$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)<0$이다.

또한 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3}{4}$이므로 두 변곡점 A, B의 좌표는

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 ②

6 $f(x)=\cos x+x\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x+(\sin x+x\cos x)=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\cos x=0$

$0<x<2\pi$에서 $\cos x=0$이려면 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$0\leq x\leq 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↗	1

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이고

극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극소이고 극솟값은

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{3}{2}\pi$

또한 $f(0)=1$, $f(2\pi)=1$이다.

따라서 최댓값 $M=\frac{\pi}{2}$, 최솟값 $m=-\frac{3}{2}\pi$이므로

$M\times m=-\frac{3}{4}\pi^2$

답 ②

7 $x=\ln 3x+k$에서 $x-\ln 3x=k$

$f(x)=x-\ln 3x$라 하면 방정식 $x=\ln 3x+k$가 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 1이어야 한다.

$f'(x)=1-\frac{3}{3x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

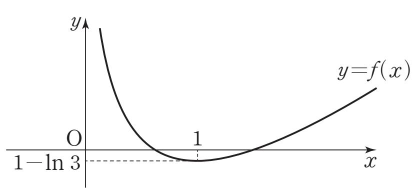
$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$1-\ln 3$	↗

이때 $\lim_{x\to 0+}(x-\ln 3x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}(x-\ln 3x)=\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 1이려면

$k=1-\ln 3=\ln e-\ln 3=\ln\frac{e}{3}$

답 ②

8 $ke^{x-2}\geq x$에서 $k\geq xe^{2-x}$

$f(x)=xe^{2-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{2-x}+x\times e^{2-x}\times(-1)$

$\quad=(1-x)e^{2-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	e	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은

$f(1)=e$

이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ke^{x-2}\geq x$, 즉

$k\geq xe^{2-x}$이 성립하려면 k는 $f(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다. 즉,

$k\geq f(1)=e$

따라서 실수 k의 최솟값은 e이다.

답 ④

9 $x=e^t+e^{-t}$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$

$y=e^t-e^{-t}$에서 $\frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+(e^t+e^{-t})^2}$

$\qquad=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$

따라서 $t=\ln 2$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{2(e^{2\ln 2}+e^{-2\ln 2})}=\sqrt{2\left(4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 72~73쪽

1 ② 2 ② 3 ④ 4 ④ 5 ③
6 ③ 7 ② 8 ⑤

1 함수 $f(x)$가 이계도함수를 가지며 $f'(1)=0$이므로

$f''(1)=-1+a+2=a+1<0$, 즉 $a<-1$

이면 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이다.

한편 $a=-1$일 때, $f''(x)=-x-\frac{1}{x}+2=-\frac{(x-1)^2}{x}$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음이다.

이때 $x=1$의 좌우에서 함수 $f'(x)$는 감소하고 $f'(1)=0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. 그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

따라서 $a\leq-1$이므로 정수 a의 최댓값은 -1이다.

답 ②

2 $f(x)=\left(\frac{1}{5}x^2-x+a\right)\sqrt{x}$에서

$$f'(x)=\left(\frac{2}{5}x-1\right)\sqrt{x}+\left(\frac{1}{5}x^2-x+a\right)\times\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2x\left(\frac{2}{5}x-1\right)+\left(\frac{1}{5}x^2-x+a\right)}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x^2-3x+a}{2\sqrt{x}}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$$f'(2)=\frac{4-6+a}{2\sqrt{2}}=0$$

$a=2$

그러므로 $f(x)=\left(\frac{1}{5}x^2-x+2\right)\sqrt{x}$,

$$f'(x)=\frac{x^2-3x+2}{2\sqrt{x}}=\frac{(x-1)(x-2)}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

$x\geq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$	0	↗	$\frac{6}{5}$	↘	$\frac{4\sqrt{2}}{5}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$$f(1)=\frac{6}{5}$$

답 ②

3 원점 O와 점 A$(t,\ 0)$을 이은 선분 OA를 $1:2$로 내분하는 점이 B이고, 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{-x}$과 만나는 점이 C이므로

B$\left(\frac{1}{3}t,\ 0\right)$, C$\left(\frac{1}{3}t,\ e^{-\frac{1}{3}t}\right)$

삼각형 OAC의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times e^{-\frac{1}{3}t}=\frac{1}{2}te^{-\frac{t}{3}}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t}{3}}-\frac{1}{3}te^{-\frac{t}{3}}\right)=\frac{1}{6}(3-t)e^{-\frac{t}{3}}$$

$f'(t)=0$에서 $t=3$이고 $0<t<3$에서 $f'(t)>0$, $t>3$에서 $f'(t)<0$이므로 함수 $f(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은

$$f(3)=\frac{3}{2}\times e^{-1}=\frac{3}{2e}$$

답 ④

4 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 A$(p,\ 0)$이라 하자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로

$g(p)=0$에서 $f(0)=p$

$f(x)=ax+\ln(3x+1)+2$에서

$f(0)=0+\ln 1+2=2$이므로

$p=2$이고 점 A$(2,\ 0)$이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 A$(2,\ 0)$에서의 접선이 점 $(7,\ 1)$을 지나므로 이 접선의 기울기는

$$g'(2)=\frac{1-0}{7-2}=\frac{1}{5}$$

$g(2)=0$, $f(0)=2$

이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$f'(0)=\frac{1}{g'(2)}=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $f(x)=ax+\ln(3x+1)+2$에서

$$f'(x)=a+\frac{3}{3x+1}$$

이므로

$$f'(0)=a+3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$a+3=5$

따라서 $a=2$

답 ④

5 $x+8-kxe^x=0$에서 k는 자연수, 즉 $k\neq0$이므로

$$\frac{1}{k}(x+8)=xe^x$$

그러므로 방정식 $x+8-kxe^x=0$의 실근은 방정식 $\frac{1}{k}(x+8)=xe^x$의 실근과 같으므로 방정식 $x+8-kxe^x=0$의 모든 실근이 1보다 작으려면 직선 $y=\frac{1}{k}(x+8)$과 곡선 $y=xe^x$이 $x<1$에서만 만나야 한다.

$f(x)=\frac{1}{k}(x+8)$, $g(x)=xe^x$이라 하자.

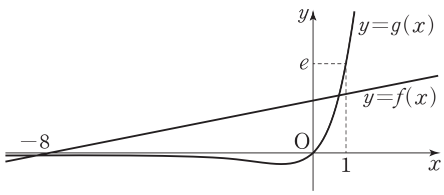
$g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$

실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



점 $(-8,\ 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선

$y=\frac{1}{k}(x+8)$과 곡선 $y=xe^x$은 두 점에서 만난다. 이때 한 교점의 x좌표는 -8보다 작다. 나머지 한 교점의 x좌표가 1보다 작으려면 $f(1)<g(1)$이어야 한다.

$\frac{9}{k}<e$, 즉 $k>\frac{9}{e}$

이때 $\frac{5}{2}<e<3$에서 $3<\frac{9}{e}<\frac{18}{5}$이므로 10 이하의 자연수 k는 4, 5, 6, $\cdots$, 10이고 그 개수는 7이다.

답 ③

6 $x=\ln(\cos t)$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t,\ \frac{d^2x}{dt^2}=-\sec^2 t$

$y=3\sin t$에서

$\frac{dy}{dt}=3\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-3\sin t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}&=\sqrt{(-\tan t)^2+(3\cos t)^2}\\&=\sqrt{\tan^2 t+9\cos^2 t}\\&=\sqrt{(\sec^2 t-1)+9\cos^2 t}\\&=\sqrt{\sec^2 t+9\cos^2 t-1}\end{aligned}$$

$0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $\sec^2 t>0,\ 9\cos^2 t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\sec^2 t+9\cos^2 t\ge 2\sqrt{\sec^2 t\times 9\cos^2 t}=2\times 3=6$

$\left(\text{단, 등호는 } \sec^2 t=9\cos^2 t\ \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right),\ \text{즉 } \cos t=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

점 P의 속력이 최소인 시각이 $t=\alpha$이므로 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고

$\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$이므로 $\sec^2\alpha=3,\ \sin^2\alpha=\frac{2}{3}$

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\sec^4 t+9\sin^2 t}$$

이므로 $t=\alpha$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{3^2+9\times\frac{2}{3}}=\sqrt{15}$

답 ③

참고

시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}&=\sqrt{(-\tan t)^2+(3\cos t)^2}\\&=\sqrt{\tan^2 t+9\cos^2 t}\\&=\sqrt{(\sec^2 t-1)+\frac{9}{\sec^2 t}}\\&=\sqrt{\left(\sec t-\frac{3}{\sec t}\right)^2+5}\end{aligned}$$

이므로 점 P의 속력은 $\sec t=\frac{3}{\sec t}$일 때 최소이다. 즉,

$\sec\alpha=\frac{3}{\sec\alpha},\ \sec^2\alpha=3,\ \cos^2\alpha=\frac{1}{3}$이다.

7 $x>0$이므로

$t(\ln x)^2=kx^2$에서 $k=\frac{t(\ln x)^2}{x^2}$

그러므로 두 곡선 $y=t(\ln x)^2,\ y=kx^2$이 서로 다른 두 점에서만 만나려면 직선 $y=k$와 곡선 $y=\frac{t(\ln x)^2}{x^2}$이 서로 다른 두 점에서만 만나야 한다.

$g(x)=\frac{t(\ln x)^2}{x^2}$이라 하자.

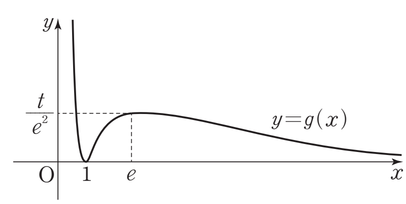
$$\begin{aligned}g'(x)&=t\times\frac{2\ln x\times\frac{1}{x}\times x^2-(\ln x)^2\times 2x}{x^4}\\&=2t\times\frac{(1-\ln x)\ln x}{x^3}\end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $\ln x=0$ 또는 $\ln x=1$, 즉 $x=1$ 또는 $x=e$

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		↘	0	↗	$\frac{t}{e^2}$	↘

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=k$와 곡선 $y=\frac{t(\ln x)^2}{x^2}$이 서로 다른 두 점에서만 만나려면

$k=\frac{t}{e^2}$, 즉 $f(t)=\frac{t}{e^2}$

$f'(t)=\frac{1}{e^2}$이므로 $\frac{f'(\alpha)}{f(2\alpha)}=\frac{\frac{1}{e^2}}{\frac{2\alpha}{e^2}}=\frac{1}{2\alpha}=6$

따라서 $\alpha=\frac{1}{12}$

답 ②

8 조건 (가)에 의하여 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

또한 조건 (나)에 의하여 $\frac{f'(x_4)-f'(x_3)}{x_4-x_3}<0$에서 평균값 정리에 의하여 $f''(c)<0$을 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(x_3,\ x_4)$에 존재한다. …… ㉠

$f'(x)=ae^{\sin(ax)}$에서 $a=0$이면 $f'(x)=0$이고 $f(x)$는 상수함수가 되어 두 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 $a\ne 0$이다.

모든 실수 x에 대하여 $e^{\sin(ax)}>0$이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$a>0$

$f'(x)=ae^{\sin(ax)}$에서

$f''(x)=ae^{\sin(ax)}\times a\cos(ax)=a^2e^{\sin(ax)}\cos(ax)$

$a>0$에서 $a^2>0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $e^{\sin(ax)}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 ㉠에 의하여 $0<x<\frac{\pi}{4}$인 어떤 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$, 즉 $\cos(ax)<0$이어야 한다.

$0<x<\frac{\pi}{4}$에서 $0<ax<\frac{\pi}{4}a$이므로

$\frac{\pi}{4}a>\frac{\pi}{2}$, 즉 $a>2$

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다.

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 74쪽

1 ④ **2** 41 **3** ②

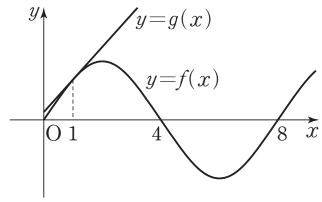
1 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, $g(x)=ax+b$라 하면

함수 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$이다.

$x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\le ax+b$, 즉 $f(x)\le g(x)$가 성립하기 위해서는 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 직선 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나야 한다.

이때 $a+b=g(1)$이므로 $a+b$가 최소일 때는 그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선과 일치할 때이다.



$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$에서 $f(1)=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$에서 $f'(1)=\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}(x-1)$

$y=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}x-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+\sqrt{2}$

따라서 $a_1=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$, $b_1=-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+\sqrt{2}$이므로

$a_1\times b_1=-\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{8}(4-\pi)$

답 ④

다른 풀이

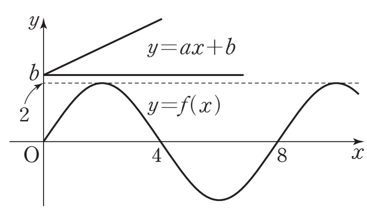
$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$라 하면 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$

$x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\le ax+b$가 성립하기 위해서는 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 직선 $y=ax+b$가 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나야 한다.

이때 $f(0)=0$이고 함수 $f(x)$의 최댓값이 2이므로 직선 $y=ax+b$의 y절편 b의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 살펴보자.

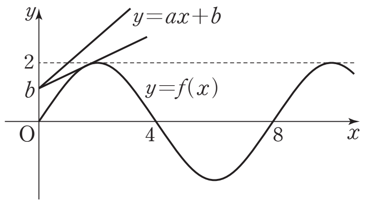
(i) $b\ge 2$인 경우

$a\ge 0$이므로 $a+b\ge 2$



(ii) $0\le b<2$인 경우

a는 점 $(0,\ b)$에서 곡선 $y=f(x)\ (0\le x<2)$에 그은 접선의 기울기보다 크거나 같아야 한다.



점 $(0,\ b)$에서 곡선 $y=f(x)\ (0\le x<2)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)\ (0\le t<2)$라 하자.

$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$에서 $f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(t,\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)(x-t)+2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

이 접선이 점 $(0,\ b)$를 지나므로

$b=-\frac{\pi}{2}t\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

이때 $a\ge\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$이므로

$a+b\ge\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-\frac{\pi}{2}t\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

$h(t)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-\frac{\pi}{2}t\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$라 하면

$$h'(t)=-\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+\frac{\pi^2}{8}t\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}(t-1)\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ (0<t<2)$$

$h'(t)=0$에서 $t=1$

$h'(1)=0$이고 $t=1$의 좌우에서 $h'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(t)$는 $t=1$에서 최소이고 최솟값은 $h(1)$이다. 그러므로

$a+b\ge h(t)\ge h(1)$

$=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여 $a+b$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

$a+b=\sqrt{2}$일 때, $t=1$이고

$a_1=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$,

$b_1=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+\sqrt{2}$이므로

$a_1\times b_1=\frac{\pi}{8}(4-\pi)$

2 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이고 $f(0)=1$이므로

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\sin(\pi f(x))$에서

$g'(x)=\pi\cos(\pi f(x))\times f'(x)$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이므로

$g'(0)=\pi\cos(\pi f(0))\times f'(0)=\pi\cos\pi\times f'(0)$

$=-\pi f'(0)=0$

에서 $f'(0)=0$ …… ㉠

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$이므로

$f'(0)=b=0$

또한 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극소이면 $x=0$의 좌우에서 $g'(x)=\pi\cos(\pi f(x))\times f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌어야 한다.

$f(0)=1$이고 $x=0$의 좌우에서 $\cos(\pi f(x))$의 부호는 모두 음이므로 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌어야 한다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

$f''(x)=-6x+2a$이므로 $f''(0)=2a<0$에서 $a<0$

함수 $f(x)=-x^3+ax^2+1\ (a<0)$은 $x>0$일 때

$f'(x)=-3x\left(x-\frac{2}{3}a\right)<0$

즉, $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 $x>0$에서 $f(x)<f(0)=1$이다.

조건 (나)에서 함수 $g(x)=\sin(\pi f(x))$가 최대가 될 때는 $\sin(\pi f(x))=1$이고 $f(x)<1$이므로

$f(x)=\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{7}{2},\ \cdots$

$x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 위의 값을 만족시키는 x의 값은 하나씩 존재한다. 즉,

$f(\alpha_1)=\frac{1}{2},\ f(\alpha_2)=-\frac{3}{2},\ f(\alpha_3)=-\frac{7}{2}$ …… ㉢

조건 (나)에서 $\alpha_2=1$이고 ㉢에 의하여

$f(1)=-1+a+1=-\frac{3}{2}$

에서 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+1$이므로

$f(-4)=64-24+1=41$

답 41

3 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x\le 0) \\ bxe^{-x}+x & (x>0) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x^2+ax)=0$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(bxe^{-x}+x)=0$, $f(0)=0$

이므로 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0-}(x+a)=a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{bxe^{-x}+x}{x}=\lim_{x\to 0+}(be^{-x}+1)=b+1$$

이므로 $x=0$에서 미분가능하려면 $a=b+1$ ······ ㉠

ㄱ. ㉠에서 $a=2$이면 $b=1$이므로

$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & (x\le 0) \\ xe^{-x}+x & (x>0) \end{cases}$

에서 $t=1$일 때 점 P의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{e}+1\right)$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{e}+1\right)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리 $g(1)$은

$$g(1)=\frac{\left|1\times 1-1\times\left(\frac{1}{e}+1\right)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2e}\ (\text{참})$$

ㄴ. ㉠에서

$f(x)=\begin{cases} x^2+(b+1)x & (x\le 0) \\ bxe^{-x}+x & (x>0) \end{cases}$

$x\le 0$일 때, 직선 $y=x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점을 구하면 $x^2+(b+1)x=x$, $x(x+b)=0$에서

$x=-b$ 또는 $x=0$

이므로 $x<-b$에서 $f(x)>x$이고 $-b\le x\le 0$에서 $f(x)\le x$

$x>0$일 때, 모든 양의 실수 x에 대하여

$f(x)-x=bxe^{-x}>0$이므로 $f(x)>x$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리

$$g(t)=\frac{|t-f(t)|}{\sqrt{2}}=\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\{f(t)-t\} & (t\le -b \text{ 또는 } t\ge 0) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\{t-f(t)\} & (-b<t<0) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

함수 $g(t)$는 $t=-b$, $t=0$에서 연속이고 $g(-b)=0$, $g(0)=0$이다.

(i) $t<-b$에서 $f'(t)=2t+b+1$이므로

$$g'(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\{f'(t)-1\}=\frac{\sqrt{2}}{2}(2t+b)<\frac{\sqrt{2}}{2}(-2b+b)=-\frac{\sqrt{2}}{2}b<0$$

그러므로 $t<-b$에서 함수 $g(t)$는 감소한다.

(ii) $-b<t<0$에서 $f'(t)=2t+b+1$이므로

$g'(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\{1-f'(t)\}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(2t+b)$

$g'(t)=0$에서 $t=-\frac{b}{2}$이고 $t=-\frac{b}{2}$의 좌우에서 함수 $g(t)$는 증가에서 감소로 바뀐다.

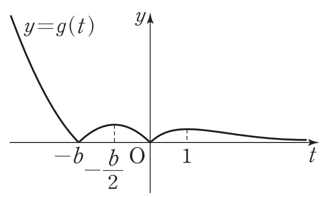
(iii) $t>0$에서

$f'(t)=be^{-t}+bte^{-t}\times(-1)+1$
$\quad=be^{-t}(1-t)+1$

$g'(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\{f'(t)-1\}=\frac{\sqrt{2}}{2}be^{-t}(1-t)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$이고 $t=1$의 좌우에서 함수 $g(t)$는 증가에서 감소로 바뀐다.

(i), (ii), (iii)과 $\lim_{t\to\infty} te^{-t}=0$에 의하여 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



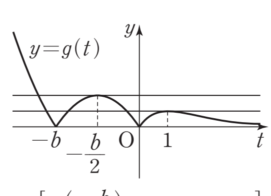
이때 $t=-b$ 또는 $t=0$일 때, 함수 $g(t)$는 극소이고 극솟값은 0이다.

함수 $g(t)$가 $t=-2$에서 극소이므로 $-b=-2$에서 $b=2$

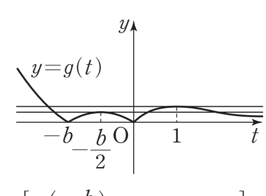
㉠에서 $a=b+1=3$이므로 $a+b=5$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $g(t)$는 $t=-\frac{b}{2}$, $t=1$에서 극대이다.

$g\left(-\frac{b}{2}\right)>g(1)$ 또는 $g\left(-\frac{b}{2}\right)<g(1)$이면 집합 $\left\{t\,\middle|\,g(t)=g\left(-\frac{b}{2}\right)\right\}$와 $\{t\,|\,g(t)=g(1)\}$의 원소의 개수는 2 또는 4가 되어 조건을 만족시키지 않는다.



$\left[g\left(-\frac{b}{2}\right)>g(1)\text{인 경우}\right]$

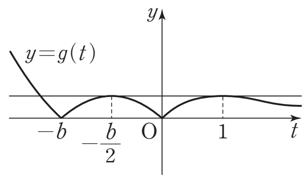


$\left[g\left(-\frac{b}{2}\right)<g(1)\text{인 경우}\right]$

$g\left(-\frac{b}{2}\right)=g(1)$이면 집합

$\left\{t \,\middle|\, g(t)=g\left(-\frac{b}{2}\right)\right\}=\{t\,|\,g(t)=g(1)\}$

이고 이 집합의 원소의 개수는 3이 되어 조건을 만족시킨다.



$\left[g\left(-\frac{b}{2}\right)=g(1)\right.$인 경우$\left.\right]$

㉡에서

$$g\left(-\frac{b}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\frac{b}{2}-f\left(-\frac{b}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{b}{2}-\left\{\left(-\frac{b}{2}\right)^2+(b+1)\times\left(-\frac{b}{2}\right)\right\}\right]$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}b^2$$

$$g(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\{f(1)-1\}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(\frac{b}{e}+1\right)-1\right\}=\frac{\sqrt{2}b}{2e}$$

이므로 $g\left(-\frac{b}{2}\right)=g(1)$이려면

$$\frac{\sqrt{2}}{8}b^2=\frac{\sqrt{2}b}{2e}$$

$b>0$이므로 $b=\frac{4}{e}$이고, ㉠에서 $a=\frac{4}{e}+1$

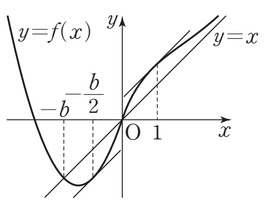
따라서 $a+b=1+\frac{8}{e}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표가 $x=-b$, $x=0$이고, 이 x의 값이 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 값과 같다. 또한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기가 1이 되는 x의 값이 $x=-\frac{b}{2}$와 $x=1$이고 이 x의 값이 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 값과 같다.

06 여러 가지 적분법

유제 본문 77~81쪽

1 ①	**2** ③	**3** ③	**4** ②	**5** ①
6 14				

1 $f(2)=\frac{a}{4}+\frac{b}{8}=1$에서

$2a+b=8$ …… ㉠

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}\right)dx$$
$$=\int_1^2(ax^{-2}+bx^{-3})\,dx$$
$$=\left[-\frac{a}{x}-\frac{b}{2x^2}\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{a}{2}-\frac{b}{8}\right)-\left(-a-\frac{b}{2}\right)$$
$$=\frac{a}{2}+\frac{3}{8}b$$

이므로 $\frac{a}{2}+\frac{3}{8}b=\frac{5}{2}$에서

$4a+3b=20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=4$

따라서 $a+b=6$

답 ①

2 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times 2$$
$$=2f'(x)$$

이므로 $2f'(x)=2^{x+1}-4$에서

$f'(x)=2^x-2$

$$f(x)=\int(2^x-2)\,dx$$
$$=\frac{2^x}{\ln 2}-2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=\frac{1}{\ln 2}+C=\frac{1}{\ln 4}$에서

$$C=\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=-\frac{1}{2\ln 2}$$

이므로

$$f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}-2x-\frac{1}{2\ln 2}$$

따라서

$f(-1)=\frac{1}{2\ln 2}+2-\frac{1}{2\ln 2}=2$

답 ③

3 $f'(x)=-xe^{-x}$이므로

$f(x)=\int(-xe^{-x})dx$이고,

$u(x)=-x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=-1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$f(x)=xe^{-x}-\int e^{-x}dx$

$=xe^{-x}+e^{-x}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1+C=1$이므로 $C=0$

즉, $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}$이다.

$f(1)=\frac{2}{e}$, $f'(1)=-\frac{1}{e}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의

점 $\left(1, \frac{2}{e}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{2}{e}=-\frac{1}{e}(x-1)$, 즉 $y=-\frac{1}{e}x+\frac{3}{e}$

$y=0$이면 $0=-\frac{1}{e}x+\frac{3}{e}$에서 $x=3$

따라서 구하는 접선의 x절편은 3이다.

답 ③

4 $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$에서

$t^2+1=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$이고,

$t=0$일 때 $s=1$, $t=x$일 때 $s=x^2+1$이므로

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int_1^{x^2+1}\frac{1}{2\sqrt{s}}ds=\int_1^{x^2+1}\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}ds$$

$$=\left[\sqrt{s}\right]_1^{x^2+1}=\sqrt{x^2+1}-1$$

즉, $f(x)=\sqrt{x^2+1}-1$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$\sqrt{x^2+1}-1=2$, $\sqrt{x^2+1}=3$

양변을 제곱하면

$x^2+1=9$, $x^2=8$, $x=\pm 2\sqrt{2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$는 두 점 $(-2\sqrt{2}, 2)$, $(2\sqrt{2}, 2)$에서 만나므로 두 점 사이의 거리는 $4\sqrt{2}$이다.

답 ②

참고

$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$에서 $\sqrt{t^2+1}=s$로 놓으면

$\frac{ds}{dt}=\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$이고

$t=0$일 때 $s=1$, $t=x$일 때 $s=\sqrt{x^2+1}$이므로

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int_1^{\sqrt{x^2+1}}ds=\left[s\right]_1^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\sqrt{x^2+1}-1$$

5 등식

$$\int_1^{x+1}(e^{t-1}+e^{1-t})f(t-1)dt=e^{2x}+e^{-2x}-2$$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(e^x+e^{-x})f(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$

$=2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})$

$f(x)=2(e^x-e^{-x})$

따라서

$$\int_0^{\ln 2}f(x)dx=\int_0^{\ln 2}2(e^x-e^{-x})dx$$

$$=\left[2e^x+2e^{-x}\right]_0^{\ln 2}$$

$=(4+1)-(2+2)$

$=1$

답 ①

6 $f(t)=\sqrt{2t}+\frac{1}{\sqrt{t+a}}$로 놓으면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2}\times\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt\right)$

$=\frac{1}{4}f(2)$

이므로 $\frac{1}{4}f(2)=\frac{9}{16}$에서 $f(2)=\frac{9}{4}$

$f(2)=2+\frac{1}{\sqrt{2+a}}=\frac{9}{4}$에서

$\frac{1}{\sqrt{2+a}}=\frac{1}{4}$, $\sqrt{2+a}=4$

$2+a=16$

따라서 $a=14$

답 14

Level 1 기초 연습 본문 82~83쪽

1 ③	2 ⑤	3 ⑤	4 ②	5 ④
6 ①	7 ③	8 ④		

1 $\int_1^2 \frac{5x^2-1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\left(5x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$=\int_1^2\left(5x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\left[2x^2\sqrt{x}-2\sqrt{x}\right]_1^2$

$=(8\sqrt{2}-2\sqrt{2})-(2-2)$

$=6\sqrt{2}$

답 ③

2 $|2^x-4|=\begin{cases}4-2^x & (x<2)\\ 2^x-4 & (x\ge 2)\end{cases}$ 이므로

$\int_0^4 |2^x-4|\,dx$

$=\int_0^2 (4-2^x)\,dx+\int_2^4 (2^x-4)\,dx$

$=\left[4x-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-4x\right]_2^4$

$=\left(8-\frac{4}{\ln 2}\right)-\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)+\left(\frac{16}{\ln 2}-16\right)-\left(\frac{4}{\ln 2}-8\right)$

$=\frac{9}{\ln 2}$

답 ⑤

3 $\int\left(4\sin 2x+3\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=-4\cos 2x\times\frac{1}{2}+3\tan\frac{x}{2}\times 2+C$ (단, C는 적분상수)

$=-2\cos 2x+6\tan\frac{x}{2}+C$

이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\sin 2x+3\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\left[-2\cos 2x+6\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=(2+6)-(-2)$

$=10$

답 ⑤

참고

$\int 4\sin 2x\,dx$에서 $2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$\int 4\sin 2x\,dx=\int\left(4\sin t\times\frac{1}{2}\right)dt=\int 2\sin t\,dt$

$=-2\cos t+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$=-2\cos 2x+C_1$

$\int 3\sec^2\frac{x}{2}dx$에서 $\frac{x}{2}=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}$이므로

$\int 3\sec^2\frac{x}{2}dx=\int(3\sec^2 s\times 2)ds=\int 6\sec^2 s\,ds$

$=6\tan s+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$=6\tan\frac{x}{2}+C_2$

4 $\int_1^{e^2}\frac{(\ln x+1)^3}{2x}dx$에서

$\ln x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고, $x=1$일 때 $t=1$,

$x=e^2$일 때 $t=3$이므로

$\int_1^{e^2}\frac{(\ln x+1)^3}{2x}dx=\int_1^3\frac{1}{2}t^3dt$

$=\left[\frac{1}{8}t^4\right]_1^3$

$=\frac{1}{8}(81-1)$

$=10$

답 ②

5 $\int_0^{\pi}(x+2)(\sin x+\cos x)\,dx$에서

$u(x)=x+2$, $v'(x)=\sin x+\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x+\sin x$이므로

$\int_0^{\pi}(x+2)(\sin x+\cos x)\,dx$

$=\left[(x+2)(-\cos x+\sin x)\right]_0^{\pi}$

$-\int_0^{\pi}(-\cos x+\sin x)\,dx$

$=(\pi+2)+2+\int_0^{\pi}(\cos x-\sin x)\,dx$

$=\pi+4+\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\pi}$

$=\pi+4+(-1-1)$

$=\pi+2$

답 ④

6 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x^2e^{x+1}dx$

$\int x^2e^{x+1}dx$에서

$u_1(x)=x^2$, $v_1'(x)=e^{x+1}$으로 놓으면

$u_1'(x)=2x$, $v_1(x)=e^{x+1}$이므로

$\int x^2e^{x+1}dx=x^2e^{x+1}-\int 2xe^{x+1}dx$ …… ㉠

$\int 2xe^{x+1}dx$에서

$u_2(x)=2x$, $v_2'(x)=e^{x+1}$으로 놓으면

$u_2'(x)=2$, $v_2(x)=e^{x+1}$이므로

$\int 2xe^{x+1}dx=2xe^{x+1}-\int 2e^{x+1}dx$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=x^2e^{x+1}-\left(2xe^{x+1}-\int 2e^{x+1}dx\right)$

$=x^2e^{x+1}-2xe^{x+1}+\int 2e^{x+1}dx$

$=(x^2-2x+2)e^{x+1}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=2e+C=2e$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=(x^2-2x+2)e^{x+1}$이므로

$f(1)=e^2$

답 ①

7 $xf(x)=x+\int_1^x f(t)\,dt$ …… ㉠

등식 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=1+f(x)$

$xf'(x)=1$

$x>0$일 때, $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)

$=\ln x+C$

등식 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1$이므로

$f(1)=C=1$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=\ln x+1$이므로

$f(e^2)=2+1=3$

답 ③

8 $f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$에서

$f(x)=\int \frac{x}{x^2+1}dx=\int\left(\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$ (단, C는 적분상수)

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=f(1)=\ln 2$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}\ln 2+C=\ln 2$에서 $C=\frac{1}{2}\ln 2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln 2$이므로

$f(7)=\frac{1}{2}\ln 50+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 100=\ln 10$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 84~85쪽

1 ②	2 ④	3 ③	4 ④	5 ②
6 ①	7 ③			

1 $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-4=\frac{x+3-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}}$

이므로 $f'(x)=0$에서 $\sqrt{x}=1$ 또는 $\sqrt{x}=3$

즉, $x=1$ 또는 $x=9$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	9	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, $x=9$에서 극소이다.

$f(x)=\int\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-4\right)dx$

$=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}-4\right)dx$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}-4x+C$ (단, C는 적분상수)

이고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이므로

$f(1)=\frac{2}{3}+6-4+C=4$에서 $C=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}-4x+\frac{4}{3}$이므로

함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(9)=18+18-36+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

답 ②

2 $x<0$일 때,

$f(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$x>0$일 때,

$f(x)=\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-\cos x+C_1)=-1+C_1$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+C_2\right)=-\frac{1}{2}+C_2$

이므로 $-1+C_1=-\frac{1}{2}+C_2$에서

$C_1-C_2=\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+C_2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}\sin 2x+C_2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=C_2\pi-\frac{C_2}{2}\pi$$

$$=\frac{C_2}{2}\pi$$

이므로 $\frac{C_2}{2}\pi=\pi$에서 $C_2=2$

㉠에서 $C_1=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

따라서 $x<0$일 때 $f(x)=-\cos x+\frac{5}{2}$이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$$

답 ④

3 $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\left[e^x f(x)\right]_0^1-\int_0^1 e^x f'(x)\,dx$

이므로

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx+\int_0^1 e^x f'(x)dx=\left[e^x f(x)\right]_0^1$$

즉, $\int_0^1 e^x\{f(x)+f'(x)\}\,dx=e\times f(1)-f(0)$ ...... ㉠

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)으로 놓으면

$f(-1)=-a+b=0$에서 $b=a$

$f(x)=ax+a$이므로 ㉠에서

$e\times f(1)-f(0)=2ae-a=4e-2$

$(2e-1)a=2(2e-1)$

$2e-1\neq0$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2x+2$이므로

$f(2)=6$

답 ③

다른 풀이

함수 $f(x)$가 $f(-1)=0$인 일차함수이므로

$f(x)=a(x+1)$ (a는 상수, $a\neq0$)으로 놓으면 $f'(x)=a$이다.

$$\int_0^1 e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=\int_0^1 e^x\{a(x+1)+a\}dx$$

$$=\int_0^1 a(x+2)e^x dx$$

$$=\left[a(x+2)e^x\right]_0^1-\int_0^1 ae^x dx$$

$$=(3ae-2a)-\left[ae^x\right]_0^1$$

$$=(3ae-2a)-(ae-a)$$

$$=2ae-a$$

그러므로 $2ae-a=4e-2$에서

$(2e-1)a=2(2e-1)$

$2e-1\neq0$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2(x+1)$이므로

$f(2)=6$

4 $\int_0^p xf(x^2)\,dx$에서 $x^2=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=2x$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=p$일 때 $t=p^2$이므로

$$\int_0^p xf(x^2)\,dx=\int_0^{p^2}\frac{1}{2}f(t)dt=-\frac{1}{6}$$

즉, $\int_0^{p^2} f(t)\,dt=-\frac{1}{3}$

$$\int_0^{p^2} f(t)\,dt=\int_0^{p^2}(t-p^2)\cos t\,dt$$

이고, $u(t)=t-p^2$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$이므로

$$\int_0^{p^2}(t-p^2)\cos t\,dt=\left[(t-p^2)\sin t\right]_0^{p^2}-\int_0^{p^2}\sin t\,dt$$

$$=(0-0)+\left[\cos t\right]_0^{p^2}$$

$$=\cos(p^2)-1$$

$\cos(p^2)-1=-\frac{1}{3}$에서

$\cos(p^2)=\frac{2}{3}$

$f(x)=(x-p^2)\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-(x-p^2)\sin x$이므로

$f'(p^2)=\cos(p^2)=\frac{2}{3}$

답 ④

5 $\int_0^p(\tan^n x+\tan^{n+2} x)\,dx$

$$=\int_0^p(\tan^n x)(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$=\int_0^p \tan^n x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=p$일 때 $t=\tan p$이므로

$$\int_0^p \tan^n x \sec^2 x\,dx=\int_0^{\tan p} t^n\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^{\tan p}$$
$$=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} p$$

$\dfrac{a_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\tan^{n+1} p$에서

$a_n=\tan^{n+1} p$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\tan^2 p$, 공비가 $\tan p$인 등비수열이다.

$0<p<\dfrac{\pi}{4}$에서 $0<\tan p<1$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\tan^2 p}{1-\tan p}=\frac{1}{12}$

$12\tan^2 p+\tan p-1=0$

$(3\tan p+1)(4\tan p-1)=0$

$0<\tan p<1$이므로 $\tan p=\dfrac{1}{4}$

답 ②

6 $\displaystyle\int_1^e 2tf(t)\,dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)+a=\ln x$, $f(x)=\ln x-a$

$$a=\int_1^e 2t(\ln t-a)dt$$
$$=\int_1^e 2t\ln t\,dt-\int_1^e 2at\,dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int_1^e 2t\ln t\,dt$에서

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=2t$로 놓으면

$u'(t)=\dfrac{1}{t}$, $v(t)=t^2$이므로

$$\int_1^e 2t\ln t\,dt=\left[t^2\ln t\right]_1^e-\int_1^e\left(t^2\times\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=e^2-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^e$$
$$=e^2-\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

㉠에서

$$a=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}-\left[at^2\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}-(ae^2-a)$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}-ae^2+a$$

이므로

$ae^2=\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2e^2}$

따라서 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^2}$이므로

$f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^2}=-\dfrac{1}{2e^2}$

답 ①

7 조건 (나)에서

$$f(x)=x\int_1^x f'(t)\,dt-\int_1^x tf'(t)\,dt+x \quad \cdots\cdots ㉠$$

등식 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1$

등식 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_1^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)+1$$
$$=\left[f(t)\right]_1^x+1$$
$$=f(x)-f(1)+1$$
$$=f(x)-1+1=f(x)$$

조건 (가)에서 $f(x)>0$이므로

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=x+C$ (단, C는 적분상수)

즉, $\ln|f(x)|=x+C$

$f(x)>0$이므로 $\ln f(x)=x+C$

$f(1)=1$이므로

$\ln f(1)=1+C$에서

$0=1+C$, $C=-1$

따라서 $\ln f(x)=x-1$, $f(x)=e^{x-1}$이므로

$f(2)=e$

답 ③

다른 풀이

조건 (나)에서

$$f(x)=\int_1^x (x-t)f'(t)\,dt+x$$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$

$$f(x)=x\int_1^x f'(t)\,dt-\int_1^x tf'(t)\,dt+x$$
$$=x\left[f(t)\right]_1^x-\left(\left[tf(t)\right]_1^x-\int_1^x f(t)\,dt\right)+x$$
$$=x\{f(x)-1\}-\{xf(x)-1\}+\int_1^x f(t)\,dt+x$$
$$=1+\int_1^x f(t)\,dt$$

이므로 등식 $f(x)=1+\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f(x)$
조건 (가)에서 $f(x)>0$이므로
$\frac{f'(x)}{f(x)}=1$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=x+C$ (단, C는 적분상수)
즉, $\ln|f(x)|=x+C$
$f(x)>0$이므로 $\ln f(x)=x+C$
$f(1)=1$이므로
$\ln f(1)=1+C$에서
$0=1+C$, $C=-1$
따라서 $\ln f(x)=x-1$, $f(x)=e^{x-1}$이므로
$f(2)=e$

Level 3 실력 완성 본문 86쪽

1 ① **2** 24 **3** ③

1 조건 (가)에 의하여
$f(x)=\int(1-x)e^{1-x}dx$이고,
$u(x)=1-x$, $v'(x)=e^{1-x}$으로 놓으면
$u'(x)=-1$, $v(x)=-e^{1-x}$이므로
$$\int(1-x)e^{1-x}dx$$
$$=-(1-x)e^{1-x}-\int e^{1-x}dx$$
$$=(x-1)e^{1-x}+e^{1-x}+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$
$$=xe^{1-x}+C$$
즉, $f(x)=xe^{1-x}+C$ ...... ㉠
조건 (나)에서
$2t+1=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2$이고,
$t=0$일 때 $s=1$, $t=\frac{x-1}{2}$일 때 $s=x$이므로
$$\int_0^{\frac{x-1}{2}} f(2t+1)dt=\int_1^x \frac{1}{2}f(s)ds$$
그러므로
$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_0^{\frac{x-1}{2}} f(2t+1)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x\frac{1}{2}f(s)ds$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(s)ds$$
$$=\frac{1}{2}f(1)=e^2$$
$f(1)=2e^2$
㉠에서 $f(1)=1+C=2e^2$
$C=2e^2-1$
따라서 $f(x)=xe^{1-x}+2e^2-1$이므로
$f(-1)=-e^2+2e^2-1=e^2-1$

답 ①

2 $f(x)=(ax+b)e^x$
$f'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$
이므로 조건 (가)에 의하여
$$\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{(2a+b)e}{(a+b)e}=\frac{2a+b}{a+b}=\frac{4}{3}$$
$4a+4b=6a+3b$
$b=2a$ ...... ㉠
그러므로 $f(x)=(ax+2a)e^x$, $f'(x)=(ax+3a)e^x$
함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로
$g(f(x))=x$
양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(f(x))f'(x)=1$
$x>0$에서 $f'(x)=a(x+3)e^x\neq0$이므로
$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$
조건 (나)에 의하여
$$\int_1^5 g'(f(x))e^x dx=\int_1^5\frac{e^x}{f'(x)}dx=\int_1^5\frac{e^x}{(ax+3a)e^x}dx$$
$$=\int_1^5\frac{1}{ax+3a}dx=\frac{1}{a}\int_1^5\frac{1}{x+3}dx$$
$$=\frac{1}{a}\Big[\ln|x+3|\Big]_1^5=\frac{1}{a}(\ln 8-\ln 4)$$
$$=\frac{1}{a}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$
이므로 $\frac{1}{a}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$에서 $a=2$
㉠에서 $b=4$
따라서 $10a+b=24$

답 24

3 $\int_0^1 x^2(1-t)f(xt)dt$에서
$xt=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=x$이고,
$t=0$일 때 $s=0$, $t=1$일 때 $s=x$이므로
$$\int_0^1 x^2(1-t)f(xt)dt=\int_0^1 x(x-xt)f(xt)dt$$
$$=\int_0^x(x-s)f(s)ds$$

$$g(x)=\pi^2\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$$
$$=\pi^2\left\{x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds\right\} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로

$$g'(x)=\pi^2\left\{\int_0^x f(s)ds+xf(x)-xf(x)\right\}$$
$$=\pi^2\int_0^x f(s)ds$$
$$=\pi^2\int_0^x \cos(2\pi s)\,ds$$
$$=\left[\frac{\pi}{2}\sin(2\pi s)\right]_0^x$$
$$=\frac{\pi}{2}\sin(2\pi x)$$
$$g(x)=\int\frac{\pi}{2}\sin(2\pi x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\cos(2\pi x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

㉠에서 $g(0)=0$이므로

$$g(0)=-\frac{1}{4}+C=0,\ C=\frac{1}{4}$$

그러므로 $g(x)=-\frac{1}{4}\cos(2\pi x)+\frac{1}{4}$이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $h(x)=\begin{cases} g(x) & (x<a) \\ g(x-a)+g(a) & (x\ge a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$의 $x=a$에서의 연속성과 미분가능성을 조사한다.

(i) 함수 $h(x)$의 $x=a$에서의 연속성

$$\lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a-}g(x)=g(a)$$
$$\lim_{x\to a+}h(x)=\lim_{x\to a+}\{g(x-a)+g(a)\}$$
$$=g(0)+g(a)$$
$$=0+g(a)=g(a)$$
$$h(a)=g(0)+g(a)=g(a)$$

따라서 $\lim_{x\to a-}h(x)=\lim_{x\to a+}h(x)=h(a)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(ii) 함수 $h(x)$의 $x=a$에서의 미분가능성

$$\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$
$$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x-a)+g(a)-g(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{u\to 0+}\frac{g(u)}{u}$$
$$=\lim_{u\to 0+}\frac{g(u)-g(0)}{u}=g'(0)$$

따라서 $g'(a)=g'(0)$이면 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

$g'(x)=\frac{\pi}{2}\sin(2\pi x)$이므로 $g'(a)=g'(0)$에서

$$\frac{\pi}{2}\sin(2\pi a)=0,\ \sin(2\pi a)=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 만족시키는 양수 a의 값은

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \cdots$$

이므로 $a_n=\frac{n}{2}$이다.

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{m(m+1)}{2}=18$$

에서 $m(m+1)=72$

$m^2+m-72=0,\ (m+9)(m-8)=0$

따라서 자연수 m의 값은 8이다.

답 ③

다른 풀이

$\int_0^1 x^2(1-t)f(xt)\,dt$에서

$xt=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=x$이고,

$t=0$일 때 $s=0$, $t=1$일 때 $s=x$이므로

$$\int_0^1 x^2(1-t)f(xt)\,dt=\int_0^1 x(x-xt)f(xt)\,dt$$
$$=\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$$
$$g(x)=\pi^2\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$$
$$=\pi^2\left\{x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds\right\} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로

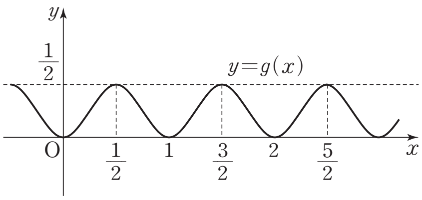
$$g'(x)=\pi^2\left\{\int_0^x f(s)ds+xf(x)-xf(x)\right\}$$
$$=\pi^2\int_0^x f(s)ds$$
$$=\pi^2\int_0^x \cos(2\pi s)\,ds$$
$$=\left[\frac{\pi}{2}\sin(2\pi s)\right]_0^x$$
$$=\frac{\pi}{2}\sin(2\pi x)$$
$$g(x)=\int\frac{\pi}{2}\sin(2\pi x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\cos(2\pi x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

㉠에서 $g(0)=0$이므로

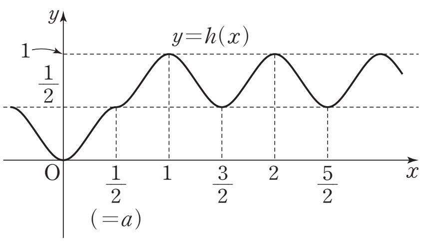
$$g(0)=-\frac{1}{4}+C=0,\ C=\frac{1}{4}$$

그러므로 $g(x)=-\frac{1}{4}\cos(2\pi x)+\frac{1}{4}$이고,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$x \geq a$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $g(a)$만큼 평행이동한 것이므로 $a=\frac{1}{2}$인 경우 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능해야 하고, 점 $(a,\ h(a))$는 점 $(0,\ 0)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $g(a)$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $h'(a)=g'(0)$이어야 한다.

$g'(x)=\frac{\pi}{2}\sin(2\pi x)$에서 $g'(0)=0$이므로 $h'(a)=0$이고 $h(a)=g(a)$이므로 $h'(a)=0$이려면 $g'(a)=0$이어야 한다.
함수 $g(x)$에서 $g'(a)=0$인 양수 a의 값은

$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \cdots$

이므로 $a_n=\frac{n}{2}$이다.

$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{m(m+1)}{2}=18$
에서 $m(m+1)=72$
$m^2+m-72=0,\ (m+9)(m-8)=0$
따라서 자연수 m의 값은 8이다.

참고

$g(x)=\pi^2\int_0^1 x^2(1-t)f(xt)\,dt$

$\quad=\pi^2x^2\int_0^1(1-t)\cos(2\pi xt)\,dt \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\int_0^1(1-t)\cos(2\pi xt)\,dt$에서

$u(t)=1-t,\ v'(t)=\cos(2\pi xt)$로 놓으면

$u'(t)=-1,\ v(t)=\frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi xt)$이므로

$\int_0^1(1-t)\cos(2\pi xt)\,dt$

$=\left[(1-t)\times\frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi xt)\right]_0^1$

$\qquad+\int_0^1\frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi xt)\,dt$

$=0+\left[-\frac{1}{4\pi^2x^2}\cos(2\pi xt)\right]_0^1$

$=-\frac{1}{4\pi^2x^2}\{\cos(2\pi x)-1\} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$g(x)=\pi^2x^2\times\left[-\frac{1}{4\pi^2x^2}\{\cos(2\pi x)-1\}\right]$

$\quad=-\frac{1}{4}\cos(2\pi x)+\frac{1}{4}$

07 정적분의 활용

유제				본문 89~97쪽
1 ④	2 ②	3 ②	4 ③	5 ④
6 ③	7 4	8 ①	9 14	

1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3nk}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}$

$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}\times\frac{3}{n}\right)$

$=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$=\frac{1}{3}\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^4$

$=\frac{1}{3}(4-2)=\frac{2}{3}$

답 ④

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3nk}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}\times\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+3x}}dx$

$1+3x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=4$이고,

$\frac{dt}{dx}=3$이므로

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+3x}}dx=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{3}\Big[2\sqrt{t}\Big]_1^4$

$=\frac{1}{3}(4-2)=\frac{2}{3}$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3nk}}=\frac{2}{3}$

2 $P_k\left(1+\frac{2k}{n},\ 0\right)$이므로

$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{AP_k}\times\overline{P_kQ_k}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2k}{n}\times\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$=\frac{1}{4}\int_1^3(x-1)\ln x\,dx$ ...... ㉠

이때 $\int_1^3(x-1)\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x-1$

로 놓으면 $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$이므로

$\int_1^3(x-1)\ln x\,dx$

$=\left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln x\right]_1^3-\int_1^3\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$

$=\frac{3}{2}\ln 3-\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_1^3$

$=\frac{3}{2}\ln 3$

따라서 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1}{4}\int_1^3(x-1)\ln x\,dx$

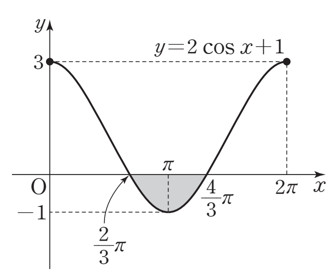
$=\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\ln 3$

$=\frac{3}{8}\ln 3$

답 ②

3 $2\cos x+1=0$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\le x\le 2\pi$에서 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



이때 닫힌구간 $\left[\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi\right]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 부분의 넓이를 S라 하면

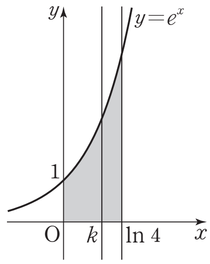
$S=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}(-2\cos x-1)dx=\Big[-2\sin x-x\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}$

$=\left(\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

답 ②

4 닫힌구간 $[0,\ \ln 4]$에서 $e^x>0$이므로 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\ln 4} e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^{\ln 4}$$
$$=4-1=3$$



직선 $x=k$에 의하여 이 넓이가 이등분되므로 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{3}{2}$이다.

이때

$$\int_0^k e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^k=e^k-1$$

이므로 $e^k-1=\frac{3}{2}$에서 $e^k=\frac{5}{2}$

따라서 $k=\ln\frac{5}{2}$

답 ③

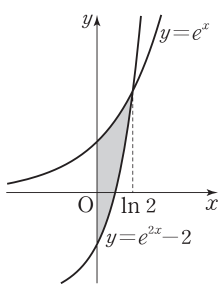
5 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{2x}-2$의 교점의 x좌표는

$e^x=e^{2x}-2$, $e^{2x}-e^x-2=0$

$(e^x+1)(e^x-2)=0$

$e^x+1>0$이므로 $e^x=2$, $x=\ln 2$

이때 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{2x}-2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.

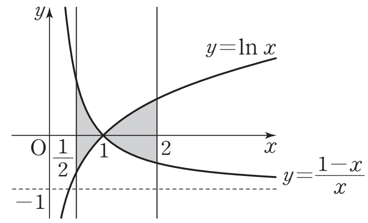


따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\ln 2}\{e^x-(e^{2x}-2)\}dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}(e^x-e^{2x}+2)dx$$
$$=\Big[e^x-\frac{1}{2}e^{2x}+2x\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=\left(2-\frac{1}{2}\times 4+2\ln 2\right)-\left(1-\frac{1}{2}+0\right)$$
$$=2\ln 2-\frac{1}{2}$$

답 ④

6 두 곡선 $y=\ln x$, $y=\frac{1-x}{x}$는 그림과 같이 점 $(1,\ 0)$을 지난다.



닫힌구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 $\ln x\le\frac{1-x}{x}$, 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $\ln x\ge\frac{1-x}{x}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|\ln x-\frac{1-x}{x}\right|dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1-x}{x}-\ln x\right)dx+\int_1^2\left(\ln x-\frac{1-x}{x}\right)dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-1-\ln x\right)dx+\int_1^2\left(\ln x-\frac{1}{x}+1\right)dx$$

$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$ (C는 적분상수)이므로

$$S=\Big[\ln|x|-x-(x\ln x-x)\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}+\Big[(x\ln x-x)-\ln|x|+x\Big]_1^2$$
$$=\Big[\ln|x|-x\ln x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}+\Big[x\ln x-\ln|x|\Big]_1^2$$
$$=\left(0+\frac{1}{2}\ln 2\right)+(\ln 2-0)$$
$$=\frac{3}{2}\ln 2$$

답 ③

참고

$\int \ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int \ln x\,dx=\ln x\times x-\int\left(\frac{1}{x}\times x\right)dx$$
$$=x\ln x-\int 1\,dx$$
$$=x\ln x-x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

7 $2\le t\le 4$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\frac{k}{t}$인 반원이므로 그 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{k}{t}\right)^2=\frac{k^2}{2t^2}\pi$$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_2^4 S(t)dt=\int_2^4\left(\frac{k^2}{2t^2}\pi\right)dt$$

$$=\frac{k^2}{2}\pi\int_2^4\frac{1}{t^2}dt=\frac{k^2}{2}\pi\left[-\frac{1}{t}\right]_2^4$$

$$=\frac{k^2}{2}\pi\times\frac{1}{4}=\frac{k^2}{8}\pi$$

즉, $\frac{k^2}{8}\pi=2\pi$에서 $k^2=16$

$k>0$이므로 $k=4$

답 4

8 $x=\sin t\cos t$에서 $\frac{dx}{dt}=\cos^2 t-\sin^2 t$

$y=\cos^2 t$에서 $\frac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$=(\cos^2 t-\sin^2 t)^2+(-2\cos t\sin t)^2$$

$$=(\cos^4 t-2\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t)+4\cos^2 t\sin^2 t$$

$$=\cos^4 t+2\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t$$

$$=(\cos^2 t+\sin^2 t)^2$$

$$=1$$

따라서 시각 $t=\frac{\pi}{2}$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1dt$$

$$=\Big[t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

답 ①

9 $x=2+3t^2$에서 $\frac{dx}{dt}=6t$

$y=2+2t^3$에서 $\frac{dy}{dt}=6t^2$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(6t)^2+(6t^2)^2$$

$$=36t^2(1+t^2)$$

따라서 $0\le t\le\sqrt{3}$에서 이 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{36t^2(1+t^2)}dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}6t\sqrt{1+t^2}dt$$

이때 $1+t^2=s$로 놓으면 $t=0$일 때 $s=1$, $t=\sqrt{3}$일 때 $s=4$이고, $\frac{ds}{dt}=2t$이므로

$$l=\int_0^{\sqrt{3}}6t\sqrt{1+t^2}dt=\int_1^4 3\sqrt{s}ds$$

$$=\Big[2s^{\frac{3}{2}}\Big]_1^4=2\times2^3-2\times1=14$$

답 14

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ③	2 ①	3 4	4 ②	5 ①
6 ①	7 ③	8 ⑤	9 12	

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}=\int_1^4\sqrt{x}dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$=\frac{2}{3}\times8-\frac{2}{3}\times1$$

$$=\frac{14}{3}$$

답 ③

2 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f'\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f'\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 f'(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[f(x)\Big]_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\{f(3)-f(1)\}$$

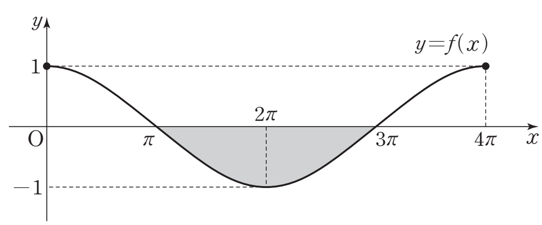
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{5}-\frac{a}{3}\right)$$

$$=-\frac{a}{15}$$

따라서 $-\frac{a}{15}=\frac{1}{3}$에서 $a=-5$

답 ①

3 $0\le x\le4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



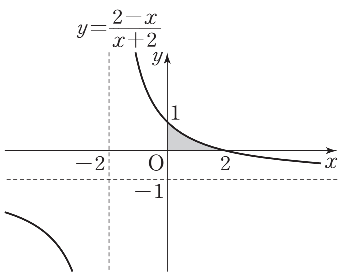
닫힌구간 $[\pi,\ 3\pi]$에서 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\pi}^{3\pi}\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx=\int_{\pi}^{3\pi}\left(-\cos\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\left[-2\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{3\pi}=-2\sin\frac{3}{2}\pi+2\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=2+2=4$$

답 4

4 $y=\dfrac{2-x}{x+2}=-1+\dfrac{4}{x+2}$

이므로 곡선 $y=\dfrac{2-x}{x+2}$는 곡선 $y=\dfrac{4}{x}$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 이 곡선은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{2}\frac{2-x}{x+2}dx=\int_{0}^{2}\left(-1+\frac{4}{x+2}\right)dx$$
$$=\Big[-x+4\ln|x+2|\Big]_{0}^{2}$$
$$=(-2+4\ln 4)-(0+4\ln 2)$$
$$=4\ln 2-2$$

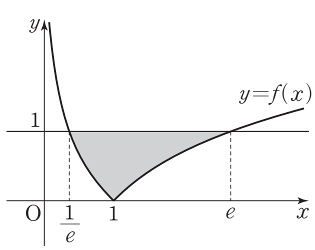
답 ②

5 $f(x)=|\ln x|=\begin{cases}-\ln x & (0<x<1)\\ \ln x & (x\ge 1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는

$0<x<1$일 때, $-\ln x=1$에서 $x=\dfrac{1}{e}$

$x\ge 1$일 때, $\ln x=1$에서 $x=e$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

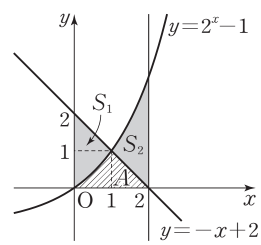
$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}(1-|\ln x|)dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\{1-(-\ln x)\}dx+\int_{1}^{e}(1-\ln x)dx$$

$\displaystyle\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$ (C는 적분상수)이므로

$$S=\Big[x+(x\ln x-x)\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\Big[x-(x\ln x-x)\Big]_{1}^{e}$$
$$=\Big[x\ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\Big[2x-x\ln x\Big]_{1}^{e}$$
$$=\left(0+\frac{1}{e}\right)+\{(2e-e)-(2-0)\}$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 ①

6 곡선 $y=2^x-1$과 직선 $y=-x+2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하자.



$$S_2+A=\int_{0}^{2}(2^x-1)dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_{0}^{2}$$
$$=\left(\frac{4}{\ln 2}-2\right)-\left(\frac{1}{\ln 2}-0\right)$$
$$=\frac{3}{\ln 2}-2$$

$$S_1+A=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$$

따라서

$$S_2-S_1=(S_2+A)-(S_1+A)$$
$$=\left(\frac{3}{\ln 2}-2\right)-2$$
$$=\frac{3}{\ln 2}-4$$

답 ①

7 $0\le t\le \ln 3$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(e^t+1)^2=e^{2t}+2e^t+1$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\ln 3} S(t)dt$$
$$=\int_0^{\ln 3}(e^{2t}+2e^t+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}+2e^t+t\right]_0^{\ln 3}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times 9+2\times 3+\ln 3\right)-\left(\frac{1}{2}+2+0\right)$$
$$=8+\ln 3$$

답 ③

8 $x=2\ln t$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$이고,

$y=t+\frac{1}{t}$에서 $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{2}{t}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2$$
$$=1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_1^4\sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}dt$$
$$=\int_1^4\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^4$$
$$=\left(4-\frac{1}{4}\right)-(1-1)$$
$$=\frac{15}{4}$$

답 ⑤

9 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\times 2x=x\sqrt{x^2+2}$

이므로 $0\le x\le 3$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_0^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_0^3\sqrt{1+x^2(x^2+2)}dx$$
$$=\int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}dx$$
$$=\int_0^3(x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^3$$
$$=\frac{1}{3}\times 3^3+3$$
$$=12$$

답 12

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ⑤	2 ④	3 ③	4 ①	5 ③
6 ④	7 19	8 ④		

1 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$

$\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$
$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\pi$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\times\pi$$
$$=1$$

답 ⑤

2 $\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{k\pi}{n}$이므로 점 P_k의 좌표는

$\left(\cos\frac{k\pi}{n},\ \sin\frac{k\pi}{n}\right)$

이때 삼각형 $\mathrm{AP}_k\mathrm{H}_k$의 넓이 $S(k)$는

$$S(k)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}_k}\times\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{H}_k}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\times\sin\frac{k\pi}{n}$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos x)\sin x\,dx$$

이때 $1-\cos x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\pi$일 때 $t=2$이고, $\frac{dt}{dx}=\sin x$이므로

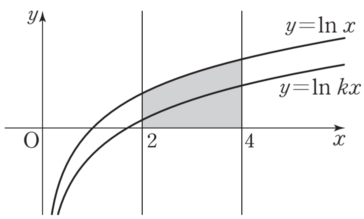
$$\int_0^{\pi}(1-\cos x)\sin x\,dx=\int_0^2 t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos x)\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\times 2$$
$$=\frac{1}{\pi}$$

답 ④

3



곡선 $y=\ln x$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_2^4 \ln x\,dx$$

이때 $\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$ (C는 적분상수)이므로

$$S=\int_2^4 \ln x\,dx$$
$$=\left[x\ln x-x\right]_2^4$$
$$=(4\ln 4-4)-(2\ln 2-2)$$
$$=6\ln 2-2$$

한편 곡선 $y=\ln kx$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 하면

$$T=\int_2^4 \ln kx\,dx$$
$$=\int_2^4(\ln k+\ln x)\,dx$$
$$=\left[x\ln k\right]_2^4+\int_2^4 \ln x\,dx$$
$$=2\ln k+(6\ln 2-2)$$

이때 $T=\frac{S}{2}$이어야 하므로

$2\ln k+6\ln 2-2=3\ln 2-1$

$2\ln k=1-3\ln 2$

$\ln k^2=\ln\frac{e}{8}$

따라서 $k^2=\frac{e}{8}$

답 ③

4 $f(x)=\frac{4}{x}$로 놓으면 $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$

$f'(2)=-1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

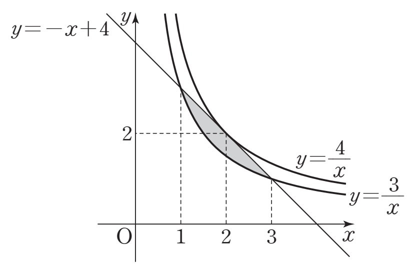
$y-2=-(x-2)$, 즉 $y=-x+4$

직선 $y=-x+4$와 곡선 $y=\frac{3}{x}$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x+4=\frac{3}{x}$, $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=3$

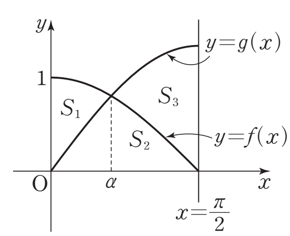


따라서 직선 $y=-x+4$와 곡선 $y=\frac{3}{x}$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^3\left\{(-x+4)-\frac{3}{x}\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+4x-3\ln|x|\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{9}{2}+12-3\ln 3\right)-\left(-\frac{1}{2}+4-0\right)$$
$$=4-3\ln 3$$

답 ①

5



$$S_1+S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

이때 $S_2=2S_1$이므로

$S_1=\frac{1}{3}$, $S_2=\frac{2}{3}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를

$\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\alpha=k\sin\alpha$ …… ㉠

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$에 ㉠을 대입하면

$(k\sin\alpha)^2+\sin^2\alpha=1$, $\sin^2\alpha=\frac{1}{k^2+1}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ …… ㉡

한편 닫힌구간 $[0,\ \alpha]$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{\alpha}|f(x)-g(x)|\,dx\\&=\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}\,dx\\&=\int_0^{\alpha}(\cos x-k\sin x)\,dx\\&=\Big[\sin x+k\cos x\Big]_0^{\alpha}\\&=\sin\alpha+k\cos\alpha-k\\&=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}-k\\&=\frac{k^2+1}{\sqrt{k^2+1}}-k\\&=\sqrt{k^2+1}-k\end{aligned}$$

즉, $\sqrt{k^2+1}-k=\frac{1}{3}$에서 $\sqrt{k^2+1}=k+\frac{1}{3}$

양변을 제곱하면

$k^2+1=k^2+\frac{2}{3}k+\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}k=\frac{8}{9}$, $k=\frac{4}{3}$

$k=\frac{4}{3}$를 ㉡에 대입하면

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

닫힌구간 $\left[\alpha,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f(x)\le g(x)$이므로

$$\begin{aligned}S_3&=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}|f(x)-g(x)|\,dx\\&=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\{g(x)-f(x)\}\,dx\\&=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{3}\sin x-\cos x\right)dx\\&=\left[-\frac{4}{3}\cos x-\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\\&=(-1)-\left(-\frac{4}{3}\cos\alpha-\sin\alpha\right)\\&=-1+\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$k=\frac{4}{3}$이므로 다음과 같이 S_3의 값을 구할 수 있다.

$g(x)=\frac{4}{3}\sin x$이고 $S_2+S_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)\,dx$이므로

$$\begin{aligned}S_3&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)\,dx-S_2\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3}\sin x\,dx-\frac{2}{3}\\&=\left[-\frac{4}{3}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\\&=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

6 $f(x)=x^2e^{-x+2}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=2xe^{-x+2}-x^2e^{-x+2}\\&=-x(x-2)e^{-x+2}\end{aligned}$$

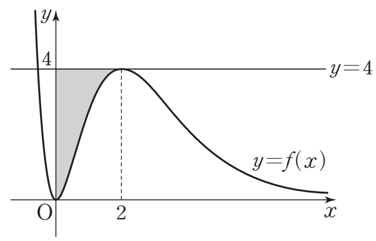
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(0)=0$, $f(2)=4$이고, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은 2이고, 이때 $f(2)=4$이므로 곡선 $y=f(x)$ $(x\ge0)$과 y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_0^2\{4-f(x)\}\,dx\\&=\int_0^2(4-x^2e^{-x+2})\,dx\\&=\Big[4x\Big]_0^2-\int_0^2x^2e^{-x+2}\,dx\\&=8-\int_0^2x^2e^{-x+2}\,dx\end{aligned}$$

$\int_0^2 x^2e^{-x+2}dx$에서 $u_1(x)=x^2$, $v_1'(x)=e^{-x+2}$으로 놓으면

$u_1'(x)=2x$, $v_1(x)=-e^{-x+2}$이므로

$$\int_0^2 x^2e^{-x+2}dx=\Big[-x^2e^{-x+2}\Big]_0^2+2\int_0^2 xe^{-x+2}dx$$
$$=-4+2\int_0^2 xe^{-x+2}dx$$

또 $\int_0^2 xe^{-x+2}dx$에서 $u_2(x)=x$, $v_2'(x)=e^{-x+2}$으로 놓으면

$u_2'(x)=1$, $v_2(x)=-e^{-x+2}$이므로

$$\int_0^2 xe^{-x+2}dx=\Big[-xe^{-x+2}\Big]_0^2+\int_0^2 e^{-x+2}dx$$
$$=-2+\Big[-e^{-x+2}\Big]_0^2$$
$$=-2+(-1+e^2)=e^2-3$$

따라서

$$\int_0^2 x^2e^{-x+2}dx=-4+2\int_0^2 xe^{-x+2}dx$$
$$=-4+2(e^2-3)=2e^2-10$$

이므로

$$S=\int_0^2 \{4-f(x)\}dx$$
$$=8-\int_0^2 x^2e^{-x+2}dx$$
$$=8-(2e^2-10)=18-2e^2$$

답 ④

7 $e\le t\le e^2$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{(\ln t)^2}{t}$$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_e^{e^2} S(t)dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_e^{e^2}\frac{(\ln t)^2}{t}dt$$

이때 $\ln t=s$로 놓으면 $t=e$일 때 $s=1$, $t=e^2$일 때 $s=2$이고, $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{t}$이므로

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_e^{e^2}\frac{(\ln t)^2}{t}dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2 s^2ds$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[\frac{1}{3}s^3\Big]_1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{7}{3}$$
$$=\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=7$이므로

$p+q=19$

답 19

8 $x=2\ln(t^2-1)$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{4t}{t^2-1}$

$y=2t$에서 $\frac{dy}{dt}=2$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{4t}{t^2-1}\right)^2+4$$
$$=\frac{16t^2+4(t^2-1)^2}{(t^2-1)^2}$$
$$=\frac{16t^2+4(t^4-2t^2+1)}{(t^2-1)^2}$$
$$=\frac{4(t^2+1)^2}{(t^2-1)^2}$$

따라서 $3\le t\le 7$에서 이 곡선의 길이는

$$\int_3^7\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_3^7\sqrt{\frac{4(t^2+1)^2}{(t^2-1)^2}}dt$$
$$=\int_3^7\frac{2(t^2+1)}{t^2-1}dt$$
$$=2\int_3^7\left\{1+\frac{2}{(t-1)(t+1)}\right\}dt$$
$$=2\int_3^7\left(1+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=2\Big[t+\ln|t-1|-\ln|t+1|\Big]_3^7$$
$$=2\{(7+\ln 6-\ln 8)-(3+\ln 2-\ln 4)\}$$
$$=2\left(4+\ln\frac{3}{2}\right)=8+2\ln\frac{3}{2}$$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 ② **2** ① **3** ④

1 $f(x)=(x-1)^2e^x$에서

$$f'(x)=2(x-1)e^x+(x-1)^2e^x$$
$$=(x^2-1)e^x$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f'\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}f'\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

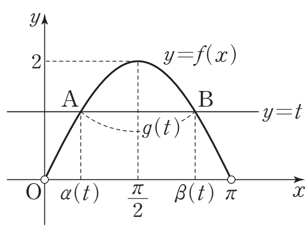
$$=\int_0^1 \frac{f'(x)}{1+x}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x^2-1)e^x}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 (x-1)e^x dx$$

이때 $\int_0^1 (x-1)e^x dx$에서 $u(x)=x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f'\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 (x-1)e^x dx$$
$$=\Big[(x-1)e^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx$$
$$=1-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=1-(e-1)$$
$$=2-e$$

답 ②

2 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ $(\alpha(t)<\beta(t))$라 하면

$0<\alpha(t)<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta(t)<\pi$이고

$f(\alpha(t))=t$, $f(\beta(t))=t$

또 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\alpha(t)+\beta(t)=\pi$, 즉 $\beta(t)=\pi-\alpha(t)$

한편 $f(x)=2\sin x$에서 $f'(x)=2\cos x$

$f(\alpha(t))=t$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(\alpha(t))\alpha'(t)=1$

$$\alpha'(t)=\frac{1}{f'(\alpha(t))}=\frac{1}{2\cos\alpha(t)}$$

$f(\beta(t))=t$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(\beta(t))\beta'(t)=1$

$$\beta'(t)=\frac{1}{f'(\beta(t))}=\frac{1}{2\cos\beta(t)}$$
$$=\frac{1}{2\cos(\pi-\alpha(t))}=-\frac{1}{2\cos\alpha(t)}$$

이때 $g(t)=\beta(t)-\alpha(t)$이므로

$g'(t)=\beta'(t)-\alpha'(t)$

$$=-\frac{1}{2\cos\alpha(t)}-\frac{1}{2\cos\alpha(t)}$$
$$=-\frac{1}{\cos\alpha(t)}$$

이고 $g'(t)=-2$에서

$-\frac{1}{\cos\alpha(t)}=-2$, $\cos\alpha(t)=\frac{1}{2}$

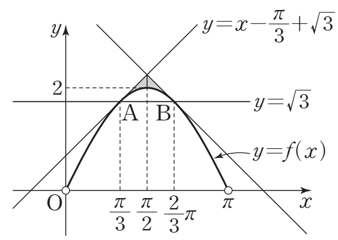
$0<\alpha(t)<\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha(t)=\frac{\pi}{3}$

그러므로 $k=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

이때 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{2}{3}\pi, \sqrt{3}\right)$이고 두 점 A, B에서 각각 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

먼저 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=x-\frac{\pi}{3}$, 즉 $y=x-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(x-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\right)-2\sin x\right\}dx$$
$$=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{x-2\sin x-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\right\}dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2+2\cos x-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\left\{\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)-\left(\frac{\pi^2}{18}+1-\frac{\pi^2}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)\right\}$$
$$=2\left(\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-1\right)$$
$$=\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-2$$

답 ①

3 $f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$에서

$$f'(x)=\frac{a\times\sqrt{1+x^2}-ax\times\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$=\frac{a(1+x^2)-ax^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{a}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$f''(x)=\left\{\frac{a}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}'$$

$$=\frac{-a\times\dfrac{3}{2}\times(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\times 2x}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{-3ax}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$$

$f''(x)=0$에서 $x=0$

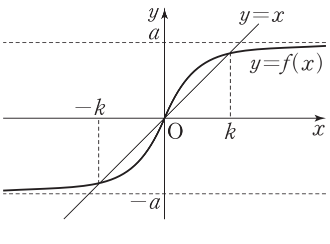
모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	a	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	⤴	0	⤻

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$x>0$일 때 $f''(x)<0$이므로 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록, $x<0$일 때 $f''(x)>0$이므로 $x<0$에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하고, $f(0)=0$이므로 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-a$이고, $f'(0)=a>1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표이므로

$\dfrac{ax}{\sqrt{1+x^2}}=x$에서

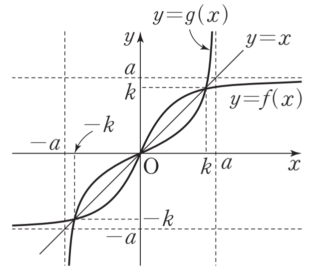
$ax=x\sqrt{1+x^2}$, $x(\sqrt{1+x^2}-a)=0$

$a>1$이므로

$x=0$ 또는 $x=\sqrt{a^2-1}$ 또는 $x=-\sqrt{a^2-1}$

그러므로 $k=\sqrt{a^2-1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 다른 세 점 $(-k,\ -k)$, $(0,\ 0)$, $(k,\ k)$에서 만나고, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=x$를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



한편 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(g(x))>0$이므로

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$

그러므로

$$\int_0^k\frac{x}{f'(g(x))}dx=\int_0^k xg'(x)\,dx$$

$$=\Big[xg(x)\Big]_0^k-\int_0^k g(x)\,dx$$

$$=kg(k)-\int_0^k g(x)\,dx$$

$$=k^2-\int_0^k g(x)\,dx$$

즉, $k^2-\displaystyle\int_0^k g(x)\,dx=2$

위 그림에서 $k^2-\displaystyle\int_0^k g(x)\,dx$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\displaystyle\int_0^k f(x)\,dx=2$, 즉 $\displaystyle\int_0^k\frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}dx=2$

이때 $1+x^2=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=1$, $x=k$일 때

$t=1+k^2$이고 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int_0^k \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{1+k^2}\frac{a}{2\sqrt{t}}dt$$

$$=\left[a\sqrt{t}\right]_1^{1+k^2}$$

$$=a(\sqrt{1+k^2}-1)$$

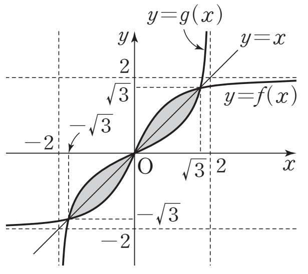
즉, $a(\sqrt{1+k^2}-1)=2$ …… ㉡

㉠에서 $a=\sqrt{1+k^2}$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$a(a-1)=2$, $a^2-a-2=0$

$(a-2)(a+1)=0$

$a>1$이므로 $a=2$이고 $k=\sqrt{3}$



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=4\int_0^{\sqrt{3}}\{f(x)-x\}\,dx$$

$$=4\left\{\int_0^{\sqrt{3}}f(x)dx-\int_0^{\sqrt{3}}x\,dx\right\}$$

$$=4\left(2-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right)$$

$$=4\times\frac{1}{2}$$

$$=2$$

답 ④