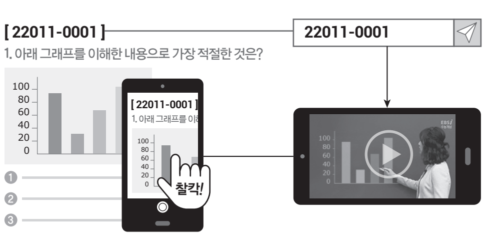
수능 특강

수학영역 **미적분**

이 책의 차례 Contents

학생 EBS 교재 문제 검색

EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



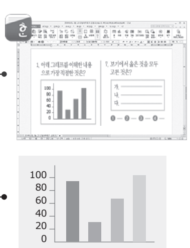
※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.

교재 자료실

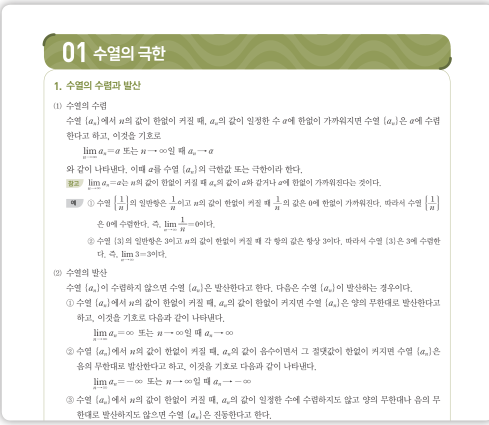
- 한글다운로드
- 교재이미지 활용
- 강의활용자료



※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

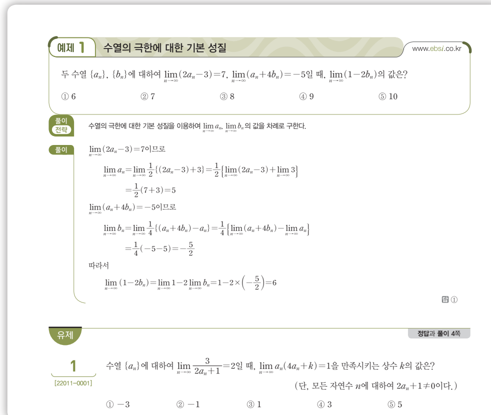
이 책의 구성과 특징 Structure

개념 정리



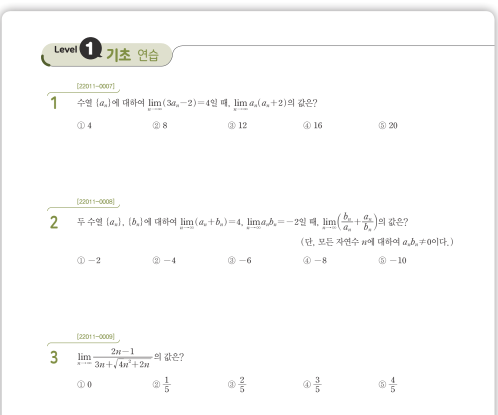
교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.

예제 & 유제



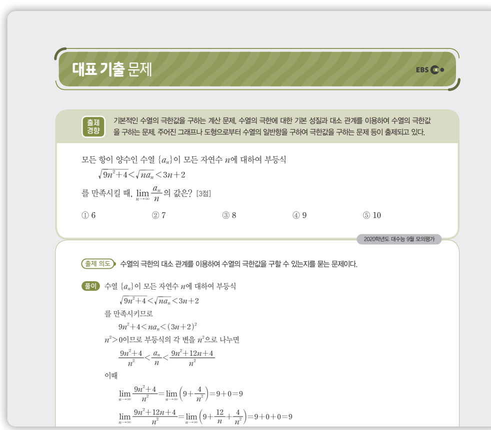
예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

Level 1-Level 2-Level 3



Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

대표 기출 문제



대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

01 수열의 극한

1. 수열의 수렴과 발산

(1) 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \text{ 또는 } n\to\infty\text{일 때 } a_n\to\alpha$$

와 같이 나타낸다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 한다.

참고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$는 n의 값이 한없이 커질 때 a_n의 값이 α와 같거나 α에 한없이 가까워진다는 것이다.

예 ① 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$의 일반항은 $\frac{1}{n}$이고 n의 값이 한없이 커질 때 $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워진다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 0에 수렴한다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이다.

② 수열 $\{3\}$의 일반항은 3이고 n의 값이 한없이 커질 때 각 항의 값은 항상 3이다. 따라서 수열 $\{3\}$은 3에 수렴한다. 즉, $\lim_{n\to\infty} 3=3$이다.

(2) 수열의 발산

수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으면 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$이 발산하는 경우이다.

① 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \text{ 또는 } n\to\infty\text{일 때 } a_n\to\infty$$

② 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \text{ 또는 } n\to\infty\text{일 때 } a_n\to-\infty$$

③ 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 수에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

2. 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, 모든 자연수 n에 대하여 $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

예 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=3$일 때

$$\lim_{n\to\infty} 4a_n=4\times2=8,\ \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2+3=5,\ \lim_{n\to\infty} a_nb_n=2\times3=6,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{2}{3}\ (\text{단, } b_n\neq0)$$

예제 1 수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=7$, $\lim_{n\to\infty}(a_n+4b_n)=-5$일 때, $\lim_{n\to\infty}(1-2b_n)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이 전략 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 차례로 구한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=7$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(2a_n-3)+3\}=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)+\lim_{n\to\infty}3\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(7+3)=5$$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+4b_n)=-5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\{(a_n+4b_n)-a_n\}=\frac{1}{4}\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+4b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(-5-5)=-\frac{5}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(1-2b_n)=\lim_{n\to\infty}1-2\lim_{n\to\infty}b_n=1-2\times\left(-\frac{5}{2}\right)=6$$

답 ①

유제

정답과 풀이 4쪽

1 [22011-0001]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2a_n+1}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n(4a_n+k)=1$을 만족시키는 상수 k의 값은?

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $2a_n+1\neq0$이다.)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

2 [22011-0002]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n+b_n}=-1$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\frac{9}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+b_n\neq0$, $a_n-b_n\neq0$이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3. 수열의 극한값의 계산

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 일반항 a_n, b_n이 각각 n에 대한 일차 이상의 다항식일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$의 값은 다음과 같이 구할 수 있다. (단, 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \neq 0$이다.)

① (a_n의 차수) > (b_n의 차수)이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=-\infty$

② (a_n의 차수) < (b_n의 차수)이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=0$

③ (a_n의 차수) = (b_n의 차수) $=p$ (p는 자연수)이면 $\frac{a_n}{b_n}$의 분모, 분자를 n^p으로 나누고 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 구하면 편리하다.

예 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-1}=\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty} 2+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty} 3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$

참고 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$의 일반항이 n에 대한 다항식이고, (a_n의 차수) = (b_n의 차수) $=p$, (c_n의 차수) $=p^2$ (p는 자연수)일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n+\sqrt{c_n}}$의 값은 $\frac{a_n}{b_n+\sqrt{c_n}}$의 분모, 분자를 n^p으로 나누어 구하면 편리하다.

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})$의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

① (a_n의 차수) $\neq$ (b_n의 차수)이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})=\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})=-\infty$

② (a_n의 차수) = (b_n의 차수)이면 $\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}=\frac{a_n-b_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$으로 변형하고 (1)의 방법을 이용하여 구하면 편리하다.

예 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

참고 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이고 두 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, $\{a_n-b_n\}$이 수렴할 때, 두 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, $\{a_n-b_n\}$의 극한값은 주어진 식을 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용할 수 있도록 변형하여 구하면 편리하다.

4. 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 상수)일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \leq b_n$이면 $\alpha \leq \beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

예 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{n+1} \leq c_n \leq \frac{1}{n}$을 만족시키면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} c_n=0$이다.

예제 2 수열의 극한값의 계산

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{3n-1}{2n+3}<\frac{a_n}{n}<\sqrt{n^2+3n}-n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n+4}{3n+1}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

풀이 전략 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ (α는 상수)이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}$이고

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{3}{2}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n+4}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{a_n}{n}+1+\frac{4}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2\times\frac{3}{2}+1+0}{3+0}=\frac{4}{3}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 4쪽

3 [22011-0003]

$\lim_{n\to\infty}\frac{an}{bn+3}=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n^2+3n}{n^2+1}=2$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이고, $b>0$이다.)

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

4 [22011-0004]

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

5. 등비수열의 극한

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산은 공비 r의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

설명 (1) $r>1$일 때

$r=1+h\ (h>0)$으로 놓으면 모든 자연수 n에 대하여

$r^n=(1+h)^n\ge 1+nh$

이때 $\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

(2) $r=1$일 때

수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 1이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=1$

(3) $-1<r<1$일 때

㉠ $r=0$이면 수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 0이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

㉡ $r\ne 0$이면 $\frac{1}{|r|}>1$이므로 (1)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$

따라서 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{|r^n|}}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

(4) $r\le -1$일 때

㉠ $r=-1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이므로 진동한다.

㉡ $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 (1)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}(|r|)^n=\infty$이고, n의 값이 한없이 커질 때 r^n의 부호가 교대로 바뀌므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

참고 ① $h>0$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $(1+h)^n\ge 1+nh$임은 수학적 귀납법으로 보일 수 있다.

② 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

③ $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

④ 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<r\le 1$이다.

⑤ r^n을 포함한 수열의 극한은 r의 값의 범위를

$|r|>1,\ |r|<1,\ r=1,\ r=-1$

인 경우로 나누어 구하면 편리하다.

예 (1) 수열 $\{2^n\}$은 공비가 2인 등비수열이고 $2>1$이므로 $\lim_{n\to\infty} 2^n=\infty$

(2) 수열 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이고 $-1<\frac{2}{3}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

(3) 수열 $\{(-2)^n\}$은 공비가 -2인 등비수열이고 $-2<-1$이므로 수열 $\{(-2)^n\}$은 진동한다.

예제 3 등비수열의 극한

첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=T_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{2^n a_n+3^n}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

풀이 전략

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산은 공비 r의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3이고 공비가 2이므로

$$a_n=3\times 2^{n-1}$$

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=3\times 2=6$, 공비가 $2^2=4$인 등비수열이므로

$$T_n=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{6(4^n-1)}{4-1}=2(4^n-1)$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{2^n a_n+3^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 4^n-2}{2^n\times 3\times 2^{n-1}+3^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^n}\\&=\frac{2-0}{\frac{3}{2}+0}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 4쪽

5 [22011-0005]

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 3^{n+1}+4^{-n}}{3^{n-1}+(-2)^n}=\frac{3}{4}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

6 [22011-0006]

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n의 좌표를 $(2^n,\ 3^{n-1})$이라 하고, 두 점 O, A_n 사이의 거리를 a_n, 두 점 A_n, A_{n+1} 사이의 거리를 b_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

Level 1 기초 연습

[22011-0007]

1 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-2)=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n(a_n+2)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

[22011-0008]

2 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=4$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}+\frac{a_n}{b_n}\right)$의 값은?

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_nb_n\neq0$이다.)

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

[22011-0009]

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+\sqrt{4n^2+2n}}$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[22011-0010]

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+1}}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[22011-0011]

5 $\lim_{n\to\infty}\frac{an}{2n+5}=\frac{3}{8}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b\times 3^{n+1}}{3^n+2^n}=\frac{3}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[22011-0012]

6 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$n+2<a_n<n+3$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

[22011-0013]

7 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{4\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\times\left(\frac{1}{9}\right)^n}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

[22011-0014]

8 수열 $\left\{\left(\frac{x^2+x+2}{8}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[22011-0015]

1 자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=n^{p-10}\left(n^2+\frac{1}{n}\right)^2$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 p의 값의 합은?

① 16 ② 21 ③ 26 ④ 31 ⑤ 36

[22011-0016]

2 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-a_n}{a_n+2}=\frac{2}{3}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2)(3-a_n)$의 값은?

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+2\neq0$이다.)

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

[22011-0017]

3 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n+b_n)=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)b_n=8$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}(4n-1)a_n$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[22011-0018]

4 수렴하는 수열 $\{a_n\}$이 있다. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}_n(2a_n)$, $\mathrm{B}_n(3a_{n+1})$에 대하여 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 $3:1$로 외분하는 점을 $\mathrm{C}_n(x_n)$이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{7}{8}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은? (단, 모든 자연수 n에 대하여 $2a_n\neq3a_{n+1}$이다.)

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

[22011-0019]

5 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{4n^2+an}-3n\right)=\frac{7}{6}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[22011-0020]

6 첫째항이 1이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_{n+1}a_{2n+1}}=\frac{1}{2}$일 때, a_5의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

[22011-0021]

7 두 양수 r, s에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\times r^{n+1}}{2^n+1}=\frac{2}{3}$, $\lim_{n\to\infty}(r^n+s^n)=1$일 때, $r+s$의 값은?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[22011-0022]

8 첫째항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$b_n<\frac{3^n+6^{n+k}}{20\times4^n+8\times6^n}<S_n$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$일 때, 상수 k의 값은?

① $\log_6 2$ ② $\log_6\frac{5}{2}$ ③ $\log_6 3$ ④ $\log_6\frac{7}{2}$ ⑤ $2\log_6 2$

[22011-0023]

1 $f(0)=0$인 이차함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 $a_n=f(2n)$, $b_n=n^3f\left(\dfrac{1}{n}\right)$이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{7n+4}=2$일 때, $f(1)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[22011-0024]

2 양의 실수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p^n=0$

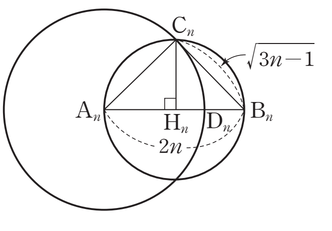
(나) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p^n+4(1-p)^{n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2p^{n+1}+5(1-p)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{2}{3}$

모든 p의 값의 합은?

① $\dfrac{7}{12}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{11}{12}$ ④ $\dfrac{13}{12}$ ⑤ $\dfrac{5}{4}$

[22011-0025]

3 그림과 같이 n이 자연수일 때 길이가 $2n$인 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 지름으로 하는 원 위의 한 점 C_n에 대하여 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=\sqrt{3n-1}$이다. 점 C_n에서 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하고, 점 A_n이 중심이고 점 C_n을 지나는 원이 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 만나는 점을 D_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n})=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



대표 기출 문제

EBS

출제 경향 기본적인 수열의 극한값을 구하는 계산 문제, 수열의 극한에 대한 기본 성질과 대소 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제, 주어진 그래프나 도형으로부터 수열의 일반항을 구하여 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4} < \sqrt{na_n} < 3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2020학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4} < \sqrt{na_n} < 3n+2$$

를 만족시키므로

$$9n^2+4 < na_n < (3n+2)^2$$

$n^2>0$이므로 부등식의 각 변을 n^2으로 나누면

$$\frac{9n^2+4}{n^2} < \frac{a_n}{n} < \frac{9n^2+12n+4}{n^2}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+4}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{4}{n^2}\right) = 9+0=9$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+12n+4}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}\right) = 9+0+0=9$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 9$$

답 ④

02 급수

1. 급수의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 급수라 하고, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다. 즉,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

예 (1) $2+4+6+\cdots+2n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} 2n$

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

2. 급수의 수렴과 발산

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

을 이 급수의 제n항까지의 부분합이라 한다.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴하면, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$$

이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 이 급수의 합이라 하고, 이것을 기호로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

와 같이 나타낸다.

(3) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다고 한다.

예 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$의 제$n$항까지의 부분합 S_n은

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

이고, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

예제 1 급수의 합

첫째항이 4이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{80}{a_n a_{n+1}}=a_m$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

풀이 전략 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=S$이다.

풀이 $a_n=4+(n-1)\times2=2n+2$, $a_{n+1}=2(n+1)+2=2n+4$이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{80}{a_n a_{n+1}}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{80}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{80}{(2k+2)(2k+4)}$$
$$=\frac{80}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=20\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=20\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=20\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{80}{a_n a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}20\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=20\times\left(\frac{1}{2}-0\right)=10$이므로

$a_m=2m+2=10$에서 $m=4$

답 ②

유제

정답과 풀이 10쪽

1 [22011-0026]

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\frac{3n}{2n+1}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2 [22011-0027]

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때 $S_n=\frac{an+b}{3n+1}$이다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$일 때, a_2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

3 급수와 수열의 극한 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$에 대하여

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

설명 (1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴한다고 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면 $n\geq 2$일 때

$\lim_{n\to\infty} S_n=S$, $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$

이때 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) (1)의 명제가 참이므로 그 대우 '$\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.'는 참이다.

예 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$에서 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\neq 0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$은 발산한다.

4. 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=T$라 할 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n=cS$ (단, c는 상수)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=S+T$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=S-T$

참고 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 제n항까지의 부분합을 각각 S_n, T_n이라 하고 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하면 급수의 성질 (1), (2), (3)이 성립함을 알 수 있다.

예 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3$일 때

$\sum_{n=1}^{\infty} 4a_n=4\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4\times 2=8$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2+3=5$

예제 2 급수의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n+4)=17$일 때, $\lim_{n\to\infty} b_n+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (c는 상수)이다.

풀이

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n+4)$가 모두 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n+4)=0$이다.

그러므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(3a_n+2b_n+4)-3a_n-4\}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n+4)-\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} 2$$

$$=\frac{1}{2}\times 0-\frac{3}{2}\times 0-2=-2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(3a_n+2b_n+4)-3a_n\}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n+4)-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$=\frac{1}{2}\times 17-\frac{3}{2}\times 3=4$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} b_n+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+2)=-2+4=2$

답 ②

[주의] 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 4$는 모두 발산하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n+4)\neq 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n+2\sum_{n=1}^{\infty} b_n+\sum_{n=1}^{\infty} 4$$

유제

정답과 풀이 10쪽

3 [22011-0028]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n=8$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)a_n+3n}{3n+\sqrt{4n^2+9n}}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

4 [22011-0029]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_{2n-1})=4$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=p$이다. 모든 자연수 n에 대하여 $b_{2n-1}=b_{2n}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+pb_n)$의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.)

5. 등비급수의 뜻

첫째항이 $a\ (a\neq0)$이고 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

을 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비급수라 한다.

6. 등비급수의 수렴과 발산

첫째항이 $a\ (a\neq0)$이고 공비가 r인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은

(1) $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다. 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$$

(2) $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

설명 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$r\neq1$이면 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$이면 $S_n=a+a+a+\cdots+a=na$

따라서 r의 값의 범위에 따라 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산을 조사하면 다음과 같다.

(1) $|r|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\dfrac{a}{1-r}$

(2) $|r|\geq1$일 때

$\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}\neq0$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

참고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에서 $a=0$이면 급수의 각 항이 0이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0$이다.

예 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{3}$이고, $\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

참고 일정한 닮음비로 닮은 도형이 한없이 반복되는 그림에서 주어진 모든 닮은 도형의 길이의 합이나 넓이의 합은 등비급수로 나타내어진다. 이때 닮음비를 이용하여 등비급수의 공비를 구할 수 있다.

예제 3 등비급수의 합

공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_4=25$, $a_5=40$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}$의 값은?

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

풀이 전략 첫째항이 a $(a\neq0)$이고 공비가 r $(|r|<1)$인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_2+a_4=ar(1+r^2)=25,\ a_5=ar^4=40$$

이므로 $\frac{ar(1+r^2)}{ar^4}=\frac{5}{8}$에서

$$5r^3-8r^2-8=0,\ (r-2)(5r^2+2r+4)=0$$

2	5	-8	0	-8
		10	4	8
	5	2	4	0

이때 r는 실수이므로 $r=2$

$ar^4=16a=40$에서 $a=\frac{5}{2}$

따라서 수열 $\left\{\frac{a_n}{4^n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{a_1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{8}$, 공비가 $\frac{r}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{4}$$

답 ③

유제

정답과 풀이 10쪽

5 [22011-0030]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=2^{2-n}-4$이다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$의 값은?

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

6 [22011-0031]

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=1$, $b_1=2$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$의 값은?

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{40}{3}$ ⑤ $\frac{50}{3}$

[22011-0032]

1 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n+\frac{1}{n(n+1)}\right\}=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[22011-0033]

2 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+3n}{4n-1}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

[22011-0034]

3 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=12$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=9$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[22011-0035]

4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+a}+3^{n-1}}{6^n}=\frac{7}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[22011-0036]

1 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비가 각각 2, 3이고, $a_1=b_1$이다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면 $S_n=\frac{3^n a_n+2^n b_n}{6^{n+1}+3^{n+1}}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=\frac{5}{9}$일 때, a_1의 값은?

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

[22011-0037]

2 실수 r에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=r$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}$의 값은?

① $-\frac{1}{3}$　② $-\frac{1}{6}$　③ 0　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{3}$

[22011-0038]

3 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 두 직선 $x-ay+2a=0$, $y=n+2$가 만나는 점의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n y_n}=\frac{1}{8}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a\neq 0$)

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

[22011-0039]

4 공비가 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1b_1=8$이고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=9$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$의 값은?

① $\frac{45}{2}$　② 25　③ $\frac{55}{2}$　④ 30　⑤ $\frac{65}{2}$

[22011-0040]

5 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(f\circ g)(n)=\frac{9}{7}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(f\circ g)\left(\frac{n}{2}\right)=b$이다. ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{8}{3}$　② $\frac{10}{3}$　③ 4　④ $\frac{14}{3}$　⑤ $\frac{16}{3}$

[22011-0041]

6 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

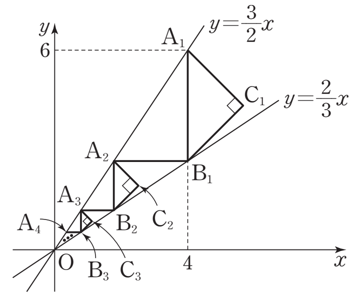
$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=2,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=7$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_nb_n$의 값은?

① $\frac{5}{6}$　② 1　③ $\frac{7}{6}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[22011-0042]

7 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y=\frac{3}{2}x$ 위에 점 $A_1(4,\ 6)$이 있다. 점 A_1을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{2}{3}x$와 만나는 점을 B_1, 점 B_1을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{3}{2}x$와 만나는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{2}{3}x$와 만나는 점을 B_2, 점 B_2를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{3}{2}x$와 만나는 점을 A_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 자연수 n에 대하여 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{2}{3}x$와 만나는 점을 B_n, 점 B_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{3}{2}x$와 만나는 점을 A_{n+1}이라 하자. 선분 A_nB_n을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $A_nB_nC_n$을 만들고, 점 C_n의 x좌표를 c_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$의 값은?



(단, 점 C_n의 x좌표는 점 A_n의 x좌표보다 크다.)

① $\frac{51}{5}$　② $\frac{53}{5}$　③ 11　④ $\frac{57}{5}$　⑤ $\frac{59}{5}$

[22011-0043]

1 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{p}{n(n+2)} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2^{-n} & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=5}^{\infty} a_n=\frac{1}{12}$을 만족시키는 상수 p의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

[22011-0044]

2 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\frac{n+3}{3n-1}$이고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 T_n이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n-a_{n+1}<b_n$이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $T_n+T_{n+1}<\frac{30n^2+52n+15}{9n^2+15n+4}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=p$일 때, 실수 p의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

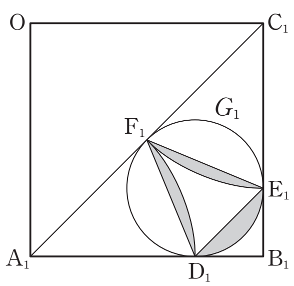
[22011-0045]

3 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+3}{n+1}\right)=1$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

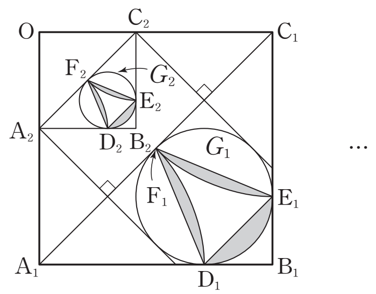
① 110 ② 120 ③ 130 ④ 140 ⑤ 150

[22011-0046]

4 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $OA_1B_1C_1$에서 두 변 A_1B_1, B_1C_1과 대각선 A_1C_1에 동시에 접하는 원 G_1을 그리고 원 G_1과 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1이 만나는 점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하자. 원 G_1의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 호 D_1E_1과 선분 D_1E_1로 둘러싸인 부분에 색칠을 하고, 중심이 A_1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_1D_1F_1$의 호 D_1F_1과 선분 D_1F_1로 둘러싸인 부분 및 중심이 C_1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $C_1E_1F_1$의 호 E_1F_1과 선분 E_1F_1로 둘러싸인 부분에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 원 G_1에 접하고 대각선 A_1C_1과 수직인 두 직선이 변 OA_1, 변 OC_1과 만나는 점을 각각 A_2, C_2라 하고 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그린다. 정사각형 $OA_2B_2C_2$에서 두 변 A_2B_2, B_2C_2와 대각선 A_2C_2에 동시에 접하는 원 G_2를 그리고 원 G_2와 세 선분 A_2B_2, B_2C_2, A_2C_2가 만나는 점을 각각 D_2, E_2, F_2라 하자. 원 G_2의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 호 D_2E_2와 선분 D_2E_2로 둘러싸인 부분에 색칠을 하고, 중심이 A_2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_2D_2F_2$의 호 D_2F_2와 선분 D_2F_2로 둘러싸인 부분 및 중심이 C_2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $C_2E_2F_2$의 호 E_2F_2와 선분 E_2F_2로 둘러싸인 부분에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2 …

① $\frac{\sqrt{2}(\pi-2)-1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}(\pi-1)-1}{4}$　③ $\frac{\sqrt{2}(\pi-2)+1}{4}$
④ $\frac{\sqrt{2}(\pi-1)}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{2}$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 기본적인 급수의 합을 구하는 문제, 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하는 문제, 등비급수의 합을 이용하여 도형의 길이나 넓이를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022학년도 대수능

출제 의도 등비급수의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_{2n-1}-a_{2n}=a_{2n-1}-r\times a_{2n-1}=(1-r)a_{2n-1}$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_1-a_2=(1-r)a$, 공비가 r^2인 등비수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$이므로 $r^2<1$, 즉 $-1<r<1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=\frac{(1-r)a}{1-r^2}=3$$

$r\neq1$이므로 $\frac{a}{1+r}=3$ ...... ㉠

수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 $a_1{}^2=a^2$, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=\frac{a^2}{1-r^2}=6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에 의하여 $\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1+r}\times\frac{a}{1-r}=3\times\frac{a}{1-r}$이므로 ㉡에서

$3\times\frac{a}{1-r}=6$, $\frac{a}{1-r}=2$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=2$

답 ②

03 여러 가지 함수의 미분

1. 지수함수와 로그함수의 극한 (1)

(1) 지수함수의 극한

① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$ ② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x=0$

(2) 로그함수의 극한

① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} \log_a x=\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x=-\infty$

② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} \log_a x=-\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x=\infty$

참고 (1) 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k} a^x=a^k$이다.

(2) 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$은 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 양수 k에 대하여 $\lim_{x\to k}\log_a x=\log_a k$이다.

2. 지수함수와 로그함수의 극한 (2)

(1) 무리수 e의 뜻

x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 일정한 값에 수렴한다는 것이 알려져 있는데 그 극한값을 e로 나타낸다. 즉,

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

이다. 이때 수 e는 무리수이며 그 값은 $e=2.71828\cdots$임이 알려져 있다.

(2) 자연로그의 뜻

무리수 e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 자연로그라 하고, 기호로 $\ln x$와 같이 나타낸다.

(3) 지수함수와 로그함수의 극한

① $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

② $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$, $\lim_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

설명 ① $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

또 $e^x-1=t$로 놓으면 $x=\ln(1+t)$이고, $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

② $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{\ln a}}{x}=\dfrac{1}{\ln a}\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}\times1=\dfrac{1}{\ln a}$

또 $a^x-1=t$로 놓으면 $x=\log_a(1+t)$이고, $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}$$

$$=\frac{1}{\lim_{t\to0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

예제 1 지수함수와 로그함수의 극한

$a>0$이고 $a\neq1$인 상수 a에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a 4^{x+1}-\log_a(4^x+1)\}=\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+2)-\ln x\}$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

풀이 전략

(1) $a>1$일 때 $\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$, $0<a<1$일 때 $\lim_{x\to\infty}a^x=0$

(2) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

풀이

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_a 4^{x+1}-\log_a(4^x+1)\}=\lim_{x\to\infty}\log_a\frac{4^{x+1}}{4^x+1}=\lim_{x\to\infty}\log_a\frac{4}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^x}=\log_a 4$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+2)-\ln x\}&=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\\&=\lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2\\&=\lim_{x\to\infty}2\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\\&=2\ln e=2\end{aligned}$$

따라서 $\log_a 4=2$에서 $a^2=4$이고 $a>0$이므로

$a=2$

답 ③

유제

정답과 풀이 17쪽

1 [22011-0047]

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{4^x-2^x}$의 값은?

① $\ln 2$ ② $\frac{1}{2\ln 2}$ ③ 1 ④ $2\ln 2$ ⑤ $\frac{1}{\ln 2}$

2 [22011-0048]

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{\sqrt{3x+b}-2}=8$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. 지수함수와 로그함수의 미분

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

$y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

(2) $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^x \ln a$

$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

설명 (1) $y=e^x$에 대하여 지수함수의 극한을 이용하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\times 1=e^x$$

$y=\ln x$에 대하여

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

이때 $\dfrac{h}{x}=t$로 놓으면 $h=xt$이고, $h\to 0$일 때 $t\to 0$이므로 로그함수의 극한에 의하여

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{xt}=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x}\times 1=\frac{1}{x}$$

(2) $y=a^x$에 대하여 지수함수의 극한을 이용하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\times\ln a=a^x\ln a$$

$y=\log_a x$에 대하여

$$y'=(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\times(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

예 (1) ① $y=e^{x+1}$에 대하여

$$y'=(e^{x+1})'=(e\times e^x)'=e\times(e^x)'=e\times e^x=e^{x+1}$$

② $y=xe^x$에 대하여

$$y'=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

③ $y=\ln 2x$에 대하여

$$y'=(\ln 2x)'=(\ln 2+\ln x)'=(\ln 2)'+(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

④ $y=x\ln x$에 대하여

$$y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$$

(2) ① $y=2^{x+1}$에 대하여

$$y'=(2^{x+1})'=(2\times 2^x)'=2\times(2^x)'=2\times 2^x\ln 2=2^{x+1}\ln 2$$

② $y=\log_2 5x$에 대하여

$$y'=(\log_2 5x)'=(\log_2 5+\log_2 x)'=(\log_2 5)'+(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$$

예제 2 지수함수와 로그함수의 미분

함수 $f(x)=x^2\ln x$에 대하여 등식 $f'(e)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+kx)}{x}$를 만족시키는 상수 k의 값은?

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

풀이 전략 $y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

풀이 $f(x)=x^2\ln x$에서

$$f'(x)=(x^2)'\times\ln x+x^2\times(\ln x)'=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$$

이므로

$$f'(e)=e\times(2+1)=3e$$

한편 $k=0$이면 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+kx)}{x}=0$이므로 $k\neq0$이다.

$f(1)=0$, $f'(1)=1\times(0+1)=1$이므로 미분계수의 정의를 이용하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(1+kx)}{x}&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(1+kx)-f(1)}{kx}\times k\right\}\\&=f'(1)\times k\\&=1\times k\\&=k\end{aligned}$$

따라서 $k=3e$

답 ③

유제

정답과 풀이 17쪽

3 [22011-0049]

함수 $f(x)=(x-1)e^x$에 대하여 등식 $f(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}$를 만족시키는 상수 a의 값은? (단, $a\neq0$)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

4 [22011-0050]

함수 $f(x)=\log_3 9x\times\log_9 3x$에 대하여 $f'(3)$의 값은?

① $\dfrac{1}{6\ln3}$ ② $\dfrac{1}{3\ln3}$ ③ $\dfrac{1}{2\ln3}$ ④ $\dfrac{2}{3\ln3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6\ln3}$

4. 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

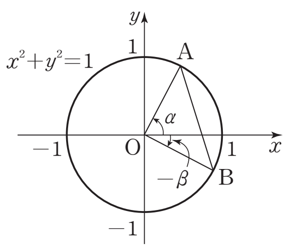
(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

설명 그림과 같이 원점이 O인 좌표평면에서 두 각 α, $-\beta$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$이 나타내는 동경과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 각각 A, B라 하자.



삼각형 AOB에서 $\angle AOB=\alpha+\beta$이므로 코사인법칙으로부터

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos(\alpha+\beta)}$$
$$=\sqrt{2-2\cos(\alpha+\beta)} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 점 A의 좌표는 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$이고,

점 B의 좌표는 $(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$, 즉 $(\cos\beta,\ -\sin\beta)$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡의 우변이 같아야 하므로 두 우변을 각각 제곱한 것도 서로 같아야 한다. 즉,

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$$

따라서 이를 정리하면 다음을 얻는다.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots \text{㉢}$$

또 $\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$이므로 ㉢을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\beta)\right\}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots \text{㉣}$$

또 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 ㉢, ㉣을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

한편 $\alpha-\beta$에 대한 덧셈정리는 $\alpha+\beta$에 대한 덧셈정리에 β 대신 $-\beta$를 대입하면 얻을 수 있다.

예 (1) $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

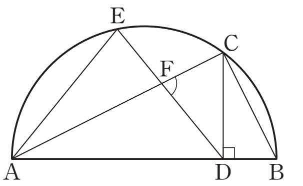
(2) $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\dfrac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=-2-\sqrt{3}$

예제 3 삼각함수의 덧셈정리

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 두 점 A, B가 아닌 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D라 하자. 호 AC 위의 점 E를 $\overline{\text{AE}}=\overline{\text{DE}}$가 되도록 잡고, 두 선분 AC, DE가 만나는 점을 F라 하자. $\overline{\text{AD}}=\frac{8}{5}$일 때, $\sin(\angle\text{CFD})=p\sqrt{2}+q\sqrt{3}$이다. $5(p+q)$의 값을 구하시오.

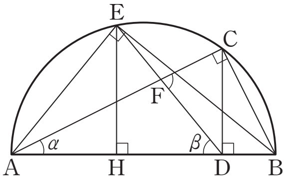
(단, p와 q는 유리수이다.)



풀이 전략

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

풀이



$\angle\text{CAD}=\alpha$, $\angle\text{ADE}=\beta$라 하면 $\angle\text{CFD}=\alpha+\beta$

$\angle\text{ACB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\text{AC}}=\overline{\text{AB}}\cos\alpha=2\cos\alpha$, $\overline{\text{AD}}=\overline{\text{AC}}\cos\alpha=2\cos^2\alpha$

$\overline{\text{AD}}=\frac{8}{5}$이므로 $2\cos^2\alpha=\frac{8}{5}$이고, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\angle\text{AEB}=\frac{\pi}{2}$이고 $\angle\text{DAE}=\angle\text{ADE}=\beta$이므로 $\overline{\text{AE}}=\overline{\text{AB}}\cos\beta=2\cos\beta$

점 E에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\text{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AD}}=\frac{4}{5}$이므로

직각삼각형 AEH에서 $\overline{\text{AH}}=\overline{\text{AE}}\cos\beta=2\cos^2\beta$

그러므로 $2\cos^2\beta=\frac{4}{5}$이고, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{5}$, $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin(\angle\text{CFD})=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{15}}{5}=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}$$

따라서 $p=\frac{1}{5}$, $q=\frac{2}{5}$이므로 $5(p+q)=5\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)=3$

답 3

유제

정답과 풀이 18쪽

5

[22011-0051]

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$인 α, β에 대하여 $\sin\alpha=\cos\beta=\frac{1}{3}$일 때, $\cos(\beta-\alpha)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{9}$

6

[22011-0052]

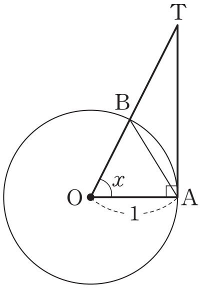
$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$인 α, β에 대하여 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$일 때, $\tan 2\alpha$의 값은?

① -1 ② $-\frac{5}{6}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

5. 삼각함수의 극한

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

설명 (i) $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때



그림과 같이 중심각의 크기가 x(라디안)이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB에 대하여 점 A를 지나고 선분 OA에 수직인 직선과 선분 OB의 연장선이 만나는 점을 T라 하자.

(삼각형 OAB의 넓이)<(부채꼴 OAB의 넓이)<(삼각형 OAT의 넓이)이므로

$$\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin x<\frac{1}{2}\times 1^2\times x<\frac{1}{2}\times 1\times\tan x$$

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

$$\sin x<x<\tan x$$

$\sin x>0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누면

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

각 변의 역수를 취하면

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

$\lim_{x\to 0+}\cos x=1$, $\lim_{x\to 0+}1=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<0$일 때

$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}$에서 $-x=t$로 놓으면 $0<t<\frac{\pi}{2}$이고, $x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin(-t)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t}=1$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

예 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$의 값을 구해 보자.

$2x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{2}}=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2\times 1=2$$

참고 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$은 함수 $f(x)=\sin x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

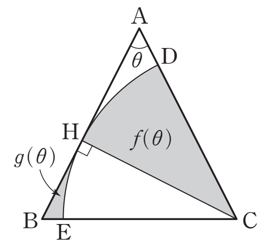
즉,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

예제 4 삼각함수의 극한

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\overline{CH}$인 원이 두 선분 AC, BC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. $\angle BAC=\theta$라 할 때, 부채꼴 CDH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CHB의 내부와 부채꼴 CHE의 외부의 공통부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$



① $\dfrac{\pi}{10}$ ② $\dfrac{\pi}{8}$ ③ $\dfrac{\pi}{6}$ ④ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

풀이 전략

부채꼴 CHE의 넓이를 S라 할 때, $f(\theta)-g(\theta)=\{f(\theta)+S\}-\{g(\theta)+S\}$임을 이용하여 $f(\theta)-g(\theta)$를 θ에 대한 삼각함수로 나타낸 후 $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$임을 이용한다.

풀이

부채꼴 CHE의 넓이를 S라 하면

$$f(\theta)-g(\theta)=\{f(\theta)+S\}-\{g(\theta)+S\}=(\text{부채꼴 CDE의 넓이})-(\text{삼각형 CHB의 넓이})$$

직각삼각형 AHC에서 $\overline{CH}=\sin\theta$, $\angle ACB=\dfrac{\pi-\theta}{2}$이므로

$$f(\theta)+S=\frac{1}{2}\times\overline{CH}^2\times\frac{\pi-\theta}{2}=\frac{1}{4}\times\sin^2\theta\times(\pi-\theta)$$

또 $\overline{BH}=1-\overline{AH}=1-\cos\theta$이므로 $g(\theta)+S=\dfrac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{CH}=\dfrac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times\sin\theta$

따라서 $f(\theta)-g(\theta)=\{f(\theta)+S\}-\{g(\theta)+S\}=\dfrac{1}{2}\times\sin\theta\times\left\{\sin\theta\times\dfrac{\pi-\theta}{2}-(1-\cos\theta)\right\}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^2}&=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\pi-\theta}{2}-\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left\{\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\pi-\theta}{2}\right)-\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left\{\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\pi-\theta}{2}\right)-\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\times1\times\left(1\times\frac{\pi}{2}-1\times0\right)=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 18쪽

7 [22011-0053]

$6\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos^3 x}$의 값을 구하시오.

8 [22011-0054]

$0<t<\dfrac{\pi}{4}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=\tan 2x$, $y=\sin x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 원점 O에 대하여 두 직선 OA, OB가 이루는 예각의 크기를 $\theta(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\tan\theta(t)$의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

6. 삼각함수의 미분

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

설명 (1) $y=\sin x$에 대하여 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하면

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\cos x\sin h-\sin x(1-\cos h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left(\cos x\times\frac{\sin h}{h}-\sin x\times\frac{1-\cos h}{h}\right)$$

이때

$$\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)}=\lim_{h\to0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$$
$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{\sin h}{h}\times\frac{\sin h}{1+\cos h}\right)=1\times\frac{0}{1+1}=0$$

이므로

$$y'=\cos x\times\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}-\sin x\times\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h}$$
$$=\cos x\times1-\sin x\times0$$
$$=\cos x$$

(2) $y=\cos x$에 대하여 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하면

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-\sin x\sin h-\cos x(1-\cos h)}{h}$$
$$=-\sin x\times\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}-\cos x\times\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h}$$
$$=-\sin x\times1-\cos x\times0=-\sin x$$

예 (1) $y=x\sin x$에 대하여

$$y'=(x)'\times\sin x+x\times(\sin x)'=\sin x+x\cos x$$

(2) $y=\sin x\cos x$에 대하여

$$y'=(\sin x)'\times\cos x+\sin x\times(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x$$

예 $f(x)=\sin x+\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기를 구해 보자.

$f'(x)=\cos x-\sin x$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=0-1=-1$$

예제 5 삼각함수의 미분

함수 $f(x)=\sin x\cos x$에 대하여 $0<x<2\pi$에서 방정식 $f'(x)=0$과 부등식 $f(x)<0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은?

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

풀이 전략 $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$

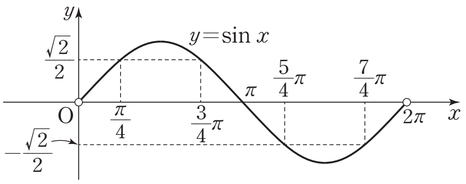
풀이 $f(x)=\sin x\cos x$에서

$$f'(x)=(\sin x)'\times\cos x+\sin x\times(\cos x)'=\cos x\times\cos x+\sin x\times(-\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

이므로 방정식 $f'(x)=0$에서

$$\cos^2 x-\sin^2 x=0,\ (1-\sin^2 x)-\sin^2 x=0,\ \sin^2 x=\frac{1}{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{또는}\ \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



그러므로 $0<x<2\pi$에서 방정식 $f'(x)=0$의 해는

$$x=\frac{\pi}{4}\ \text{또는}\ x=\frac{3}{4}\pi\ \text{또는}\ x=\frac{5}{4}\pi\ \text{또는}\ x=\frac{7}{4}\pi \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $0<x<2\pi$에서 부등식 $f(x)<0$

즉, $\sin x\cos x<0$의 해를 구하면

$\sin x>0$, $\cos x<0$인 모든 x의 값의 범위는 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

$\sin x<0$, $\cos x>0$인 모든 x의 값의 범위는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

그러므로 $0<x<2\pi$에서 부등식 $f(x)<0$의 해는

$$\frac{\pi}{2}<x<\pi\ \text{또는}\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 모든 x의 값은 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이고 그 합은

$$\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$$

답 ④

유제

정답과 풀이 19쪽

9 [22011-0055]

함수 $f(x)=e^x\cos x$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(x)}{x}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

10 [22011-0056]

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x-2\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

Level 1 기초 연습

[22011-0057]

1 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-2^{2x}}{x}$ 의 값은?

① $2-3\ln 2$　② $2-\ln 6$　③ $2-2\ln 2$　④ $2-\ln 2$　⑤ 2

[22011-0058]

2 $\lim_{x \to -1} \frac{\ln(x^2+2x+a)}{b(x+1)^2}=\frac{1}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a>1$, $b\neq 0$이다.)

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[22011-0059]

3 함수 $f(x)=(x^2-4x-4)e^x$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

[22011-0060]

4 함수 $f(x)=e^x(e^x-1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

[22011-0061]

5 함수 $f(x)=x\ln kx$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}=2$일 때, 양수 k의 값은?

① $\frac{1}{e^2}$　② $\frac{1}{e}$　③ 1　④ e　⑤ e^2

[22011-0062]

6 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 인 α에 대하여 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ 일 때, $\cos\left(\frac{5}{3}\pi+\alpha\right)$ 의 값은?

① $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

[22011-0063]

7 이차방정식 $x^2+ax-2=0$의 서로 다른 두 실근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이고 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[22011-0064]

8 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x+\sin 2x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[22011-0065]

9 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[22011-0066]

10 곡선 $y=a\sin x+b\cos x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22011-0067]

1 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x>-\frac{1}{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\ln(1+2x)=4-ae^{-x}$$

을 만족시킬 때, $a\times f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[22011-0068]

2 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3$

(나) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{2x}=3$

$f(2)$의 값을 구하시오.

[22011-0069]

3 함수 $f(x)=\frac{4^{-x}}{\ln 2}$과 자연수 n에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{5}{6}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

[22011-0070]

4 실수 t에 대하여 직선 $y=x-t$가 함수 $y=|\ln 3x|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자.
$\lim\limits_{t\to a+}f(t)\neq\lim\limits_{t\to a-}f(t)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

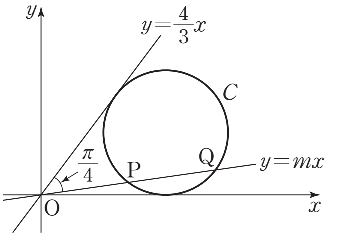
① $2-\ln 3$ ② $\frac{5}{3}-\ln 3$ ③ $\frac{4}{3}-\ln 3$ ④ $1-\ln 3$ ⑤ $\frac{2}{3}-\ln 3$

[22011-0071]

5 함수 $f(x)=2\sin x+\cos x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 α만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$을 지날 때, $\tan\alpha$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

[22011-0072]

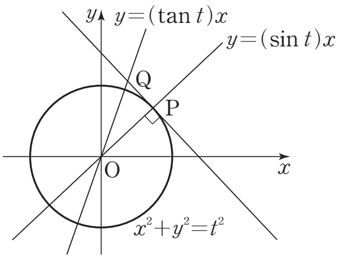
6 그림과 같이 중심이 제1사분면 위에 있고 반지름의 길이가 2인 원 C가 직선 $y=\frac{4}{3}x$와 x축에 동시에 접한다. 직선 $y=mx$가 원 C와 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나고, 두 직선 $y=\frac{4}{3}x$, $y=mx$가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값은? $\left(\text{단, } m\text{은 상수이고, } 0<m<\frac{4}{3}\text{이다.}\right)$



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[22011-0073]

7 그림과 같이 $0<t<\frac{\pi}{2}$인 실수 t에 대하여 원 $x^2+y^2=t^2$과 두 직선 $y=(\sin t)x$, $y=(\tan t)x$가 있다. 원 $x^2+y^2=t^2$과 직선 $y=(\sin t)x$가 만나는 점을 P라 하고, 원 위의 점 P에서의 접선이 직선 $y=(\tan t)x$와 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{t^4}$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[22011-0074]

8 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{xf'(x)-f(x)}{2x-\pi}$의 값은?

① $-\pi^2$ ② $-\frac{\pi^2}{2}$ ③ $-\frac{\pi^2}{4}$ ④ $-\frac{\pi^2}{8}$ ⑤ $-\frac{\pi^2}{16}$

[22011-0075]

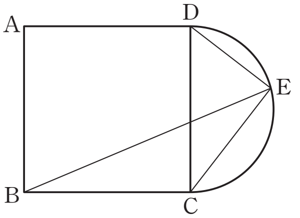
1 0이 아닌 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$ $(0<a<1)$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 PQ의 길이를 $f(t)$라 하자. $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{f(2t)-f(t)}{t}=3\ln 2$일 때, $f'(1)-f'(-1)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① $8\ln 2$ ② $9\ln 2$ ③ $10\ln 2$ ④ $11\ln 2$ ⑤ $12\ln 2$

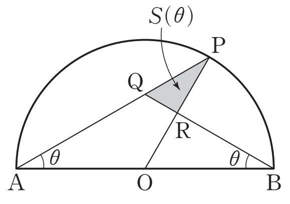
[22011-0076]

2 그림과 같이 정사각형 ABCD와 선분 DC를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원의 호 위의 점 E에 대하여 $\sin(\angle\mathrm{EDC})=\dfrac{4}{5}$일 때, $\tan(\angle\mathrm{BEC})=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, 점 E는 정사각형 ABCD의 외부에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[22011-0077]

3 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 선분 AP 위의 점 Q를 $\angle\mathrm{QAB}=\angle\mathrm{QBA}=\theta$가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 QB와 선분 OP가 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



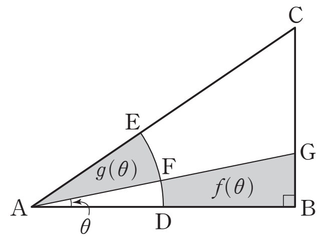
① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 도형에서 사인법칙, 코사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하는 문제, 도형의 성질을 이용하여 식을 구한 후 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자. $\angle BAG=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$ [3점]



2021학년도 대수능

출제 의도 부채꼴의 넓이와 삼각형의 넓이를 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 부채꼴 AFE에서 $\angle EAF=2\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta=\theta$$

직각삼각형 ABG에서 $\overline{BG}=2\tan\theta$이므로

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BG}-\frac{1}{2}\times1^2\times\theta\\&=\frac{1}{2}\times2\times2\tan\theta-\frac{\theta}{2}\\&=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}&=40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}\\&=40\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\\&=40\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\\&=40\times\left(\frac{2}{1}\times1-\frac{1}{2}\right)=60\end{aligned}$$

답 60

04 여러 가지 미분법

1. 함수의 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$ $(f(x)\neq 0)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $y=\dfrac{1}{f(x)}$이면 $y'=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

(2) $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이면 $y'=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

설명 (1) 함수 $y=\dfrac{1}{f(x)}$에 대하여

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{f(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

(2) 함수 $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$에 대하여 $y=g(x)\times\dfrac{1}{f(x)}$이므로

$$y'=g'(x)\times\frac{1}{f(x)}+g(x)\times\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}'=\frac{g'(x)}{f(x)}-\frac{g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

2. 함수 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

n이 정수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$

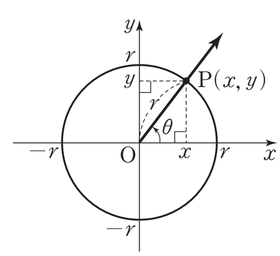
설명 n이 음의 정수일 때, $n=-m$ (m은 양의 정수)로 놓으면

$$y'=(x^n)'=(x^{-m})'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{(x^m)'}{(x^m)^2}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$

3. 삼각함수의 도함수

(1) $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 정의

좌표평면의 원점 O에서 x축의 양의 방향을 시초선으로 정할 때, 일반각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$를 다음과 같이 정의한다.



$$\csc\theta=\frac{r}{y}\ (y\neq 0),\ \sec\theta=\frac{r}{x}\ (x\neq 0),\ \cot\theta=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

이 함수를 차례로 θ에 대한 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라 한다.

참고 ① $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ ② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(2) 삼각함수의 도함수

몫의 미분법을 이용하여 여러 가지 삼각함수의 도함수를 구할 수 있다.

① $y=\tan x$이면 $y'=\sec^2 x$

② $y=\cot x$이면 $y'=-\csc^2 x$

③ $y=\sec x$이면 $y'=\sec x\tan x$

④ $y=\csc x$이면 $y'=-\csc x\cot x$

설명 ① $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\times\cos x-\sin x\times(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

마찬가지 방법으로 몫의 미분법을 이용하여 ②, ③, ④의 삼각함수의 도함수를 구할 수 있다.

예제 1 함수의 몫의 미분법

실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$$

라 하자. $f'(1)=1$, $g'(1)=\{2g(1)\}^2$일 때, $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

풀이 전략 두 함수 $f(x)$ $(f(x)\neq 0)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}'=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이다.

풀이 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$에서 $g(1)=\frac{f(1)}{2}$ …… ㉠

$$g'(x)=\frac{f'(x)\times(x^2+1)-f(x)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

이고 $f'(1)=1$이므로

$$g'(1)=\frac{2f'(1)-2f(1)}{4}=\frac{1-f(1)}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡과 $g'(1)=\{2g(1)\}^2$에서

$$\frac{1-f(1)}{2}=\{f(1)\}^2$$

$$\{f(1)+1\}\{2f(1)-1\}=0$$

$f(1)>0$이므로 $f(1)=\frac{1}{2}$

답 ②

유제

정답과 풀이 26쪽

1 [22011-0078]

함수 $f(x)=\frac{x+2}{x^2}$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(2+h)-1\}$의 값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{5}{4}$

2 [22011-0079]

함수 $f(x)=\tan x+\sec x$에 대하여 $f'(\alpha)=2$인 모든 양수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 수열을 $\{\alpha_n\}$이라 할 때, $f(\alpha_4)$의 값은?

① $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 0 ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))g'(x)$$

설명 함수 $u=g(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu라 하고, 함수 $y=f(u)$에서 u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라 하면 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}$ $(\Delta u\neq 0)$이고, 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

이때 미분가능한 함수 $u=g(x)$는 연속이므로 $\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$에서 $\Delta x\to 0$이면 $\Delta u\to 0$이다.

따라서 $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

또한 $\frac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$이고, $\frac{du}{dx}=g'(x)$이므로

$$y'=\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

예 함수 $y=(x^2+1)^3$의 도함수를 구해 보자.

$u=x^2+1$이라 하면 $y=u^3$이고 $\frac{dy}{du}=3u^2$, $\frac{du}{dx}=2x$이므로 $y'=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=3u^2\times 2x=6x(x^2+1)^2$

참고 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=\{f(x)\}^n$ (n은 정수)는 미분가능하고 그 도함수는

$$y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

5. 로그함수의 도함수

(1) $y=\ln|x|$이면 $y'=\frac{1}{x}$

(2) $y=\log_a|x|$ $(a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$

(3) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)\neq 0$일 때, $y=\ln|f(x)|$이면 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

설명 (1) 함수 $y=\ln|x|$의 정의역은 $\{x|x\neq 0\text{인 실수}\}$이므로

(i) $x>0$일 때, $y=\ln|x|=\ln x$이므로 $y'=\frac{1}{x}$

(ii) $x<0$일 때, $y=\ln|x|=\ln(-x)$이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$$y'=\frac{1}{-x}\times(-x)'=\frac{1}{-x}\times(-1)=\frac{1}{x}$$

(i), (ii)에 의하여 $y'=\frac{1}{x}$

6. 함수 $y=x^\alpha$ (α는 실수, $x>0$)의 도함수

α가 실수일 때, $y=x^\alpha$ $(x>0)$이면 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$

설명 $x^\alpha=(e^{\ln x})^\alpha=e^{\alpha\ln x}$이므로 $y'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=e^{\alpha\ln x}\times\frac{\alpha}{x}=x^\alpha\times\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$

예제 2 합성함수의 미분법

함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(e^{x+h})-f(e^x)}{h}$$

이라 할 때, $g(\ln 3)$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

풀이 전략

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(2) $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

풀이

함수 $k(x)=f(e^x)=\sqrt{e^x+1}$이라 하면 함수 $k(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 두 함수 $f(x)$와 e^x이 미분가능하므로 함수 $k(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(e^{x+h})-f(e^x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=k'(x)$$

즉,

$$g(x)=(\sqrt{e^x+1})'=\{(e^x+1)^{\frac{1}{2}}\}'=\frac{1}{2}(e^x+1)^{-\frac{1}{2}}\times(e^x+1)'=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

따라서

$$g(\ln 3)=\frac{e^{\ln 3}}{2\sqrt{e^{\ln 3}+1}}=\frac{3}{4}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 27쪽

3 [22011-0080]

함수 $f(x)=\sin \pi x$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ π

4 [22011-0081]

양수 a와 함수 $f(x)=\ln(e^x+1)$에 대하여 닫힌구간 $[-a, a]$에서 $f'(x)$의 최댓값이 $\frac{4}{5}$일 때, a의 값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

7. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

(1) 두 변수 x, y 사이의 관계를 변수 t를 매개로 하여

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

로 나타낼 때 변수 t를 매개변수라 하고, 이 함수를 매개변수로 나타낸 함수라 한다.

예 함수 $x=t+1$, $y=t^2$은 함수 $y=(x-1)^2$을 매개변수 t로 나타낸 함수이다.

(2) 매개변수 t로 나타낸 함수

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

에서 두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq0$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

설명 매개변수 t의 증분 Δt에 대한 x의 증분을 Δx, y의 증분을 Δy라 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

이때 $x=f(t)$는 t에 대하여 미분가능하고, $f'(t)\neq0$이므로 $\Delta x\to0$이면 $\Delta t\to0$이다.

따라서 $\displaystyle\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$

참고 함수 $x=f(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq0$일 때, 역함수가 존재하며 역함수는 연속임이 알려져 있다.
따라서 $\Delta x\to0$일 때 $\Delta t\to0$이다.

예 ① 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=2t+1$, $y=t^3$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해 보자.

$\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2}$$

② 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=e^t+1$, $y=e^{2t}+e^t$의 $t=0$에서의 미분계수를 구해 보자.

$\dfrac{dx}{dt}=e^t$, $\dfrac{dy}{dt}=2e^{2t}+e^t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t}+e^t}{e^t}=2e^t+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 주어진 함수의 $t=0$에서의 미분계수는 ㉠에 $t=0$을 대입한 값과 같으므로

$$2e^0+1=2+1=3$$

예제 3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=e^{-2t}+1$, $y=6e^{-t}+t$에 대하여 $t=\alpha_1$, $t=\alpha_2$ $(\alpha_1<\alpha_2)$에 각각 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 모두 m이다. $\alpha_1+\alpha_2=3\ln 2$일 때, $m\times\alpha_2$의 값은? (단, m은 상수이다.)

① $2\ln 2$　② $4\ln 2$　③ $6\ln 2$　④ $8\ln 2$　⑤ $10\ln 2$

풀이 전략

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$에 대하여 두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$이다.

풀이

$x=e^{-2t}+1$에서 $\dfrac{dx}{dt}=e^{-2t}\times(-2t)'=-2e^{-2t}$

$y=6e^{-t}+t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=6e^{-t}\times(-t)'+1=-6e^{-t}+1$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-6e^{-t}+1}{-2e^{-2t}}=\frac{e^{2t}-6e^{t}}{-2}$$

$t=\alpha_1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 m이므로

$$\frac{e^{2\alpha_1}-6e^{\alpha_1}}{-2}=m,\ \text{즉 } (e^{\alpha_1})^2-6e^{\alpha_1}+2m=0$$

같은 방법으로 $(e^{\alpha_2})^2-6e^{\alpha_2}+2m=0$

방정식 $(e^{\alpha})^2-6e^{\alpha}+2m=0$에서 $e^{\alpha}=X$라 하면 $X^2-6X+2m=0$이고 이 이차방정식의 두 근이 e^{α_1}, e^{α_2}이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2m=e^{\alpha_1}\times e^{\alpha_2}=e^{\alpha_1+\alpha_2}=e^{3\ln 2}=e^{\ln 8}=8,\ m=4$$

$(e^{\alpha})^2-6e^{\alpha}+8=(e^{\alpha}-2)(e^{\alpha}-4)=0$이므로 $e^{\alpha}=2$ 또는 $e^{\alpha}=4$

$\alpha_1<\alpha_2$이므로 $\alpha_1=\ln 2$, $\alpha_2=\ln 4=2\ln 2$

따라서 $m\times\alpha_2=4\times 2\ln 2=8\ln 2$

답 ④

유제

정답과 풀이 27쪽

5 [22011-0082]

매개변수 t $(t>0)$으로 나타낸 함수 $x=(t+1)\sqrt{t}$, $y=t+\dfrac{1}{t}$에 대하여 $t=4$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 m이다. $52m$의 값을 구하시오.

6 [22011-0083]

매개변수 θ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$로 나타낸 곡선 $x=\cos^3\theta+\cos\theta$, $y=\sin^2\theta\cos\theta$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$일 때, 점 P의 y좌표는?

① $\dfrac{10}{27}$　② $\dfrac{8}{27}$　③ $-\dfrac{2}{9}$　④ $-\dfrac{8}{27}$　⑤ $-\dfrac{10}{27}$

8. 음함수의 미분법

(1) 음함수

방정식 $f(x,\ y)=0$에서 x와 y의 값의 범위를 적당히 정하면 y는 x의 함수가 된다.

이와 같은 의미에서 x의 함수 y가 방정식

$$f(x,\ y)=0$$

의 꼴로 주어졌을 때, x의 함수 y가 음함수 꼴로 주어졌다고 한다.

(2) 음함수의 미분법

x의 함수 y가 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 주어질 때, y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하는 것을 음함수의 미분법이라 한다.

예 ① 음함수 $x^2+y^2=1$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구해 보자.

y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

이므로

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ (단, $y\neq0$)

② 곡선 $xy+y+3=0$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기를 구해 보자.

y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(y)+\frac{d}{dx}(3)=\frac{d}{dx}(0)$$

곱의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(x)\times y+x\times\frac{d}{dx}(y)=y+x\frac{dy}{dx}$$

이므로

$$y+x\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x+1)\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x+1}\ (\text{단, } x\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=2$, $y=-1$을 대입한 값과 같으므로

$$\frac{-(-1)}{2+1}=\frac{1}{3}$$

예제 4 음함수의 미분법

곡선 $2x^2+xy-y^2=2$ 위의 점 $(a,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $m\ (m<0)$일 때, 두 상수 a, m에 대하여 $a+m$의 값은?

① $-\frac{41}{14}$ ② $-\frac{20}{7}$ ③ $-\frac{39}{14}$ ④ $-\frac{19}{7}$ ⑤ $-\frac{37}{14}$

풀이 전략 x의 함수 y가 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 주어질 때, y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 점 $(a,\ 1)$이 곡선 $2x^2+xy-y^2=2$ 위에 있으므로

$2a^2+a-1=2,\ (a-1)(2a+3)=0$

$a=1$ 또는 $a=-\frac{3}{2}$

$2x^2+xy-y^2=2$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(2x^2)+\frac{d}{dx}(xy)-\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(2)$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(x)\times y+x\times\frac{d}{dx}(y)=y+x\frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$$

이므로

$$4x+\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-2y\frac{dy}{dx}=0,\ (x-2y)\frac{dy}{dx}=-4x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x+y}{x-2y}\ (\text{단, } x\neq 2y)$$

$a=1$일 때, 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{5}{-1}=5$

$a=-\frac{3}{2}$일 때, 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{-5}{-\frac{7}{2}}=-\frac{10}{7}$

$m<0$이므로 $m=-\frac{10}{7}$이고 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 $a+m=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{10}{7}\right)=-\frac{41}{14}$

답 ①

유제

정답과 풀이 28쪽

7 [22011-0084]

곡선 $x+\tan y=2$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는?

① -1 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ 0

8 [22011-0085]

곡선 $x+\log_2(x+y)=y$가 직선 $y=x+2$와 만나는 점을 P라 할 때, 이 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는?

① $\frac{3\ln 2+1}{3\ln 2-1}$ ② $\frac{4\ln 2+1}{4\ln 2-1}$ ③ $\frac{5\ln 2+1}{5\ln 2-1}$ ④ $\frac{3\ln 2-1}{3\ln 2+1}$ ⑤ $\frac{4\ln 2-1}{4\ln 2+1}$

9. 역함수의 미분법

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $y=g(x)$가 존재하고 이 역함수가 미분가능할 때

(1) $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq0$) 또는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ $\left(\text{단, } \dfrac{dx}{dy}\neq0\right)$

(2) $f(a)=b$, 즉 $g(b)=a$이면 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$ (단, $f'(a)\neq0$)

설명 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$$f(g(x))=x$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

따라서

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\ (\text{단, } f'(g(x))\neq0)$$

참고 $y=g(x)$에서 $x=f(y)$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\times\frac{dy}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}\times\frac{dy}{dx}$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ $\left(\text{단, } \dfrac{dx}{dy}\neq0\right)$

예 함수 $f(x)=x^3+x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(2)$의 값을 구해 보자.

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$

$f(a)=a^3+a=2$에서 $(a-1)(a^2+a+2)=0$

$a=1$ 또는 $a^2+a+2=0$

이차방정식 $a^2+a+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D=1^2-4\times1\times2=-7<0$이므로 이차방정식 $a^2+a+2=0$은 실근을 갖지 않는다. 그러므로 $a=1$, 즉 $f(1)=2$이고 $g(2)=1$

$f'(x)=3x^2+1$에서 $f'(1)=4$

따라서 $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$

10. 이계도함수

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, 함수 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$의 이계도함수라 하고, 기호로 y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$와 같이 나타낸다.

예 함수 $y=x\ln x$의 이계도함수를 구해 보자.

$y'=(x\ln x)'=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$$y''=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}$$

예제 5 역함수의 미분법

상수 $a\ (a>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^3+ax$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여

$$g(x)=f^{-1}(2x-1)$$

이고 $g(2)=1$일 때, $a+g'(2)$의 값은?

① $\frac{6}{5}$　② $\frac{8}{5}$　③ 2　④ $\frac{12}{5}$　⑤ $\frac{14}{5}$

풀이 전략

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $y=g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$ (단, $f'(g(x))\neq0$)

풀이

$g(2)=f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$

$f(1)=1+a=3$에서 $a=2$

이때 $f(x)=x^3+2x$이고 $f'(x)=3x^2+2$이다.

$g(x)=f^{-1}(2x-1)$에서

$$g'(x)=(f^{-1})'(2x-1)\times2$$

이므로

$$g'(2)=(f^{-1})'(3)\times2=\frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{5}$$

따라서 $a+g'(2)=2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$

답 ④

유제

정답과 풀이 28쪽

9 [22011-0086]

함수 $f(x)=\frac{2}{1+e^{x+1}}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $h(x)=\{g(x)\}^2$에 대하여 $h'(1)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

10 [22011-0087]

함수 $f(x)=x\sin 2x$에 대하여 $f''\left(\frac{3}{4}\pi\right)$의 값은?

① -3π　② -2π　③ π　④ 2π　⑤ 3π

Level 1 기초 연습

[22011-0088]

1 함수 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x+1}$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[22011-0089]

2 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(g\circ f)(x)=e^{2x}$을 만족시킨다. $f(0)=1$, $f'(0)=2$일 때, $g'(1)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[22011-0090]

3 함수 $f(x)=2\sin^2 x-\cos^4 x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[22011-0091]

4 매개변수 t $(t>0)$으로 나타낸 함수

$x=\ln 2t,\ y=t^2-6t$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$의 최솟값은?

① $-\frac{15}{2}$ ② -6 ③ $-\frac{9}{2}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{3}{2}$

[22011-0092]

5 곡선 $x\left(y+\frac{1}{2}\right)=e^y$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[22011-0093]

6 열린구간 $(-\pi,\ \pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[22011-0094]

7 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 일대일대응인 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때, $g(3)+g'(3)$의 값은?

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ 3 ④ $\frac{17}{5}$ ⑤ $\frac{19}{5}$

[22011-0095]

8 함수 $f(x)=(x+1)e^x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(1-h)-f'(1)}{h}$의 값은?

① $-4e$ ② $-2e$ ③ 0 ④ $2e$ ⑤ $4e$

[22011-0096]

9 함수 $f(x)=ax^2+\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$에 대하여 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=20$일 때, 상수 a의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

[22011-0097]

1 두 함수 $f(x)=2^{x^2+1}$, $g(x)=4^{x^2+1}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{5}\log_2\frac{g'(n)}{f'(n)}$의 값은?

① 60　② 65　③ 70　④ 75　⑤ 80

[22011-0098]

2 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)}{x} & (x\neq0)\\ a & (x=0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이고 $b=f'(a)$라 할 때, $f'(b)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① 1　② $\frac{8}{5}-4\ln\frac{5}{4}$　③ $1-\ln 2$　④ $\frac{2}{5}-\frac{\ln 5}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}-\frac{\ln 10}{9}$

[22011-0099]

3 매개변수 t $(t>0)$으로 나타낸 곡선

$$x=\frac{2}{3}t\sqrt{t},\ y=\frac{1}{2}t^2+at$$

에 직선 $y=-2$가 점 $(b,\ -2)$에서 접할 때, ab의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$　② $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$　③ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　④ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

[22011-0100]

4 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=(x-a)|\tan x-1|$이 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능할 때, $f'(-a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{\pi}{2}+1$　② $\frac{\pi}{4}+2$　③ $\frac{\pi}{2}+2$　④ $\pi+1$　⑤ $\pi+2$

[22011-0101]

5 함수 $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 상수 a와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le g'(a)$이다.

$a+g'(a)$의 값은?

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

[22011-0102]

6 함수 $f(x)=\cos 3x-2\sin 3x$에 대하여 $0\le x\le \pi$에서 방정식 $f(x)=f''(x)$의 해를 α_1, α_2, α_3 $(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$이라 할 때, $\sin(3\alpha_1)-\sin(3\alpha_2)+\sin(3\alpha_3)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

[22011-0103]

7 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+1}{\sin^2(\pi x)+1}$$

이라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.
> (나) $f(-1)=f(0)+4$, $f'(-1)=f(1)+3$

$g'(1)$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

[22011-0104]

8 양의 실수 t와 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \log_2(x+1) & (x\ge 0)\end{cases}$ 에 대하여 직선 $y=-2x+t$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ $(\alpha(t)>0,\ \beta(t)<0)$이라 하자. 매개변수 t $(t>0)$으로 나타낸 곡선 $x=\alpha(t)$, $y=\beta(t)$에 대하여 $x=3$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{8\ln 2+1}{16\ln 2}$ ② $-\frac{6\ln 2+1}{16\ln 2}$ ③ $-\frac{8\ln 2+1}{24\ln 2}$
④ $-\frac{6\ln 2+1}{24\ln 2}$ ⑤ $-\frac{4\ln 2+1}{24\ln 2}$

[22011-0105]

1 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\ln|f(x)+1|$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(3)$의 값은?

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=4$이다.

(나) $f(2)$는 10보다 작은 자연수이다.

① $\ln 21$ ② $\ln 23$ ③ $2\ln 5$ ④ $3\ln 3$ ⑤ $\ln 29$

[22011-0106]

2 두 함수 $f(x)=(x^2+a)e^{-2x}$, $g(x)=x^3+bx$는 각각 역함수가 존재하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f^{-1}(x)$는 $x=c$에서만 미분가능하지 않다.
(나) $h(x)=(f\circ g)(x)$라 할 때, $(h^{-1})'(f(0))=-12e$이다.

$\frac{c}{ab}$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

[22011-0107]

3 양의 실수 t와 함수 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$에 대하여 점 $(t, f(t))$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 x좌표가 t보다 큰 점의 x좌표의 최솟값을 t_1이라 할 때, $g(t)=t_1-t$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$ $(\alpha>0)$에서 불연속인 모든 α의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 수열을 $\{\alpha_n\}$이라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\alpha_1+g(\alpha_1)=10$

ㄴ. 모든 자연수 k에 대하여 $g(\alpha_k)-\lim_{t\to\alpha_k-}g(t)=8$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{t\to\alpha_k}\frac{t-\alpha_k}{g(\sqrt{t})-g(\sqrt{\alpha_k})}\right\}^2=200$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법을 이용하여 다항함수, 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 도함수를 구하는 문제, 매개변수 또는 음함수로 나타낸 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e　② $\frac{e}{2}$　③ $\frac{e}{3}$　④ $\frac{e}{4}$　⑤ $\frac{e}{5}$

2022학년도 대수능

출제 의도 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $f(x^3+x)=e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^3+x)\times(x^3+x)'=(e^x)'$

$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$

$f'(x^3+x)=\frac{e^x}{3x^2+1}$ …… ㉠

$x^3+x=2$에서

$x^3+x-2=0$

$(x-1)(x^2+x+2)=0$

$x=1$ 또는 $x^2+x+2=0$ …… ㉡

이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times2=-7<0$

이므로 이차방정식 $x^2+x+2=0$을 만족시키는 실수는 존재하지 않는다.

그러므로 ㉡에서 $x=1$이다.

따라서 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(2)=\frac{e}{4}$

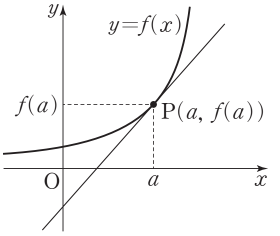
답 ④

05 도함수의 활용

1. 접선의 방정식

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



예 (1) 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=-1\times(x-1)$, 즉 $y=-x+2$

(2) 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=e^t+2t$, $y=e^{-t}+3t$에 대하여 $t=0$에 대응하는 점에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$t=0$에 대응하는 점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

$\dfrac{dx}{dt}=e^t+2$, $\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}+3$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-e^{-t}+3}{e^t+2}$

$t=0$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{-1+3}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=\dfrac{2}{3}(x-1)$, 즉 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$

참고 ① 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.

(ii) $f'(t)=m$을 만족시키는 t의 값을 구한다.

(iii) 접선의 방정식 $y-f(t)=m(x-t)$를 구한다.

② 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고, 이 점에서의 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$를 구한다.

(ii) 점 $(x_1,\ y_1)$은 이 접선 위의 점이므로 (i)의 방정식에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입한다.

(iii) (ii)에서 실수 t의 값을 구한 후 (i)에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

2. 함수의 증가와 감소

(1) 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

(2) 미분가능한 함수의 증가와 감소의 판정

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 실수 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

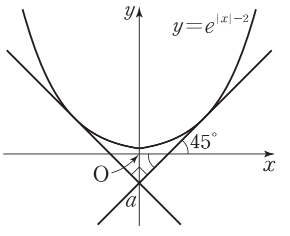
예제 1 접선의 방정식

점 $(0,\ a)$에서 함수 $y=e^{|x|-2}$의 그래프에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, a의 값은? $\left(\text{단, } a<\dfrac{1}{e^2}\right)$

① -2 ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ 0

풀이 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$이다.

풀이 $f(x)=e^{|x|-2}$이라 하면 $x<0$에서 $f(x)=e^{-x-2}$, $x\geq 0$에서 $f(x)=e^{x-2}$이므로 함수 $y=e^{|x|-2}$의 그래프는 그림과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 그러므로 y축 위의 점 $(0,\ a)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 두 접선도 y축에 대하여 서로 대칭이다.

그러므로 점 $(0,\ a)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 두 접선이 서로 수직이려면 두 접선 중 기울기가 양수인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$, 즉 직선의 기울기가 1이어야 한다. 또한 이때의 접점의 x좌표를 t라 하면 $t>0$이다.

$x>0$에서 $f(x)=e^{|x|-2}=e^{x-2}$이므로 $f'(x)=e^{x-2}$

함수 $y=f(x)$ $(x>0)$의 그래프 위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 기울기가 1이려면

$f'(t)=e^{t-2}=1$에서 $t=2$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y=1\times(x-2)+1,\ \text{즉 } y=x-1$$

점 $(0,\ a)$가 이 직선 위의 점이므로

$$a=0-1=-1$$

답 ③

유제

정답과 풀이 35쪽

1 [22011-0108]

함수 $f(x)=\cos 2x+1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$에서의 접선이 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ a\right)$를 지날 때, a의 값은?

① $-\dfrac{\pi}{2}$ ② $-\dfrac{\pi}{4}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\pi}{4}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

2 [22011-0109]

곡선 $x^2-xy-2y^2=a^2$ $(a>0)$이 x축과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 이 곡선 위의 점 P, Q에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리가 4일 때, 상수 a의 값은?

(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

3. 함수의 극대와 극소

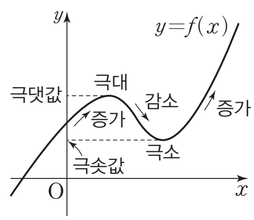
(1) 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x에 대하여

① $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라 한다.

② $f(x) \ge f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하고, $f(a)$를 극솟값이라 한다.

③ 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라 한다.



(2) 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정

① 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

㉠ 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

㉡ 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

② 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고

$f''(a)<0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, $f''(a)>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

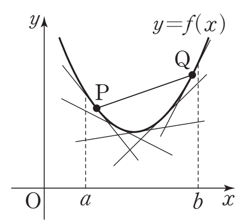
4. 곡선의 오목과 볼록

(1) 곡선의 오목과 볼록

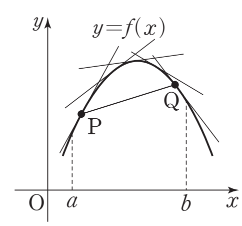
닫힌구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이

① 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록 또는 위로 오목하다고 한다.

② 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록 또는 아래로 오목하다고 한다.



아래로 볼록



위로 볼록

(2) 이계도함수를 이용한 곡선의 오목과 볼록의 판정

이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 x에 대하여

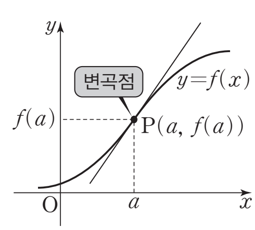
① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

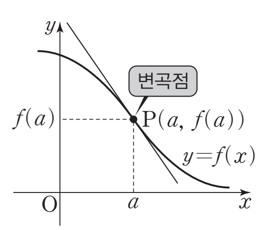
② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

5. 곡선의 변곡점

(1) 곡선의 변곡점

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 한다.





(2) 이계도함수를 이용한 곡선의 변곡점의 판정

이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여

$f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

예제 2 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)=\begin{cases} kx & (x<1) \\ kx-\ln x & (x\geq 1)\end{cases}$ 이 극댓값 $\frac{1}{e}$을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 양의 상수이다.)

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

풀이 전략

함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\leq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라 한다.

풀이

$f(x)=\begin{cases} kx & (x<1) \\ kx-\ln x & (x\geq 1)\end{cases}$ 에서

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} kx=k,\ \lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(kx-\ln x)=k,\ f(1)=k$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$x<1$에서 $f'(x)=k$, $x>1$에서 $f'(x)=k-\frac{1}{x}=\frac{kx-1}{x}$

(i) $\frac{1}{k}\leq 1$, 즉 $k\geq 1$일 때

$x<1$에서 $f'(x)=k>0$이고 $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
이때 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{1}{k}>1$, 즉 $0<k<1$일 때

$x<1$에서 $f'(x)=k>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$x>1$에서 $f'(x)=0$이면 $x=\frac{1}{k}$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	k	↘	$1+\ln k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\leq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 극댓값이 $\frac{1}{e}$이므로 $f(1)=k=\frac{1}{e}$

또 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{k}$, 즉 $x=e$에서 극소이고, 극솟값은 $f(e)=1-\ln e=0$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

답 ③

유제

정답과 풀이 35쪽

3 [22011-0110]

함수 $f(x)=ax^2+\cos x$에 대하여 점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}\pi,\ f\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점일 때, 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$의 값은? (단, a는 상수이고, O는 원점이다.)

① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\pi-3}{6}$ ③ $\frac{\pi+3\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{2\pi+3}{6}$ ⑤ $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$

6. 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 고려하여 그린다.

(1) 함수 $f(x)$의 정의역과 치역

(2) 곡선 $y=f(x)$의 대칭성(y축 대칭, 원점 대칭)과 주기

(3) 곡선 $y=f(x)$와 좌표축이 만나는 점

(4) 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 극대와 극소

(5) 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록, 변곡점

(6) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 곡선 $y=f(x)$의 점근선

예 함수 $y=\ln(x^2+1)$의 그래프의 개형을 그려 보자.

$f(x)=\ln(x^2+1)$이라 하면 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

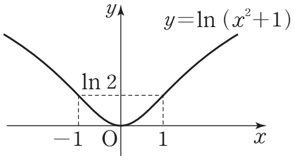
실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\ln 2$	↘	0	↗	$\ln 2$	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고 $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나고 y축에 대하여 대칭이다.

또한 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이다.

따라서 함수 $y=\ln(x^2+1)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



7. 함수의 최댓값과 최솟값

(1) 함수의 최댓값과 최솟값

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

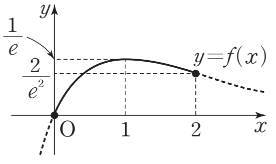
닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 극값을 가질 때, 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 함수 $f(x)$의 최댓값, 가장 작은 값이 함수 $f(x)$의 최솟값이다.

예 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)=xe^{-x}$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.

$f'(x)=e^{-x}+x\times(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 극댓값은 $f(1)=\dfrac{1}{e}$이다.



또 $f(0)=0$, $f(2)=\dfrac{2}{e^2}$이다. 따라서 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{e}$, 최솟값은 0이다.

예제 3 함수의 최댓값과 최솟값

양의 실수 t와 함수 $f(x)=x^2\left(\ln\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)$에 대하여 $x\geq t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 상수 k, α $(\alpha\neq 0)$에 대하여 $\{t\,|\,g(t)=k\}=\{t\,|\,0<t\leq\alpha\}$일 때, $|k\times\alpha|$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to 0+}f(x)=0$)

풀이 전략 구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린 후 구간 $[t, \infty)$에서 최솟값 $g(t)$를 구한다.

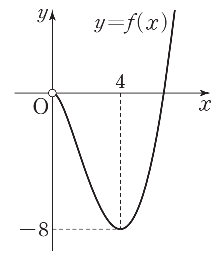
풀이 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이다.

$f(x)=x^2\left(\ln\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)$에서 $f'(x)=2x\times\left(\ln\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)+x^2\times\frac{\frac{1}{4}}{\frac{x}{4}}=2x\ln\frac{x}{4}$

$f'(x)=0$에서 $\ln\frac{x}{4}=0$이므로 $x=4$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	-8	$\nearrow$



이때 $\lim_{x\to 0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

그러므로 $x\geq t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}-8 & (0<t\leq 4)\\ f(t) & (t>4)\end{cases}$$

따라서 $k=-8$, $\alpha=4$이므로

$|k\times\alpha|=|-32|=32$

답 32

유제

정답과 풀이 35쪽

4 [22011-0111]

함수 $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$에 대하여 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

5 [22011-0112]

실수 t와 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$에 대하여 함수 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

> $f'(t)=0$이면 $g(t)=0$,
> $f'(t)\neq 0$이면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 x절편을 $g(t)$라 한다.

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값의 합은 $m+n\sqrt{2}$이다. $30(m+n)$의 값을 구하시오. (단, m, n은 유리수이다.)

8. 방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표와 같다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수와 같다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수

① 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표와 같다.
따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

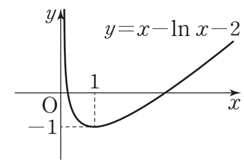
② 방정식 $f(x)=g(x)$에서 $f(x)-g(x)=0$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수와 같다.

예 방정식 $x-\ln x-2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자. (단, $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)=\infty$)

$f(x)=x-\ln x-2$로 놓으면 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고, 극솟값은 $f(1)=-1$이다. 또 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $x-\ln x-2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

9. 부등식에의 활용

(1) 부등식 $f(x)\ge 0$ 또는 $f(x)>0$이 성립함을 보이는 방법

함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 주어진 구간에서 부등식 $f(x)\ge 0$ 또는 $f(x)>0$이 성립함을 보이면 된다.

(2) 부등식 $f(x)\ge g(x)$ 또는 $f(x)>g(x)$가 성립함을 보이는 방법

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 주어진 구간에서 부등식 $h(x)\ge 0$ 또는 $h(x)>0$이 성립함을 보이면 된다.

예 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x\ge\sin x$가 성립함을 보이자.

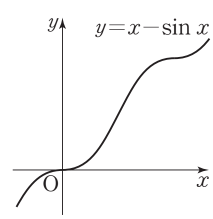
$f(x)=x-\sin x$로 놓으면 $f'(x)=1-\cos x$

모든 실수 x에 대하여 $-1\le\cos x\le 1$이므로 $0\le 1-\cos x\le 2$

$f'(x)\ge 0$이고, $x=2n\pi$ (n은 정수)에서만 $f'(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이때 $f(0)=0$이므로 $x\ge 0$일 때 $f(x)\ge f(0)=0$, 즉 $x-\sin x\ge 0$이다.

따라서 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x\ge\sin x$가 성립한다.



예제 4 방정식에의 활용

n이 자연수일 때, x에 대한 방정식 $(\ln x)^2-\frac{n}{6x}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, $7<e^2<8$이고, $\lim_{x\to0+}x(\ln x)^2=0$이다.)

풀이 전략

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

풀이

$(\ln x)^2-\frac{n}{6x}=0$에서 $6x(\ln x)^2=n$

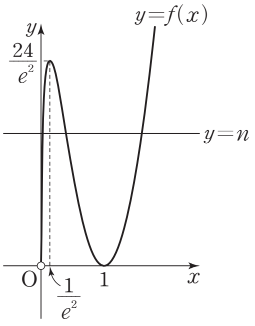
$f(x)=6x(\ln x)^2$이라 하면 방정식 $(\ln x)^2-\frac{n}{6x}=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의 개수와 같다.

$$f'(x)=6(\ln x)^2+12x\ln x\times\frac{1}{x}=6(\ln x+2)\ln x$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{24}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의 개수가 3이려면 $0<n<\frac{24}{e^2}$

$7<e^2<8$에서 $3<\frac{24}{e^2}<\frac{24}{7}$이므로 자연수 n이 될 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

따라서 모든 n의 값의 합은

$1+2+3=6$

답 6

유제

정답과 풀이 36쪽

6 [22011-0113]

x에 대한 방정식 $x+ke^{-x}=0$의 실근이 존재하도록 하는 실수 k의 최댓값은? (단, $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$)

① $-\frac{2}{e}$ ② $-\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{2}{e}$ ⑤ $\frac{4}{e}$

7 [22011-0114]

$0\le x<\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\tan x-\sqrt{3}\ge4x-k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

10. 속도와 가속도

(1) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

① 속도: $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$　　　② 가속도: $a=\dfrac{dv}{dt}=f''(t)$

(2) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$x=f(t),\ y=g(t)$

일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도와 속력, 가속도와 가속도의 크기는 다음과 같다.

① 속도: $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ 또는 $(f'(t), g'(t))$

속력: $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

② 가속도: $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ 또는 $(f''(t), g''(t))$

가속도의 크기: $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

설명 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t의 함수이고 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 점 P가 움직일 때 두 점 Q, R는 각각 x축, y축 위에서 직선 운동을 한다.

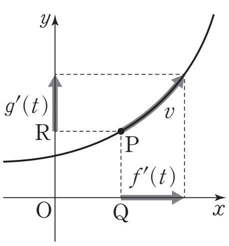
① 두 점 Q, R의 시각 t에서의 속도는 각각

$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$, $\dfrac{dy}{dt}=g'(t)$

이므로 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 속도를 $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ 또는 $(f'(t), g'(t))$로 나타내고

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

을 속도의 크기 또는 속력이라 한다.



② 두 점 Q, R의 시각 t에서의 가속도는 각각

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=g''(t)$

이므로 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 가속도를 $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ 또는 $(f''(t), g''(t))$로 나타내고

$\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

을 가속도의 크기라 한다.

예 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=3t$, $y=2t^2$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속력과 가속도의 크기를 구해 보자.

$\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=4t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{3^2+(4t)^2}=\sqrt{16t^2+9}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=4$이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는 $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{0^2+4^2}=4$

예제 5 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=4t,\ y=e^{2t}+4e^{-t}$$

이다. $t>0$에서 점 P의 속력이 최소인 시각에서의 점 P의 가속도의 크기는?

① $2\sqrt[3]{4}$ ② $4\sqrt[3]{2}$ ③ $4\sqrt[3]{4}$ ④ $6\sqrt[3]{2}$ ⑤ $6\sqrt[3]{4}$

풀이 전략

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속력, 가속도의 크기는 다음과 같다.

(1) 속력 : $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

(2) 가속도의 크기 : $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

풀이

$x=4t$에서 $\frac{dx}{dt}=4$, $\frac{d^2x}{dt^2}=0$

$y=e^{2t}+4e^{-t}$에서 $\frac{dy}{dt}=2e^{2t}-4e^{-t}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=4e^{2t}+4e^{-t}$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{4^2+(2e^{2t}-4e^{-t})^2}=\sqrt{4^2+4(e^{2t}-2e^{-t})^2}$$

이므로 점 P의 속력이 최소이려면 $e^{2t}-2e^{-t}=0$에서 $e^{3t}=2$, $t=\frac{1}{3}\ln 2$

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{0^2+(4e^{2t}+4e^{-t})^2}=4e^{2t}+4e^{-t}$$

따라서 시각 $t=\frac{1}{3}\ln 2$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$4e^{\frac{2}{3}\ln 2}+4e^{-\frac{1}{3}\ln 2}=4\times 2^{\frac{2}{3}}+4\times 2^{-\frac{1}{3}}=4\times 2^{\frac{2}{3}}+2\times 2^{\frac{2}{3}}=6\times 2^{\frac{2}{3}}=6\sqrt[3]{4}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 37쪽

8 [22011-0115]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가 $x=t+\sin t$, $y=\cos 2t$이다. 시각 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도의 크기는?

① $\sqrt{13}$ ② $\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{17}$

9 [22011-0116]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가 $x=at-\ln t$, $y=\ln t$이다. $t>0$에서 점 P의 속력의 최솟값이 2일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

Level 1 기초 연습

[22011-0117]

1 직선 $y=mx$가 곡선 $y=\ln x$에 접할 때, 상수 m의 값은?

① $\frac{1}{2e}$　② $\frac{1}{e}$　③ 1　④ e　⑤ $2e$

[22011-0118]

2 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=e^{t-1}$, $y=e^{-2t}+t$에 대하여 $t=0$에 대응하는 점에서의 접선이 점 $(1, a)$를 지날 때, a의 값은?

① $-e+1$　② $-e+2$　③ e　④ $e+1$　⑤ $e+2$

[22011-0119]

3 함수 $f(x)=x+\frac{4}{x}$의 극댓값을 α, 극솟값을 β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① -8　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 8

[22011-0120]

4 함수 $f(x)=e^{\sin 3x+kx}$의 극값이 존재하도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[22011-0121]

5 곡선 $y=\frac{1}{x^2+1}$의 두 변곡점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{\sqrt{3}}{8}$　② $\frac{\sqrt{3}}{4}$　③ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

[22011-0122]

6 함수 $f(x)=\cos x+x\sin x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은?

① $-\pi^2$ ② $-\frac{3}{4}\pi^2$ ③ $-\frac{1}{2}\pi^2$ ④ $-\frac{1}{4}\pi^2$ ⑤ 0

[22011-0123]

7 x에 대한 방정식 $x=\ln 3x+k$가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값은?

(단, $\lim_{x\to\infty}(x-\ln 3x)=\infty$)

① $\ln\frac{2}{e}$ ② $\ln\frac{e}{3}$ ③ 1 ④ $\ln\frac{3}{e}$ ⑤ $\ln\frac{e}{2}$

[22011-0124]

8 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ke^{x-2}\geq x$가 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? (단, $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ $2e$

[22011-0125]

9 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$x=e^t+e^{-t},\ y=e^t-e^{-t}$

이다. 시각 $t=\ln 2$에서의 점 P의 속력은?

① $\sqrt{7}$ ② $\frac{\sqrt{30}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ⑤ 3

Level 2 기본 연습

[22011-0126]

1 구간 $(0, \infty)$에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=0$이고 $f''(x)=-x+\frac{a}{x}+2$일 때, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대가 되도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

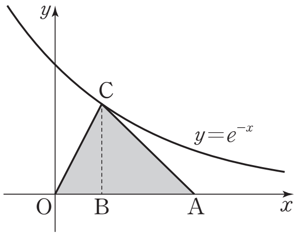
[22011-0127]

2 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{5}x^2-x+a\right)\sqrt{x}$가 $x=2$에서 극값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{4\sqrt{2}}{5}$　② $\frac{6}{5}$　③ $\frac{8}{5}$　④ $\frac{6\sqrt{2}}{5}$　⑤ 2

[22011-0128]

3 그림과 같이 양의 실수 t에 대하여 원점 O와 점 A$(t, 0)$을 이은 선분 OA를 $1:2$로 내분하는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{-x}$과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 OAC의 넓이의 최댓값은?



① $\frac{3}{4e}$　② $\frac{1}{e}$　③ $\frac{5}{4e}$

④ $\frac{3}{2e}$　⑤ $\frac{7}{4e}$

[22011-0129]

4 함수 $f(x)=ax+\ln(3x+1)+2$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A라 하고, 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 A에서의 접선이 점 $(7, 1)$을 지날 때, 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[22011-0130]

5 x에 대한 방정식 $x+8-kxe^x=0$의 모든 실근이 1보다 작도록 하는 10 이하의 자연수 k의 개수는?

$\left(\text{단, } \lim_{x \to -\infty} xe^x=0\text{이고, } \frac{5}{2}<e<3\text{이다.}\right)$

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[22011-0131]

6 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 위치 (x, y)가

$x=\ln(\cos t),\ y=3\sin t$

이다. $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 속력이 최소인 시각이 $t=\alpha$일 때, 시각 $t=\alpha$에서의 점 P의 가속도의 크기는?

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{21}$

[22011-0132]

7 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t(\ln x)^2$이 곡선 $y=kx^2$과 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자. $\frac{f'(\alpha)}{f(2\alpha)}=6$을 만족시키는 양수 α의 값은? $\left(\text{단, } \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}=0\right)$

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[22011-0133]

8 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=ae^{\sin(ax)}$일 때, 다음 조건을 만족시키는 정수 a의 최솟값은?

(가) $0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{4}$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

(나) $0<x_3<x_4<\frac{\pi}{4}$인 어떤 x_3, x_4에 대하여 $f'(x_3)>f'(x_4)$이다.

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[22011-0134]

1 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값이 최소가 되도록 하는 a의 값을 a_1, b의 값을 b_1이라 하자. $a_1 \times b_1$의 값은?

> $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq ax+b$가 성립한다.

① $\frac{\pi}{2}(4-\pi)$　② $\frac{\pi}{4}(4-\pi)$　③ $\frac{\pi}{6}(4-\pi)$　④ $\frac{\pi}{8}(4-\pi)$　⑤ $\frac{\pi}{10}(4-\pi)$

[22011-0135]

2 최고차항의 계수가 -1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\sin(\pi f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 최대가 되는 모든 양수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 수열을 $\{\alpha_n\}$이라 할 때, $\alpha_2=1$이다.

$f(-4)$의 값을 구하시오.

[22011-0136]

3 두 상수 a, b $(a>1, b>0)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x \leq 0) \\ bxe^{-x}+x & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$와 직선 $y=x$ 사이의 거리를 $g(t)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(t)$에 대한 설명으로 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\lim_{x \to \infty} xe^{-x}=0$)

> 보기
> ㄱ. $a=2$일 때, $g(1)=\frac{\sqrt{2}}{2e}$이다.
> ㄴ. 함수 $g(t)$가 $t=-2$에서 극소일 때, $a+b=5$이다.
> ㄷ. 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극대이고 집합 $\{t \mid g(t)=g(\alpha)\}$의 원소의 개수가 3일 때, $a+b=1+\frac{6}{e}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 경향 삼각함수, 지수함수, 로그함수에 대하여 접선의 방정식, 함수의 극댓값과 극솟값, 최댓값과 최솟값을 구하는 문제, 함수의 증가와 감소, 곡선의 변곡점, 방정식과 부등식의 해에 관한 문제와 속력과 가속도의 크기를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

두 함수

$f(x)=e^{x},\ g(x)=k\sin x$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$ ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

2022학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근에 대한 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

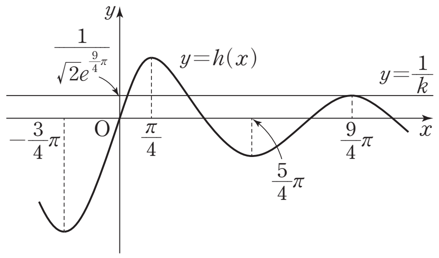
풀이 $e^{x}=k\sin x$에서 $\frac{1}{k}=e^{-x}\sin x$ …… ㉠

$h(x)=e^{-x}\sin x$라 하면 $h'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \cdots$ 또는 $x=-\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{7}{4}\pi,\ \cdots$이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{13}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-\frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	↗

이때 $h(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{k}$이 곡선 $y=e^{-x}\sin x$와 점 $\left(\frac{9}{4}\pi,\ h\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right)$에서 접해야 한다.

따라서

$\frac{1}{k}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$

이므로 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

답 ④

06 여러 가지 적분법

1. 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분과 정적분

(1) $n\neq-1$일 때, $\int x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $n=-1$일 때, $\int x^{-1}\,dx=\int \dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)

설명 (1) $n\neq-1$일 때, 함수 $y=x^n$의 미분법에서 $\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$이므로

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

(2) $n=-1$일 때, 로그함수의 미분법에서 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

예 (1) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\dfrac{16}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{14}{3}$

(2) $\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^3=\ln 3-0=\ln 3$

2. 지수함수의 부정적분과 정적분

(1) $\int e^x\,dx=e^x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $a>0$, $a\neq1$일 때, $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ (단, C는 적분상수)

예 (1) $\int_0^2 e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^2=e^2-1$

(2) $\int_1^2 2^x\,dx=\left[\dfrac{2^x}{\ln 2}\right]_1^2=\dfrac{4}{\ln 2}-\dfrac{2}{\ln 2}=\dfrac{2}{\ln 2}$

3. 삼각함수의 부정적분과 정적분

(1) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ (단, C는 적분상수)

(4) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$ (단, C는 적분상수)

예 (1) $\int_0^\pi \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2$

(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{6}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan 0=1-0=1$

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^2 x\,dx=\Big[-\cot x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\cot\dfrac{\pi}{4}+\cot\dfrac{\pi}{6}=-1+\sqrt{3}$

예제 1 삼각함수의 부정적분과 정적분

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=a\sin x+2a\cos x$이고 $f(0)=0$이다.
$\int_0^\pi \{f(x)-f(-x)\}\,dx=1$일 때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

풀이 전략

(1) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (단, C는 적분상수) (2) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

풀이

$f'(x)=a\sin x+2a\cos x$이므로

$$f(x)=\int(a\sin x+2a\cos x)\,dx=-a\cos x+2a\sin x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=-a+C=0$에서 $C=a$

즉, $f(x)=-a\cos x+2a\sin x+a$이고

$$f(-x)=-a\cos(-x)+2a\sin(-x)+a=-a\cos x-2a\sin x+a$$

이므로

$$\int_0^\pi \{f(x)-f(-x)\}\,dx=\int_0^\pi 4a\sin x\,dx=\Big[-4a\cos x\Big]_0^\pi=4a-(-4a)=8a$$

$8a=1$에서 $a=\frac{1}{8}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{8}\cos x+\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{8}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 45쪽

1 [22011-0137]

함수 $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}$에 대하여 $f(2)=1$이고 $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{2}$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2 [22011-0138]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=2^{x+1}-4$이다.
$f(0)=\frac{1}{\ln 4}$일 때, $f(-1)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ 2 ④ $\frac{2}{\ln 2}$ ⑤ 4

4. 치환적분법

(1) 치환적분법을 이용한 부정적분

미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=t$로 놓으면

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

(2) 치환적분법을 이용한 정적분

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$일 때, 함수 $f(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

설명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

(1) 합성함수의 미분법에서 $\dfrac{d}{dx}F(g(x))=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $g(x)=t$로 놓으면 $F(g(x))=F(t)$이고, $\int f(t)\,dt=F(t)+C$ (단, C는 적분상수) ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)dt$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\Big[F(g(x))\Big]_a^b=F(g(b))-F(g(a))=F(\beta)-F(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$

참고 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

5. 부분적분법

(1) 부분적분법을 이용한 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

(2) 부분적분법을 이용한 정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

예 $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)\,dx=-\pi\cos\pi+\Big[\sin x\Big]_0^\pi=\pi$$

예제 2 부분적분법을 이용한 정적분

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)-2x^2\ln x+x^2$$

을 만족시킨다. $f(e)-f(1)$의 값은?

① 4　② $4(e-1)$　③ 8　④ $4e$　⑤ $4(e+1)$

풀이 전략 주어진 등식의 양변을 미분하여 $f'(x)$를 구하고, 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

풀이 $F'(x)=f(x)$이므로 등식 $F(x)=xf(x)-2x^2\ln x+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x\ln x-2x^2\times\frac{1}{x}+2x,\ xf'(x)=4x\ln x$$

$x>0$에서 $f'(x)=4\ln x$이므로

$$f(e)-f(1)=\int_1^e f'(x)\,dx=\int_1^e 4\ln x\,dx$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=4$로 놓으면 $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=4x$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e 4\ln x\,dx&=\Big[4x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\left(4x\times\frac{1}{x}\right)dx=4e-\int_1^e 4\,dx\\&=4e-\Big[4x\Big]_1^e=4e-(4e-4)\\&=4\end{aligned}$$

답 ①

유제

정답과 풀이 46쪽

3 [22011-0139]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기는 $-xe^{-x}$이다. $f(0)=1$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 x절편은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4 [22011-0140]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 만나는 두 점 사이의 거리는?

① 4　② $4\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{3}$　④ 8　⑤ $4\sqrt{5}$

6. 정적분으로 표시된 함수의 미분과 극한

(1) 정적분으로 표시된 함수의 미분

연속함수 $f(x)$에 대하여

① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, a는 상수)

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$ (단, a는 상수)

③ 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때,

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$$

설명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=\dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_a^x=\dfrac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=f(x)$

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt=\dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_x^{x+a}=\dfrac{d}{dx}\{F(x+a)-F(x)\}=f(x+a)-f(x)$

③ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt=\dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_{g(x)}^{h(x)}=\dfrac{d}{dx}\{F(h(x))-F(g(x))\}$

$=F'(h(x))h'(x)-F'(g(x))g'(x)$

$=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$

예 ① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt=\ln x$

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+2} e^t\,dt=e^{x+2}-e^x$

③ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{3x}^{x^2} \sin t\,dt=\sin x^2\times 2x-\sin 3x\times 3=2x\sin x^2-3\sin 3x$

(2) 정적분으로 표시된 함수의 극한

연속함수 $f(x)$에 대하여

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)dt=f(a)$ (단, a는 상수)

② $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$ (단, a는 상수)

설명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_a^{a+x}=\lim_{x\to 0}\frac{F(a+x)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$

② $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\Big[F(t)\Big]_a^x=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$

예 ① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_1^{1+x}(t^2+3t)\,dt=1+3=4$

② $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x te^t\,dt=2e^2$

예제 3 정적분으로 표시된 함수의 미분

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^{2x} tf\left(\frac{t}{2}\right)dt=(2x+1)\sin x+(2-x)\cos x+a$$

를 만족시킬 때, $f(0)+f\left(\frac{\pi}{a}\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

풀이 전략

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a와 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)$$

풀이

$$\int_0^{2x} tf\left(\frac{t}{2}\right)dt=(2x+1)\sin x+(2-x)\cos x+a \quad \cdots\cdots ㉠$$

등식 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=0+2+a$에서 $a=-2$

등식 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2xf(x)\times 2=2\sin x+(2x+1)\cos x-\cos x-(2-x)\sin x$$
$$4xf(x)=2x\cos x+x\sin x$$

$x\neq 0$이면 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\sin x$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{a}\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\sin x\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 $f(0)+f\left(\frac{\pi}{a}\right)=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

답 ②

유제

정답과 풀이 46쪽

5 [22011-0141]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^{x+1}(e^{t-1}+e^{1-t})f(t-1)\,dt=e^{2x}+e^{-2x}-2$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

6 [22011-0142]

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x\left(\sqrt{2t}+\frac{1}{\sqrt{t+a}}\right)dt=\frac{9}{16}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

Level 1 기초 연습

[22011-0143]

1 $\int_1^2 \frac{5x^2-1}{\sqrt{x}}dx$의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{2}$

[22011-0144]

2 $\int_0^4 |2^x-4|\,dx$의 값은?

① $\frac{1}{\ln 2}$ ② $\frac{3}{\ln 2}$ ③ $\frac{5}{\ln 2}$ ④ $\frac{7}{\ln 2}$ ⑤ $\frac{9}{\ln 2}$

[22011-0145]

3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin 2x+3\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[22011-0146]

4 $\int_1^{e^2} \frac{(\ln x+1)^3}{2x}dx$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

[22011-0147]

5 $\int_0^{\pi}(x+2)(\sin x+\cos x)\,dx$의 값은?

① $\pi-4$ ② $\pi-2$ ③ π ④ $\pi+2$ ⑤ $\pi+4$

[22011-0148]

6 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=x^2e^{x+1}$이다. $f(0)=2e$일 때, $f(1)$의 값은?

① e^2 ② $2e^2$ ③ $3e^2$ ④ $4e^2$ ⑤ $5e^2$

[22011-0149]

7 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$xf(x)=x+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(e^2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22011-0150]

8 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$이다. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt=\ln 2$일 때, $f(7)$의 값은?

① $2\ln 2$ ② $\ln 6$ ③ $3\ln 2$ ④ $\ln 10$ ⑤ $\ln 12$

Level 2 기본 연습

[22011-0151]

1 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-4$이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{4}{3}$　③ 2　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{10}{3}$

[22011-0152]

2 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x<0$에서 $f'(x)=\sin x$, $x>0$에서 $f'(x)=\sin 2x$이다. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx=\pi$일 때, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[22011-0153]

3 $f(-1)=0$인 일차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{1} e^{x}\{f(x)+f'(x)\}\,dx=4e-2$일 때, $f(2)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

[22011-0154]

4 함수 $f(x)=(x-p^2)\cos x$에 대하여 $\int_{0}^{p} xf(x^2)\,dx=-\frac{1}{6}$일 때, $f'(p^2)$의 값은? (단, p는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

[22011-0155]

5 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{a_n}{n+1}=\displaystyle\int_0^p (\tan^n x+\tan^{n+2} x)\,dx$를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\dfrac{1}{12}$일 때, $\tan p$의 값은? $\left(\text{단, } p\text{는 } 0<p<\dfrac{\pi}{4}\text{인 상수이다.}\right)$

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$

[22011-0156]

6 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$f(x)+\int_1^e 2tf(t)\,dt=\ln x$$

를 만족시킬 때, $f(\sqrt{e})$의 값은?

① $-\dfrac{1}{2e^2}$ ② $-\dfrac{1}{e^2}$ ③ $-\dfrac{1}{2e}$ ④ $-\dfrac{1}{e}$ ⑤ $-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

[22011-0157]

7 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\displaystyle\int_1^x (x-t)f'(t)\,dt+x$이다.

$f(2)$의 값은?

① $\sqrt{e}$ ② $\sqrt{2e}$ ③ e ④ $2e$ ⑤ e^2

[22011-0158]

1 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_0^{\frac{x-1}{2}} f(2t+1)dt=e^2$

$f(-1)$의 값은?

① e^2-1 ② e^2 ③ e^2+1 ④ $2e^2-1$ ⑤ $2e^2$

[22011-0159]

2 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=(ax+b)e^x$의 역함수가 존재하고, $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{4}{3}$

(나) $\int_1^5 g'(f(x))e^x dx=\ln\sqrt{2}$

두 상수 a, b에 대하여 $10a+b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$)

[22011-0160]

3 함수 $f(x)=\cos(2\pi x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\pi^2\int_0^1 x^2(1-t)f(xt)\,dt$$

라 하고, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (x<a) \\ g(x-a)+g(a) & (x\geq a)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 양수 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{m} a_k=18$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 여러 가지 함수의 부정적분을 구하는 문제, 치환적분법이나 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제, 정적분으로 표시된 함수의 미분이나 극한과 관련된 문제 등이 출제되고 있다.

$x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\ f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은? [4점]

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2021학년도 대수능

출제 의도 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $x>0$에서 $f'(x)=2-\frac{3}{x^2}$이므로

$$f(x)=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int(2-3x^{-2})\,dx=2x+\frac{3}{x}+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

$f(1)=5$이므로

$f(1)=2+3+C_1=5$에서 $C_1=0$

즉, $f(x)=2x+\frac{3}{x}$ $(x>0)$

$x<0$에서 $g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{(-x)^2}=2-\frac{3}{x^2}$이므로

$$g(x)=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int(2-3x^{-2})\,dx=2x+\frac{3}{x}+C_2 \text{ (단, } C_2\text{는 적분상수)}$$

$f(2)+g(-2)=9$이므로

$f(2)+g(-2)=\left(4+\frac{3}{2}\right)+\left(-4-\frac{3}{2}+C_2\right)=9$에서 $C_2=9$

즉, $g(x)=2x+\frac{3}{x}+9$ $(x<0)$

따라서 $g(-3)=-6-1+9=2$

답 ②

07 정적분의 활용

1. 정적분과 급수

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

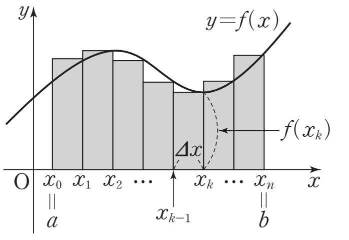
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$$

설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\ge 0$일 때, 그림과 같이 닫힌구간 $[a, b]$를 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례대로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 닫힌구간 $[x_{k-1}, x_k]$의 길이를 Δx라 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\ (\text{단, } k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$



이때 그림과 같이 n개의 직사각형을 만들고, 이 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

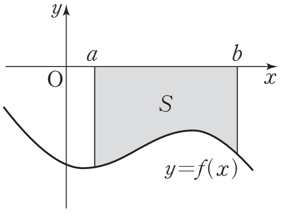
$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

n의 값이 한없이 커질 때 S_n은 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx$$

즉, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$가 성립한다.

한편 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(x)\le 0$이면 $f(x_k)\le 0$, $\Delta x>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=-S=-\int_a^b \{-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx$$

참고 (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)\,dx$

$$=p\int_0^1 f(px)\,dx\ (\text{단, } p\text{는 상수})$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^p f(a+x)\,dx$

$$=p\int_0^1 f(a+px)\,dx\ (\text{단, } a,\ p\text{는 상수})$$

예제 1 정적분과 급수

함수 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은?

① $-\frac{4}{\pi^2}$　② $-\frac{2}{\pi^2}$　③ 0　④ $\frac{2}{\pi^2}$　⑤ $\frac{4}{\pi^2}$

풀이 전략 주어진 급수를 정적분으로 변형하고, 부분적분법을 이용한다.

풀이

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}=\int_0^1 xf(1+x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x\right)dx=-\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x$이므로

$$\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx=\left[-\frac{2}{\pi}x\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=0+\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{4}{\pi^2}$$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=-\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx=-\frac{4}{\pi^2}$$

답 ①

[참고] $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}=\int_1^2(x-1)f(x)\,dx$를 이용하여 풀 수도 있다.

유제

정답과 풀이 54쪽

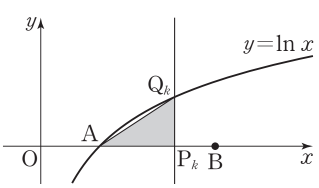
1 [22011-0161]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+3nk}}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

2 [22011-0162]

그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$이 있다. 자연수 n에 대하여 선분 AB를 n등분한 점을 점 A에 가까운 점부터 차례로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고, 점 B를 P_n이라 하자. 점 $\mathrm{P}_k\ (1\le k\le n)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\ln x$와 만나는 점을 Q_k, 삼각형 $\mathrm{AP}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은?

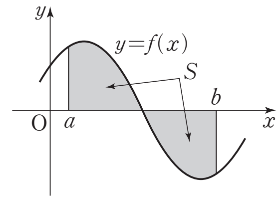


① $\frac{\ln 3}{4}$　② $\frac{3}{8}\ln 3$　③ $\frac{\ln 3}{2}$　④ $\frac{5}{8}\ln 3$　⑤ $\frac{3}{4}\ln 3$

2. 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$



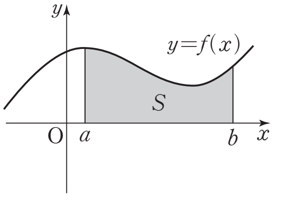
설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 각 경우로 나누어 구해 보면 다음과 같다.

(ⅰ) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$인 경우

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

이때 $f(x)=|f(x)|$이므로

$$S=\int_a^b f(x)dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$

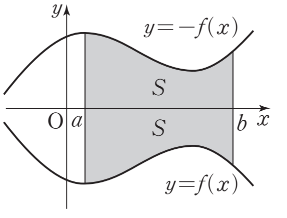


(ⅱ) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$인 경우

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=-f(x)$는 x축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=-f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 S이다.

이때 $-f(x)\geq 0$이고 $-f(x)=|f(x)|$이므로

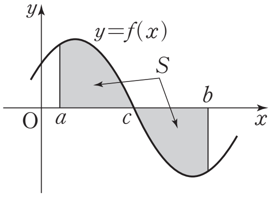
$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$



(ⅲ) 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\geq 0$, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$인 경우

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

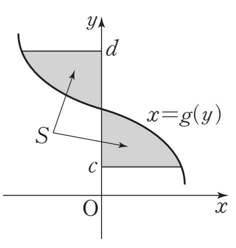
$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$



참고 곡선과 y축 사이의 넓이

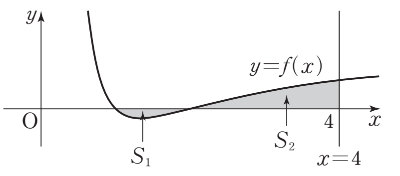
함수 $x=g(y)$가 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$



예제 2 곡선과 좌표축 사이의 넓이

그림과 같이 정의역이 $\{x|x>0\}$인 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ $(x\ge2)$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_1+S_2의 값은?



① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

풀이 전략 함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하여 구간을 나눈 후 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

풀이 $f(x)=0$에서

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$

이때 닫힌구간 $[1, 2]$에서 $f(x)\le0$, 닫힌구간 $[2, 4]$에서 $f(x)\ge0$이므로

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=\int_1^4\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2}\right|dx\\&=\int_1^2\left(-\frac{x^2-3x+2}{x^2}\right)dx+\int_2^4\frac{x^2-3x+2}{x^2}dx\\&=\int_1^2\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx+\int_2^4\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx\\&=\left[-x+3\ln|x|+\frac{2}{x}\right]_1^2+\left[x-3\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_2^4\\&=\{(3\ln2-1)-1\}+\left\{\left(\frac{7}{2}-3\ln4\right)-(1-3\ln2)\right\}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ①

유제

정답과 풀이 54쪽

3 [22011-0163]

곡선 $y=2\cos x+1$ $(0\le x\le2\pi)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$ ② $2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$ ④ $\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi$

4 [22011-0164]

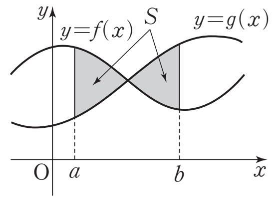
곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은?

① $\ln2$ ② $\ln\dfrac{9}{4}$ ③ $\ln\dfrac{5}{2}$ ④ $\ln\dfrac{11}{4}$ ⑤ $\ln3$

3. 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

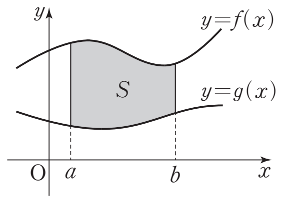
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



설명 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 각 경우로 나누어 구해 보면 다음과 같다.

(i) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $0\le g(x)\le f(x)$인 경우

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

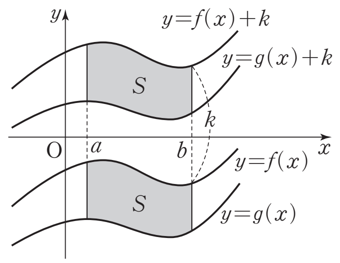


(ii) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $g(x)\le f(x)$이고, $f(x)$ 또는 $g(x)$가 음의 값을 갖는 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 y축의 양의 방향으로 k만큼 평행이동하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 $0\le g(x)+k\le f(x)+k$가 되게 할 수 있다.

평행이동하여도 구하는 넓이 S는 변하지 않으므로

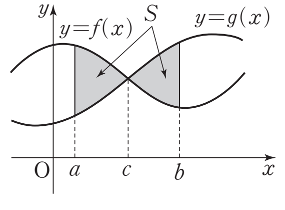
$$S=\int_a^b \{f(x)+k\}dx-\int_a^b \{g(x)+k\}dx$$
$$=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



(iii) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $g(x)\le f(x)$이고, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\le g(x)$인 경우

(i), (ii)에 의하여

$$S=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



예제 3 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

정의역이 $\left\{x \middle| 0 \le x < \frac{\pi}{2}\right\}$인 두 함수 $f(x)=\frac{1}{2}\tan x$, $g(x)=\sin x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$　② $\frac{1}{2}\ln 2$　③ $\ln 2$　④ $\frac{1}{2}(1+\ln 2)$　⑤ $2\ln 2$

풀이 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 후 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

풀이 $0 \le x < \frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\frac{1}{2}\tan x = \sin x$의 근을 구하면

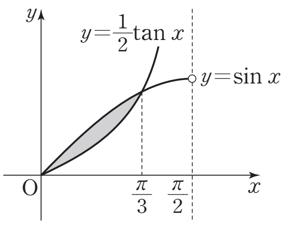
$\frac{\sin x}{2\cos x}=\sin x$, $\sin x = 2\cos x \sin x$, $(2\cos x - 1)\sin x = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 0$

따라서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$에서 $\frac{1}{2}\tan x \le \sin x$이므로 구하는 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left| \frac{1}{2}\tan x - \sin x \right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2}\tan x + \sin x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln|\cos x| - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(1-\ln 2) \end{aligned}$$



답 ①

유제

정답과 풀이 55쪽

5 [22011-0165]

두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{2x}-2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

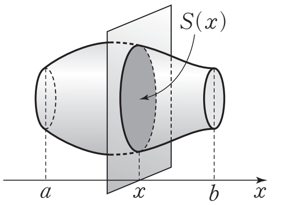
① $\ln 2 - \frac{1}{2}$　② $1-\ln 2$　③ $2\ln 2 - 1$　④ $2\ln 2 - \frac{1}{2}$　⑤ $\ln 2 + 1$

6 [22011-0166]

두 곡선 $y=\ln x$, $y=\frac{1-x}{x}$와 두 직선 $x=\frac{1}{2}$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

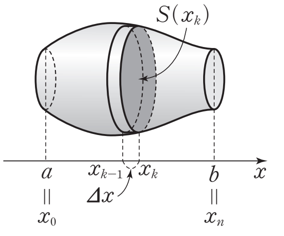
① $\frac{1}{2}\ln 2$　② $\ln 2$　③ $\frac{3}{2}\ln 2$　④ $2\ln 2$　⑤ $\frac{5}{2}\ln 2$

4. 입체도형의 부피



닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$이고, 함수 $S(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 이 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$



설명 그림과 같이 x축 위의 닫힌구간 $[a, b]$를 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례대로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 닫힌구간 $[x_{k-1}, x_k]$의 길이를 $\varDelta x$라 하면

$$\varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\varDelta x\ (\text{단, } k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

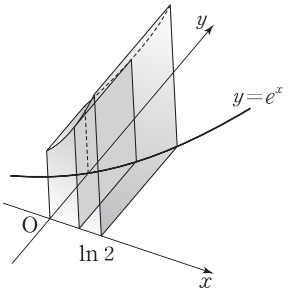
이때 각 점 x_k에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x_k)$를 밑면의 넓이로 하고 높이가 $\varDelta x$인 n개의 기둥의 부피의 합을 V_n이라 하면

$$\begin{aligned}V_n&=S(x_1)\varDelta x+S(x_2)\varDelta x+S(x_3)\varDelta x+\cdots+S(x_n)\varDelta x\\&=\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\varDelta x\end{aligned}$$

입체도형의 부피 V는 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}V&=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\varDelta x\\&=\int_a^b S(x)dx\end{aligned}$$

예 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피 V를 구해 보자.



$0\le t\le \ln 2$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

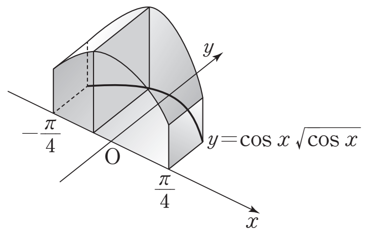
$$S(t)=(e^t)^2=e^{2t}$$

따라서 구하는 부피 V는

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{\ln 2}S(t)dt\\&=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt\\&=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}\\&=\frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{2}\times 1\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

예제 4 입체도형의 부피

그림과 같이 곡선 $y=\cos x\sqrt{\cos x}\left(-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$와 x축 및 두 직선 $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

풀이 전략 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 구한 후 치환적분법을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.

풀이 $-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=(\cos t\sqrt{\cos t})^2=\cos^3 t$$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면 $-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{4}$인 모든 실수 t에 대하여 $S(-t)=S(t)$이므로

$$\begin{aligned}V&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 t\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 t\,dt\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t\times\cos^2 t)dt\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{\cos t\times(1-\sin^2 t)\}dt\end{aligned}$$

이때 $\sin t=s$로 놓으면 $t=0$일 때 $s=0$, $t=\frac{\pi}{4}$일 때 $s=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고, $\frac{ds}{dt}=\cos t$이므로

$$\begin{aligned}V&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{\cos t\times(1-\sin^2 t)\}dt=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-s^2)ds\\&=2\left[s-\frac{1}{3}s^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\&=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\\&=\frac{5\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

답 ②

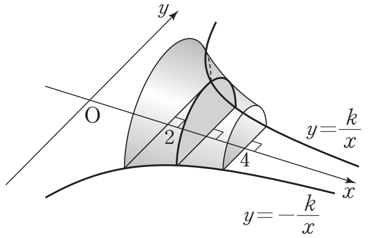
유제

정답과 풀이 55쪽

7

[22011-0167]

그림과 같이 양수 k에 대하여 두 곡선 $y=\frac{k}{x}$, $y=-\frac{k}{x}$ 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원인 입체도형의 부피가 2π일 때, k의 값을 구하시오.



5. 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

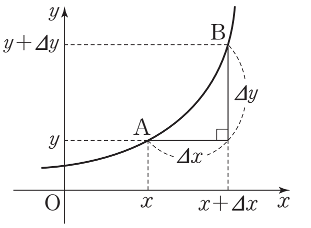
좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

일 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

설명 점 P가 움직인 거리는 시각 t $(a\le t\le b)$의 함수이므로 $s=s(t)$로 나타내기로 하자.
그림과 같이 시각 t에서 점 $\mathrm{A}(x, y)$에 있던 점 P가 시각 $t+\Delta t$에서
점 $\mathrm{B}(x+\Delta x, y+\Delta y)$로 이동했을 때 s의 증분 Δs는 Δt가 충분히 작으면
$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$에 가까워지므로



$$s'(t)=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

따라서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=s(b)-s(a)=\Big[s(t)\Big]_a^b$$
$$=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

6. 곡선의 길이

(1) 곡선 위의 점 (x, y)가 각각 $x=f(t)$, $y=g(t)$이고 겹쳐지는 부분이 없을 때, $a\le t\le b$에서 이 곡선의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(2) $a\le x\le b$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

예제 5 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

www.ebsi.co.kr

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=\ln t+\frac{1}{t},\ y=\frac{4\sqrt{t}}{t}$$

일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{1}{e}$ ② $1-\frac{1}{e}$ ③ $\frac{2}{e}$ ④ $1+\frac{1}{e}$ ⑤ $2-\frac{1}{e}$

풀이 전략

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$이다.

풀이

$x=\ln t+\frac{1}{t}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}$, $y=\frac{4\sqrt{t}}{t}=4t^{-\frac{1}{2}}$에서 $\frac{dy}{dt}=-2t^{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{t\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)^2+\left(-\frac{2}{t\sqrt{t}}\right)^2=\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)+\frac{4}{t^3}\\&=\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^2\end{aligned}$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned}s&=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt\\&=\int_1^e \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\ln|t|-\frac{1}{t}\right]_1^e\\&=\left(1-\frac{1}{e}\right)-(0-1)\\&=2-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 56쪽

8 [22011-0168]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=\sin t\cos t,\ y=\cos^2 t$$

일 때, 시각 $t=\frac{\pi}{2}$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

9 [22011-0169]

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=2+3t^2$, $y=2+2t^3$에 대하여 $0\le t\le\sqrt{3}$에서 이 곡선의 길이를 구하시오.

Level 1 기초 연습

[22011-0170]

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$의 값은?

① $\frac{10}{3}$ ② 4 ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ 6

[22011-0171]

2 함수 $f(x)=\frac{a}{x+2}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f'\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

일 때, 상수 a의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

[22011-0172]

3 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 4\pi\}$인 함수 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[22011-0173]

4 곡선 $y=\frac{2-x}{x+2}$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $2\ln 2-1$ ② $4\ln 2-2$ ③ $2\ln 2$ ④ $4\ln 2-1$ ⑤ $4\ln 2$

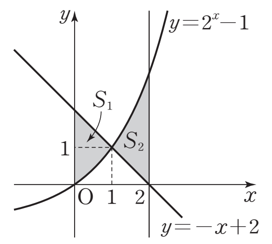
[22011-0174]

5 함수 $f(x)=|\ln x|$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $e+\frac{1}{e}-2$ ② $e-\frac{1}{e}-1$ ③ $e+\frac{1}{e}-1$ ④ $e-\frac{1}{e}$ ⑤ $e+\frac{1}{e}$

[22011-0175]

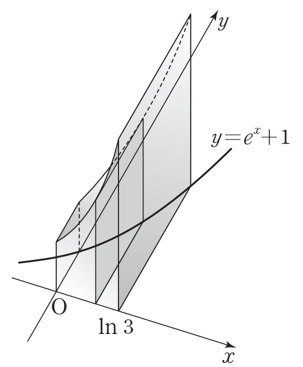
6 그림과 같이 곡선 $y=2^{x}-1$은 직선 $y=-x+2$와 점 $(1,\ 1)$에서 만난다. 곡선 $y=2^{x}-1$과 두 직선 $x=0$, $y=-x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=2^{x}-1$과 두 직선 $y=-x+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_2-S_1의 값은?



① $\frac{3}{\ln 2}-4$ ② $\frac{2}{\ln 2}-2$ ③ $\frac{3}{\ln 2}-3$
④ $\frac{2}{\ln 2}-1$ ⑤ $\frac{3}{\ln 2}-2$

[22011-0176]

7 그림과 같이 곡선 $y=e^{x}+1$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 3$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $6+\ln 3$ ② $7+\ln 3$ ③ $8+\ln 3$
④ $9+\ln 3$ ⑤ $10+\ln 3$

[22011-0177]

8 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=2\ln t$, $y=t+\frac{1}{t}$일 때, 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

[22011-0178]

9 $x=0$에서 $x=3$까지의 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이를 구하시오.

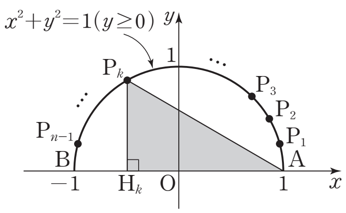
[22011-0179]

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{k\pi}{n}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

[22011-0180]

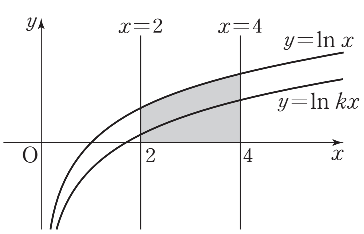
2 그림과 같이 곡선 $x^2+y^2=1\ (y\geq0)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$에 대하여 호 AB를 n등분하는 점을 점 A에 가까운 점부터 차례로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고, 점 $\mathrm{P}_k\,(1\leq k\leq n-1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H_k라 하자. 삼각형 $\mathrm{AP}_k\mathrm{H}_k$의 넓이를 $S(k)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S(k)$의 값은?



① $\frac{1}{4\pi}$　② $\frac{1}{2\pi}$　③ $\frac{3}{4\pi}$　④ $\frac{1}{\pi}$　⑤ $\frac{5}{4\pi}$

[22011-0181]

3 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=\ln kx$가 이등분할 때, k^2의 값은? $\left(\text{단, }\frac{1}{2}<k<1\right)$



① $\frac{e}{10}$　② $\frac{e}{9}$　③ $\frac{e}{8}$

④ $\frac{e}{7}$　⑤ $\frac{e}{6}$

[22011-0182]

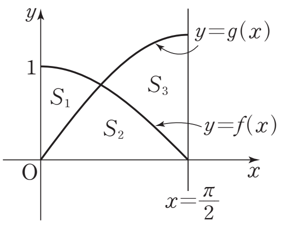
4 곡선 $y=\frac{4}{x}$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선과 곡선 $y=\frac{3}{x}$으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $4-3\ln 3$　② $3-2\ln 3$　③ $3-2\ln 2$　④ $4-2\ln 3$　⑤ $4-3\ln 2$

[22011-0183]

5

정의역이 $\left\{x \middle| 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$인 두 함수 $f(x)=\cos x$, $g(x)=k\sin x\ (k>1)$에 대하여 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3이라 하자. $S_2=2S_1$일 때, S_3의 값은?



① $\frac{4}{9}$　② $\frac{5}{9}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{7}{9}$　⑤ $\frac{8}{9}$

[22011-0184]

6

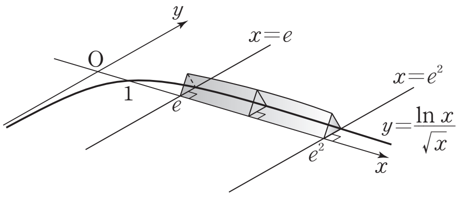
함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$과 양수 k에 대하여 방정식 $f(x)=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 곡선 $y=f(x)\ (x\ge 0)$과 y축 및 직선 $y=f(k)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x+2}=0$)

① $15-2e^2$　② $16-2e^2$　③ $17-2e^2$　④ $18-2e^2$　⑤ $19-2e^2$

[22011-0185]

7

그림과 같이 곡선 $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$와 x축 및 두 직선 $x=e$, $x=e^2$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고, x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[22011-0186]

8

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=2\ln(t^2-1)$, $y=2t$에 대하여 $3\le t\le 7$에서 이 곡선의 길이는?

① $6+2\ln\frac{3}{2}$　② $6+2\ln 2$　③ $8+\ln\frac{3}{2}$　④ $8+2\ln\frac{3}{2}$　⑤ $8+2\ln 2$

[22011-0187]

1 함수 $f(x)=(x-1)^2e^x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f'\left(\frac{k}{n}\right)$의 값은?

① $1-e$ ② $2-e$ ③ e ④ $e+1$ ⑤ $e+2$

[22011-0188]

2 정의역이 $\{x|0<x<\pi\}$인 함수 $f(x)=2\sin x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=t$ $(0<t<2)$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 선분 AB의 길이를 $g(t)$라 하자. $g'(t)=-2$가 되도록 하는 실수 t의 값을 k라 할 때, 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 서로 다른 두 점에서 각각 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-2$ ② $\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-1$ ③ $\frac{\pi^2}{18}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-1$

④ $\frac{\pi^2}{36}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-1$ ⑤ $\frac{\pi^2}{18}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-2$

[22011-0189]

3 1보다 큰 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점의 x좌표를 k라 하자. $\int_0^k \frac{x}{f'(g(x))}dx=2$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 정적분과 급수의 관계를 이용하는 문제, 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이, 입체도형의 부피를 구하는 문제, 평면 위의 점이 움직인 거리를 구하는 문제 등이 출제된다.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{5}{16}$ ③ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{3}{16}$ ⑤ $\dfrac{e^4}{2}-\dfrac{1}{8}$

2022학년도 대수능

출제 의도 정적분을 이용하여 좌표평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점의 좌표는 (α, α^2), (β, β^2)이므로 이 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 또 α, β는 x에 대한 이차방정식 $x^2=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$, 즉 $x^2-t^2x+\dfrac{\ln t}{8}=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=t^2,\ \alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$$

이고, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^4-\dfrac{\ln t}{4}$이므로 ㉠에서

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}t^2,\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$$

그러므로 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)는 $x=\dfrac{1}{2}t^2$, $y=\dfrac{1}{2}t^4-\dfrac{\ln t}{8}$이다.

$x=\dfrac{1}{2}t^2$에서 $\dfrac{dx}{dt}=t$이고, $y=\dfrac{1}{2}t^4-\dfrac{\ln t}{8}$에서 $\dfrac{dy}{dt}=2t^3-\dfrac{1}{8t}$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2=4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}=\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e \sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt=\int_1^e \left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{e^4}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

답 ①

고2~N수 수능 집중 로드맵

과목	수능 입문		기출 / 연습	연계+연계 보완		고난도	모의고사
국어 / 영어 / 수학 / 한국사 사회 / 과학	수능 감(感)잡기 수능특강 Light	강의노트 수능개념	수능 기출의 미래 수능특강Q 미니모의고사	수능연계교재의 국어 어휘 수능연계교재의 VOCA 1800 수능연계 기출 Vaccine VOCA 연계 수능특강 수능완성	수능특강 사용설명서 수능특강 연계 기출 수능완성 사용설명서	수능연계완성 3/4주 특강 고난도 · 신유형 수능의 7대 함정 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	FINAL 실전모의고사 만점마무리 봉투모의고사 만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION 고난도 시크릿X 봉투모의고사

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 소재 · 유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집		전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사		전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문 · 자료 · 문항 분석		전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품 · 지문과 연결된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석		국/수/영/사/과
	박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회 · 문화 표 분석 문항의 패턴 연습		사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION	신규 문항 2회분으로 국어 · 수학 · 영어 논스톱 모의고사		국/수/영
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사		국/수/영