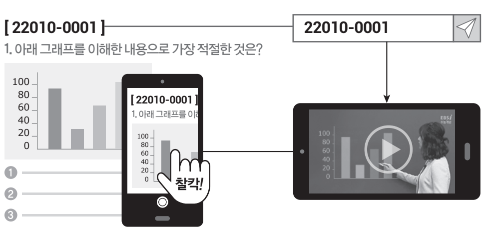
수능
특강

수학영역 **확률과 통계**

이 책의 차례 Contents

학생 EBS 교재 문제 검색

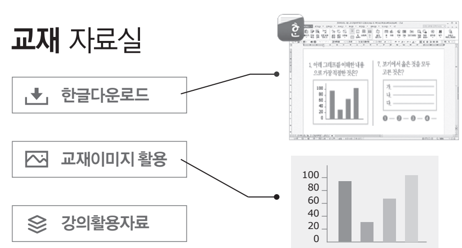
EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

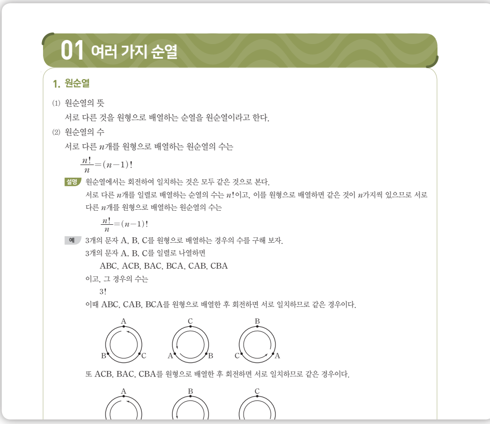
교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.



※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

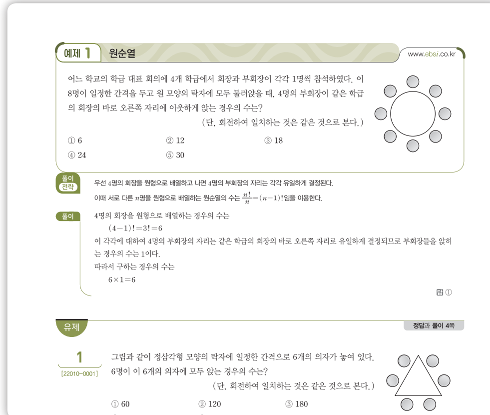
이 책의 구성과 특징 Structure

• 개념 정리



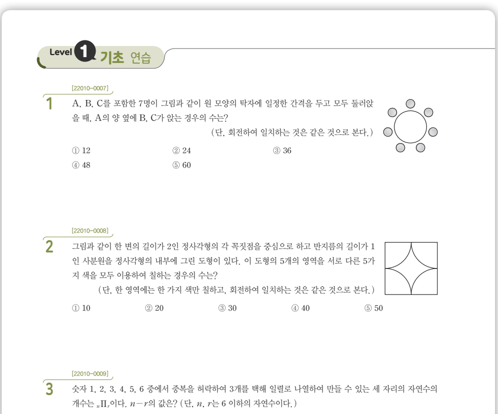
교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.

• 예제 & 유제



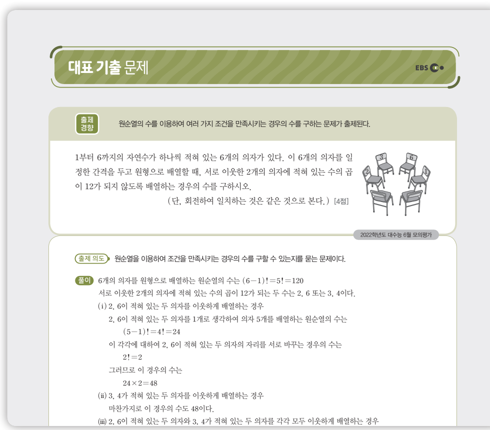
예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

• Level 1-Level 2-Level 3



Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

• 대표 기출 문제



대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

01 여러 가지 순열

1. 원순열

(1) 원순열의 뜻

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다.

(2) 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

설명 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 모두 같은 것으로 본다.
서로 다른 n개를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $n!$이고, 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

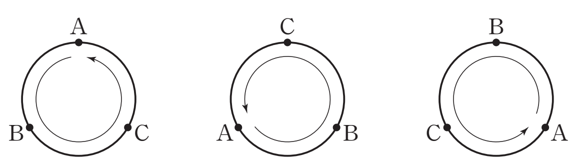
예 3개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구해 보자.
3개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하면

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

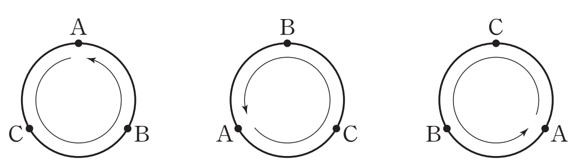
이고, 그 경우의 수는

$3!$

이때 ABC, CAB, BCA를 원형으로 배열한 후 회전하면 서로 일치하므로 같은 경우이다.



또 ACB, BAC, CBA를 원형으로 배열한 후 회전하면 서로 일치하므로 같은 경우이다.



이와 같이 3개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$이지만 이를 원형으로 배열하면 회전하여 같아지는 것이 3가지씩 있으므로 3개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{3!}{3}=2!=2$$

(3) 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\leq n)$개를 택하여 원형으로 배열하는 경우의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times\frac{r!}{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r}$$

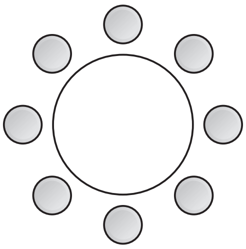
예 5명 중 3명을 택하여 원형의 탁자에 일정한 간격으로 둘러앉히는 경우의 수는

$$\frac{{}_{5}\mathrm{P}_{3}}{3}=\frac{5\times4\times3}{3}=20$$

예제 1 원순열

어느 학교의 학급 대표 회의에 4개 학급에서 회장과 부회장이 각각 1명씩 참석하였다. 이 8명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 4명의 부회장이 같은 학급의 회장의 바로 오른쪽 자리에 이웃하게 앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

풀이 전략

우선 4명의 회장을 원형으로 배열하고 나면 4명의 부회장의 자리는 각각 유일하게 결정된다.
이때 서로 다른 n명을 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$임을 이용한다.

풀이

4명의 회장을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 4명의 부회장의 자리는 같은 학급의 회장의 바로 오른쪽 자리로 유일하게 결정되므로 부회장들을 앉히는 경우의 수는 1이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times1=6$

답 ①

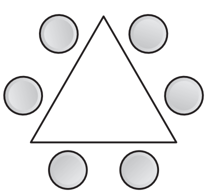
유제

정답과 풀이 4쪽

1 [22010-0001]

그림과 같이 정삼각형 모양의 탁자에 일정한 간격으로 6개의 의자가 놓여 있다. 6명이 이 6개의 의자에 모두 앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 60 ② 120 ③ 180
④ 240 ⑤ 300

2 [22010-0002]

여학생 3명과 남학생 3명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 남학생은 2명만 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 54 ② 60 ③ 66 ④ 72 ⑤ 78

01 여러 가지 순열

2. 중복순열

(1) 중복순열의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호

$${}_n\Pi_r$$

와 같이 나타낸다.

참고 기호 ${}_n\Pi_r$에서 Π는 곱을 뜻하는 영어 Product의 첫 글자인 P에 해당하는 그리스 문자로 ‘파이’라고 읽는다.

(2) 중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r = n^r$$

설명 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 일렬로 나열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, $\cdots$, r번째 자리에 올 수 있는 것은 각각 n가지씩이다.

나열 순서	첫 번째	두 번째	세 번째	$\cdots$	r번째
	↓	↓	↓		↓
경우의 수	n	n	n	$\cdots$	n

따라서 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$는 곱의 법칙에 의하여

$${}_n\Pi_r = \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{개}} = n^r$$

예1 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$, ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

예2 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개의 숫자를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수를 구해 보자.

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 1, 2, 3, 4의 4가지이다.

백의 자리	십의 자리	일의 자리
1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4
↓	↓	↓
4가지	4가지	4가지

따라서 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

이고, 이것은 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같다.

즉, ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$이다.

참고 두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n (m, n은 자연수)일 때, 집합 X에서 집합 Y로의 모든 함수의 개수는 공역 Y의 서로 다른 n개의 원소 중에서 중복을 허락하여 m개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_n\Pi_m = n^m$$

예제 2 중복순열

서로 다른 4개의 구슬을 5개의 상자 A, B, C, D, E에 남김없이 나누어 넣을 때, 두 상자 A, B에 들어가는 구슬의 개수의 합과 세 상자 C, D, E에 들어가는 구슬의 개수의 합이 서로 같도록 넣는 경우의 수는?

(단, 빈 상자가 있을 수 있다.)

① 144 ② 162 ③ 180 ④ 198 ⑤ 216

풀이 전략

서로 다른 4개의 구슬 중에서 두 상자 A, B에 넣을 구슬을 택하여 두 상자에 넣고, 남아 있는 구슬은 세 상자 C, D, E에 넣으면 된다. 이때 서로 다른 m개의 구슬을 서로 다른 n개의 상자에 남김없이 임의로 넣는 경우의 수는 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 중복순열의 수 ${}_{n}\Pi_{m}=n^{m}$과 같음을 이용한다.

풀이

모든 구슬의 개수는 4이므로 두 상자 A, B에 들어가는 구슬의 개수의 합은 2이고, 세 상자 C, D, E에 들어가는 구슬의 개수의 합도 2이어야 한다.

4개의 구슬 중에서 두 상자 A, B에 들어갈 구슬 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{4}C_{2}=6$$

이 각각에 대하여 서로 다른 2개의 구슬을 서로 다른 두 상자 A, B에 넣는 경우의 수는

$${}_{2}\Pi_{2}=2^{2}=4$$

이 각각에 대하여 남아 있는 서로 다른 2개의 구슬을 서로 다른 3개의 상자 C, D, E에 넣는 경우의 수는

$${}_{3}\Pi_{2}=3^{2}=9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6\times4\times9=216$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 4쪽

3 [22010-0003]

숫자 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 홀수의 개수는?

① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100

4 [22010-0004]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{2, 4, 6, 8, 10\}$으로의 함수 중에서 치역의 원소의 개수가 2 이상이고, 치역의 모든 원소의 곱이 3의 배수인 함수의 개수를 구하시오.

3. 같은 것이 있는 순열

(1) 같은 것이 있는 순열의 뜻

같은 것이 포함되어 있는 n개를 일렬로 나열하는 것을 같은 것이 있는 순열이라고 한다.

(2) 같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n\text{)}$$

설명 5개의 문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.

5개의 문자 a, a, b, b, c에서 2개의 a를 구별하여 각각 a_1, a_2라 하고, 2개의 b를 구별하여 각각 b_1, b_2라 하면 5개의 문자 a_1, a_2, b_1, b_2, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_5=5!$$

그런데 $5!$가지 중에서 다음과 같은 $(2!\times2!\times1!)$가지의 서로 다른 순열은 번호를 이용한 구별이 없다면 모두 $aabbc$와 같으므로 1가지로 세어야 한다.

$a_1a_2b_1b_2c$
$a_1a_2b_2b_1c$
$a_2a_1b_1b_2c$
$a_2a_1b_2b_1c$

➡ $aabbc$

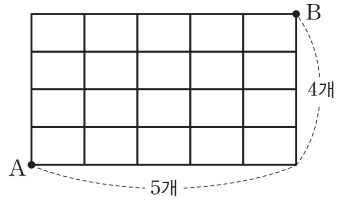
이와 같이 생각하면 5개의 문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30$$

예 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90$$

참고 그림과 같이 가로 방향의 칸의 수가 5, 세로 방향의 칸의 수가 4인 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수는 다음과 같이 구할 수 있다.



가로 방향으로 한 칸 움직이는 것을 문자 a로, 세로 방향으로 한 칸 움직이는 것을 문자 b로 나타낼 때, 5개의 문자 a와 4개의 문자 b를 모두 일렬로 나열하는 각 순열은 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 각 경로와 일대일로 대응된다.

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$$\frac{(5+4)!}{5!4!}$$

예제 3 같은 것이 있는 순열

www.ebsi.co.kr

7개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 중에서 1, 2, 3이 각각 적어도 하나씩 포함되도록 5개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는?

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

풀이 전략 나열할 수 있는 서로 다른 숫자는 1, 2, 3의 3개이고 나열할 자리는 5개이므로 나열해야 할 5개의 숫자에는 같은 것이 반드시 포함된다. 이때 n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들을 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)임을 이용한다.

풀이 7개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 중에서 세 숫자 1, 2, 3이 각각 적어도 하나씩 포함되도록 5개를 택하는 경우는

1, 1, 1, 2, 3

1, 1, 2, 2, 3

1, 1, 2, 3, 3

1, 2, 2, 3, 3

의 4가지가 있다.

(i) 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

(ii) 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{2!2!}=30$$

마찬가지로 1, 1, 2, 3, 3 또는 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수도 각각 30이다.

(i), (ii)에서 구하는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$20+3\times30=110$

답 ②

유제

정답과 풀이 5쪽

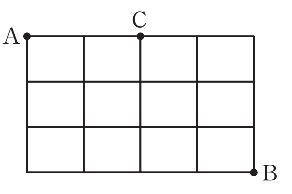
5 [22010-0005]

문자 a, a, b, b, c, c를 모두 일렬로 나열할 때, a끼리는 이웃하는 경우의 수는?

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

6 [22010-0006]

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점을 거쳐 C지점까지 최단 거리로 이동할 때, 중간에 C지점을 지나지 않는 경로의 수는?

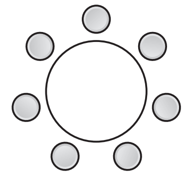


① 250 ② 300 ③ 350
④ 400 ⑤ 450

[22010-0007]

1 A, B, C를 포함한 7명이 그림과 같이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 모두 둘러앉을 때, A의 양 옆에 B, C가 앉는 경우의 수는?

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

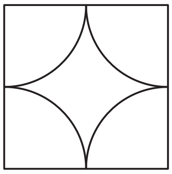


① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

[22010-0008]

2 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형의 각 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 사분원을 정사각형의 내부에 그린 도형이 있다. 이 도형의 5개의 영역을 서로 다른 5가지 색을 모두 이용하여 칠하는 경우의 수는?

(단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

[22010-0009]

3 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 ${}_{n}\Pi_{r}$이다. $n-r$의 값은? (단, n, r는 6 이하의 자연수이다.)

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

[22010-0010]

4 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 중에서 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수를 구하시오.

[22010-0011]

5 서로 다른 5개의 사탕을 서로 다른 4개의 상자 A, B, C, D에 남김없이 넣을 때, A상자에는 사탕을 1개만 넣는 경우의 수는? (단, 빈 상자가 있을 수 있다.)

① 375 ② 390 ③ 405 ④ 420 ⑤ 435

[22010-0012]

6 복숭아 3개, 귤 2개, 사과 2개가 있다. 이 7개의 과일을 먹는 순서를 정하는 경우의 수는?
(단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않고, 한 번에 하나의 과일을 먹는다.)

① 210 ② 240 ③ 270 ④ 300 ⑤ 330

[22010-0013]

7 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 집합 $Y=\{0, 1, 2\}$로의 함수 중에서

$$\sum_{k=1}^{5} f(k)=5$$

를 만족시키는 함수 f의 개수는?

① 31 ② 36 ③ 41 ④ 46 ⑤ 51

[22010-0014]

8 4개의 집합

$\{\mathrm{A}, a\}, \{\mathrm{B}, b\}, \{\mathrm{C}, c\}, \{\mathrm{D}, d\}$

에 속한 8개의 문자를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 일렬로 나열하는 경우의 수는?

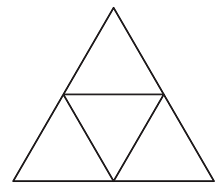
(가) A와 a는 양쪽 끝에 나열한다.
(나) 같은 집합에 있는 원소 중 대문자는 소문자보다 왼쪽에 나열한다.

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

[22010-0015]

1 한 변의 길이가 5 cm인 정삼각형 모양의 색종이 4장이 있다. 이 색종이들의 한 면은 모두 흰색이고, 다른 면은 각각 노란색, 빨간색, 파란색, 초록색이다. 이 4장의 색종이를 그림과 같이 이어 붙여 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형 모양을 만들 때, 4장의 색종이 중에서 흰 면이 보이는 색종이가 오직 한 개만 나타나는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



[22010-0016]

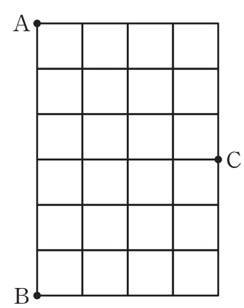
2 집합 $X=\{5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수는?

> 집합 X의 임의의 원소 a에 대하여
> a가 3의 배수이면 $f(a)$도 3의 배수이고, a가 3의 배수가 아니면 $f(a)<f(6)$이다.

① 120 ② 130 ③ 140 ④ 150 ⑤ 160

[22010-0017]

3 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 갑은 A지점에서 출발하여 C지점까지, 을은 B지점에서 출발하여 C지점까지 각각 최단 거리로 이동한다. 갑과 을이 동시에 출발하여 서로 같은 속력으로 이동할 때, 두 사람이 C지점에서 처음으로 만나는 경우의 수는?



① 750 ② 775 ③ 800
④ 825 ⑤ 850

[22010-0018]

4 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3\}$으로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

> 3 이하의 자연수 n에 대하여
> 집합 $\{x \mid f(x)=n, x \in X\}$의 원소의 개수를 a_n이라 하면 $a_n=4-n$이다.

[22010-0019]

1 반지름의 길이가 1인 원을 다음 조건을 만족시키도록 n개의 부채꼴로 나눈다.

> (가) 각 부채꼴의 넓이는 $\frac{\pi}{12}$와 $\frac{\pi}{4}$ 중의 하나이다.
>
> (나) 이웃한 두 부채꼴의 넓이의 합은 모두 $\frac{\pi}{3}$이다.

이 n개의 부채꼴에 서로 다른 n가지 색을 각각 1개씩 칠하는 경우의 수를 구하시오.

(단, n은 자연수이고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

[22010-0020]

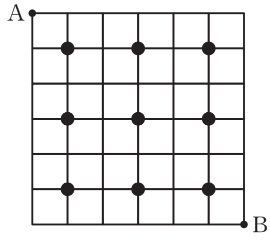
2 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하여 여섯 자리의 자연수를 만들고, 나열된 6개의 수를 모두 곱한 값을 N이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 여섯 자리의 자연수의 개수는?

> N은 24의 배수이고 16의 배수가 아니다.

① 2110 ② 2220 ③ 2330 ④ 2440 ⑤ 2550

[22010-0021]

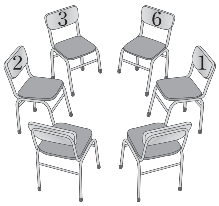
3 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있고, 이 도로망의 9개의 지점에 '●'이 표시되어 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경로 중에서 '●'이 표시된 9개의 지점 중 적어도 한 개의 지점을 지나는 경로의 수를 구하시오.



출제 경향 원순열의 수를 이용하여 여러 가지 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



2022학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 원순열을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 6개의 의자를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(6-1)!=5!=120$

서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 두 수는 2, 6 또는 3, 4이다.

(i) 2, 6이 적혀 있는 두 의자를 이웃하게 배열하는 경우

2, 6이 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 배열하는 원순열의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 2, 6이 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

그러므로 이 경우의 수는

$24\times 2=48$

(ii) 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 이웃하게 배열하는 경우

마찬가지로 이 경우의 수도 48이다.

(iii) 2, 6이 적혀 있는 두 의자와 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 각각 모두 이웃하게 배열하는 경우

2, 6이 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 2, 6이 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!\times 2!=4$

그러므로 이 경우의 수는

$6\times 4=24$

(i), (ii), (iii)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되도록 배열하는 경우의 수는

$48+48-24=72$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-72=48$

답 48

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제가 출제된다.

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

2022학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 같은 것이 있는 순열의 수와 중복순열을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 이 주사위를 네 번 던질 때 나온 눈의 수가 4 이상인 경우의 수를 n이라 하자.

(i) $n=0$, 즉 점수가 $1+1+1+1=4$인 경우

1의 눈만 네 번 나와야 하고, 이 경우의 수는

$$1$$

(ii) $n=1$, 즉 점수가 $0+1+1+2=4$인 경우

1의 눈이 두 번, 2의 눈이 한 번 나와야 하고, 이 경우의 수는 점수 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!}=12$$

이 각각에 대하여 4 이상의 눈이 한 번 나오는 경우의 수는 3이므로 이 경우의 수는

$$12\times3=36$$

(iii) $n=2$, 즉 점수가 $0+0+1+3=4$ 또는 $0+0+2+2=4$인 경우

㉠ 1의 눈이 한 번, 3의 눈이 한 번 나올 때, 점수 0, 0, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

㉡ 2의 눈이 두 번 나올 때, 점수 0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

㉠, ㉡의 각각에 대하여 4 이상의 눈이 두 번 나오는 경우의 수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

이므로 이 경우의 수는

$$(12+6)\times9=162$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$1+36+162=199$$

답 ⑤

02 중복조합과 이항정리

1. 중복조합

(1) 중복조합의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라 하고, 이 중복조합의 수를 기호로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}$$

와 같이 나타낸다.

참고 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$에서 H는 Homogeneous의 첫 글자이다.

(2) 중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

설명 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 조합은

aa, ab, ac, bb, bc, cc

의 6가지이므로 ${}_{3}\mathrm{H}_{2}=6$이다.

이때 위의 6가지의 경우를 문자가 들어갈 2개의 자리 ○와 서로 다른 문자의 사이를 구분할 2개의 막대 ▮를 이용하여 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.

즉, ○▮○▮를 일렬로 나열한 후 왼쪽에 놓인 ▮의 왼쪽에 ○가 있으면 그 자리에는 문자 a를, ▮와 ▮ 사이에 ○가 있으면 그 자리에는 문자 b를, 오른쪽에 놓인 ▮ 다음에 ○가 있으면 그 자리에는 문자 c를 넣으면 된다.

○○▮▮ ➡ aa
○▮○▮ ➡ ab
○▮▮○ ➡ ac
▮○○▮ ➡ bb
▮○▮○ ➡ bc
▮▮○○ ➡ cc

따라서 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{3}\mathrm{H}_{2}$는 2개의 ○와 2개의 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$${}_{3}\mathrm{H}_{2}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4!}{2!(4-2)!}={}_{4}\mathrm{C}_{2}$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 자리 ○와 n개를 구분하는 $(n-1)$개의 막대 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}{}_{n}\mathrm{H}_{r}&=\frac{\{r+(n-1)\}!}{r!(n-1)!}={}_{r+(n-1)}\mathrm{C}_{r}\\&={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}\end{aligned}$$

이다.

참고 r개의 자리 ○와 $(n-1)$개의 막대 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수는 총 $\{r+(n-1)\}$개의 자리 중에서 ○가 놓일 r개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{r+(n-1)}\mathrm{C}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

와 같이 계산할 수 있다.

예 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}\mathrm{H}_{3}={}_{4+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{6}\mathrm{C}_{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

이다.

예제 1 중복조합

같은 종류의 연필 15자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 4명 중 한 명은 2자루의 연필을 받고, 나머지 3명은 3자루 이상의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 60 ② 80 ③ 100 ④ 120 ⑤ 140

풀이 전략 우선 2자루의 연필을 받을 학생 한 명을 택하여 연필을 주고, 나머지 3명에게 3자루씩 연필을 나누어 준 다음, 이 3명에게 나머지 연필을 나누어 주는 경우의 수를 구한다. 이때 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$임을 이용한다.

풀이 4명의 학생 중 2자루의 연필을 받을 한 명을 택하는 경우의 수는 4이다.
이 학생에게 2자루의 연필을 주고, 나머지 3명에게 3자루씩 연필을 주는 경우의 수는 1이다.
이 각각에 대하여 남아 있는 $4(=15-2-3\times3)$자루의 연필을 나머지 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}\mathrm{H}_{4}={}_{3+4-1}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4\times15=60$$

답 ①

유제

정답과 풀이 10쪽

1 [22010-0022]

같은 종류의 떡 7개를 서로 다른 4개의 접시에 남김없이 담을 때, 모든 접시에 1개 이상의 떡을 담는 경우의 수는?

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

2 [22010-0023]

다른 종류의 축구공 2개와 같은 종류의 농구공 5개를 3개 학급에게 남김없이 나누어 줄 때, 공을 한 개도 받지 못하는 학급이 없도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 110 ② 120 ③ 130 ④ 140 ⑤ 150

2. 중복조합의 활용

(1) 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수

방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ (n은 자연수, r는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 개수는

$${}_n\mathrm{H}_r$$

이다.

설명 방정식 $x+y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구해 보자.

예를 들어 방정식 $x+y+z=6$의 해 중 하나인 $x=1$, $y=2$, $z=3$은 서로 다른 3개의 문자 x, y, z 중에서 x를 1개, y를 2개, z를 3개 택한 것으로 생각할 수 있다.

같은 방법으로 생각하면 주어진 방정식의 모든 해의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$$

일반적으로 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ (n은 자연수, r는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 개수는 서로 다른 n개의 문자 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 중에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$와 같다.

참고 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$에서 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이 음이 아닌 정수일 때, 순서쌍 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 개수가 ${}_n\mathrm{H}_r$임에 유의한다.

예를 들어, 3 이상의 자연수 n에 대하여 방정식 $x+y+z=n$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 다음과 같이 구한다.

$$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1$$

로 놓으면 x', y', z'은 음이 아닌 정수이고, 방정식 $x+y+z=n$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=n-3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{n-3}$$

이다.

(2) 조건을 만족시키는 함수의 개수

실수 전체의 집합의 공집합이 아닌 두 부분집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때, 집합 X에서 집합 Y로의 함수 중에서

'집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.'

를 만족시키는 함수 f의 개수는

$${}_n\mathrm{H}_m$$

이다.

설명 위의 조건을 만족시키는 함수는 집합 Y의 원소 n개에서 중복을 허락하여 m개를 택하여 집합 X의 원소에 크지 않은 수부터 크기순으로 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 중복조합의 수인 ${}_n\mathrm{H}_m$과 같다.

예제 2 중복조합의 활용

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$이다.
(나) $f(2)=f(3)$이고 $f(4)>f(5)$이다.

① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

풀이 전략 조건 (가)와 $f(2)=f(3)$을 만족시키는 함수의 개수를 중복조합을 이용하여 구한 다음, 조건 (가)와 $f(2)=f(3)$, $f(4)=f(5)$를 만족시키는 함수를 제외한다.

풀이 조건 (가)와 $f(2)=f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 X의 원소 중에서 중복을 허락하여 4개를 택한 다음, 이 4개의 수 중 작지 않은 순서대로 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로 정하고, $f(2)$의 값을 $f(3)$의 값으로 정하면 된다.

이 경우의 수는

$${}_5\mathrm{H}_4={}_{5+4-1}\mathrm{C}_4={}_8\mathrm{C}_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

한편, 조건 (가)와 $f(2)=f(3)$, $f(4)=f(5)$를 모두 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 X의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음, 이 3개의 수 중 작지 않은 순서대로 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값으로 정하고, $f(2)$의 값을 $f(3)$의 값으로, $f(4)$의 값을 $f(5)$의 값으로 정하면 된다.

이 경우의 수는

$${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$70-35=35$$

답 ①

유제

정답과 풀이 10쪽

3 [22010-0024]

다항식 $(a+b+c+d)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

4 [22010-0025]

다음 조건을 만족시키는 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?

(가) $a \geq -1$, $b \geq -1$, $c \geq -1$
(나) $a+b+c=3$

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

3. 이항정리

(1) 이항정리

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개하면

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

이다. 이와 같이 다항식 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라고 한다.

설명 다항식 $(a+b)^3$을 전개하면

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

이때 $3a^2b$는 세 개의 인수 $(a+b)$ 중 어느 한 인수에서 b를 택하고, 나머지 두 인수에서 각각 a를 택하여 곱한 단항식 baa, aba, aab의 합이다.

$$\begin{array}{ccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \\ b & a & a & \Rightarrow & a^2b \\ a & b & a & \Rightarrow & a^2b \\ a & a & b & \Rightarrow & a^2b \end{array}$$

즉, a^2b의 계수는 세 개의 인수 $(a+b)$ 중 한 개에서 b를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이다.

마찬가지 방법으로 a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각 ${}_3\mathrm{C}_0$, ${}_3\mathrm{C}_2$, ${}_3\mathrm{C}_3$임을 알 수 있다.

따라서 $(a+b)^3$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내면

$$(a+b)^3={}_3\mathrm{C}_0a^3+{}_3\mathrm{C}_1a^2b+{}_3\mathrm{C}_2ab^2+{}_3\mathrm{C}_3b^3$$

일반적으로 자연수 n에 대하여 다항식

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\times\cdots\times(a+b)}_{n\text{개}}$$

의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$은 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하고, 나머지 $(n-r)$개의 인수에서 a를 택하여 곱한 것이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개의 인수에서 b를 택하는 조합의 수와 같다.

즉, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같다.

따라서 다항식 $(a+b)^n$의 전개식은

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

참고 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$이므로 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$의 계수와 a^rb^{n-r}의 계수는 같다.

(2) 이항계수

다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 이항계수라 하고, ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 일반항이라고 한다.

예 다항식 $(3x+y)^6$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^2y^4의 계수를 구해 보자.

다항식 $(3x+y)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r(3x)^{6-r}y^r={}_6\mathrm{C}_r\times3^{6-r}\times x^{6-r}\times y^r\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

이므로 x^2y^4항은 $r=4$일 때이다.

따라서 x^2y^4의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_4\times3^{6-4}={}_6\mathrm{C}_2\times3^2=\frac{6\times5}{2\times1}\times9=135$$

예제 3 이항정리

x에 대한 두 다항식 $(x+2)^5$, $(\sqrt{3}x+\sqrt{a})^6$의 전개식에서 x^2의 계수가 서로 같을 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

풀이 전략 이항정리를 이용하여 $(x+2)^5$과 $(\sqrt{3}x+\sqrt{a})^6$의 전개식의 일반항을 구하고, x^2의 계수를 비교하여 양수 a의 값을 구한다.

풀이 $(x+2)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}2^r = {}_5C_r \times 2^r \times x^{5-r} \ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

x^2항은 $5-r=2$, 즉 $r=3$일 때이므로 x^2의 계수는

$${}_5C_3 \times 2^3 = {}_5C_2 \times 8 = \frac{5\times4}{2\times1}\times8=80$$

$(\sqrt{3}x+\sqrt{a})^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(\sqrt{3}x)^{6-r}(\sqrt{a})^r = {}_6C_r \times (\sqrt{3})^{6-r}\times(\sqrt{a})^r\times x^{6-r} \ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

x^2항은 $6-r=2$, 즉 $r=4$일 때이므로 x^2의 계수는

$${}_6C_4\times(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{a})^4 = {}_6C_2\times3\times a^2 = \frac{6\times5}{2\times1}\times3a^2=45a^2$$

이때 $80=45a^2$이므로

$$a^2=\frac{16}{9}$$

따라서 양수 a의 값은 $\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$이다.

답 ④

유제

정답과 풀이 11쪽

5 [22010-0026]

$\left(49x^2+\frac{1}{7x}\right)^7$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$의 계수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6 [22010-0027]

$\left(1+\frac{1}{x}\right)(2x+1)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는?

① 408 ② 414 ③ 420 ④ 426 ⑤ 432

4. 파스칼의 삼각형

음이 아닌 정수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식에서 이항계수를 차례로 삼각형 모양으로 나열한 것을 파스칼의 삼각형이라고 한다.

$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	${}_1C_0 \quad {}_1C_1$	$1 \quad 1$
$(a+b)^2$	${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$	$1 \quad 2 \quad 1$
$(a+b)^3$	${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$
$(a+b)^4$	${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$
$(a+b)^5$	${}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5$	$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

파스칼의 삼각형에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

① ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ $(0 \le r \le n)$이므로 각 단계의 이항계수의 배열은 좌우 대칭이다.

② ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$ $(1 \le r \le n-1)$이므로 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 가운데의 아래쪽에 있는 다음 단계의 수와 같다.

5. 이항계수의 성질

모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

(2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

(3) n이 홀수일 때, ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_{n-1} = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_n = 2^{n-1}$

n이 짝수일 때, ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_n = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_{n-1} = 2^{n-1}$

설명 이항정리를 이용하여 다항식 $(1+x)^n$을 전개하면

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n \quad \cdots\cdots ㉢$$

n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡+㉢)을 하면

$$2^{n-1} = {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_{n-1}$$

n이 홀수일 때, $\frac{1}{2}$(㉡−㉢)을 하면

$$2^{n-1} = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_n$$

마찬가지 방법으로 n이 짝수일 때,

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_n = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_{n-1} = 2^{n-1}$$

예 ① ${}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_{10} = 2^{10}$

② ${}_{10}C_0 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_6 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_{10} = {}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_9 = 2^9$

예제 4 이항계수의 활용

www.ebsi.co.kr

집합 $A=\{x\,|\,x$는 50 이하의 홀수인 자연수$\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 집합의 개수는 N이다. $\log_2 N$의 값을 구하시오.

풀이 전략 $n(A)=m$인 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 k인 집합의 개수는 ${}_m\mathrm{C}_k$이고, n이 홀수일 때 ${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_5+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$임을 이용한다.

풀이 $n(A)=25$이므로 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 $k\,(0\le k\le 25)$인 집합의 개수는

$${}_{25}\mathrm{C}_k$$

이다.

따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

$$N={}_{25}\mathrm{C}_1+{}_{25}\mathrm{C}_3+{}_{25}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{25}\mathrm{C}_{25}$$

이고, 이항계수의 성질에 의하여

$${}_{25}\mathrm{C}_1+{}_{25}\mathrm{C}_3+{}_{25}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{25}\mathrm{C}_{25}=2^{24}$$

따라서 $N=2^{24}$이므로

$$\begin{aligned}\log_2 N&=\log_2 2^{24}\\&=24\end{aligned}$$

답 24

유제

정답과 풀이 11쪽

7 [22010-0028]

등식 $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} {}_{2n-1}\mathrm{C}_r=256$을 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

8 [22010-0029]

방정식

$$a+b+c=d\,(3\le d\le 10)$$

을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

① 100 ② 120 ③ 140 ④ 160 ⑤ 180

Level 1 기초 연습

[22010-0030]

1 ${}_{4}\mathrm{H}_{3}-{}_{3}\mathrm{H}_{4}$의 값은?

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

[22010-0031]

2 딸기맛 사탕, 포도맛 사탕, 사과맛 사탕 중에서 중복을 허락하여 4개의 사탕을 택하는 경우의 수는?

① 9　② 12　③ 15　④ 18　⑤ 21

[22010-0032]

3 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(가) $a+b+c+d=12$
(나) $d=a+b+c$

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

[22010-0033]

4 $5\le x\le y\le z\le 15$를 만족시키는 홀수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 52　② 56　③ 60　④ 64　⑤ 68

[22010-0034]

5 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는?

> 집합 X의 어떤 두 원소 a, b $(a<b)$에 대하여 $f(a)<f(b)$이다.

① 455 ② 505 ③ 555 ④ 605 ⑤ 655

[22010-0035]

6 $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

[22010-0036]

7 $\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^8\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^8$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$의 계수는? (단, $x>0$)

① -448 ② -224 ③ -112 ④ 112 ⑤ 224

[22010-0037]

8 등식 ${}_9\mathrm{C}_0+{}_9\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_4+{}_9\mathrm{C}_6+{}_9\mathrm{C}_8={}_m\Pi_n$을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22010-0038]

1 흰 공 4개, 검은 공 6개와 네 상자 A, B, C, D가 있다. 이 10개의 공을 4개의 상자에 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

(가) 흰 공이 들어 있지 않은 상자의 개수는 1이다.
(나) 검은 공이 들어 있지 않은 상자의 개수는 1이다.
(다) 모든 상자에는 적어도 한 개의 공이 들어 있다.

① 300 ② 360 ③ 420 ④ 480 ⑤ 540

[22010-0039]

2 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(가) $a+b+c+d=16$
(나) a, b, c, d 중 적어도 하나는 홀수이다.

① 400 ② 420 ③ 440 ④ 460 ⑤ 480

[22010-0040]

3 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow A$의 개수는?

(가) $a \in A$, $b \in A$이고 $a<b \leq 4$이면 $f(a) \leq f(b) \leq 4$이다.
(나) $c \in A$이고 $c \geq 4$이면 $f(c) \geq 4$이다.

① 100 ② 120 ③ 140 ④ 160 ⑤ 180

[22010-0041]

4 다항식 $(x+\sqrt[4]{2})^6$의 전개식에서 계수가 유리수인 항의 계수의 총합은?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

[22010-0042]

1 다항식 $(x^2+1)^5(x^3+2)^n$의 전개식에서 x^4의 계수가 160일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.)

① 154 ② 164 ③ 174 ④ 184 ⑤ 194

[22010-0043]

2 같은 종류의 구슬 10개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 구슬을 서로 다른 4개의 주머니에 넣는 경우의 수를 구하시오.

> (가) 각 주머니에는 7개 이하의 구슬을 넣고, 빈 주머니가 있을 수 있다.
> (나) 어느 주머니에도 넣지 않은 구슬이 있다.

[22010-0044]

3 집합 $X=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수는?

> (가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $|f(x_1)| \le |f(x_2)|$이다.
> (나) 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 3이다.

① 1088 ② 1152 ③ 1216 ④ 1280 ⑤ 1344

출제 경향 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제, 방정식을 만족시키는 해의 순서쌍의 개수를 구하는 문제가 출제된다.

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c+d=14$ ...... ㉠

조건 (가)에서

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$ (a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면 ㉠에서

$a'+b'+c'+d'=10$ ...... ㉡

방정식 ㉡을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_3=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$$

한편, 네 명의 학생이 모두 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는 다음과 같다.

$a=2a''+1$, $b=2b''+1$, $c=2c''+1$, $d=2d''+1$ (a'', b'', c'', d''은 음이 아닌 정수)

로 놓으면 ㉠에서

$a''+b''+c''+d''=5$ ...... ㉢

㉢을 만족시키는 순서쌍 (a'', b'', c'', d'')의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

따라서 두 조건 (가), (다)를 만족시키는 경우의 수는 $286-56=230$

한편, 두 조건 (가), (다)를 만족시키는 동시에 사인펜을 10개 이상 받은 학생이 있는 경우는 각 학생이 받은 사인펜의 개수가 10, 2, 1, 1일 때뿐이고, 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 주어진 세 조건을 모두 만족시키는 경우의 수는

$230-12=218$

답 218

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 이항정리를 이용하여 특정한 항의 계수를 구하는 문제, 이항계수의 성질을 이용하는 문제가 출제된다.

$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같을 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2022학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 이항정리의 전개식의 일반항을 이용하여 두 항의 계수가 서로 같도록 하는 양수 a의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r\times(x^2)^{5-r}\times\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r\times a^r\times x^{10-3r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

따라서 $\frac{1}{x^2}$항은 $10-3r=-2$, 즉 $r=4$일 때이므로 $\frac{1}{x^2}$의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_4\times a^4=5a^4$$

x항은 $10-3r=1$, 즉 $r=3$일 때이므로 x의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_3\times a^3=10a^3$$

이때 $5a^4=10a^3$이고, $a>0$이므로

$$a=2$$

답 ②

03 확률의 뜻과 활용

1. 시행과 사건

(1) 시행

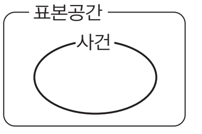
주사위나 동전을 던지는 것처럼 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 정해지는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

(2) 사건

① 표본공간: 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라고 한다.

② 사건: 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다.

③ 근원사건: 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

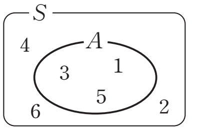


예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수를 확인하는 시행에서

① 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

② 홀수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면 $A=\{1, 3, 5\}$

③ 근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$



참고 표본공간은 공집합이 아닌 경우만 생각한다.

2. 배반사건과 여사건

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

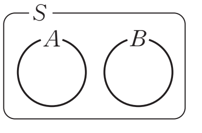
(1) 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 사건을 $A\cup B$와 같이 나타낸다.

(2) 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A\cap B$와 같이 나타낸다.

(3) 배반사건: 두 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이라고 한다.

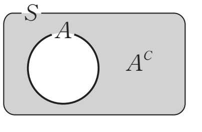


(4) 여사건: 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로

$$A^C$$

과 같이 나타낸다.

이때 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이다.



예 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 3의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B, 짝수의 눈이 나오는 사건을 C라 하면

$A=\{1, 3\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{2, 4, 6\}$

① $A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$, $A\cap B=\{3\}$

② $A\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이다.

③ 사건 A의 여사건은 $A^C=\{2, 4, 5, 6\}$이다.

예제 1 배반사건과 여사건

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나오는 두 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B, $2\le n\le 12$인 자연수 n에 대하여 두 눈의 수의 합이 n의 약수인 사건을 E_n이라 하자. 이 시행에서 두 사건 $A\cap B^C$과 E_n이 서로 배반사건이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? (단, B^C은 B의 여사건이다.)

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

풀이 전략

(1) 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$임을 이용한다.

(2) 표본공간 S의 사건 A에 대하여 $A\cup A^C=S$, $A\cap A^C=\varnothing$임을 이용한다.

풀이

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 표본공간을 S라 하면

$S=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \cdots, (6, 6)\}$

두 눈의 수의 합이 짝수인 사건이 A이므로

$A=\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), \cdots, (6, 6)\}$

두 눈의 수의 합이 3의 배수인 사건이 B이므로

$B=\{(1, 2), (1, 5), (2, 1), \cdots, (6, 6)\}$

이때 사건 B의 여사건 B^C에 대하여 $B^C=S-B$이므로

$B^C=\{(1, 1), (1, 3), (1, 4), \cdots, (6, 5)\}$

그러므로

$A\cap B^C=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (4, 6), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4)\}$

즉, 집합 $A\cap B^C$에 속하는 원소의 두 눈의 수의 합은 2 또는 4 또는 8 또는 10이다.

$2\le n\le 12$인 자연수 n에 대하여 두 사건 $A\cap B^C$과 E_n이 서로 배반사건이 되려면 $(A\cap B^C)\cap E_n=\varnothing$이어야 하므로 조건을 만족시키는 n의 값은 2, 4, 8, 10을 약수로 갖지 않는 3 또는 5 또는 7 또는 9 또는 11이다.

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은 $3+5+7+9+11=35$

답 ③

유제

정답과 풀이 16쪽

1 [22010-0045]

표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 세 사건 A, B, C에 대하여

$A=\{x\,|\,x\text{는 소수}\}$, $B=\{x\,|\,x\ge 5\}$

이다. 두 사건 $A\cup B$와 C^C이 서로 배반사건이 되도록 하는 사건 C의 개수는?

(단, C^C은 C의 여사건이다.)

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

2 [22010-0046]

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 4의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건을 A, 10의 약수가 적혀 있는 공이 나오는 사건을 B라 할 때, 사건 A와는 서로 배반사건이고 사건 B^C과는 서로 배반사건이 아닌 사건 C의 개수를 구하시오. (단, B^C은 B의 여사건이다.)

3. 확률의 뜻

(1) 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A가 일어날 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

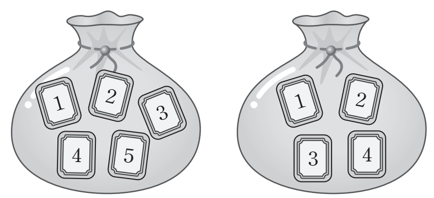
(2) 수학적 확률

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

로 정의하고, 이것을 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.

예 주머니 P에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 Q에는 1부터 4까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 P, Q에서 임의로 카드를 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 5일 확률을 구해 보자.



P Q

두 주머니 P, Q에서 임의로 카드를 한 장씩 꺼내는 시행에서 표본공간을 S라 하면

$$S=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ \cdots,\ (5,\ 3),\ (5,\ 4)\}$$

이므로

$$n(S)=5\times4=20$$

꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 5인 사건을 A라 하면

$$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$$

이므로

$$n(A)=4$$

따라서 구하는 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

참고 수학적 확률은 표본공간이 공집합이 아닌 유한집합인 경우에만 생각한다.

(3) 통계적 확률

같은 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라 하자. 이때 시행 횟수 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워질 때, 이 값 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다. 그런데 실제로 n의 값을 한없이 크게 할 수 없으므로 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 통계적 확률로 생각한다.

참고 일반적으로 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n의 값을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다.

예제 2 수학적 확률

5명의 여학생과 5명의 남학생을 임의로 분리수거 담당 6명과 청소 담당 4명으로 나눌 때, 청소 담당으로 배정된 학생 중 3명이 여학생일 확률은?

① $\frac{1}{7}$　② $\frac{5}{21}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{3}{7}$　⑤ $\frac{11}{21}$

풀이 전략

표본공간 S의 사건 A가 일어날 수학적 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

임을 이용한다.

풀이

10명의 학생을 분리수거 담당 6명과 청소 담당 4명으로 나누는 경우의 수는 10명의 학생 중에서 청소 담당으로 배정할 4명의 학생을 택하는 경우의 수와 같으므로

$$_{10}\mathrm{C}_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

이때 청소 담당으로 배정된 학생 중 3명이 여학생인 경우의 수는 5명의 여학생 중에서 청소 담당으로 배정할 3명의 학생을 택하고, 5명의 남학생 중에서 청소 담당으로 배정할 1명의 학생을 택하는 경우의 수와 같으므로

$$_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_1=10\times5=50$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{50}{210}=\frac{5}{21}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 17쪽

3

[22010-0047]

빨간 공 2개, 파란 공 3개, 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공의 색이 모두 다를 확률은?

① $\frac{3}{14}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{5}{14}$　④ $\frac{3}{7}$　⑤ $\frac{1}{2}$

4

[22010-0048]

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 일차함수 $y=6x-b$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 확률은?

① $\frac{5}{18}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{7}{18}$　④ $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{1}{2}$

4. 확률의 기본 성질

표본공간이 S인 어떤 시행에서

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

(2) 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

(3) 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

설명 어떤 시행에서 표본공간 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 임의의 사건 A에 대하여 $\varnothing \subset A \subset S$이므로

$$0 \le n(A) \le n(S)$$

이 부등식의 각 변을 $n(S)$로 나누면

$$0 \le \frac{n(A)}{n(S)} \le 1,\ \text{즉 } 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$$

특히, 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=\dfrac{n(S)}{n(S)}=1$이고,

절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $n(\varnothing)=0$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)=\dfrac{n(\varnothing)}{n(S)}=\dfrac{0}{n(S)}=0$이다.

5. 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$

특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

설명 표본공간 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 두 사건 A와 B에 대하여

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

이 등식의 양변을 $n(S)$로 나누면

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$$

특히, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건, 즉 $A \cap B=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A \cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

예 주사위 한 개를 던질 때 나오는 눈의 수가 2의 배수 또는 3의 배수일 확률을 구해 보자.

주사위 한 개를 던질 때 나오는 눈의 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A \cap B$는 나오는 눈의 수가 6의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

예제 3 확률의 덧셈정리

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 임의로 서로 다른 4개를 택하여 임의로 일렬로 나열하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 이 수가 2의 배수 또는 3의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

풀이 전략

두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은 확률의 덧셈정리

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

를 이용하여 구한다.

풀이

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 4개를 택하여 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는

$${}_5\mathrm{P}_4=5\times4\times3\times2=120$$

만든 네 자리의 자연수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 만든 네 자리의 자연수가 6의 배수인 사건이다.

(ⅰ) 만든 네 자리의 자연수가 2의 배수인 경우의 수는 일의 자리의 숫자가 2 또는 4가 되어야 하므로

$$2\times{}_4\mathrm{P}_3=2\times24=48$$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

(ⅱ) 만든 네 자리의 자연수가 3의 배수인 경우는 택한 네 수의 합이 3의 배수가 되어야 하므로 1, 2, 4, 5를 택하는 경우뿐이다.

즉, 이 경우의 수는

$$4!=4\times3\times2\times1=24$$

이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

(ⅲ) 만든 네 자리의 자연수가 6의 배수인 경우는 택한 네 수가 1, 2, 4, 5이고, 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우이므로 이 경우의 수는

$$2\times3!=2\times6=12$$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 17쪽

5 [22010-0049]

1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드에서 서로 다른 3장의 카드를 임의로 택할 때, 택한 카드 중 홀수가 적혀 있는 카드의 개수가 짝수가 적혀 있는 카드의 개수보다 클 확률은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{22}{35}$ ③ $\frac{23}{35}$ ④ $\frac{24}{35}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

6. 여사건의 확률

(1) 사건 A와 그 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

(2) 두 사건 A, B와 그 각각의 여사건 A^C, B^C에 대하여

① $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

② $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

설명 (1) 표본공간 S의 사건 A에 대하여 사건 A와 그 여사건 A^C은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$이므로

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1,\text{ 즉 }\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

가 성립한다.

(2) 드모르간의 법칙에 의하여

$$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C,\ A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$$

이므로 여사건의 확률에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cup B^C)&=\mathrm{P}((A\cap B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

예 (1) 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드 중 짝수가 적혀 있는 카드가 적어도 1장 포함될 확률을 구해 보자.

이 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드 중 짝수가 적혀 있는 카드가 적어도 1장 포함되는 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 모두 홀수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}\end{aligned}$$

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 2의 배수가 아니거나 3의 배수가 아닐 확률을 구해 보자.

2의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 2의 배수가 아니거나 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 사건은 $A^C\cup B^C$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cup B^C)&=1-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

참고 일반적으로 '적어도 ~일 확률', '~ 이상일 확률', '~ 이하일 확률', '~가 아닐 확률' 등을 구할 때는 여사건의 확률을 이용하면 편리한 경우가 많다.

예제 4 여사건의 확률

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 택한 순서쌍 (x, y, z)의 x, y, z 중 적어도 하나가 홀수일 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

풀이 전략

사건 A의 여사건 A^C의 확률을 알 때, 사건 A의 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$

임을 이용하여 구한다.

풀이

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$x=a+1,\ y=b+1,\ z=c+1\ (a,\ b,\ c\text{는 음이 아닌 정수})$$

로 놓으면 방정식 $a+b+c=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 택한 순서쌍 (x, y, z)의 x, y, z 중 적어도 하나가 홀수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 임의로 택한 순서쌍 (x, y, z)의 x, y, z가 모두 짝수인 사건이다.

이때

$$x=2a'+2,\ y=2b'+2,\ z=2c'+2\ (a',\ b',\ c'\text{은 음이 아닌 정수})$$

로 놓으면 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 짝수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $a'+b'+c'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

그러므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 17쪽

6 [22010-0050]

농구 동아리 학생 5명, 탁구 동아리 학생 4명, 당구 동아리 학생 3명으로 구성된 총 12명의 학생 중에서 임의로 4명의 학생을 택할 때, 택한 학생 중 적어도 한 명은 당구 동아리 학생일 확률은?

① $\frac{41}{55}$ ② $\frac{42}{55}$ ③ $\frac{43}{55}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{11}$

Level 1 기초 연습

[22010-0051]

1 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이고 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{6}$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은?

(단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{11}{24}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{13}{24}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[22010-0052]

2 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 사건 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 사건이 사건 $A=\{x|x\text{는 5의 약수}\}$와 서로 배반사건일 확률은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

[22010-0053]

3 1부터 7까지의 자연수를 임의로 일렬로 나열할 때, 짝수가 모두 짝수 번째에 올 확률은?

① $\frac{1}{35}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{3}{35}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

[22010-0054]

4 두 학생 A, B를 포함한 6명의 학생 중에서 임의로 3명의 학생을 택할 때, 택한 3명의 학생 중 A는 포함되고 B는 포함되지 않을 확률은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[22010-0055]

5 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 확률은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

[22010-0056]

6 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 연속하여 3번 또는 4번 나올 확률은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{5}{32}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

[22010-0057]

7 세 자리의 자연수 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 수의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수 중에 적어도 하나는 홀수일 확률은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{13}{18}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

[22010-0058]

8 두 학생 A, B를 포함한 5명의 학생을 임의로 일렬로 세울 때, A와 B가 이웃하지 않을 확률은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

Level 2 기본 연습

[22010-0059]

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 택할 때, $f(2)\le f(3)$일 확률은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

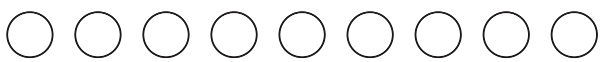
[22010-0060]

2 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, $a+b$가 c의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{19}{54}$ ③ $\frac{10}{27}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{11}{27}$

[22010-0061]

3 그림과 같이 크기가 같은 9개의 원이 일렬로 놓여 있다.



이 원 중에서 3개는 빨간 색으로, 4개는 파란 색으로, 2개는 노란 색으로 9개의 원의 내부를 모두 임의로 칠할 때, 색칠한 그림이 좌우 대칭일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 칠하는 순서는 고려하지 않는다.)

[22010-0062]

4 다음 조건을 만족시키는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B) 중에서 임의로 하나를 택할 때, 두 집합 A, B가 서로소일 확률은?

(가) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$
(나) $n(A)>n(B)\ge 1$

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[22010-0063]

5 다섯 개의 문자 A, B, C, D, E를 임의로 일렬로 나열할 때, A가 B보다 왼쪽에 있거나 C가 B보다 오른쪽에 있을 확률은?

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

[22010-0064]

6 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 4장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수의 최댓값이 8이거나 최솟값이 4일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[22010-0065]

7 흰 공 4개와 검은 공 n개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 확률이 $\frac{3}{7}$이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[22010-0066]

8 숫자 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8이 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1이 아닐 확률은?

① $\frac{13}{21}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{17}{21}$

[22010-0067]

1 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 함수 $y=a\sin x+5$의 그래프와 직선 $y=2b$가 만날 확률은?

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

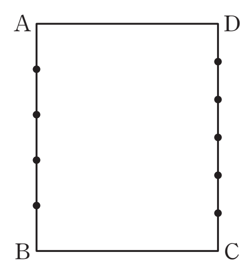
[22010-0068]

2 3 이상의 자연수 n에 대하여 1부터 n까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 세 수를 택할 때, 택한 세 수의 합이 홀수일 확률을 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=3}^{10} f(n)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[22010-0069]

3 그림과 같이 직사각형 ABCD의 변 AB 위에 선분 AB를 5등분 하는 4개의 점이 있고, 변 CD 위에 선분 CD를 6등분 하는 5개의 점이 있다. 변 CD 위의 5개의 점 중에 임의로 서로 다른 4개의 점을 택하여 변 AB 위의 서로 다른 4개의 점과 일대일로 이어서 임의로 4개의 선분을 그릴 때, 네 선분에 의하여 생기는 교점의 개수가 2 이상일 확률은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{19}{30}$

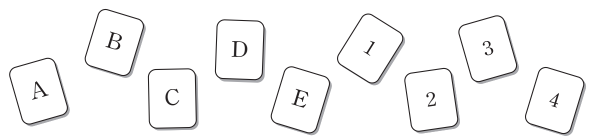
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{23}{30}$

대표 기출 문제

출제 경향 어떤 시행에서 사건이 일어나는 경우의 수를 구한 후 확률의 정의를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다. 또한 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제도 출제된다.

문자 A, B, C, D, E가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 이 9장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{12}$



2021학년도 대수능

출제 의도 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 9장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$9!$

문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 숫자가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

이 각각에 대하여 나머지 카드 6장과 함께 나열하는 경우의 수는

$7!$

이므로 문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓이도록 나열하는 경우의 수는

$12\times7!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12\times7!}{9!}=\frac{1}{6}$

답 ④

04 조건부확률

1. 조건부확률

(1) 조건부확률의 뜻

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다.

(2) 조건부확률의 계산

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

설명 어떤 시행에서 표본공간 S의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A를 새로운 표본공간으로 하여 사건 B, 즉 사건 $A\cap B$가 일어날 확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이 등식의 우변의 분모와 분자를 각각 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 때, 그 수가 소수일 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S, 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\},\ B=\{2,\ 3,\ 5\},\ A\cap B=\{2,\ 3\}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

[다른 풀이] $n(A)=4$, $n(A\cap B)=2$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

예제 1 조건부확률

숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다. 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수일 때, 꺼낸 2장의 카드 중에 3이 적혀 있는 카드가 있을 확률은?

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

풀이 전략 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$임을 이용한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$)

풀이 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수인 사건을 A, 꺼낸 2장의 카드 중에 3이 적혀 있는 카드가 있는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수인 경우는 1, 3이 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우 또는 2가 적혀 있는 카드를 2장 꺼내는 경우 또는 3이 적혀 있는 카드를 2장 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$$

이때 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수이면서 꺼낸 2장의 카드 중에 3이 적혀 있는 카드가 있는 경우는 1, 3이 적혀 있는 카드를 각각 1장씩 꺼내는 경우 또는 3이 적혀 있는 카드를 2장 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{6}{7}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 26쪽

1 [22010-0070]

어느 고등학교의 3학년 3반 학생 26명은 물리학Ⅱ와 지구과학Ⅱ 중 한 과목을, 사회 · 문화와 경제 중 한 과목을 선택하였고, 각 과목을 선택한 학생의 수는 오른쪽 표와 같다. 이 반 학생 26명 중에서 임의로 택한 한 명이 물리학Ⅱ를 선택한 학생일 때, 이 학생이 경제를 선택한 학생일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(단위: 명)

구분	물리학Ⅱ	지구과학Ⅱ	합계
사회 · 문화	8	9	17
경제	6	3	9
합계	14	12	26

2 [22010-0071]

숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 빨간 공 3개와 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 파란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다. 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 합이 4일 때, 꺼낸 두 공의 색이 서로 같을 확률은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2. 확률의 곱셈정리

(1) 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\ (\text{단, }\mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

설명 $\mathrm{P}(A)>0$일 때, 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 ㉠의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

마찬가지로 $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\qquad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 ㉡의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$가 성립한다.

예 흰 공 4개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 두 번 꺼낸다. 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않을 때, 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률을 구해 보자.

첫 번째 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

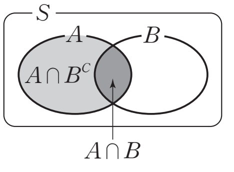
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$$

(2) 확률의 곱셈정리의 활용

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)\ (\text{단, }0<\mathrm{P}(B)<1)$$

설명 두 사건 A, B에 대하여



$$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$$

이고, 두 사건 $A\cap B$와 $A\cap B^C$은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$$

이때 $0<\mathrm{P}(B)<1$이면 $0<\mathrm{P}(B^C)<1$이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B),\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$$

따라서

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)$$

이 성립한다.

예제 2 확률의 곱셈정리

흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나오면 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내고 6의 약수의 눈이 나오지 않으면 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 적어도 한 개가 흰 공일 확률은?

① $\frac{23}{35}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{27}{35}$ ④ $\frac{29}{35}$ ⑤ $\frac{31}{35}$

풀이 전략 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$임을 이용한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$)

풀이 한 개의 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 한 개의 주사위를 한 번 던져서 6의 약수가 아닌 4 또는 5의 눈이 나오는 사건이고, 주머니에서 꺼낸 공 중 적어도 한 개가 흰 공인 사건을 B라 하면 B의 여사건 B^C은 주머니에서 꺼낸 공이 모두 검은 공인 사건이다.

(ⅰ) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

이 경우 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률은

$$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$$

이므로 $\mathrm{P}(B|A)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{31}{35}=\frac{62}{105}$

(ⅱ) 한 개의 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{3}$

이 경우 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률은

$$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

이므로 $\mathrm{P}(B|A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{21}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{62}{105}+\frac{5}{21}=\frac{29}{35}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 26쪽

3 [22010-0072]

주머니에 숫자 1, 1, 1, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자와 같은 숫자가 적혀 있는 공을 1개 더 넣고, 꺼낸 공도 다시 넣는다. 이 주머니에서 다시 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수일 확률은?

① $\frac{11}{25}$ ② $\frac{13}{25}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{17}{25}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

3. 사건의 독립과 종속

⑴ 사건의 독립

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이고, 어느 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다.

⑵ 사건의 종속

두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A와 B는 서로 종속이라고 한다.

참고 두 사건 A와 B가 서로 종속일 때,

$$\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(A)$$

이다.

⑶ 두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0\text{)}$$

설명 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

가 성립한다.

역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

참고 $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$인 두 사건 A와 B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$

이므로 두 사건 A와 B^C은 서로 독립이다.

마찬가지로 두 사건 A^C과 B는 서로 독립이고, 두 사건 A^C과 B^C도 서로 독립이다.

예 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째 나온 눈의 수가 3의 배수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 7인 사건을 B, 두 눈의 수의 합이 8인 사건을 C라 할 때, 두 사건 A와 B, 두 사건 A와 C가 서로 독립인지 종속인지를 각각 알아보자.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(C)=\frac{5}{36}$$

① $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$이고, $A\cap B=\{(3,\ 4),\ (6,\ 1)\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

② $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{36}=\frac{5}{108}$이고, $A\cap C=\{(3,\ 5),\ (6,\ 2)\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

예제 3 사건의 독립과 종속

www.ebsi.co.kr

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 6의 약수가 적혀 있는 공을 꺼내는 사건을 A라 하자. **보기**의 사건 중에서 사건 A와 서로 독립인 사건만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 짝수가 적혀 있는 공을 꺼내는 사건 B

ㄴ. 3의 배수가 적혀 있는 공을 꺼내는 사건 C

ㄷ. 4 이하의 수가 적혀 있는 공을 꺼내는 사건 D

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

풀이 전략 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

풀이 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

ㄱ. 짝수는 2, 4, 6, 8, 10이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

6의 약수인 짝수는 2, 6이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. 3의 배수는 3, 6, 9이므로 $\mathrm{P}(C)=\frac{3}{10}$

6의 약수인 3의 배수는 3, 6이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{25}\neq\mathrm{P}(A\cap C)$이므로 두 사건 A와 C는 서로 독립이 아니다.

ㄷ. 4 이하인 수는 1, 2, 3, 4이므로 $\mathrm{P}(D)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

4 이하인 6의 약수는 1, 2, 3이므로 $\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{3}{10}$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}\neq\mathrm{P}(A\cap D)$이므로 두 사건 A와 D는 서로 독립이 아니다.

이상에서 사건 A와 서로 독립인 것은 ㄱ이다.

답 ①

유제

정답과 풀이 27쪽

4 [22010-0073]

두 사건 A와 B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은?

(단, B^C은 B의 여사건이다.)

① $\frac{1}{11}$　② $\frac{2}{11}$　③ $\frac{3}{11}$　④ $\frac{4}{11}$　⑤ $\frac{5}{11}$

4. 독립시행의 확률

(1) 독립시행의 뜻

동전이나 주사위를 여러 번 반복하여 던지는 경우와 같이 매번 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

(2) 독립시행의 확률

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}(1-p)^{n-r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다.

예1 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 3의 약수의 눈이 2번 나올 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 4번 던지는 시행에서 3의 약수의 눈이 2번 나오는 경우의 수는

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$$

이다. 이 6가지 경우를 한 개의 주사위를 던져서 3의 약수의 눈이 나오는 경우를 ○, 3의 약수의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 오른쪽 표와 같이 나타낼 수 있다. 이때 주사위를 던질 때마다 일어나는 사건은 서로 독립이고 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 6가지의 각 경우에서 3의 약수의 눈이 2번 나오고 3의 약수가 아닌 눈이 2번 나올 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$
○	×	○	×	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
○	×	×	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
×	○	○	×	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$
×	○	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
×	×	○	○	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

이다. 또한 위의 표의 6가지 사건은 모두 배반사건이므로 구하는 확률은

$${}_{4}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=6\times\frac{1}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$$

이다.

예2 ① 한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 3번 나올 확률은

$${}_{6}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=20\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$$

② 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 3의 약수의 눈이 2번 이상 나올 확률은

$${}_{3}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+{}_{3}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=3\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$$

예제 4 독립시행의 확률

좌표평면 위의 점 P에 대하여 다음 시행을 한다.

> 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내 흰 공이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 이동시키고, 검은 공이 나오면 점 P를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 이동시킨 후, 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣는다.

이 시행을 5번 반복할 때, 원점에서 출발한 점 P가 직선 $y=6-x$ 위에 있을 확률은?

① $\frac{32}{625}$ ② $\frac{48}{625}$ ③ $\frac{72}{625}$ ④ $\frac{108}{625}$ ⑤ $\frac{162}{625}$

풀이 전략 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은 ${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$임을 이용한다.

풀이 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5}$, 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

5번의 시행에서 흰 공을 꺼낸 횟수를 n이라 하면 검은 공을 꺼낸 횟수는 $5-n$이다.

이때 점 P는 x축의 방향으로 $\{2n-(5-n)\}$만큼 이동하고, y축의 방향으로 $\{-n+3(5-n)\}$만큼 이동하므로 이 시행을 5번 반복한 후 점 P의 좌표는 $(3n-5, -4n+15)$이다.

이 점이 직선 $y=6-x$ 위에 있으려면

$$-4n+15=6-(3n-5)$$

이어야 하므로 $n=4$

따라서 구하는 확률은 5번의 시행에서 흰 공을 4번 꺼낼 확률이므로

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^1=5\times\frac{16}{625}\times\frac{3}{5}=\frac{48}{625}$$

답 ②

유제

정답과 풀이 27쪽

5 [22010-0074]

한 개의 주사위를 6번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나온 횟수가 홀수일 확률을 p라 하자. $p\times3^6$의 값은?

① 362 ② 364 ③ 366 ④ 368 ⑤ 370

6 [22010-0075]

숫자 1, 1, 1, 1, 2가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 1이면 사탕 1개를 받고, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 2이면 초콜릿 2개를 받는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복할 때, 받은 사탕의 개수가 받은 초콜릿의 개수보다 클 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣는다.)

① $\frac{492}{625}$ ② $\frac{497}{625}$ ③ $\frac{502}{625}$ ④ $\frac{507}{625}$ ⑤ $\frac{512}{625}$

Level 1 기초 연습

[22010-0076]

1 두 사건 A, B에 대하여

$$P(B)=\frac{3}{4},\ P(A^C|B)=\frac{2}{3}$$

일 때, $P(A\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[22010-0077]

2 집합 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 모든 부분집합 중에서 임의로 택한 한 집합의 원소의 개수가 홀수일 때, 이 집합에 6이 속할 확률은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

[22010-0078]

3 어느 탁구 동아리 회원의 40 %는 남자이고, 이 동아리의 남자 회원의 70 %, 여자 회원의 60 %가 현재 탁구 레슨을 받고 있다. 이 동아리의 회원 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 이 회원이 현재 레슨을 받고 있는 회원일 확률은?

① $\frac{12}{25}$　② $\frac{14}{25}$　③ $\frac{16}{25}$　④ $\frac{18}{25}$　⑤ $\frac{4}{5}$

[22010-0079]

4 흰 공 4개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 학생 A가 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후 학생 B가 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 학생 B가 꺼낸 공이 검은 공일 확률은? (단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{7}{18}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{11}{18}$

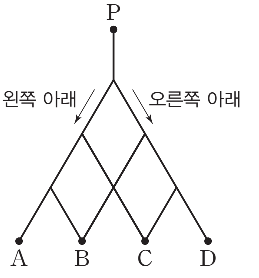
[22010-0080]

5 주머니 A에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 5개, 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내고 주머니 B에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 A에서 꺼낸 두 공의 색이 서로 다르고 주머니 B에서 꺼낸 두 공의 색이 서로 같을 확률은?

① $\frac{11}{49}$ ② $\frac{13}{49}$ ③ $\frac{15}{49}$ ④ $\frac{17}{49}$ ⑤ $\frac{19}{49}$

[22010-0081]

6 그림과 같은 경로를 따라 내려가다가 교차점을 만나면 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 왼쪽 아래로, 뒷면이 나오면 오른쪽 아래로 간다. 점 P에서 출발하여 한 개의 동전을 3번 던져서 경로를 따라 내려갈 때, 점 B 또는 점 C에 도착할 확률은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[22010-0082]

7 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 5번 반복할 때, 흰 공을 꺼낸 횟수가 2 이상일 확률은 $\frac{p}{5^5}$이다. p의 값은?

① 2057 ② 2062 ③ 2067 ④ 2072 ⑤ 2077

[22010-0083]

8 수직선 위의 점 P에 대하여 한 개의 주사위를 한 번 던져서 5의 약수의 눈이 나오면 점 P를 양의 방향으로 2만큼 이동시키고, 그렇지 않으면 점 P를 음의 방향으로 1만큼 이동시키는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복할 때, 원점에서 출발한 점 P의 좌표가 0보다 클 확률은?

① $\frac{29}{81}$ ② $\frac{10}{27}$ ③ $\frac{31}{81}$ ④ $\frac{32}{81}$ ⑤ $\frac{11}{27}$

[22010-0084]

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$를 정의역과 공역으로 하고 $f(1)+f(3)=4$를 만족시키는 함수 f가 있다. 함수 f 중에서 임의로 택한 하나의 함수가 $f(2)=4$를 만족시킬 때, 이 함수가 일대일대응일 확률은?

① $\frac{2}{75}$ ② $\frac{4}{75}$ ③ $\frac{2}{25}$ ④ $\frac{8}{75}$ ⑤ $\frac{2}{15}$

[22010-0085]

2 어느 고등학교의 1학년 학생 110명과 2학년 학생 n명을 대상으로 선호하는 체육한마당 시기로 봄과 가을 중 하나만을 반드시 택하도록 했더니 조사 대상이 된 전체 학생의 40%가 봄을 택하였다. 조사 대상이 된 전체 학생 중 임의로 택한 한 명이 2학년 학생일 때, 이 학생이 봄을 택한 학생일 확률은 $\frac{1}{4}$이고, 조사 대상이 된 전체 학생 중 임의로 택한 한 명이 봄을 택한 학생일 때, 이 학생이 1학년 학생일 확률은 $\frac{13}{20}$이다. n의 값은?

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

[22010-0086]

3 한 개의 동전을 두 번 던져서 앞면이 적어도 한 번 나오면 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수에 1을 더한 값을 점수로 하고, 앞면이 한 번도 나오지 않으면 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수의 2배를 점수로 하는 시행을 한다. 이 시행을 한 번 하여 얻는 점수가 6 이하일 때, 동전의 뒷면이 적어도 한 번 나왔을 확률은?

① $\frac{11}{18}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{13}{18}$ ④ $\frac{7}{9}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[22010-0087]

4 두 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{-1, 0, 1, 2\}$가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 집합 A에서 임의로 서로 다른 두 수를 택하여 각각 a, b라 하고, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 집합 B에서 임의로 서로 다른 두 수를 택하여 각각 a, b라 하자. 곡선 $y=x^2+ax+b$가 x축과 만날 확률은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[22010-0088]

5 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 모든 부분집합 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 택한 집합의 원소의 개수가 3인 사건을 A, 4 이상 6 이하의 자연수 n에 대하여 택한 집합의 원소의 최댓값이 n인 사건을 B_n이라 하자. **보기**의 사건 중에서 사건 A와 서로 종속인 사건만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. B_4　　ㄴ. B_5　　ㄷ. B_6

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[22010-0089]

6 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 한 개의 동전을 3번 던지고, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 한 개의 동전을 4번 던질 때, 동전의 앞면이 나온 횟수가 3 이상일 확률은?

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

[22010-0090]

7 숫자 2, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 꺼낸 카드에 적혀 있는 숫자만큼 공을 받고 카드를 다시 주머니에 넣는 시행을 4번 반복할 때, 받은 공의 개수가 10 이상일 확률은?

① $\frac{313}{625}$　② $\frac{318}{625}$　③ $\frac{323}{625}$　④ $\frac{328}{625}$　⑤ $\frac{333}{625}$

[22010-0091]

8 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 적혀 있는 수를 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 5번 반복할 때, 확인한 5개의 수의 합이 10일 확률은?

① $\frac{121}{5^5}$　② $\frac{126}{5^5}$　③ $\frac{131}{5^5}$　④ $\frac{136}{5^5}$　⑤ $\frac{141}{5^5}$

[22010-0092]

1 다음과 같은 [시행 1], [시행 2], [시행 3]을 순서대로 하여 그림과 같은 빈칸에 수를 적는다.

첫 번째 칸	두 번째 칸	세 번째 칸

[시행 1] 한 개의 동전을 세 번 던져서 모두 같은 면이 나오면 첫 번째 칸에 1을, 그렇지 않으면 첫 번째 칸에 2를 적는다.

[시행 2] 한 개의 주사위를 한 번 던져서 홀수의 눈이 나오면 그 눈의 수와 첫 번째 칸에 적은 수의 합을 두 번째 칸에 적고, 짝수의 눈이 나오면 그 눈의 수와 첫 번째 칸에 적은 수의 곱을 두 번째 칸에 적는다.

[시행 3] 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 첫 번째 칸과 두 번째 칸에 적은 수의 합을 세 번째 칸에 적고, 뒷면이 나오면 첫 번째 칸과 두 번째 칸에 적은 수의 차를 세 번째 칸에 적는다.

[시행 1], [시행 2], [시행 3]을 모두 마친 후 세 번째 칸에 적은 수가 7 이상일 때, 두 번째 칸에 적은 수가 홀수일 확률은?

① $\frac{6}{17}$ ② $\frac{7}{17}$ ③ $\frac{8}{17}$ ④ $\frac{9}{17}$ ⑤ $\frac{10}{17}$

[22010-0093]

2 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있는 상자와 빈 주머니가 있다. 이 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 짝수이면 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 이 2개의 공을 주머니에 넣고, 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수이면 상자에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 이 3개의 공을 주머니에 넣을 때, 주머니에 있는 공에 적혀 있는 수의 최솟값이 3일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 상자에 다시 넣지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[22010-0094]

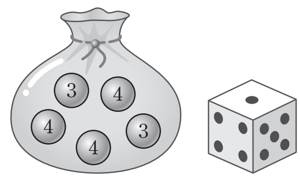
3 2 이상의 자연수 n에 대하여 1부터 n까지의 자연수 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 짝수를 택하는 사건을 A, 6의 약수를 택하는 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 자연수 n의 값을 작은 것부터 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

대표 기출 문제

출제 경향 조건부확률을 구하는 문제, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구하는 문제와 독립시행의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고, 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.



이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021학년도 대수능

출제 의도 확률의 곱셈정리와 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 다음과 같이 꺼낸 공에 적힌 수가 3인 경우와 4인 경우로 나누어 생각해 보자.

(i) 꺼낸 공에 적힌 수가 3인 경우: 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 3일 확률은 $\frac{2}{5}$

이때 주사위를 세 번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

6, 3, 1 또는 6, 2, 2 또는 5, 4, 1 또는 5, 3, 2 또는 4, 4, 2 또는 4, 3, 3

이고, 각 경우의 수를 고려하면 이때의 확률은

$$\left(3!+\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=27\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$$

그러므로 이 경우의 확률은 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{20}$

(ii) 꺼낸 공에 적힌 수가 4인 경우: 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 4일 확률은 $\frac{3}{5}$

이때 주사위를 네 번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

6, 2, 1, 1 또는 5, 3, 1, 1 또는 5, 2, 2, 1 또는 4, 4, 1, 1 또는

4, 3, 2, 1 또는 4, 2, 2, 2 또는 3, 3, 3, 1 또는 3, 3, 2, 2

이고, 각 경우의 수를 고려하면 이때의 확률은

$$\left(\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}+4!+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=80\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{5}{81}$$

그러므로 이 경우의 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{5}{81}=\frac{1}{27}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은 $\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$이고, $p=540$, $q=47$이므로 $p+q=587$

답 587

05 이산확률변수의 확률분포

1. 확률변수

(1) 확률변수: 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수의 값을 대응시키는 함수를 확률변수라고 한다.
확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다.

예 3개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.

참고 확률변수는 표본공간을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수이지만 변수의 역할도 하기 때문에 확률변수라고 한다.

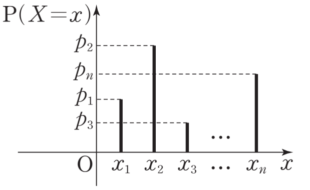
(2) 이산확률변수: 확률변수 X가 갖는 값이 유한개이거나 무한히 많더라도 자연수와 같이 일일이 셀 수 있을 때, 그 확률변수 X를 이산확률변수라고 한다.

예 한 개의 주사위를 2번 던지는 시행에서 나온 두 눈의 수의 차를 X라 할 때, X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5로 유한개이므로 X는 이산확률변수이다.

2. 이산확률변수의 확률분포

(1) 이산확률변수의 확률분포: 이산확률변수 X가 갖는 값이 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n이고 X가 이 값들을 가질 확률이 각각 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n일 때, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n과 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 확률분포라고 한다.
이때 이산확률변수 X의 확률분포는 다음과 같이 표 또는 그래프로 나타낼 수 있다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1



(2) 확률질량함수: 이산확률변수 X가 갖는 값이 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n이고 X가 이 값들을 가질 확률이 각각 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n일 때, x_i와 p_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ 사이의 대응 관계를 나타내는 함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

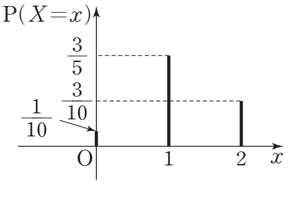
을 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다.

예 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나온 공 중 흰 공의 개수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2이므로 X는 이산확률변수이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_x\times{}_3\mathrm{C}_{3-x}}{{}_5\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2)$$

이때 확률변수 X의 확률분포를 표와 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1



예제 1 이산확률변수의 확률분포

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, a를 b로 나눈 나머지를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{5}{18}$　③ $\frac{11}{36}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{13}{36}$

풀이 전략 예를 들어 $a=1$, $b=5$일 때 1을 5로 나누면 $1=5\times 0+1$이므로 몫은 0, 나머지는 1이다. 따라서 $X=1$이다. 한편, $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$의 값은 이산확률변수 X가 갖는 값 중에서 부등식 $2\le X\le 3$을 만족시키는 모든 X에 대한 확률의 합과 같음을 이용한다.

풀이 두 개의 주사위 A, B를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타내자.

모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6\times 6=36$이다.

이산확률변수 X는 자연수 $a\,(1\le a\le 6)$을 자연수 $b\,(1\le b\le 6)$으로 나눈 나머지이므로 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이고, 이 중에서 부등식 $2\le X\le 3$을 만족시키는 모든 X의 값은 2, 3이다.

$X=2$인 경우의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (5, 3), (6, 4)$

의 6개이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{6}{36}$

$X=3$인 경우의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 4), (3, 5), (3, 6)$

의 3개이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{36}$

따라서 $\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{6}{36}+\frac{3}{36}=\frac{1}{4}$

답 ①

유제

정답과 풀이 35쪽

1 [22010-0095]

이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3, 4이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{5-x}{10}\ (x=1, 2, 3, 4)$$

일 때, $\mathrm{P}(1\le X\le 2)$의 값은?

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{3}{10}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{7}{10}$　⑤ $\frac{9}{10}$

2 [22010-0096]

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 양의 약수의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X<3)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

3. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

(1) $0 \le p_i \le 1$

(2) $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

예 한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값이 0, 1, 2이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_2\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} \ (x=0, 1, 2)$$

이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{9},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{9}$$

따라서

$$0 \le \mathrm{P}(X=x) \le 1$$

이고

$$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$$

이므로 확률질량함수가 위의 성질 (1), (2)를 만족시킴을 확인할 수 있다.

4. 이산확률변수 X의 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때,

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

를 확률변수 X의 기댓값 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathrm{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

예 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행에서 나온 공 중 검은 공의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값을 구해 보자.

확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_2\mathrm{C}_{3-x}\times{}_3\mathrm{C}_x}{{}_5\mathrm{C}_3} \ (x=1, 2, 3)$$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$

참고 $\mathrm{E}(X)$의 E는 기댓값을 뜻하는 Expectation의 첫 글자이다.

예제 2 이산확률변수의 평균

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{3}$일 때, $\mathrm{P}(2\le X\le 3)$의 값은?

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{9}$	a	$\frac{1}{3}$	b	1

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

풀이 전략

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때,

① $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ ② $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

임을 이용한다.

풀이

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{2}{9}+a+\frac{1}{3}+b=1$에서 $a+b=\frac{4}{9}$ …… ㉠

이때 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{9}+2\times a+3\times\frac{1}{3}+4\times b=\frac{7}{3}$에서

$a+2b=\frac{5}{9}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=a+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

답 ①

유제

정답과 풀이 35쪽

3 [22010-0097]

이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=a\times 2^{-x}\ (x=1, 2, 3)$$

일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{10}{7}$ ③ $\frac{11}{7}$ ④ $\frac{12}{7}$ ⑤ $\frac{13}{7}$

4 [22010-0098]

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	a	1

① $\frac{11}{4}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{15}{4}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{19}{4}$

5. 이산확률변수 X의 분산, 표준편차

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

이산확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 확률변수 X의 분산과 표준편차는 다음과 같다.

(1) 분산

$\mathrm{E}(X)=m$일 때, 확률변수 $(X-m)^2$의 평균

$$\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$
$$=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+(x_3-m)^2p_3+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

을 확률변수 X의 분산이라 하고, 기호로

$$\mathrm{V}(X)$$

와 같이 나타낸다. 이때

$$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2p_i-2mx_ip_i+m^2p_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\text{이므로}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2$$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(2) 표준편차

분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근을 확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로 $\sigma(X)$와 같이 나타낸다.

즉, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

예 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 구해 보자.

$$m=\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$$

① $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$를 이용하면

$$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

② $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 이용하면

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$$
$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

예제 3 이산확률변수의 분산, 표준편차

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중에서 소수가 적혀 있는 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(X)$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{12}{25}$ ③ $\frac{14}{25}$ ④ $\frac{16}{25}$ ⑤ $\frac{18}{25}$

풀이 전략 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$의 값을 차례로 구한다.

풀이 1부터 10까지의 자연수 중 소수의 개수는 4이고, 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$일 때, 소수가 적혀 있지 않은 공을 3개 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6}$$

(ii) $X=1$일 때, 소수가 적혀 있는 공을 1개, 소수가 적혀 있지 않은 공을 2개 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$$

(iii) $X=2$일 때, 소수가 적혀 있는 공을 2개, 소수가 적혀 있지 않은 공을 1개 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$$

(iv) $X=3$일 때, 소수가 적혀 있는 공을 3개 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$$

(i)~(iv)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

이때

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5},\ \mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{30}=2$$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

답 ③

유제

정답과 풀이 35쪽

5 [22010-0099]

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 두 정수 a, b에 대하여 $\mathrm{E}(X)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{53}{36}$일 때, $a+b$의 값은?

X	a	0	b	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X와 두 상수 a, b $(a\neq0)$에 대하여 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

설명 이산확률변수 X의 확률분포가 다음과 같을 때, 이산확률변수

$Y=aX+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

의 평균, 분산, 표준편차를 구해 보자.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

$y_i=ax_i+b$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$이라 할 때, 확률

$\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$

이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

따라서 확률변수 Y의 평균은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{i=1}^{n} y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i\\&=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\mathrm{E}(X)+b\end{aligned}$$

확률변수 X의 평균을 m이라 하면 확률변수 Y의 평균은 $am+b$이므로 Y의 분산과 표준편차는

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(am+b)\}^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-m)^2p_i\\&=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=a^2\mathrm{V}(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}\\&=|a|\sqrt{\mathrm{V}(X)}\\&=|a|\sigma(X)\end{aligned}$$

예 이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=9$일 때, 확률변수 $2X+1$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=2\times5+1=11$

$\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times9=36$

$\sigma(2X+1)=|2|\sigma(X)=2\times\sqrt{9}=6$

예제 4 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

네 개의 숫자 1, 1, 3, 5를 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 수의 일의 자리의 수와 십의 자리의 수의 합을 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(6X-1)$의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

풀이 전략

확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률을 구하고, 두 상수 a, $b\,(a\neq 0)$에 대하여

$$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$$

임을 이용한다.

풀이

확률변수 X가 갖는 값은 2, 4, 6, 8이고, 네 개의 숫자 1, 1, 3, 5를 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수의 개수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다.

(ⅰ) $X=2$일 때, 일의 자리와 십의 자리의 수가 각각 1, 1인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1\times 2}{12}=\frac{1}{6}$$

(ⅱ) $X=4$일 때, 일의 자리와 십의 자리의 수가 각각 1, 3 또는 3, 1인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2\times 2}{12}=\frac{1}{3}$$

(ⅲ) $X=6$일 때, 일의 자리와 십의 자리의 수가 각각 1, 5 또는 5, 1인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{2\times 2}{12}=\frac{1}{3}$$

(ⅳ) $X=8$일 때, 일의 자리와 십의 자리의 수가 각각 3, 5 또는 5, 3인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=8)=\frac{2\times 1}{12}=\frac{1}{6}$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이때 $\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}+8\times\frac{1}{6}=5$

따라서

$$\mathrm{E}(6X-1)=6\mathrm{E}(X)-1=6\times 5-1=29$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 36쪽

6 [22010-0100]

이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(2X+3)=15$, $\mathrm{E}(X^2)=55$일 때, $\mathrm{V}(2X+3)$의 값은?

① 72 ② 74 ③ 76 ④ 78 ⑤ 80

7. 이항분포

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 0, 1, 2, $\cdots$, n이고, X의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{이고 } q=1-p)$$

이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,\ p)$와 같이 나타낸다.
이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 하며, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	x	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$	1

설명 (1) 위의 표에서 각 확률은 $(p+q)^n$을 이항정리에 의하여 전개한 식

$$(p+q)^n={}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n+{}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$$

의 우변의 각 항과 같다. 이때 $p+q=1$이므로 $\sum_{x=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}=1$임을 알 수 있다.

(2) 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 B는 Binomial distribution의 첫 글자이다.

예 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 짝수의 눈이 나오는 사건을 A라 하고, 이 주사위를 10번 던질 때 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. 주사위를 한 번 던질 때 사건 A가 일어날 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 10번의 독립시행에서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

8. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때

(1) 평균: $\mathrm{E}(X)=np$

(2) 분산: $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)

(3) 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

9. 큰수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하면 임의의 양수 h에 대하여 n의 값이 한없이 커질 때, 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

참고 큰수의 법칙에 의하여 시행 횟수 n이 충분히 클 때, 사건 A의 상대도수는 수학적 확률에 가까워지므로 사건 A의 상대도수 $\frac{X}{n}$를 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$로 간주할 수 있다. 따라서 자연현상이나 사회현상에서 수학적 확률을 구하기 어려운 경우에는 시행 횟수를 충분히 크게 한 후 사건의 상대도수를 구하여 수학적 확률로 이용할 수 있다.

예제 5 이항분포의 평균과 분산

검은 공 1개, 파란 공 2개, 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 10번 반복한다. 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같은 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(15X-1)$의 값은?

① 320 ② 360 ③ 400 ④ 440 ⑤ 480

풀이 전략

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, $\mathrm{V}(X)=npq$임을 이용한다. (단, $q=1-p$)

풀이

주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

한 번의 시행에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같은 경우는 파란 공 2개 또는 빨간 공 2개를 꺼내는 경우이므로 그 경우의 수는

$${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2=1+3=4$$

한 번의 시행에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 확률은

$$\frac{4}{15}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{4}{15}\right)$를 따른다.

따라서

$$\mathrm{V}(15X-1)=225\mathrm{V}(X)=225\times10\times\frac{4}{15}\times\frac{11}{15}=440$$

답 ④

유제

정답과 풀이 36쪽

7 [22010-0101]

한 개의 주사위를 30번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8 [22010-0102]

이산확률변수 X가 갖는 값이 0, 1, 2, $\cdots$, 40이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{40}\mathrm{C}_x\frac{3^{40-x}}{4^{40}}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 40)$$

일 때, $\sigma(2X)$의 값은?

① $\sqrt{26}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $\sqrt{29}$ ⑤ $\sqrt{30}$

[22010-0103]

1 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)$의 값은?

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	a	1

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

[22010-0104]

2 이산확률변수 X가 갖는 값이 4, 5, 6, 7, 8이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\ (x=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8)$$

일 때, $a+\mathrm{P}(X=a+3)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\sqrt{5}-2$ ② $2-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}-2$ ④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $\sqrt{5}-1$

[22010-0105]

3 이산확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=2$, $\sigma(X)=3$일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[22010-0106]

4 빨간 공 2개, 파란 공 4개가 들어 있는 상자에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 빨간 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(10X+5)+\mathrm{V}(10X+5)$의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

[22010-0107]

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(5,\ p)$를 따르고 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{9}{5}$일 때, $10p$의 값을 구하시오.

[22010-0108]

1 이산확률변수 X가 갖는 값이 0, 1, 2, 3이고 이산확률변수 Y가 갖는 값이 0, 2, 4, 6일 때,

$$\mathrm{P}(Y=2x)=a\times\mathrm{P}(X=x)+\frac{a}{(x+1)(x+2)}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

이 성립한다. 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

[22010-0109]

2 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 다음 규칙에 따라 얻은 점수를 확률변수 X라 하자.

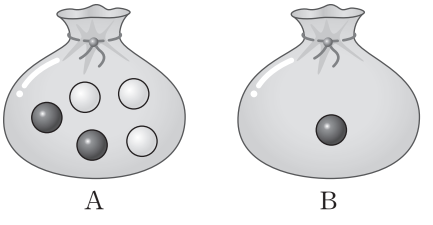
> (가) 3의 배수의 눈이 연속하여 나오지 않으면 0점으로 한다.
> (나) 3의 배수의 눈이 연속하여 두 번만 나오면 1점으로 한다.
> (다) 3의 배수의 눈이 연속하여 세 번 나오면 2점으로 한다.

$\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

[22010-0110]

3 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니 A와 검은 공 1개가 들어 있는 주머니 B가 있다. 주머니 A에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 A에 넣을 때, 주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(100X)$의 값을 구하시오.



[22010-0111]

4 이산확률변수 X가 갖는 값이 0, 1, 2, 3이고 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{x+k}{14}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① $\frac{51}{49}$ ② $\frac{53}{49}$ ③ $\frac{55}{49}$ ④ $\frac{57}{49}$ ⑤ $\frac{59}{49}$

[22010-0112]

5 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 꺼내어 공의 색을 확인한다. 처음으로 검은 공이 나올 때까지 공을 꺼낸 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(3X+1)+\mathrm{V}(3X+1)$의 값은?

(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

[22010-0113]

6 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	1

Y	2	5	8	11	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	ap_1+b	ap_2+b	ap_3+b	ap_4+b	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}$, $\mathrm{E}(Y)=5$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

[22010-0114]

7 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 240번의 독립시행에서 두 주사위의 눈의 수의 곱이 소수인 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(3X)$의 값은?

① 100 ② 150 ③ 200 ④ 250 ⑤ 300

[22010-0115]

8 20 이하의 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=2n-1)={}_{20}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{20-n}$$

일 때, $\mathrm{E}(X+1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[22010-0116]

1 각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 던지는 시행을 반복할 때, n번째 시행에서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하고 다음과 같은 규칙으로 확률변수 X의 값을 정한다.

(가) $S_1=a_1$이라 한다.
(나) $n\geq 2$일 때,
$S_{n-1}+a_n\geq 5$이면 $X=n$이라 하고 시행을 멈추고,
$S_{n-1}+a_n<5$이면 $S_n=S_{n-1}+a_n$이라 하고 시행을 계속한다.

$\mathrm{E}(X)$의 값은?

① $\frac{226}{81}$ ② $\frac{229}{81}$ ③ $\frac{232}{81}$ ④ $\frac{235}{81}$ ⑤ $\frac{238}{81}$

[22010-0117]

2 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 택할 때, 확률변수 X는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2f(3)<f(4)$이면 $X=f(4)$
(나) $2f(3)\geq f(4)$이면 $X=f(3)$

$\sigma(20X-3)$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

[22010-0118]

3 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하고 $a\times b\times c$의 값을 구하는 시행을 400번 반복할 때, $a\times b\times c$의 값이 4로 나누어떨어지는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(2X+3)$의 값을 구하시오.

대표 기출 문제

EBS

출제 경향

확률변수와 확률분포의 의미를 이해하고 이산확률변수 X 또는 이산확률변수 $aX+b$의 평균과 분산 등을 구하는 문제가 출제된다.

두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 확률분포가 표로 주어진 이산확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=5-2^2=1$

이때 $Y=10X+1$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(10X+1)\\&=10\mathrm{E}(X)+1\\&=10\times2+1\\&=21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{V}(10X+1)\\&=100\mathrm{V}(X)\\&=100\times1\\&=100\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)&=21+100\\&=121\end{aligned}$$

답 121

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 이항분포의 의미를 이해하고 이항분포를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산에 대한 간단한 계산 문제 또는 이항분포에서 확률변수의 성질을 이용하여 독립시행의 횟수, 확률, 평균과 분산 등을 구하는 문제가 출제된다.

좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> 2 이하이면 점 P를 x축의 양의 방향으로 3만큼,
> 3 이상이면 점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼
> 이동시킨다.

이 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

2021학년도 대수능

출제 의도 이항분포를 따르는 확률변수의 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$$

이때 원점에 있던 점 P가 이동된 점의 좌표는

$$(3Y, 15-Y)$$

이고, 이 점과 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리 X는

$$X=\frac{|3\times3Y+4\times(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5Y+60|}{5}=Y+12$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(Y+12)\\&=\mathrm{E}(Y)+12\\&=5+12=17\end{aligned}$$

답 ③

06 연속확률변수의 확률분포

1. 연속확률변수

확률변수 X가 어떤 구간에 속하는 모든 실수의 값을 가질 때, X를 연속확률변수라고 한다.

참고 키, 무게, 온도, 시간 등의 값을 확률변수 X라 하면 X는 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 갖는다.

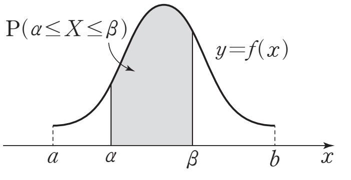
2. 확률밀도함수

일반적으로 $a \le X \le b$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 $a \le x \le b$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음과 같은 세 가지 성질을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

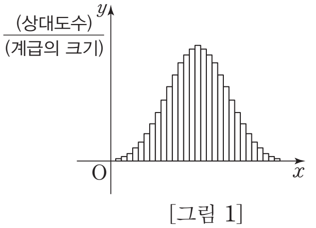
① $f(x) \ge 0$ (단, $a \le x \le b$)

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

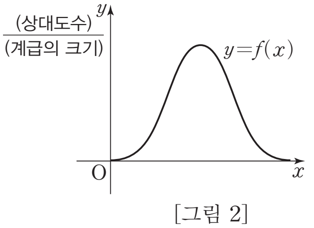
③ $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $a \le \alpha \le \beta \le b$)



설명 연속확률변수 X의 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 히스토그램으로 나타내면 히스토그램에서 각 구간에 세워진 직사각형의 넓이는 각 구간의 상대도수를 나타내고, 상대도수의 합이 1이기 때문에 직사각형들의 넓이의 합은 항상 1이 된다.
또 조사 대상의 수를 한없이 늘리고, 계급의 크기를 0에 가깝게 더욱 작게 해서 히스토그램을 그리면 [그림 1]과 같이 어떤 곡선 모양에 가까워지고, 이 과정을 계속하면 [그림 2]와 같이 매끄러운 곡선이 된다.



[그림 1]



[그림 2]

참고 연속확률변수 X가 하나의 값을 가질 확률은 0이다.
즉, $\mathrm{P}(X=\alpha)=\mathrm{P}(X=\beta)=0$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\alpha < X < \beta) &= \mathrm{P}(\alpha \le X < \beta)\\ &= \mathrm{P}(\alpha < X \le \beta)\\ &= \mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)\end{aligned}$$

예제 1 연속확률변수와 확률밀도함수

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-1\le X\le 2$이고 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x+a & (-1\le x<0) \\ a & (0\le x<1) \\ -\frac{1}{3}x+a+\frac{1}{3} & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{P}(0\le X\le a)$의 값은? (단, a는 상수이다)

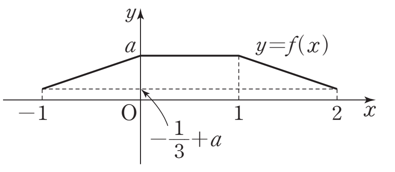
① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{4}{49}$ ③ $\frac{9}{64}$ ④ $\frac{16}{81}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

풀이 전략 $-1\le x\le 2$에서 정의된 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

풀이 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\left\{\left(-\frac{1}{3}+a\right)+a\right\}\times1\times2+a\times1=1$이므로

$3a-\frac{1}{3}=1$, $a=\frac{4}{9}$



따라서

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$

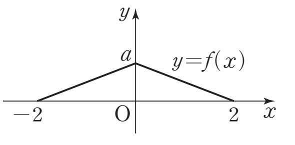
답 ④

유제

정답과 풀이 43쪽

1 [22010-0119]

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-2\le X\le 2$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $a\times\mathrm{P}(|X|\le1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

2 [22010-0120]

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 2$이고 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} ax & (0\le x<1) \\ -\frac{1}{2}ax+\frac{3}{2}a & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

3. 정규분포

연속확률변수 X가 모든 실수의 값을 갖고, 그 확률밀도함수 $f(x)$가 두 상수 m, σ $(\sigma>0)$에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (e\text{는 } 2.718281\cdots\text{인 무리수})$$

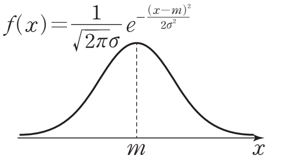
일 때 X의 확률분포를 정규분포라 하고, 기호로

$$\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$$

과 같이 나타낸다. 또한 확률변수 X의 평균과 표준편차는 각각 m, σ임이 알려져 있다.

4. 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프

평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같은 모양이고, 다음과 같은 성질을 가지고 있음이 알려져 있다.



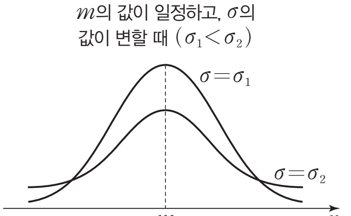
① 직선 $x=m$에 대하여 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다.

② x축을 점근선으로 하며, $x=m$일 때 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$을 갖는다.

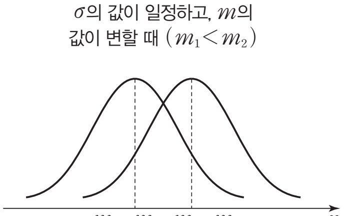
③ 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

④ 평균 m의 값이 일정할 때, [그림 1]과 같이 σ의 값이 커지면 곡선의 중앙 부분이 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, σ의 값이 작아지면 곡선의 중앙 부분이 높아지면서 좁아지지만 대칭축의 위치는 같다.

⑤ 표준편차 σ의 값이 일정할 때, [그림 2]와 같이 m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.



[그림 1]



[그림 2]

예 확률변수 X가 평균이 10, 표준편차가 2인 정규분포를 따를 때, 기호로

$$\mathrm{N}(10,\ 2^2)$$

과 같이 나타낸다. 이때 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이다.

예제 2 정규분포

확률변수 X가 평균이 12인 정규분포를 따르고

$$P(8 \le X \le 10) = a,\ P(12 \le X \le 16) = b$$

일 때, 다음 중 $P(10 \le X \le 12) + P(X \ge 16)$의 값으로 항상 옳은 것은? (단, a, b는 상수이다.)

① $0.5+a$　② $0.5-a$　③ $0.5-2a$　④ $0.5+b$　⑤ $0.5-b$

풀이 전략 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 곡선이고, 이 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

풀이 평균이 12인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=12$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

따라서 $P(X \ge 12) = 0.5$이므로

$$P(X \ge 16) = 0.5 - P(12 \le X \le 16) = 0.5 - b \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $P(12 \le x \le 16) = P(8 \le X \le 12) = b$이므로

$$P(10 \le X \le 12) = P(8 \le X \le 12) - P(8 \le X \le 10) = b - a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$P(10 \le X \le 12) + P(X \ge 16) = (b-a) + (0.5-b) = 0.5 - a$$

답 ②

유제

정답과 풀이 43쪽

3 [22010-0121]

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르고 $P(X \le 15) = P(X \ge 21)$일 때, $m \times P(X \le m)$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

4 [22010-0122]

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때,
$P(m-2\sigma \le X \le m+1.5\sigma)$의 값을 오른쪽 표를 이용하여 구한 것은?

x	$P(m \le X \le x)$
$m+1.5\sigma$	0.4332
$m+2\sigma$	0.4772
$m+2.5\sigma$	0.4938

① 0.8001　② 0.8375　③ 0.9104
④ 0.9272　⑤ 0.9710

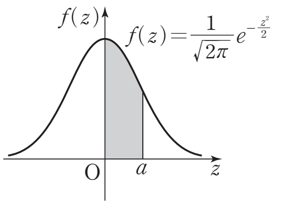
5. 표준정규분포

(1) 정규분포 중에서 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 표준정규분포라고 한다.

(2) 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때, Z의 확률밀도함수 $f(z)$는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\ (e\text{는 } 2.718281\cdots\text{인 무리수})$$

이다. 이때 임의의 양수 a에 대하여 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$는 오른쪽 그림에서 색칠된 부분의 넓이와 같다.



참고 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)$는 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.
예를 들어, 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.94)$는 표준정규분포표에서 왼쪽에 있는 수 중에서 0.9를 찾은 다음 위쪽에 있는 수 중에서 0.04를 찾아 0.9의 가로줄과 0.04의 세로줄이 만나는 수를 찾으면 된다.
즉, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.94)=0.3264$이다.

z	0.00	0.01	$\cdots$	0.04	$\cdots$
0.0	.0000	.0040	$\cdots$	.0160	$\cdots$
0.1	.0398	.0438	$\cdots$	.0557	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.9	.3159	.3186	$\cdots$	.3264	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

6. 정규분포와 표준정규분포의 관계

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)\ (\sigma>0)$을 따를 때, 확률변수

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

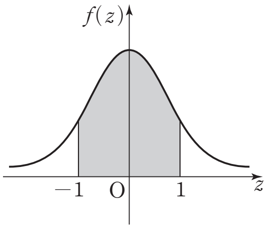
은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다는 사실이 알려져 있다.

이때 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$을 이용하여 다음과 같이 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸어 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a\le X\le b)&=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{b-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

예 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(3\le X\le 7)$의 값을 구해 보자.
확률변수 $Z=\frac{X-5}{2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 표준정규분포표에서
$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(3\le X\le 7)&=\mathrm{P}\left(\frac{3-5}{2}\le Z\le\frac{7-5}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.3413=0.6826\end{aligned}$$



예제 3 표준정규분포

어느 고등학교 학생 한 명의 하루 동안의 스마트폰 사용 시간은 평균이 30분, 표준편차가 4분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생들 중에서 임의로 선택한 한 학생의 하루 동안의 스마트폰 사용 시간이 38분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5120　② 0.6915　③ 0.8332
④ 0.8413　⑤ 0.9772

풀이 전략 정규분포를 따르는 확률변수의 어떤 구간에서의 확률은 표준정규분포를 따르는 확률변수로 바꾸어 구한다.

풀이 이 고등학교 학생 한 명의 하루 동안의 스마트폰 사용 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 38)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{38-30}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 43쪽

5 [22010-0123]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 2^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(|X-20|\le 2)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830　② 0.6826　③ 0.7882
④ 0.8664　⑤ 0.9544

6 [22010-0124]

어느 과수원에서 수확한 귤 한 개의 무게는 평균이 76 g, 표준편차가 3 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 수확한 귤 중에서 임의로 선택한 귤 한 개의 무게가 73 g 이상 74.5 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1498　② 0.2523　③ 0.3012
④ 0.3982　⑤ 0.4761

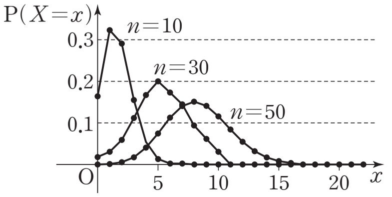
7. 이항분포와 정규분포의 관계

(1) 이항분포와 정규분포를 나타내는 그래프

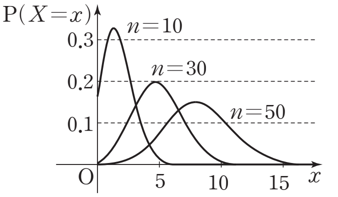
한 개의 주사위를 n번 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

[그림 1]은 주사위를 던지는 횟수가 $n=10$, $n=30$, $n=50$일 때의 이항분포를 그래프로 나타낸 것이고, 점들을 부드럽게 연결하면 [그림 2]를 얻을 수 있다.

일반적으로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 그래프는 n의 값이 커지면 정규분포의 확률밀도함수의 그래프에 가까워짐이 알려져 있다.



[그림 1]



[그림 2]

(2) 이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

이때 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

참고 일반적으로 $np\geq5$, $nq\geq5$이면 n이 충분히 큰 것으로 생각한다.

예 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(50\leq X\leq55)$의 값을 구해 보자.

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$$

$$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)=0.3413$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(50\leq X\leq55)&=\mathrm{P}\left(\frac{50-50}{5}\leq Z\leq\frac{55-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)\\&=0.3413\end{aligned}$$

예제 4 이항분포와 정규분포의 관계

한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행을 1800번 반복할 때, 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X \ge 620)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228　② 0.0668　③ 0.1587
④ 0.3085　⑤ 0.3830

풀이 전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

풀이 한 개의 주사위를 한 번 던져서 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1800, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=1800\times\frac{1}{3}=600,\ \mathrm{V}(X)=1800\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=400$$

이때 1800은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(600, 20^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-600}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 620)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{620-600}{20}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 ③

유제

정답과 풀이 44쪽

7 [22010-0125]

한 개의 동전을 100번 던졌을 때, 앞면이 40번 이상 60번 이하가 나올 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830　② 0.6826　③ 0.7882
④ 0.8664　⑤ 0.9544

8 [22010-0126]

어느 회사에서 자가용을 이용하여 출근하는 사원의 비율은 전체의 $\frac{1}{3}$이라고 한다. 이 회사의 사원 한 명을 임의로 선택하여 자가용을 이용하여 출근하는지를 조사하는 시행을 450번 반복할 때, 자가용을 이용하여 출근하는 사원 수가 165명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6120　② 0.6915　③ 0.8413
④ 0.9332　⑤ 0.9772

[22010-0127]

1 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 2$이고 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x)=ax$일 때, $\mathrm{P}(0\le X\le a)$의 값은? (단, a는 양의 상수이다.)

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

[22010-0128]

2 확률변수 X가 평균이 m인 정규분포를 따르고, $\mathrm{P}(X\le 8)=\mathrm{P}(X\ge 20)$이다. $\mathrm{P}(a\le X\le a+4)$의 값이 최대일 때, $a+m$의 값은? (단, a는 상수이다)

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

[22010-0129]

3 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(9,\ a)$를 따른다. $\mathrm{P}(10\le X\le 13)=\mathrm{P}(7\le Y\le 9)$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

[22010-0130]

4 어느 회사 입사시험에 응시한 400명의 입사시험 점수는 평균이 200점, 표준편차가 20점인 정규분포를 따르고, 이 회사 입사시험 결과로 모두 128명을 선발하였다고 한다. Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.47)=0.18$임을 이용하여 선발된 응시생의 입사시험 점수의 최솟값을 구하면?

① 207.9 ② 208.4 ③ 208.9 ④ 209.4 ⑤ 209.9

[22010-0131]

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(144,\ \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, $\mathrm{P}(63\le X\le a)=0.8664$이다. 상수 a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 73 ② 75 ③ 77
④ 79 ⑤ 81

[22010-0132]

1 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-1\le X\le 2$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x)=a|x|+b$이다. $\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\frac{2}{5}$일 때, $\mathrm{P}(5a\le X\le 2b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

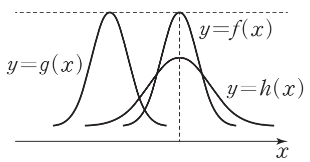
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{5}$　③ $\frac{7}{10}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{9}{10}$

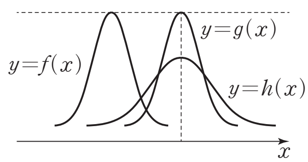
[22010-0133]

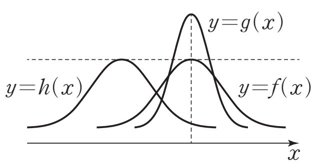
2 정규분포를 따르는 세 확률변수 X_1, X_2, X_3의 확률밀도함수가 각각 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$이고 다음 조건을 만족시킬 때, 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

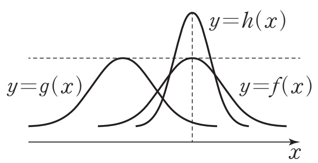
(가) 모든 실수 x에 대하여
$$f(6+x)=f(6-x),\ g(x)=f(x+2)$$
이다.

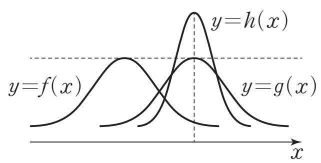
(나) $\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(2X_3-6)$, $\sigma(X_1)=\frac{1}{2}\sigma(X_3)$

①


②


③


④


⑤


[22010-0134]

3 어느 공장에서 만든 흰색 솜사탕 한 개의 무게는 평균이 200 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따르고, 빨간색 솜사탕 한 개의 무게는 평균이 220 g, 표준편차가 a g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 흰색 솜사탕 중 임의로 선택한 한 개의 무게가 220 g 이상일 확률을 p_1, 빨간색 솜사탕 중 임의로 선택한 한 개의 무게가 230 g 이상일 확률을 p_2라 하자. $p_1\le p_2$일 때, 양수 a의 최솟값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

[22010-0135]

4 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 4^2)$을 따른다. $\mathrm{V}(2X-1)=\mathrm{V}(Y)$가 성립할 때, $\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(Y\le 32)$를 만족시키는 상수 a의 값은? (단, $\sigma>0$)

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

[22010-0136]

5 어느 골프장은 한 팀당 18홀 이용 시간을 4시간 30분 이하로 정하고 있고, 그 시간을 초과하면 패널티를 부과한다고 한다. 이 골프장을 이용한 팀의 18홀 이용 시간은 평균이 4시간 20분, 표준편차가 20분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 골프장을 이용한 팀 중 임의로 선택한 한 팀이 18홀 이용 시간으로 인한 패널티를 받지 않을 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6120 ② 0.6915 ③ 0.8413 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

[22010-0137]

6 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(3600,\ \frac{1}{10}\right)$을 따를 때, 부등식 $\mathrm{P}(324\le X\le 360)<\mathrm{P}(378-a\le X\le 378+a)$를 만족시키는 자연수 a의 최솟값을 구하시오.

[22010-0138]

7 서로 다른 n개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 n개의 주사위의 눈의 수를 확인하는 시행을 한다. 이 시행을 240번 반복할 때, n개의 주사위의 눈의 수가 모두 홀수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\sigma(X)=\frac{15}{4}$일 때, $\mathrm{P}\left(X\le \frac{84}{n}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.6	0.2257
1.0	0.3413
1.6	0.4452
2.0	0.4772

① 0.6120 ② 0.6915 ③ 0.8413
④ 0.9452 ⑤ 0.9772

[22010-0139]

1 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 4$이고 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\le X\le \frac{5}{2}\right)$의 값은?

> (가) 0이 아닌 상수 a에 대하여 $0\le x\le 2$일 때, $f(x)=a|x-1|-a$이다.
>
> (나) $2\le x\le 4$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{1}{2}f(4-x)$이다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

[22010-0140]

2 A영화다운로드 사이트에서 다운로드 할 수 있는 영화 파일 1개의 크기는 평균이 1.2 GB, 표준편차가 0.2 GB인 정규분포를 따르고, B영화다운로드 사이트에서 다운로드 할 수 있는 영화 파일 1개의 크기는 평균이 1 GB, 표준편차가 0.6 GB인 정규분포를 따른다고 한다. A영화다운로드 사이트에서는 1.4 GB 이상의 파일을 다운로드 할 때만 기본요금에 추가 요금이 부과되고, B영화다운로드 사이트에서는 a GB 이상의 파일을 다운로드 할 때만 기본요금에 추가 요금이 부과된다고 한다. 재민이가 임의로 A, B 두 영화다운로드 사이트 중 한 군데에서 다운로드 한 1개의 영화 파일이 기본요금에 추가 요금이 부과된 영화 파일일 때, 이 영화 파일이 B영화다운로드 사이트에서 다운로드 한 파일일 확률이 $\frac{31}{47}$이다. a의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.19$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.34$로 계산한다.)

① 1.1 ② 1.2 ③ 1.3 ④ 1.4 ⑤ 1.5

[22010-0141]

3 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 카드를 동시에 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 상자에 카드를 넣는 시행을 한다. 이 시행을 490번 반복할 때, 다음 조건을 만족시키는 횟수를 확률변수 X라 하자.

> 상자에서 꺼낸 4장의 카드에 적혀 있는 수를 a, b, c, d $(a<b<c<d)$라 할 때, $a+b\le 6$이다.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.2	0.0793
0.7	0.2580
1.2	0.3849
1.7	0.4554

$\mathrm{P}(348\le X\le 362)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.3373 ② 0.4642 ③ 0.5347 ④ 0.6479 ⑤ 0.8403

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률변수의 확률을 구하는 문제가 출제된다.

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 8$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

$$3\mathrm{P}(2\le X\le 4)=4\mathrm{P}(6\le X\le 8)$$

일 때, $\mathrm{P}(2\le X\le 6)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)$$

$$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\mathrm{P}(6\le X\le 8)$$

이때 $\mathrm{P}(2\le X\le 4)=a$, $\mathrm{P}(0\le X\le 2)=b$로 놓으면 문제의 조건에서

$$3a=4b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

확률의 총합이 1이므로

$$2(a+b)=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a+\frac{3}{4}a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{2}{7}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(2\le X\le 6)&=\mathrm{P}(2\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 6)\\&=2a\\&=2\times\frac{2}{7}=\frac{4}{7}\end{aligned}$$

답 ③

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프의 성질과 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구하는 문제가 출제된다.

확률변수 X는 평균이 8, 표준편차가 3인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다. 두 확률변수 X, Y가

$$P(4\le X\le 8)+P(Y\ge 8)=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $P\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

2021학년도 대수능

출제 의도 정규분포를 따르는 확률변수에서 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $N(8,\ 3^2)$을 따르고 확률변수 Y가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하면

$$\begin{aligned}P(4\le X\le 8)+P(Y\ge 8)&=P\left(\frac{4-8}{3}\le Z\le\frac{8-8}{3}\right)+P\left(Z\ge\frac{8-m}{\sigma}\right)\\&=P\left(-\frac{4}{3}\le Z\le 0\right)+P\left(Z\ge\frac{8-m}{\sigma}\right)\\&=P\left(0\le Z\le\frac{4}{3}\right)+P\left(Z\ge\frac{8-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

그러므로 $\frac{8-m}{\sigma}=\frac{4}{3}$, $m=8-\frac{4\sigma}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}P\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)&=P\left(Z\le\frac{8+\frac{2\sigma}{3}-\left(8-\frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma}\right)\\&=P(Z\le 2)\\&=\frac{1}{2}+P(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

답 ④

07 통계적 추정

1. 모집단과 표본

(1) 통계 조사에서 조사의 대상이 되는 집단 전체를 모집단이라 하고, 조사를 하기 위하여 모집단에서 뽑은 일부분을 표본이라고 한다. 또한 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라고 한다.

(2) 통계 조사에서 모집단 전체를 조사하는 것을 전수조사라 하고, 모집단의 일부분, 즉 표본을 조사하는 것을 표본조사라고 한다. 또한 표본에 포함된 대상의 개수를 표본의 크기라고 한다.

(3) 모집단에서 표본을 추출할 때, 모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는 방법을 임의추출이라고 한다.

2. 모평균과 표본평균

(1) 어떤 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 모평균, 모분산, 모표준편차라 하고, 기호로 각각 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

(2) 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본을 X_1, X_2, $\cdots$, X_n이라 할 때, 이 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라 하고, 기호로 각각 $\overline{X}$, S^2, S로 나타낸다. 이때 $\overline{X}$, S^2, S는 다음과 같이 구한다.

① $\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n)$

② $S^2=\dfrac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$

③ $S=\sqrt{S^2}$

참고 표본분산의 정의에서 표본평균을 정의할 때와 달리 $n-1$로 나누는 것은 표본분산과 모분산의 차이를 줄이기 위함이다.

3. 표본평균의 확률분포

모평균 m은 고정된 상수이지만 표본평균 $\overline{X}$는 임의추출된 표본에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있으므로 확률변수이다. 따라서 $\overline{X}$의 확률분포를 구할 수 있다.

예 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본 (X_1, X_2)와 그 표본평균 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$는 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(X_1, X_2)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
$\overline{X}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

따라서 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이때

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(X=1)\times\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

예제 1 표본평균의 확률분포

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=16a)$의 값은?

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{5}{16}$

풀이 전략 확률분포표에서 확률의 총합은 1임을 이용하여 a의 값을 구한 후 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 할 때, $\overline{X}=16a$인 경우를 구한다.

풀이 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표에서 모든 확률의 합은 1이므로

$$a+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$이다.

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면

$\overline{X}=16a=4$인 경우는 $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$일 때이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}=16a)&=\mathrm{P}(\overline{X}=4)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 50쪽

1 [22010-0142]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)$의 값은?

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

① $\frac{3}{16}$　② $\frac{7}{32}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{9}{32}$　⑤ $\frac{5}{16}$

2 [22010-0143]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=3)$의 값은?

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

① $\frac{71}{512}$　② $\frac{9}{64}$　③ $\frac{73}{512}$　④ $\frac{37}{256}$　⑤ $\frac{75}{512}$

4. 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=m$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

설명 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, 모평균 m, 모분산 σ^2, 모표준편차 σ는 각각 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$m=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}=4$$

$$\sigma^2=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{3}-4^2=\frac{8}{3}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 할 때, 그 표본평균 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{9}=4$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{2}{9}+6^2\times\frac{1}{9}-4^2=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이때 표본의 크기가 $n=2$이므로

$$\frac{\sigma^2}{n}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3},\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 다음이 성립한다.

① $\mathrm{E}(\overline{X})=4=m$

② $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{4}{3}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

③ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

예제 2 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)=\frac{13}{4}$일 때, 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{V}(\overline{X})$의 값은?

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{2}$	1

① $\frac{11}{32}$　② $\frac{3}{8}$　③ $\frac{13}{32}$　④ $\frac{7}{16}$　⑤ $\frac{15}{32}$

풀이 전략 표본의 크기가 n일 때, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표에서 모든 확률의 합은 1이므로

$$a+b+\frac{1}{2}=1,\ a+b=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $\mathrm{E}(X)=2a+3b+4\times\frac{1}{2}=\frac{13}{4}$에서 $2a+3b=\frac{5}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$

$$\mathrm{V}(X)=2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{13}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$$

이고, 표본의 크기가 2이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{11}{16}}{2}=\frac{11}{32}$

답 ①

유제

정답과 풀이 50쪽

3 [22010-0144]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\sigma(\overline{X})$의 값은?

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{6}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{8}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{10}$

4 [22010-0145]

모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	a	b	1

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{7}{32}$일 때, $\mathrm{E}(\overline{X})$의 값은? (단, a, b는 0이 아닌 상수이다)

① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{11}{4}$

5. 표본평균의 분포

모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(2) 모집단이 정규분포를 따르지 않을 때에도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

예 ① 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하고, 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$m=\mathrm{E}(X)=20,$$
$$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=4^2=16$$

이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=20$$
$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{16}{4}=4$$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(20, 2^2)$을 따른다.

② 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(20, 2^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-20}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 22)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 22)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{22-20}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

예제 3 표본평균의 분포

www.ebsi.co.kr

어느 배달업체의 배달물품 1개의 배달시간은 평균이 30분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 배달업체의 배달물품 중에서 임의추출한 16개의 배달시간의 표본평균이 32분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.4	0.4192
1.6	0.4452

① 0.0548　② 0.0818　③ 0.1151
④ 0.1195　⑤ 0.1587

풀이 전략 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대한 확률분포를 구하고, 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

풀이 이 배달업체의 배달물품 1개의 배달시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따른다.
이때 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=30,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5^2}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-30}{\frac{5}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 32)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{32-30}{\frac{5}{4}}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.6)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)=0.5-0.4452=0.0548$$

답 ①

유제

정답과 풀이 50쪽

5 [22010-0146]

어느 배드민턴전용 운동화를 만드는 한 업체에서 제작한 운동화 1켤레의 무게는 평균이 320, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 업체에서 제작한 운동화 중에서 임의추출한 9켤레의 무게의 표본평균이 315 이상 330 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?
(단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.9104　② 0.9275　③ 0.9319　④ 0.9759　⑤ 0.9925

6 [22010-0147]

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le\frac{1}{5}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830　② 0.4332　③ 0.4772
④ 0.5328　⑤ 0.6248

6. 모평균의 추정

(1) 모집단에서 추출한 표본에서 얻은 자료를 이용하여 모집단의 어떤 성질을 확률적으로 추측하는 것을 추정이라고 한다.

(2) 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

① 신뢰도 95 %의 신뢰구간

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

② 신뢰도 99 %의 신뢰구간

$$\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

설명 ① 모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$이므로

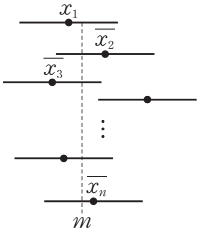
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(-1.96\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96\right)&=\mathrm{P}\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}-m\le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\&=0.95\end{aligned}$$

따라서 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 할 때,

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라고 한다.

② 표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$가 달라지고 그에 따라 신뢰구간도 달라진다. 이와 같은 신뢰구간 중에는 오른쪽 그림과 같이 모평균 m을 포함하는 것과 포함하지 않는 것이 있을 수 있다.



따라서 모평균 m에 대하여 신뢰도 95 %의 신뢰구간이란 크기가 n인 표본을 여러 번 임의추출하여 신뢰구간을 각각 구하면 그 중에서 95 %는 모평균 m을 포함할 것으로 기대된다는 것을 의미한다.

참고 모평균의 신뢰구간을 구할 때 모표준편차 σ의 값을 알 수 없는 경우가 많다. 이 경우 표본의 크기 n이 충분히 크면 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 s를 사용할 수 있다는 것이 알려져 있다.

예제 4 모평균의 추정

어느 치킨가게에서 판매하는 치킨 1마리의 무게는 평균이 m g, 표준편차가 50 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 치킨가게에서 판매하는 치킨 중에서 25마리를 임의추출하여 구한 표본평균을 이용하여 이 치킨가게에서 판매하는 치킨 1마리의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le b$이다. $b-a$의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

① 37.6 ② 38 ③ 38.4 ④ 38.8 ⑤ 39.2

풀이 전략

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

풀이

크기가 25인 표본으로부터 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면

모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{50}{\sqrt{25}} \le m \le \overline{x}+1.96\times\frac{50}{\sqrt{25}}$$

$$\overline{x}-1.96\times 10 \le m \le \overline{x}+1.96\times 10$$

$$\overline{x}-19.6 \le m \le \overline{x}+19.6$$

따라서 $a=\overline{x}-19.6$, $b=\overline{x}+19.6$이므로 $b-a=39.2$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 51쪽

7 [22010-0148]

어느 전구회사에서 생산한 형광등 1개의 수명은 평균이 m시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 형광등 중에서 100개를 임의추출하여 구한 형광등 수명의 표본평균이 4800시간, 표본표준편차가 100시간이었다. 이 결과를 이용하여 구한 이 회사에서 생산한 형광등 1개의 수명의 평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① $4734.5 \le m \le 4865.5$
② $4754.2 \le m \le 4845.8$
③ $4774.2 \le m \le 4825.8$
④ $4776.4 \le m \le 4823.6$
⑤ $4778.2 \le m \le 4822.8$

8 [22010-0149]

어느 축구리그에서 한 경기에서 축구 선수 1명의 이동거리는 평균이 m km, 표준편차가 2 km인 정규분포를 따른다고 한다. 이 축구리그의 선수 중에서 n명을 임의추출하여 구한 한 경기의 이동거리의 표본평균이 8.1 km이고, 이를 이용하여 구한 이 축구리그에서 한 경기의 축구 선수 1명의 이동거리의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a=0.784$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

[22010-0150]

1 모표준편차가 10인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{V}(2\overline{X})$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

[22010-0151]

2 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{4}$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X}+1)=\frac{3}{2}$이다.
$\mathrm{P}\left(\overline{X}=-\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

[22010-0152]

3 어느 카드회사 고객센터의 1명의 ARS응답 대기 시간은 평균이 3분, 표준편차가 1.5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 카드회사 고객센터의 ARS를 이용한 고객 중에서 100명을 임의추출하였을 때, ARS응답 대기 시간의 표본평균이 3.3분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.1567 ② 0.6915 ③ 0.8413
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

[22010-0153]

4 모평균이 m, 모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값 $\overline{x}$를 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $\overline{x}-0.98\le m\le\overline{x}+0.98$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le1.96)=0.95$로 계산한다.)

[22010-0154]

1 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대한 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)$의 값은?

$\overline{X}$	1	$\frac{3}{2}$	2	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	a	1

① $\frac{31}{16}$ ② 2 ③ $\frac{33}{16}$ ④ $\frac{17}{8}$ ⑤ $\frac{35}{16}$

[22010-0155]

2 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 n_1인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_1}$, 크기가 n_2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_2}$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X_1})=\mathrm{E}(\overline{X_2})$
ㄴ. $\mathrm{V}(n_1\overline{X_1})=\mathrm{V}(n_2\overline{X_2})$
ㄷ. $n_1=4n_2$이면 $\sigma(2\overline{X_1})=\sigma(\overline{X_2})$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[22010-0156]

3 1이 적혀 있는 면의 개수가 3, 2가 적혀 있는 면의 개수가 2, 3이 적혀 있는 면의 개수가 1인 정육면체 모양의 상자를 한 번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 숫자를 확인한다. 이러한 시행을 3번 한 후 확인한 세 수의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}<\frac{3}{2}\right)$의 값은? (단, 각 면에는 숫자가 하나만 적혀 있다.)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[22010-0157]

4 모집단의 확률변수 X가 갖는 값은 -1, 0, 1이다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{4}$이다. $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

[22010-0158]

5 모평균이 100, 모표준편차가 32인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n^2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(-n^2 \le \overline{X}-100 \le n^2)=0.9544$일 때, 자연수 n의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[22010-0159]

6 어느 자전거 공유업체를 이용한 고객 1명의 이용 시간은 평균이 30분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 업체를 이용한 고객 중에서 임의추출한 25명의 이용 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \le 28)=0.1587$을 만족시키는 σ의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[22010-0160]

7 모평균이 m, 모표준편차가 10인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $a \le m \le b$이고, 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $c \le m \le d$이다. $b-a \ge \frac{2}{3}(d-c)$일 때, 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

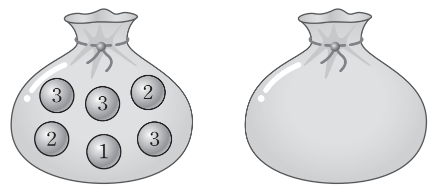
[22010-0161]

8 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X+3)=16$이다. 이 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 10일 때, 이 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① $9.14 \le m \le 10.86$　② $9.12 \le m \le 10.88$　③ $9.10 \le m \le 10.90$
④ $9.08 \le m \le 10.92$　⑤ $9.06 \le m \le 10.94$

[22010-0162]

1 주머니 A에 숫자 1이 적혀 있는 공 1개, 숫자 2가 적혀 있는 공 2개, 숫자 3이 적혀 있는 공 3개가 들어 있고, 주머니 B는 비어 있다. 주머니 A에서 임의로 3개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 꺼낸 공과 주머니 B에 남아 있는 공을 모두 다시 주머니 A에 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복할 때, 주머니 B에서 꺼내어 확인한 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은?



① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

[22010-0163]

2 모집단의 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X\geq 12)\leq \mathrm{P}(X\leq 18)\leq \mathrm{P}(X\geq 8)$
(나) $\mathrm{P}(X\geq 20)<\mathrm{P}(\overline{X}\leq 10)$

m이 정수이고 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 15)=0.1587$일 때, $m+\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, $\sigma>0$)

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[22010-0164]

3 어느 지역의 고등학교 학생 1명의 등교 시간은 모표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 고등학교 학생 중에서 임의추출한 n명의 등교 시간의 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\leq m\leq b$이다. 이 지역의 고등학교 학생 중에서 임의추출한 100명의 등교 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}\leq m-\frac{(b-a)\sqrt{n}}{16}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.22	0.3888
1.96	0.4750
2.45	0.4929
2.58	0.4951

① 0.0049 ② 0.0071 ③ 0.0250 ④ 0.1112 ⑤ 0.1232

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 모집단에서 임의추출한 표본의 표본평균의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다.

정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

① $\frac{83}{4}$ ② $\frac{85}{4}$ ③ $\frac{87}{4}$ ④ $\frac{89}{4}$ ⑤ $\frac{91}{4}$

2021학년도 대수능

출제 의도 정규분포를 이해하고 모집단에서 임의추출한 표본의 표본평균의 평균, 표준편차를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 확률변수를 X라 하면

$$\mathrm{E}(X)=20,\ \sigma(X)=5$$

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})&=\mathrm{E}(X)+\frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}\\&=20+\frac{5}{4}\\&=\frac{85}{4}\end{aligned}$$

답 ②

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 모집단에서 임의추출한 표본의 표본평균의 분포를 이해하고, 표본평균이 어떤 구간의 값을 가질 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구하는 문제가 출제된다.

어느 지역 신생아의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$$P(X\geq 3.4)=\frac{1}{2},\ P(X\leq 3.9)+P(Z\leq -1)=1$$

이다. 이 지역 신생아 중에서 임의추출한 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(\overline{X}\geq 3.55)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

z	$P(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668

④ 0.1587 ⑤ 0.3413

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면

$P(X\geq 3.4)=\frac{1}{2}$이므로 $m=3.4$

$P(Z\leq -1)=P(Z\geq 1)$이므로 $P(X\leq 3.9)+P(Z\geq 1)=1$에서

$$P(X\geq 3.9)=P(Z\geq 1)$$

$$P(X\geq 3.9)=P\left(Z\geq \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)=P\left(Z\geq \frac{0.5}{\sigma}\right)$$

이므로 $\frac{0.5}{\sigma}=1,\ \sigma=0.5$

즉, 확률변수 X가 정규분포 $N(3.4,\ 0.5^2)$을 따르므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(3.4,\ 0.1^2)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\geq 3.55)&=P\left(Z\geq \frac{3.55-3.4}{0.1}\right)\\&=P(Z\geq 1.5)\\&=0.5-P(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

고1~2 내신 중점 로드맵

과목	고교 입문		기초	기본	특화	+ 단기
국어	고등 예비 과정	내 등급은?	윤혜정의 나비효과 입문편 /나비효과 입문편 워크북 어휘가 독해다!	기본서 올림포스	국어 특화: 국어 독해의 원리 / 국어 문법의 원리	단기 특강
영어			정승익의 수능 개념 잡는 대박구문	기본서 올림포스 전국연합 학력평가 기출문제집	영어 특화: Grammar POWER / Reading POWER / Listening POWER / Voca POWER	
수학			기초 50일 수학 / 초급 올림포스 닥터링 매쓰 디렉터의 고1 수학 개념 끝장내기		고급 올림포스 고난도	
				수학 특화 수학의 왕도		
한국사 사회		인공지능 수학과 함께하는 고교 AI 입문 수학과 함께하는 AI 기초		기본서 개념완성 / 개념완성 문항편	고등학생을 위한 多담은 한국사 연표	
과학						

과목	시리즈명	특징	수준	권장 대상
전과목	고등예비과정	예비 고등학생을 위한 과목별 단기 완성		예비 고1
국/영/수	내 등급은?	고1 첫 학력평가 + 반 배치고사 대비 모의고사		예비 고1
	올림포스	내신과 수능 대비 EBS 대표 국어 · 수학 · 영어 기본서		고1~2
	올림포스 전국연합학력평가 기출문제집	전국연합학력평가 문제 + 개념 기본서		고1~2
	단기 특강	단기간에 끝내는 유형별 문항 연습		고1~2
한/사/과	개념완성 & 개념완성 문항편	개념 한 권 + 문항 한 권으로 끝내는 한국사 · 탐구 기본서		고1~2
국어	윤혜정의 나비효과 입문편/워크북	윤혜정 선생님과 함께 개념과 패턴으로 국어 입문		예비 고1~고2
	어휘가 독해다!	7개년 학평 · 모평 · 수능 출제 필수 어휘 학습		예비 고1~고2
	국어 독해의 원리	내신과 수능 대비 문학 · 독서(비문학) 특화서		고1~2
	국어 문법의 원리	필수 개념과 필수 문항의 언어(문법) 특화서		고1~2
영어	정승익의 수능 개념 잡는 대박구문	정승익 선생님과 CODE로 이해하는 영어 구문		예비 고1~고2
	Grammar POWER	구문 분석 트리로 이해하는 영어 문법 특화서		고1~2
	Reading POWER	수준과 학습 목적에 따라 선택하는 영어 독해 특화서		고1~2
	Listening POWER	수준별 수능형 영어듣기 모의고사		고1~2
	Voca POWER	영어 교육과정 필수 어휘와 어원별 어휘 학습		고1~2
수학	50일 수학	50일 만에 완성하는 중학~고교 수학의 맥		예비 고1~고2
	매쓰 디렉터의 고1 수학 개념 끝장내기	스타강사 강의, 손글씨 풀이와 함께 고1 수학 개념 정복		예비 고1~고1
	올림포스 닥터링	친절한 개념 설명을 통해 쉽게 연습하는 수학 유형		고1~2
	올림포스 고난도	1등급을 위한 고난도 유형 집중 연습		고1~2
	수학의 왕도	직관적 개념 설명과 세분화된 문항 수록 수학 특화서		고1~2
한국사	고등학생을 위한 多담은 한국사 연표	연표로 흐름을 잡는 한국사 학습		예비 고1~고2
기타	수학과 함께하는 고교 AI 입문/AI 기초	파이선 프로그래밍, AI 알고리즘에 필요한 수학 개념 학습		예비 고1~고2

고2~N수 수능 집중 로드맵

과목: 국어 / 영어 / 수학 / 한국사·사회 / 과학

수능 입문
- 수능 감(感)잡기
- 수능특강 Light
- 강의노트 수능개념

기출 / 연습
- 수능 기출의 미래
- 수능특강Q 미니모의고사

연계+연계 보완
- 수능연계교재의 국어 어휘
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA
- 연계: 수능특강, 수능완성
- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능완성 사용설명서

고난도
- 수능연계완성 3/4주 특강 고난도 · 신유형
- 수능의 7대 함정
- 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴

모의고사
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION
- 고난도 시크릿X 봉투모의고사

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 소재 · 유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집		전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사		전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문 · 자료 · 문항 분석		전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품 · 지문과 연결된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석		국/수/영/사/과
	박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회 · 문화 표 분석 문항의 패턴 연습		사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION	신규 문항 2회분으로 국어 · 수학 · 영어 논스톱 모의고사		국/수/영
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사		국/수/영

MEMO