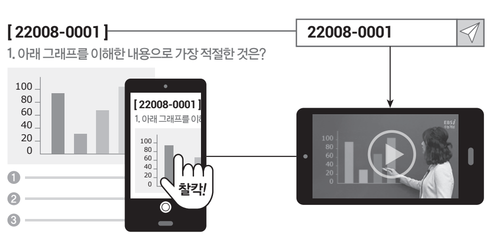
수능 특강

수학영역 **수학Ⅰ**

이 책의 차례 Contents

학생 EBS 교재 문제 검색

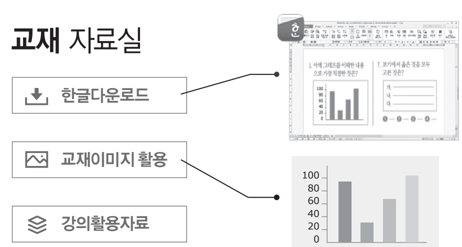
EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

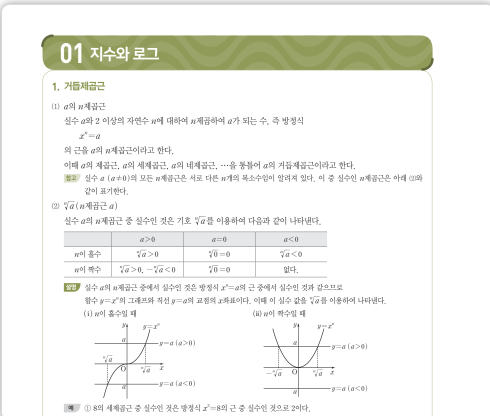
교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.



※ 교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr) 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

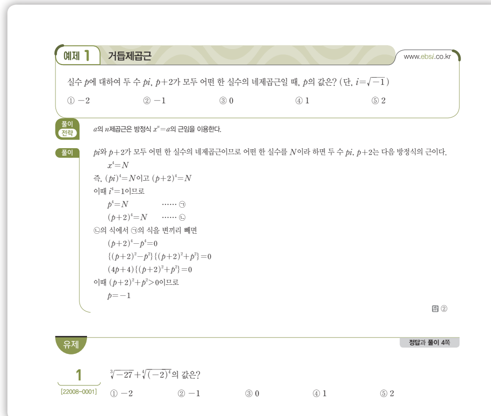
이 책의 구성과 특징 Structure

• 개념 정리



교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.

• 예제 & 유제

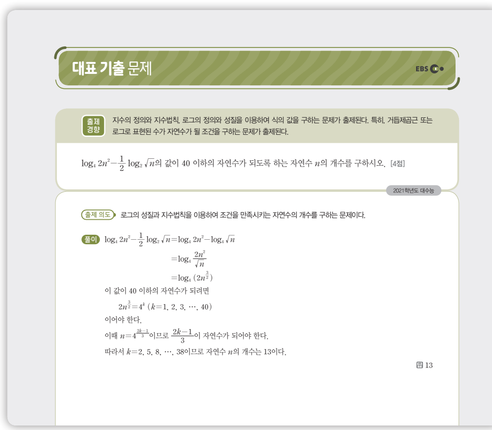


예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

• Level 1-Level 2-Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

• 대표 기출 문제



대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

01 지수와 로그

1. 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n=a$$

의 근을 a의 n제곱근이라고 한다.

이때 a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

참고 실수 a $(a\neq0)$의 모든 n제곱근은 서로 다른 n개의 복소수임이 알려져 있다. 이 중 실수인 n제곱근은 아래 (2)와 같이 표기한다.

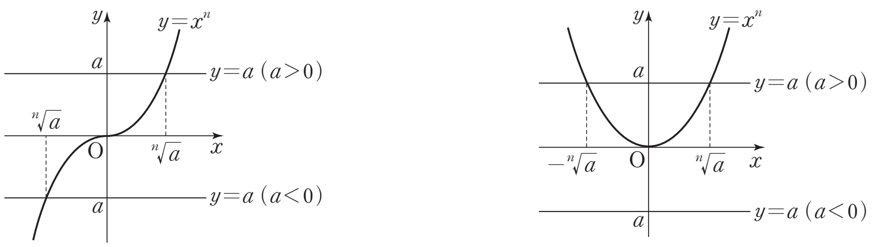
(2) $\sqrt[n]{a}$ (n제곱근 a)

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}>0$	$\sqrt[n]{0}=0$	$\sqrt[n]{a}<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}>0,\ -\sqrt[n]{a}<0$	$\sqrt[n]{0}=0$	없다.

설명 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수인 것과 같으므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표이다. 이때 이 실수 값을 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낸다.

(i) n이 홀수일 때　　　(ii) n이 짝수일 때



예 ① 8의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=8$의 근 중 실수인 것으로 2이다.
즉, $\sqrt[3]{8}=2$이다.

② 16의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^4=16$의 근 중 실수인 것으로 2 또는 -2이다.
즉, $\sqrt[4]{16}=2,\ -\sqrt[4]{16}=-2$이다.

(3) 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

예 (1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(2) $(\sqrt[6]{9})^3=\sqrt[6]{9^3}=\sqrt[6]{3^6}=3$

예제 1 거듭제곱근

실수 p에 대하여 두 수 pi, $p+2$가 모두 어떤 한 실수의 네제곱근일 때, p의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

풀이 전략 a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$의 근임을 이용한다.

풀이 pi와 $p+2$가 모두 어떤 한 실수의 네제곱근이므로 어떤 한 실수를 N이라 하면 두 수 pi, $p+2$는 다음 방정식의 근이다.

$$x^4=N$$

즉, $(pi)^4=N$이고 $(p+2)^4=N$

이때 $i^4=1$이므로

$$p^4=N \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$(p+2)^4=N \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 식에서 ㉠의 식을 변끼리 빼면

$$(p+2)^4-p^4=0$$

$$\{(p+2)^2-p^2\}\{(p+2)^2+p^2\}=0$$

$$(4p+4)\{(p+2)^2+p^2\}=0$$

이때 $(p+2)^2+p^2>0$이므로

$$p=-1$$

답 ②

유제

정답과 풀이 4쪽

1 [22008-0001]

$\sqrt[3]{-27}+\sqrt[4]{(-2)^4}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2 [22008-0002]

24의 세제곱근 중 실수인 것을 a, 3의 여섯제곱근 중 실수인 것의 모든 곱을 b라 할 때, $\dfrac{a\times b}{\sqrt[3]{9}}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

2. 지수가 정수일 때의 정의와 성질

(1) 지수가 0 또는 음의 정수일 때의 정의 : $a\neq 0$이고 n이 자연수일 때

① $a^0=1$　　② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

설명 m, n이 자연수일 때의 다음 지수법칙이 정수 m, n에 대하여 성립한다고 가정하자.

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\ (a\neq 0)$$

① $m=0$일 때는 $a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n$이어야 하므로 $a^0=1$로 정의한다.

② $m=-n$ (n은 자연수)일 때는 $a^{-n}\times a^n=a^{(-n)+n}=a^0$이어야 하므로 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$로 정의한다.

즉, a^0과 a^{-n}은 정수 범위에서 지수법칙이 일관되게 성립하도록 정의한 것이다.

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙 : $a\neq 0$, $b\neq 0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$　② $a^m\div a^n=a^{m-n}$　③ $(a^m)^n=a^{mn}$　④ $(a\times b)^n=a^n\times b^n$

3. 지수가 유리수일 때의 정의와 성질

(1) 지수가 유리수일 때의 정의

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 정수일 때, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이다. 특히 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$이다.

설명 $a>0$이고 m, n이 정수일 때 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립한다.

지수가 유리수일 때도 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립한다고 하면 정수 m과 2 이상의 정수 n에 대하여

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$$

이므로 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이다. 따라서 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$으로 정의한다. 즉, $a^{\frac{m}{n}}$은 유리수 범위에서 지수법칙이 일관되게 성립하도록 정의한 것이다.

참고 지수가 유리수일 때는 밑 a가 양수, 즉 $a>0$에 유의해야 한다.

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙: $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^r\times a^s=a^{r+s}$　② $a^r\div a^s=a^{r-s}$　③ $(a^r)^s=a^{rs}$　④ $(a\times b)^r=a^r\times b^r$

4. 지수가 실수일 때의 정의와 성질

(1) 지수가 실수일 때의 정의

지수가 무리수인 경우는 $3^{\sqrt{2}}$을 예로 생각해 보자.

무리수 $\sqrt{2}=1.4142\cdots$에서 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …를 지수로 가지는 수

$$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ \cdots$$

은 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있는데 이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 $a>0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x을 정의하면 아래 (2)와 같이 실수 범위에서 지수법칙이 일관되게 성립한다는 사실이 알려져 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙: $a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x\times a^y=a^{x+y}$　② $a^x\div a^y=a^{x-y}$　③ $(a^x)^y=a^{xy}$　④ $(a\times b)^x=a^x\times b^x$

예제 2 지수가 정수일 때의 지수법칙

0이 아닌 두 정수 m, n이

$$(-m)^{-1}\times\left(m^{-1}\times\frac{1}{n}\right)^{-2}=144$$

를 만족시킬 때, $m+n$의 최댓값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

풀이 전략 지수가 정수일 때의 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한다. 이때 $m+n$의 최댓값은 m, n이 정수임을 이용하여 구한다.

풀이 $(-m)^{-1}\times\left(m^{-1}\times\frac{1}{n}\right)^{-2}=144$에서 좌변을 정리하면

$$(-1)^{-1}\times m^{-1}\times(m^{-1}\times n^{-1})^{-2}=144$$

$$-m^{-1}\times(m^2\times n^2)=144$$

$$-m\times n^2=144$$

이때 $144=2^4\times3^2$이므로 n^2이 가질 수 있는 값은 1, 2^2, 2^4, 3^2, $2^2\times3^2$, $2^4\times3^2$이고 이때 m의 값은 음수로 각각 정해진다.

$m+n$이 최대이기 위해서는 $m<0$이므로 n은 양수이고 최댓값을 가져야 한다.

따라서 $m+n$의 최댓값은 $m=-1$, $n=2^2\times3$일 때

$$(-1)+12=11$$

답 ①

유제

정답과 풀이 4쪽

3 [22008-0003]

$\sqrt[3]{2\times\sqrt{2}}\times4^{-\frac{3}{4}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

4 [22008-0004]

$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}}\times\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

5. 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x를 기호로

$\log_a N$

으로 나타낸다. 즉,

$a^x=N \iff x=\log_a N$

이때 $\log_a N$에서 a를 밑, N을 진수라 하고, $\log_a N$을 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 한다.

참고 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.
$\log_a N$으로 쓸 때 특별한 언급이 없는 한 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$임을 의미한다.

참고 $a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로
$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

예 (1) $2^3=8 \iff 3=\log_2 8$
(2) $\log_2 1=0$, $\log_2 2=1$

6. 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(3) $\log_a M^r=r\log_a M$ (단, r는 실수)

설명 $\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라 하면
$a^m=M$, $a^n=N$

(1) $MN=a^m\times a^n=a^{m+n}$이므로
$\log_a MN=m+n=\log_a M+\log_a N$

(2) $\dfrac{M}{N}=a^m\div a^n=a^{m-n}$이므로
$\log_a \dfrac{M}{N}=m-n=\log_a M-\log_a N$

(3) $M^r=(a^m)^r=a^{mr}$이므로
$\log_a M^r=mr=r\log_a M$

예 (1) $\log_2 6=\log_2(2\times3)=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$
(2) $\log_2 \dfrac{3}{2}=\log_2 3-\log_2 2=\log_2 3-1$
(3) $\log_2 32=\log_2 2^5=5\log_2 2=5$

예제 3 로그의 정의와 성질

양수 A에 대하여 $\log_2 A+\log_2 \sqrt{A}=6$일 때, A의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

풀이 전략 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 나타내고 로그의 정의를 이용하여 값을 구한다.

풀이 $\log_2 A+\log_2 \sqrt{A}=6$에서

$\log_2 A+\log_2 A^{\frac{1}{2}}=6$

$\log_2 A+\frac{1}{2}\log_2 A=6$

$\frac{3}{2}\log_2 A=6$

$\log_2 A=4$

로그의 정의를 이용하면

$A=2^4=16$

답 ①

유제

정답과 풀이 4쪽

5 [22008-0005]

두 실수 x, y가 $x=\log_2 3$, $2^y=\sqrt{6}$일 때, $x-2y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6 [22008-0006]

$(\log_2 \sqrt{2})\times(\log_2 6)-\log_2 \sqrt{3}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

7. 로그의 밑의 변환

(1) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

설명 $\log_a b=x$, $\log_c a=y$로 놓으면 $a^x=b$, $c^y=a$이므로 지수법칙에 의해

$$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$$

이때 로그의 정의에 의해

$$xy=\log_c b$$

이므로

$$\log_a b\times\log_c a=\log_c b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $a\neq1$에서 $\log_c a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $\log_c a$로 나누면

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

예 ① $\log_2 5=\dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$

② $\log_8 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 8}=\dfrac{1}{\log_2 2^3}=\dfrac{1}{3\log_2 2}=\dfrac{1}{3}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고 $m\neq0$)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

설명 ① $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a b\times\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_a c$

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{\log_a b^n}{\log_a a^m}=\dfrac{n\log_a b}{m\log_a a}=\dfrac{n}{m}\log_a b$

④ $c\neq1$일 때, $a=c^x$이라 하면 $x=\log_c a$이므로

$$a^{\log_b c}=(c^{\log_c a})^{\log_b c}=c^{\log_c a\times\log_b c}=c^{\log_c a\times\frac{\log_c c}{\log_c b}}=c^{\frac{\log_c a}{\log_c b}}=c^{\log_b a}$$

한편, $c=1$일 때도 위의 식은 성립한다.

예 ① $\log_2 3=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 2}=\dfrac{1}{\log_3 2}$

② $\log_2 3\times\log_3 5=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\log_2 5$

③ $\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\dfrac{3}{2}\log_2 2=\dfrac{3}{2}$

예제 4 로그의 밑의 변환

실수 α가 $2^{\alpha}=3$을 만족시킬 때, $\alpha\times\log_3 4$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

풀이 전략

로그의 정의를 이용하여 α를 나타낸 후 로그의 밑의 변환을 이용한다.

풀이

$2^{\alpha}=3$이므로

$$\alpha=\log_2 3$$

따라서

$$\begin{aligned}\alpha\times\log_3 4&=\log_2 3\times\log_3 4\\&=\log_2 3\times\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\\&=\log_2 2^2\\&=2\log_2 2\\&=2\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$\log_3 4=\beta$라 하면 $3^{\beta}=4$　…… ㉠

한편, $2^{\alpha}=3$이므로 양변에 β제곱을 하면

$$(2^{\alpha})^{\beta}=3^{\beta}$$

㉠을 이용하면 $2^{\alpha\beta}=4$, 즉 $2^{\alpha\beta}=2^2$이므로

$$\alpha\beta=2$$

유제

정답과 풀이 5쪽

7 [22008-0007]

$\log_4\frac{1}{3}\times\log_{\sqrt{3}}8$의 값은?

① -3　② $-\frac{3}{2}$　③ 0　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 3

8 [22008-0008]

$a=\frac{\log_7 3}{\log_2 3}$일 때, 7^a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

8. 상용로그

(1) 상용로그의 뜻

밑을 10으로 하는 로그를 상용로그라고 한다. 이때 상용로그 $\log_{10} N$은 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

예 ① $\log 10=\log_{10} 10=1$

② $\log \frac{1}{100}=\log_{10} 10^{-2}=-2$

③ $\log \sqrt{10}=\log_{10} 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

(2) 상용로그의 값 구하기

① 상용로그표를 이용한 상용로그의 값 구하기

상용로그표에는 0.01의 간격으로 1.00부터 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값이 주어져 있으므로 진수가 이 값일 때의 상용로그의 값은 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다.

② 일반적인 양수의 상용로그의 값 구하기

양수 N은

$$N=a\times 10^n\ (1\le a<10,\ n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 N의 상용로그의 값은

$$\log N=\log (a\times 10^n)=n+\log a$$

이므로 상용로그표를 이용하여 $\log a$의 값을 구한 후 n과 더하여 구한다.

(3) 상용로그의 활용

상용로그를 이용하면 2^{30}, $\sqrt[3]{2}$ 등과 같은 수를 10진법으로 나타내어 어림한 값을 구할 수 있다.

예 2^{30}의 어림한 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 상용로그 $\log 2^{30}$의 값 구하기

상용로그표에서 $\log 2=0.3010$이므로

$$\log 2^{30}=30\log 2=30\times 0.3010=9.03=9+0.03$$

(ii) 상용로그의 값으로부터 진수 구하기

상용로그표를 이용하여 $\log 1.07=0.03$으로 계산하면

$$9+0.03=\log 10^9+\log 1.07=\log (1.07\times 10^9)$$

(iii) 어림한 값 구하기

위의 (i)과 (ii)로부터

$$\log 2^{30}=\log (1.07\times 10^9)$$

이므로

$$2^{30}=1.07\times 10^9$$

예제 5 상용로그

$\log 2=0.3010$일 때, $\log \dfrac{2^{300}}{\sqrt[3]{5^{100}}}$의 값은?

① 61　② 63　③ 65　④ 67　⑤ 69

풀이 전략 상용로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이

$$\begin{aligned}\log \frac{2^{300}}{\sqrt[3]{5^{100}}}&=\log 2^{300}-\log \sqrt[3]{5^{100}}\\&=\log 2^{300}-\log 5^{\frac{100}{3}}\\&=300\log 2-\frac{100}{3}\log 5 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $\log 5=\log \dfrac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.3010=0.6990$이므로 ㉠은

$$\begin{aligned}300\log 2-\frac{100}{3}\log 5&=300\times 0.3010-\frac{100}{3}\times 0.6990\\&=90.3-23.3\\&=67\end{aligned}$$

답 ④

유제

정답과 풀이 5쪽

9 [22008-0009]

두 양수 A, B가 $\log A=3.6$, $\log B=1.0020$일 때, $\log 2=0.3010$임을 이용하면 $\sqrt{AB}=a\times 10^{n}$이다. $a+n$의 값을 구하시오. (단, $1\le a<10$, n은 음이 아닌 정수이다.)

10 [22008-0010]

$\log 2=a$라 할 때, $\log (2^{\log_5 4})$을 a로 나타낸 것은?

① $\dfrac{a^2}{1-a}$　② $\dfrac{2a^2}{1-a}$　③ $\dfrac{a}{1-a}$　④ $\dfrac{1-a}{2a^2}$　⑤ $\dfrac{1-a}{a^2}$

[22008-0011]

1 $2^{-1}\times 3^{0}\div\dfrac{1}{4^{-1}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

[22008-0012]

2 $\sqrt[3]{(-2)^{-2}}\times 2^{\frac{5}{3}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[22008-0013]

3 $\sqrt{8}$의 세제곱근 중 모든 허수의 곱은?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[22008-0014]

4 $\log_2 7-\log_2 \dfrac{7}{8}$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[22008-0015]

5 $\log_{\sqrt{2}} 12-\dfrac{1}{\log_9 2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22008-0016]

1 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $a^{-1}\times(-b)^{-1}=2$, $a^{-1}+b^{-1}=3$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

[22008-0017]

2 전체집합 $U=\{x|x$는 복소수$\}$의 두 부분집합 $A=\{x|x$는 a의 네제곱근$\}$, $B=\{\sqrt[3]{-8}\}$에 대하여 $B\subset A$일 때, $A-B$의 모든 원소의 곱은? (단, $a>0$)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

[22008-0018]

3 0이 아닌 실수 a가 등식 $\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{|a|}\times\sqrt[4]{|a|}}\times(\sqrt[3]{a+1})^3=a-3$을 만족시킬 때, a의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

[22008-0019]

4 $2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $\frac{\sqrt[15]{8}\times\sqrt[3]{9^{-1}}}{\sqrt[6]{3^{-1}}}$이 어떤 유리수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수는?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

[22008-0020]

5 두 양수 a, b에 대하여 $\begin{cases} \log_2 a + \log_2 b = 1 \\ \log_2 (a+b) = \frac{5}{2} \end{cases}$ 일 때, a^2+b^2의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

[22008-0021]

6 세 양수 a, b, c $(a \neq 1)$이

$$\log_a bc = 3,\ \log_a b - \log_a c = 1,\ \log_a \frac{b+c}{3} = 1$$

을 만족시킬 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

[22008-0022]

7 1이 아닌 양수 a에 대하여

$$\log_a 2 \times \log_2 (2a+3) = \log_2 a \times \log_a 4$$

일 때, a의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[22008-0023]

8 두 양수 a, b와 두 실수 p, q에 대하여

$$p = \log_2 a,\ b = 3^q,\ b^{\log_3 a} = 4$$

일 때, pq의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22008-0024]

1 $2 \le n \le 7$인 자연수 n과 정수 a가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 순서쌍 (n, a)의 개수는?

(가) $\sqrt[n]{a} < 0$

(나) $\sqrt[n]{(-1)^n} \times \sqrt[n+1]{(n+a)^{n+1}} = -3$

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

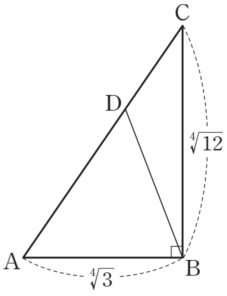
[22008-0025]

2 함수 $y=x^3$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{2}$가 만나는 점을 A라 할 때, 선분 OA를 지름으로 하는 원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 H라 하자. 삼각형 AOH의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $2^{-\frac{1}{2}}$　② $2^{-\frac{1}{3}}$　③ 1　④ $2^{\frac{1}{3}}$　⑤ $2^{\frac{1}{2}}$

[22008-0026]

3 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt[4]{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt[4]{12}$, $\angle \mathrm{ABC}=90°$인 직각삼각형 ABC의 변 CA 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BD}}$가 되도록 잡을 때, 삼각형 ABD의 넓이를 S라 하자. $3 \times S^2$의 값을 구하시오.



[22008-0027]

4 2 이상의 자연수 M에 대하여 $\log_4 M+\log_4 (2\log_2 M)$의 값이 자연수가 되도록 하는 M의 값을 작은 것부터 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, $a_1\times a_3$의 값을 구하시오.

[22008-0028]

5 두 양의 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\log_4 ab)^2-\left(\log_4 \dfrac{a}{b}\right)^2=8$
(나) a와 $\log_4 b$는 모두 자연수이다.

$a+b$의 최댓값은?

① 250 ② 252 ③ 254 ④ 256 ⑤ 258

[22008-0029]

6 서로 다른 세 양의 실수 a, b, c $(a\neq1,\ b\neq1)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_a b=\log_b c$
(나) $b\times c=a^2$

$\log_a \dfrac{c}{b}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 지수의 정의와 지수법칙, 로그의 정의와 성질을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다. 특히, 거듭제곱근 또는 로그로 표현된 수가 자연수가 될 조건을 구하는 문제가 출제된다.

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

2021학년도 대수능

출제 의도 로그의 성질과 지수법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구하는 문제이다.

풀이 $\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n} = \log_4 2n^2 - \log_4 \sqrt{n}$

$= \log_4 \frac{2n^2}{\sqrt{n}}$

$= \log_4 (2n^{\frac{3}{2}})$

이 값이 40 이하의 자연수가 되려면

$2n^{\frac{3}{2}} = 4^k \ (k=1, 2, 3, \cdots, 40)$

이어야 한다.

이때 $n = 4^{\frac{2k-1}{3}}$이므로 $\frac{2k-1}{3}$이 자연수가 되어야 한다.

따라서 $k=2, 5, 8, \cdots, 38$이므로 자연수 n의 개수는 13이다.

답 13

02 지수함수와 로그함수

1. 지수함수의 정의

a가 1이 아닌 양수일 때, 실수 x에 대하여 a^x의 값을 대응시키는 함수

$$y=a^x$$

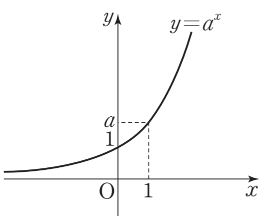
을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

참고 $y=a^x$에서 $a=1$이면 모든 실수 x에 대하여 $y=1^x=1$이므로 $y=a^x$은 상수함수이다.
그러므로 지수함수에서는 밑이 1이 아닌 양수인 경우만을 생각한다.

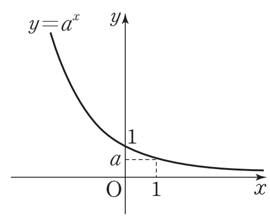
2. 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 지수함수의 그래프

(i) $a>1$일 때



(ii) $0<a<1$일 때



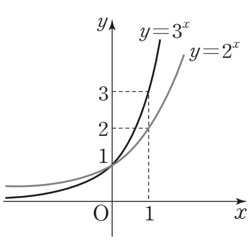
(2) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(3) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

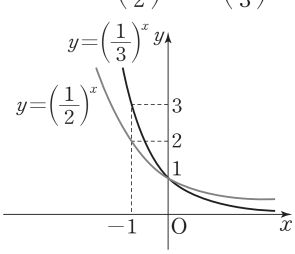
(4) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 x축이다.

참고 지수함수 $y=a^x$에서
(i) $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$
(ii) $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$

예 (1) 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프



(2) 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프



참고 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$에 대하여 다음이 성립한다.
(i) $x>0$일 때, $2^x<3^x$
(ii) $x<0$일 때, $2^x>3^x$

예제 1 지수함수의 그래프

지수함수 $f(x)=3^x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 점 $\mathrm{B}(2,\ f(2))$에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 지수함수 $y=a^x$ ($a\neq1$이고, $a\neq3$)의 그래프가 선분 MB와 만나도록 하는 자연수 a의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

풀이 전략 점 A의 좌표를 이용하여 중점 M의 좌표를 구한 후 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $x=1$이 만나는 점을 이용하여 자연수 a의 개수를 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점이 A이므로

$\mathrm{A}(0,\ 1)$

또 점 $\mathrm{B}(2,\ f(2))$는 $\mathrm{B}(2,\ 3^2)$, 즉 $\mathrm{B}(2,\ 9)$이므로 선분 AB의 중점 M의 좌표는

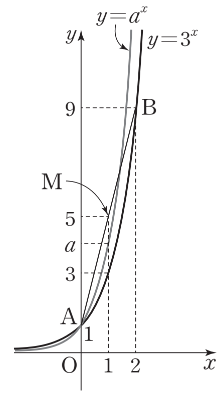
$\mathrm{M}\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1+9}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}(1,\ 5)$

이때 직선 $x=1$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=a^x$의 그래프가 만나는 점은 각각 $(1,\ 3)$, $(1,\ a)$이다.

그러므로 함수 $y=a^x$의 그래프가 선분 MB와 만나기 위해서는 $a\neq3$이므로

$3<a\leq5$

따라서 자연수 a는 4, 5이고 그 개수는 2이다.



답 ②

유제

정답과 풀이 11쪽

1 [22008-0030]

10 이하의 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=\left(\frac{n}{15}+\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=-x+2$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 n의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

2 [22008-0031]

y절편이 1보다 크고 기울기가 음수인 직선 l이 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 원소로 갖는 집합을 A라 하자. $A=\{2,\ 3\}$일 때, 직선 l의 y절편은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

3. 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

(1) 평행이동

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$$y=a^{x-m}+n$$

참고 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 항상 점 $(m,\ n+1)$을 지나고, 점근선은 직선 $y=n$이다.

(2) 대칭이동

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은 각각 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $y=-a^x$

② y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $y=a^{-x}$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $y=-a^{-x}$

참고 $\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

예 함수 $y=-2^{x-1}+2$의 그래프는 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 다음과 같이 그릴 수 있다.

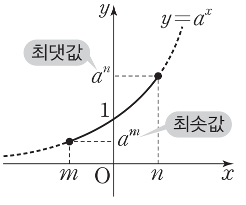
$$\boxed{y=2^x} \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}} \boxed{y=-2^x} \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 2만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로 1만큼,}} \boxed{y=-2^{x-1}+2}$$

4. 지수함수의 최댓값과 최솟값

정의역이 $\{x\mid m\leq x\leq n\}$인 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

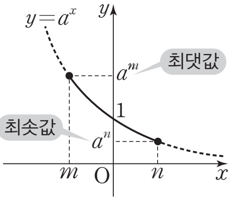
(1) $a>1$일 때

$x=m$에서 최솟값 a^m, $x=n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.



(2) $0<a<1$일 때

$x=m$에서 최댓값 a^m, $x=n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.



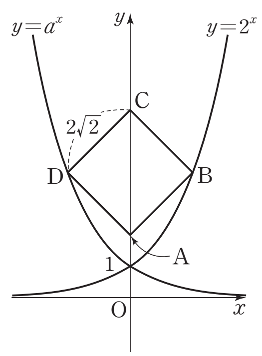
예 정의역이 $\{x\mid -1\leq x\leq 2\}$인 함수 $y=2^x$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

$x=-1$에서 최솟값 $2^{-1}=\frac{1}{2}$을 갖고, $x=2$에서 최댓값 $2^2=4$를 갖는다.

예제 2 지수함수의 그래프의 대칭이동

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C는 y축 위의 점이고, 두 꼭짓점 B, D는 각각 두 함수 $y=2^x$, $y=a^x$ $(0<a<1)$의 그래프 위의 점이다. 점 A의 y좌표를 b라 할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

(단, 점 A의 y좌표는 점 C의 y좌표보다 작다.)



① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

풀이 전략 사각형 ABCD가 정사각형임을 이용하여 두 함수 $y=2^x$, $y=a^x$의 그래프의 대칭성을 파악하고, 수직을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

풀이 사각형 ABCD가 정사각형이므로 두 대각선 AC, BD가 만나는 점을 E라 하면 점 E는 y축 위에 있으며

$\angle BEC=90^\circ$, $\overline{BE}=\overline{ED}$

따라서 두 함수 $y=2^x$, $y=a^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이어야 하므로

$a=\frac{1}{2}$

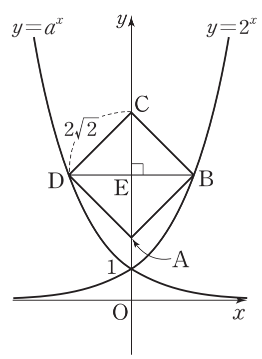
한편, 직각이등변삼각형 EBC에서

$\overline{BE}=\overline{CB}\cos 45^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

점 B의 좌표는 $B(2, 2^2)$, 즉 $B(2, 4)$이므로 $E(0, 4)$

또 $\overline{AE}=2$이므로 $A(0, 2)$

따라서 $a+b=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$



답 ③

유제

정답과 풀이 11쪽

3 [22008-0032]

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프가 점 $(2, a)$를 지날 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4 [22008-0033]

$a>0$, $a\neq1$인 상수 a에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le 2\}$인 함수 $y=a^x+1$의 최댓값이 $\frac{5}{4}$일 때, 최솟값은?

① $\frac{5}{16}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{11}{16}$　④ $\frac{7}{8}$　⑤ $\frac{17}{16}$

5. 로그함수의 정의

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 역함수 $y=\log_a x$를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

설명 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 이때 로그의 정의로부터 다음이 성립한다.

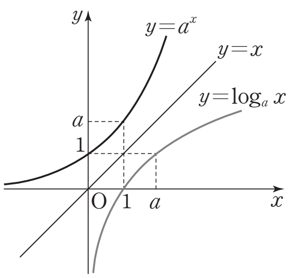
$$y=a^x \iff x=\log_a y$$

위의 $x=\log_a y$에서 x와 y를 서로 바꾸면 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 역함수는 $y=\log_a x$이다.

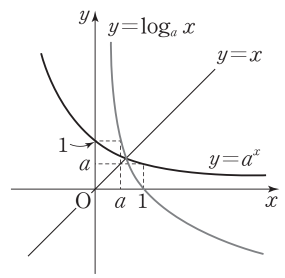
6. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 로그함수의 그래프

(i) $a>1$일 때



(ii) $0<a<1$일 때



(2) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(3) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

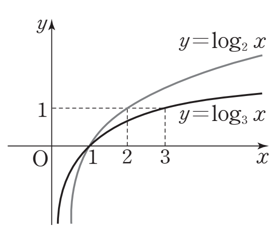
(4) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 점근선은 y축이다.

참고 로그함수 $y=\log_a x$에서

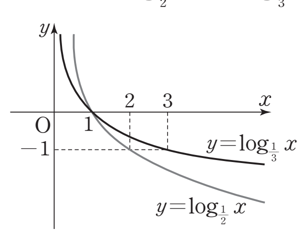
(i) $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $\log_a x_1<\log_a x_2$

(ii) $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $\log_a x_1>\log_a x_2$

예 (1) 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프



(2) 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프



참고 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $x>1$일 때, $\log_2 x>\log_3 x$

(ii) $0<x<1$일 때, $\log_2 x<\log_3 x$

예제 3 로그함수의 그래프

함수 $f(x)=\log_2 x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 B$(4,\ f(4))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이 함수 $y=2^x$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

풀이 전략 $a>0$, $a\neq1$일 때, 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 x축과 만나는 점이 A이므로 A$(1,\ 0)$

또 $f(4)=\log_2 4=2$에서 B$(4,\ 2)$

한편, 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=2^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 C$(2,\ 4)$

직선 BC의 방정식은 $y=-(x-4)+2$에서 $y=-x+6$이므로

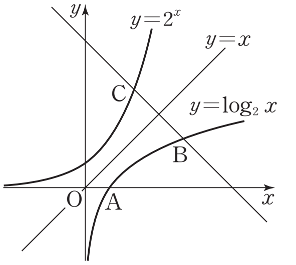
$$x+y-6=0$$

이때 점 A와 직선 BC 사이의 거리는

$$\frac{|1+0-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

따라서 $\overline{\text{BC}}=\sqrt{(4-2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=5$$



답 ⑤

유제

정답과 풀이 11쪽

5 [22008-0034]

두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 x좌표가 1보다 작은 점에서 만나고 $4\left\{f(1)+g\left(\frac{1}{a}\right)\right\}^2=1$일 때, $12a$의 값을 구하시오.

(단, a는 $a>0$, $a\neq1$인 상수이다.)

6 [22008-0035]

두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{9}{2}} x$의 그래프와 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계에 포함된 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

(1) 평행이동

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=\log_a (x-m)+n$

참고 함수 $y=\log_a (x-m)+n$의 그래프는 항상 점 $(1+m,\ n)$을 지나고, 점근선은 $x=m$이다.

(2) 대칭이동

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은 각각 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $y=-\log_a x$

② y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $y=\log_a (-x)$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식 : $y=-\log_a (-x)$

참고 $y=\log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

예 함수 $y=-\log_2 (x-1)+2$의 그래프는 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 다음과 같이 그릴 수 있다.

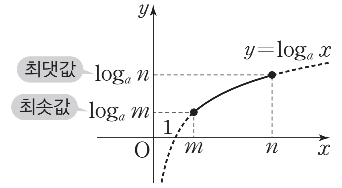
$$\boxed{y=\log_2 x} \xRightarrow{\text{x축에 대하여 대칭이동}} \boxed{y=-\log_2 x} \xRightarrow{\text{x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동}} \boxed{y=-\log_2 (x-1)+2}$$

8. 로그함수의 최댓값과 최솟값

정의역이 $\{x\,|\,m\le x\le n\}$인 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

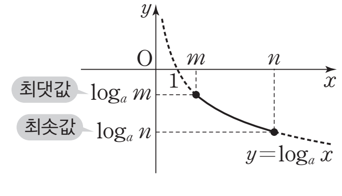
(1) $a>1$일 때

$x=m$에서 최솟값 $\log_a m$, $x=n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.



(2) $0<a<1$일 때

$x=m$에서 최댓값 $\log_a m$, $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.



예 정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le 2\}$인 로그함수 $y=\log_2 x$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.
$x=1$에서 최솟값 $\log_2 1=0$을 갖고, $x=2$에서 최댓값 $\log_2 2=1$을 갖는다.

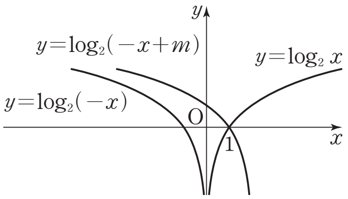
예제 4 로그함수의 그래프의 평행이동, 대칭이동

함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 함수 $y=\log_2(-x+m)$의 그래프가 제1사분면에서 만나도록 하는 자연수 m의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 함수 $y=\log_2(-x+m)$의 그래프를 그린다.

풀이 $y=\log_2(-x+m)=\log_2\{-(x-m)\}$이므로 함수 $y=\log_2(-x+m)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이다.



이때 함수 $y=\log_2(-x+m)$의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지날 때의 m의 값은

$0=\log_2(-1+m)$에서

$m-1=1$, $m=2$

그러므로 $m>2$

따라서 자연수 m의 최솟값은 3이다.

답 ③

유제

정답과 풀이 12쪽

7 [22008-0036]

함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(3, 1)$을 지나고 기울기가 -2인 직선이 함수 $y=\log_a(x+1)+2$의 그래프와 만나는 점을 $\mathrm{B}(b, c)$라 할 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

8 [22008-0037]

정의역이 $\{x|2\le x\le3\}$인 함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m=1$이고 $M<0$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

9. 지수함수의 활용

(1) 지수에 미지수를 포함한 방정식의 풀이

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

설명 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 다음 식이 성립한다.

$$a^{x_1}=a^{x_2} \iff x_1=x_2$$

이를 이용하여 지수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

(2) 지수에 미지수를 포함한 부등식의 풀이

(i) $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$

(ii) $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

설명 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 다음과 같은 성질을 갖는다.

(i) $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1<x_2$

(ii) $0<a<1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1>x_2$

이를 이용하여 지수에 미지수를 포함한 부등식을 푼다.

예 ① $3^{2x}=3^{x+1}$에서 $2x=x+1$이므로 $x=1$

② $3^{2x}>3^{x+1}$에서 밑 3이 1보다 크므로 $2x>x+1$

따라서 $x>1$

10. 로그함수의 활용

(1) 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 풀이

$a>0$, $a\neq1$, $f(x)>0$, $g(x)>0$일 때

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \iff f(x)=g(x)$$

설명 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 다음 식이 성립한다.

$$\log_a x_1=\log_a x_2 \iff x_1=x_2 \text{ (단, } a>0,\ a\neq1,\ x_1>0,\ x_2>0)$$

이를 이용하여 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

(2) 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 풀이

$f(x)>0$, $g(x)>0$인 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(i) $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)<g(x)$

(ii) $0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)>g(x)$

설명 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 다음과 같은 성질을 갖는다.

(i) $a>1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1<x_2$ (단, $x_1>0$, $x_2>0$)

(ii) $0<a<1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2$ (단, $x_1>0$, $x_2>0$)

이를 이용하여 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식을 푼다.

예 ① $\log_2(x+1)=\log_2 2$에서 $x+1=2$이므로 $x=1$

② $\log_2(x+1)>\log_2 2$에서 밑 2가 1보다 크므로 $x+1>2$

따라서 $x>1$

예제 5 지수에 미지수를 포함한 부등식

실수 a와 정수 x에 대하여 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, x)의 개수는?

(가) $(a-2)\left(a-\frac{1}{2}\right)=0$

(나) $a^4<a^{x-1}<a^{-x+2}$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

풀이 전략

a의 범위를 $a>1$, $0<a<1$일 때로 나누어 부등식을 푼다.

풀이

$(a-2)\left(a-\frac{1}{2}\right)=0$에서

$a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(i) $a=2$일 때

$a^4<a^{x-1}$에서

$4<x-1$, $x>5$ …… ㉠

또 $a^{x-1}<a^{-x+2}$에서

$x-1<-x+2$, $2x<3$, $x<\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x는 없으므로 이 부등식의 해는 없다.

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

$a^4<a^{x-1}$에서

$4>x-1$, $x<5$ …… ㉢

또 $a^{x-1}<a^{-x+2}$에서

$x-1>-x+2$, $2x>3$, $x>\frac{3}{2}$ …… ㉣

㉢과 ㉣에서 $\frac{3}{2}<x<5$

(i), (ii)로부터 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, x)는 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$이고 그 개수는 3이다.

답 ③

유제

정답과 풀이 12쪽

9 [22008-0038]

부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x<\frac{3^{10-3x}}{\sqrt{27}}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

10 [22008-0039]

부등식 $\log_2(x+10)<6\log_4 3$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오.

[22008-0040]

1 지수함수 $f(x)=a^{x}$ $(a>0,\ a\neq1)$이 $3f(2)=7a-2$를 만족시킨다. 어떤 양수 b에 대하여 $f(b)>1$일 때, $f(1)+f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{13}{6}$　② $\frac{7}{3}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{17}{6}$

[22008-0041]

2 함수 $y=-2^{x-1}+3$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$와 이 그래프의 점근선 사이의 거리가 1일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[22008-0042]

3 함수 $y=\sqrt[3]{4}\times2^{x-1}+3$의 그래프는 함수 $y=a^{x}$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 세 상수 a, m, n에 대하여 $a\times m\times n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[22008-0043]

4 두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^{2}+1$, $g(x)=\log_{2}x$에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,-1\leq x\leq3\}$인 함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[22008-0044]

5 부등식 $2^{x-5}<3^{\log_{3}16}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

[22008-0045]

1 2 이상의 자연수 a에 대하여 함수 $y=a^x\times\left(\frac{2}{5}\right)^x$의 그래프와 원 $(x-1)^2+y^2=1$이 만나지 않고, 함수 $y=\frac{9^x\times a^{2x}}{100^x}$의 그래프와 원 $(x-1)^2+y^2=1$이 만나도록 하는 a의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[22008-0046]

2 $a>0$, $a\neq1$일 때, 서로 다른 두 함수 $y=a^x$, $y=2^x$의 그래프와 직선 $x=1$이 만나는 점 중 y좌표가 큰 점을 P, 두 함수 $y=a^x$, $y=2^x$의 그래프와 직선 $x=-1$이 만나는 점 중 y좌표가 큰 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 중점의 y좌표가 $\frac{7}{4}$일 때, 모든 실수 a의 값의 합은?

① $\frac{8}{3}$　② 3　③ $\frac{10}{3}$　④ $\frac{11}{3}$　⑤ 4

[22008-0047]

3 $a>\frac{3}{8}$, $a\neq1$인 상수 a에 대하여 점 $\mathrm{A}\left(2a-\frac{3}{4},\ 2\right)$가 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프 위에 있다. 이 그래프 위의 점 중에서 점 A가 아닌 어떤 한 점 B에 대하여 직선 AB의 기울기가 음수일 때, $10a$의 값을 구하시오.

[22008-0048]

4 1이 아닌 양수 a에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,3\le x\le4\}$인 함수 $y=-a^{x-1}+2$가 $x=3$에서 최댓값 $\frac{7}{2}(1-a)$를 가질 때, 최솟값은 m이다. $a+m$의 값은?

① -21　② -22　③ -23　④ -24　⑤ -25

[22008-0049]

5 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ \log_2 a)\ (a>1)$과 함수 $y=\log_4 x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{B}(b,\ \log_4 b)$ $(1<a<b)$를 선분 AB가 대각선이고 각 변이 x축 또는 y축에 평행한 정사각형이 되도록 잡는다. 이 정사각형의 한 변의 길이가 1일 때, $(a-2)^2$ 의 값을 구하시오.

[22008-0050]

6 $a>1$일 때, 정의역이 $\{x\,|\,-7\le x<a\}$인 함수

$$f(x)=\begin{cases}\log_3(-x+2) & (-7\le x\le 1)\\ \log_2 x & (1<x<a)\end{cases}$$

가 최댓값을 갖기 위한 실수 a의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[22008-0051]

7 직선 $y=2x-3$이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 A, 직선 $y=2x-3$이 함수 $y=2\log_4(16x-32)$의 그래프와 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는?

(단, O는 원점이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[22008-0052]

8 상수 a에 대하여 방정식 $\log_2(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+5)=a$의 근이 3일 때, 부등식 $\log_2(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+5)<a$를 만족시키는 자연수 x의 개수는 b이다. $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[22008-0053]

1 2 이상의 서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여 직선 $x=1$이 두 함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q, 직선 $x=2$가 두 함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 R, S라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OR}<\overline{OS}$
(나) 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 7이다.

b의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[22008-0054]

2 1이 아닌 두 양수 a, b가 있다. 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$에 대하여 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있을 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a>1$이면 $b>1$이다.
ㄴ. $0<a<1$이면 $b<a$이다.
ㄷ. $ab<1$이면 $0<a<1$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[22008-0055]

3 함수 $y=2^{x-1}+3$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=-\dfrac{2}{2^x}+3$의 그래프 위의 두 점 C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 사각형 ABCD는 평행사변형이다.
(나) 삼각형 ABD의 무게중심의 x좌표는 $\dfrac{5}{3}$이고, 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는 $\dfrac{2}{3}$이다.

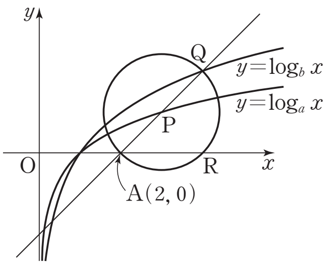
두 점 A, B와 선분 BD의 중점을 지나는 원의 중심의 좌표는 (a, b)이다. 두 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{b}{a}$의 값은?

(단, 선분 AC는 평행사변형 ABCD의 대각선이다.)

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

[22008-0056]

4 그림과 같이 1보다 큰 두 양수 a, b $(a>b)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 1인 직선이 두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 중심으로 하는 원을 C라 할 때, 원 C는 두 점 A, Q를 지난다. 이 원 C와 x축이 만나는 점 중 A가 아닌 점 R에 대하여 $\overline{\mathrm{AR}}=2$이다. $a+b$의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

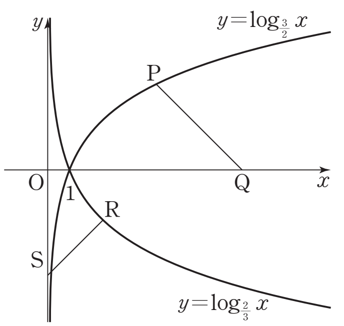
[22008-0057]

5 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 \dfrac{1}{m-x}$ $(m>2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 두 점 P, Q가 중심이 $(2,\ 0)$인 원 위에 있다. 두 점 P, Q의 x좌표의 곱을 a라 할 때, 두 상수 m, a에 대하여 $m+a$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22008-0058]

6 그림과 같이 곡선 $y=\log_{\frac{3}{2}} x$ 위의 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 또 곡선 $y=\log_{\frac{2}{3}} x$ 위의 제4사분면에 있는 점 R를 지나고 기울기가 1인 직선이 y축과 만나는 점을 S라 하자. 네 점 P, Q, R, S가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 P의 x좌표는? (단, O는 원점이다.)



(가) $\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{RS}}+\sqrt{2}$
(나) 두 점 P, R의 y좌표의 합은 1이다.

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

대표 기출 문제

출제 경향 밑의 크기에 따른 지수함수와 로그함수의 그래프의 개형과 평행이동, 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 방정식과 부등식을 푸는 문제가 출제된다.

$\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2021학년도 대수능

출제 의도 밑의 크기에 따른 로그함수의 그래프의 개형을 이해하고 교점의 좌표를 구하여 참, 거짓을 판단할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 ㄱ. 점 A의 x좌표는 $\log_a x=1$에서 $x=a$이므로 $A(a, 1)$

또 점 B의 x좌표는 $\log_{4a} x=1$에서 $x=4a$이므로 $B(4a, 1)$

그러므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times 4a-4\times a}{1-4}, \frac{1\times 1-4\times 1}{1-4}\right)$, 즉 $(0, 1)$이다. (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 선분 AB가 x축과 평행하므로 두 점 A, D의 x좌표는 같아야 한다.

한편, 점 D의 x좌표는 $\log_{4a} x=-1$에서 $x=\frac{1}{4a}$이므로 $D\left(\frac{1}{4a}, -1\right)$

이때 $A(a, 1)$이고 $\frac{1}{4}<a<1$이므로

$a=\frac{1}{4a}$, $a^2=\frac{1}{4}$, $a=\frac{1}{2}$ (참)

ㄷ. 점 C의 x좌표는 $\log_a x=-1$에서 $x=\frac{1}{a}$이므로 $C\left(\frac{1}{a}, -1\right)$

그러므로 $\overline{AB}<\overline{CD}$이면

$4a-a<\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}$, $3a<\frac{3}{4a}$, $a^2<\frac{1}{4}$

이때 $\frac{1}{4}<a<1$이므로 $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

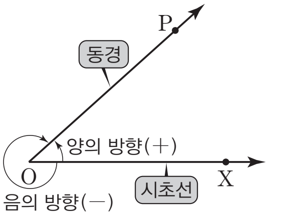
03 삼각함수

1. 일반각과 호도법

(1) 일반각

① 각과 각의 크기

평면에서 반직선 OP가 반직선 OX의 위치에서 점 O를 중심으로 회전할 때, 두 반직선 OX, OP로 이루어진 도형을 기호 ∠XOP로 나타내고, 회전한 양을 ∠XOP의 크기라고 한다. 이때 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다. 또 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시곗바늘이 도는 방향의 반대 방향을 양의 방향, 시곗바늘이 도는 방향을 음의 방향이라고 한다.



이때 각의 크기는 양의 방향일 때는 양의 부호 +, 음의 방향일 때는 음의 부호 −를 붙여서 나타낸다.

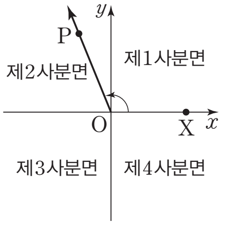
② 일반각

시초선 OX와 동경 OP에 의하여 ∠XOP가 주어질 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α°라 하면 ∠XOP의 크기는 다음과 같이 나타내고, 이것을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

$360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n은 정수)

③ 사분면의 각

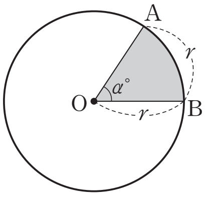
좌표평면에서 원점 O에 대하여 시초선 OX를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다.



(2) 호도법

① 호도법

중심이 O이고 반지름의 길이가 r인 원에서 호 AB의 길이가 r인 부채꼴 AOB의 중심각의 크기 α°를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.



참고 호도법으로 각의 크기를 나타낼 때는 단위인 라디안은 보통 생략한다.

② 육십분법과 호도법의 관계

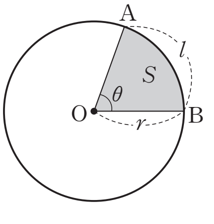
$1(\text{라디안})=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}(\text{라디안})$

설명 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 $2\pi r : r=360^\circ : \alpha^\circ$, $\alpha^\circ=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, 즉 $1(\text{라디안})=\dfrac{180^\circ}{\pi}$

③ 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

(i) $l=r\theta$　　　(ii) $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$

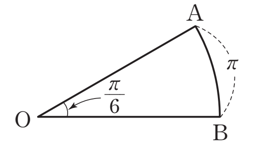


설명 호의 길이 l과 부채꼴의 넓이 S는 중심각의 크기 θ(라디안)에 비례하므로

(i) $l : 2\pi r=\theta : 2\pi$에서 $l=r\theta$　　　(ii) $S : \pi r^2=\theta : 2\pi$에서 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$

예제 1 호도법

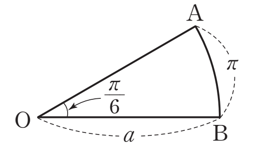
그림과 같이 중심이 O인 부채꼴 AOB에서 $\angle AOB=\frac{\pi}{6}$이고 호 AB의 길이는 π이다. 부채꼴 AOB의 반지름의 길이와 넓이가 각각 a, $b\pi$일 때, $a+b$의 값은?



① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

풀이 전략 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이를 이용하여 반지름의 길이를 구한 후 부채꼴의 넓이를 구한다.

풀이 부채꼴 AOB에서 $\angle AOB=\frac{\pi}{6}$이고 호 AB의 길이가 π이므로



$a\times\frac{\pi}{6}=\pi$

$a=6$

부채꼴 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times\pi=3\pi$이므로

$b=3$

따라서 $a+b=6+3=9$

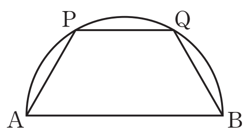
답 ②

유제

정답과 풀이 19쪽

1 [22008-0059]

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 호 AB를 삼등분하는 점을 점 A에 가까운 점부터 차례로 P, Q라 하자. 호 AQ의 길이가 8π일 때, 사각형 PABQ의 넓이는?



① $12\sqrt{3}$ ② $36\sqrt{3}$ ③ $72\sqrt{3}$ ④ $108\sqrt{3}$ ⑤ $144\sqrt{3}$

2 [22008-0060]

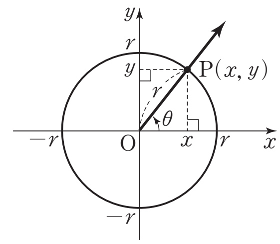
좌표평면에서 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 A$(3, 0)$이 있다. 반직선 OA 위의 점 P에 대하여 반직선 OP가 점 O를 중심으로 양의 방향으로 $\frac{13}{6}\pi$만큼 회전한 후 음의 방향으로 $\frac{7}{18}\pi$만큼 회전한 다음 원 $x^2+y^2=9$와 만나는 점을 B라 하자. 선분 AB를 포함하는 부채꼴 AOB의 넓이는?

(단, O는 원점이다.)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ π ④ 3π ⑤ 6π

2. 삼각함수의 정의

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r $(r>0)$인 원 위의 한 점을 P(x, y), x축의 양의 방향을 시초선으로 하였을 때 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.



$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

이때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 각각 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 이 함수들을 θ에 대한 삼각함수라고 한다.

설명 동경 OP가 나타내는 각의 크기 θ에 대하여 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$의 값은 각각 하나로 결정된다. 즉, 다음의 대응 관계는 각각 θ에 대한 함수가 된다.

$$\theta \longrightarrow \frac{y}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{x}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

이때 각 함수를 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

참고 (1) 각 사분면에서의 삼각함수의 부호는 다음 표와 같다.

사분면 / 삼각함수	제1사분면 $(x>0, y>0)$	제2사분면 $(x<0, y>0)$	제3사분면 $(x<0, y<0)$	제4사분면 $(x>0, y<0)$
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

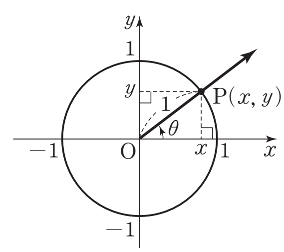
(2) $\tan\theta$는 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서 정의되지 않는다.

3. 삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

설명 각 θ가 나타내는 동경과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 P(x, y)라 하면 다음이 성립한다.



(1) $\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$이므로

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

(2) 점 P(x, y)가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=y^2+x^2=1$$

예제 2 삼각함수의 정의

좌표평면에서 직선 $\sqrt{3}x-3y=0$에 수직이고 원점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2=4$와 만나는 서로 다른 두 점 중 x좌표가 작은 점을 P, x좌표가 큰 점을 Q라 하자. 동경 OP가 나타내는 각을 α, 동경 OQ가 나타내는 각을 β라 할 때, $\sin\alpha\times\cos\beta$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

풀이 전략 조건을 만족시키는 두 점 P, Q의 좌표를 구한 후, 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin\alpha$, $\cos\beta$의 값을 구한다.

풀이 직선 $\sqrt{3}x-3y=0$에 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x$이므로 이것을 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(-\sqrt{3}x)^2=4$, $4x^2=4$, $x^2=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이것을 $y=-\sqrt{3}x$에 대입하면

$x=-1$일 때, $y=\sqrt{3}$, $x=1$일 때, $y=-\sqrt{3}$이므로

점 P의 좌표는 $(-1, \sqrt{3})$, 점 Q의 좌표는 $(1, -\sqrt{3})$

따라서 $\sin\alpha\times\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 ④

유제

정답과 풀이 19쪽

3 [22008-0061]

$\cos\theta=\frac{3}{5}$이고 $\cos\theta\times\left(\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)<0$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $-\frac{5}{4}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

4 [22008-0062]

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=x$가 제3사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.)

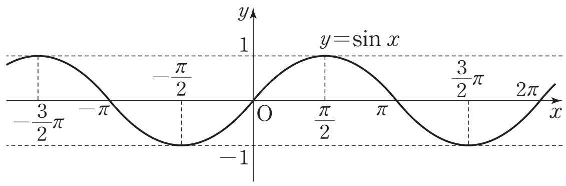
① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\sqrt{2}$

4. 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=\sin x$의 그래프

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

② 함수 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



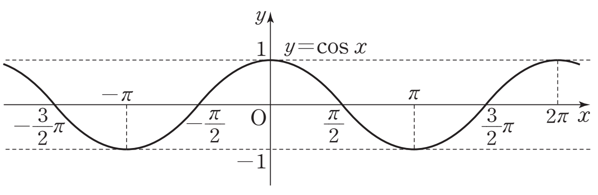
③ 모든 실수 x에 대하여 $\sin(2n\pi+x)=\sin x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

참고 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, 상수 p 중 최소인 양수를 함수 $f(x)$의 주기라고 한다.

(2) 함수 $y=\cos x$의 그래프

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

② 함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



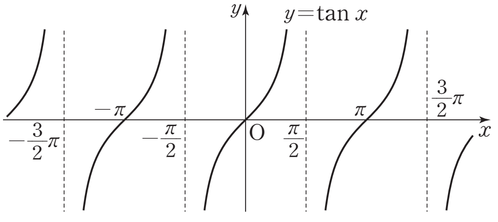
③ 모든 실수 x에 대하여 $\cos(2n\pi+x)=\cos x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) 함수 $y=\tan x$의 그래프

① 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $\tan(n\pi+x)=\tan x$ (n은 정수)이고, 주기가 π인 주기함수이다.



④ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

참고 여러 가지 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$, $y=a\tan x$ (a는 0이 아닌 상수)의 그래프

① 두 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$의 최솟값과 최댓값은 각각 $-|a|$, $|a|$이다.

② 함수 $y=a\tan x$의 최솟값과 최댓값은 없다.

(2) 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$, $y=\tan ax$ (a는 0이 아닌 상수)의 그래프

① 두 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|a|}$이다.

② 함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$이다.

예제 3 삼각함수의 그래프

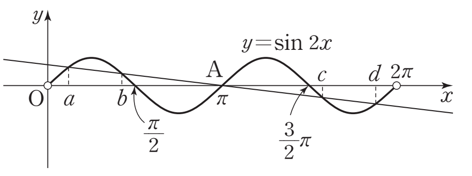
$0<x<2\pi$에서 점 $\mathrm{A}(\pi, 0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선이 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 점 A를 제외한 서로 다른 네 점에서 만난다. 이 네 점의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 할 때, $a+b=\frac{7}{13}\pi$이다. $c+d$의 값은?

$\left(\text{단, } a<\frac{\pi}{4}<b<\frac{\pi}{2}<c<d\right)$

① $\frac{19}{13}\pi$　② $\frac{51}{26}\pi$　③ $\frac{32}{13}\pi$　④ $\frac{77}{26}\pi$　⑤ $\frac{45}{13}\pi$

풀이 전략 함수 $y=\sin 2x$의 그래프의 대칭성과 주기를 이용하여 a, b, c, d 사이의 관계를 파악한다.

풀이 함수 $y=\sin 2x$는 주기가 π이므로 $0<x<2\pi$에서 점 $\mathrm{A}(\pi, 0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선과 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=\sin 2x$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(\pi, 0)$에 대하여 대칭이고 주기가 π이므로

$$c=\frac{3}{2}\pi+\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=2\pi-b,\ d=2\pi-a$$

따라서 $c+d=(2\pi-b)+(2\pi-a)=4\pi-(a+b)=4\pi-\frac{7}{13}\pi=\frac{45}{13}\pi$

답 ⑤

참고 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 점 $\mathrm{A}(\pi, 0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선이 모두 점 $\mathrm{A}(\pi, 0)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+d}{2}=\pi$, $\frac{b+c}{2}=\pi$에서 $c=2\pi-b$, $d=2\pi-a$

유제

정답과 풀이 20쪽

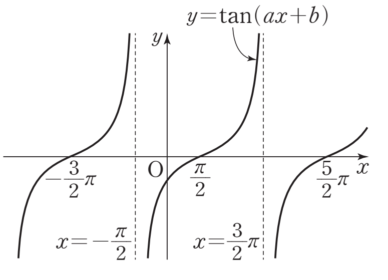
5
[22008-0063]

함수 $y=-2\cos(ax+b)+b$는 주기가 6π이고 최댓값이 5이다. 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? (단, $a>0$)

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

6
[22008-0064]

함수 $y=\tan(ax+b)$의 그래프가 그림과 같을 때, ab의 값은? (단, $a>0$, $0<b<\pi$)



① $\frac{3}{8}\pi$　② $\frac{3}{4}\pi$　③ $\frac{9}{8}\pi$
④ $\frac{3}{2}\pi$　⑤ $\frac{15}{8}\pi$

5. 삼각함수의 성질

(1) $2n\pi+\theta$의 삼각함수 (단, n은 정수)

① $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$ ② $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$ ③ $\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$

(2) $-\theta$의 삼각함수

① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ② $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

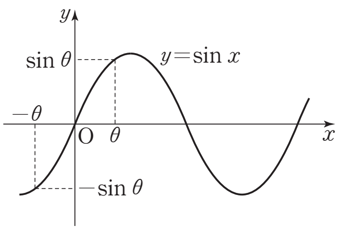
(3) $\pi+\theta$의 삼각함수

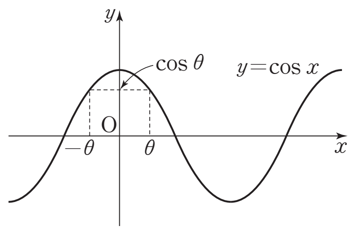
① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ ② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ ③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

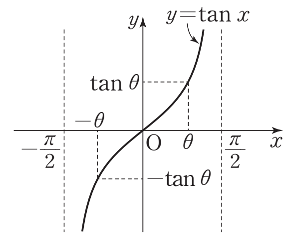
(4) $\frac{\pi}{2}+\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ ② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

설명 (2) 함수 $y=\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\cos(-\theta)=\cos\theta$
함수 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\tan(-\theta)=-\tan\theta$





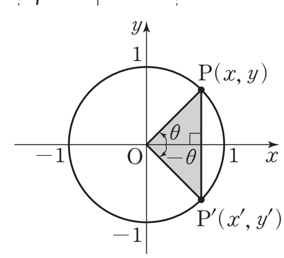


참고 각 θ와 각 $-\theta$가 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면 점 P와 점 P′은 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $x'=x$, $y'=-y$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\theta\ (x\neq 0)$



참고 위의 (3), (4)의 식에 θ 대신 $-\theta$를 대입하면 다음이 성립한다.

(3) $\sin(\pi-\theta)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$

예제 4 삼각함수의 성질

$\tan(-\theta)\times\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{1}{4}$이고 $\sin(-\theta)\times\cos\theta>0$일 때, $\sin(\pi+\theta)\times\cos(-\theta)$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{15}}{16}$ ② $-\frac{1}{16}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{16}$

풀이 전략 삼각함수의 성질을 이용하여 θ에 대한 삼각함수로 나타낸 후 삼각함수의 값을 구한다.

풀이 $\tan(-\theta)\times\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{1}{4}$에서

$-\tan\theta\times(-\cos\theta)=\frac{1}{4}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos\theta=\frac{1}{4}$, $\sin\theta=\frac{1}{4}$

한편, $\sin(-\theta)\times\cos\theta>0$에서

$-\sin\theta\times\cos\theta>0$, $\sin\theta\times\cos\theta<0$

이때 $\sin\theta=\frac{1}{4}>0$이므로 $\cos\theta<0$

그러므로 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 $\sin(\pi+\theta)\times\cos(-\theta)=-\sin\theta\times\cos\theta=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{16}$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 20쪽

7 [22008-0065]

$\tan(\pi-\theta)=\frac{4}{3}$이고 $\sin\theta<0$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

8 [22008-0066]

$\cos(\pi+\theta)-\cos(2\pi-\theta)=\frac{4}{3}$이고 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)<0$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\tan(2\pi-\theta)$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ 1

6. 삼각함수의 활용

(1) 방정식에의 활용

방정식 $2\sin x=1$, $\tan x=-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 방정식을 $\sin x=k$ ($\cos x=k$, $\tan x=k$)의 꼴로 변형한다.

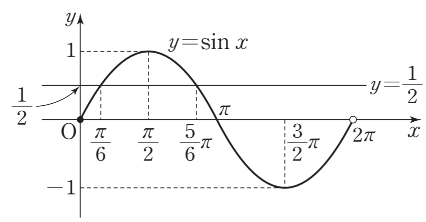
② 주어진 범위에서 삼각함수 $y=\sin x$ ($y=\cos x$, $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$를 그린 후 두 그래프의 교점의 x좌표를 찾아서 해를 구한다.

예 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해를 구해 보자.

방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이다.

그러므로 오른쪽 그림에서 구하는 해는

$$x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi$$

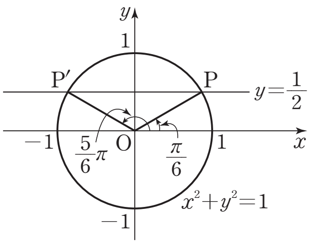


참고 단위원을 이용하는 방법

단위원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=\frac{1}{2}$이 만나는 두 점을 P, P′이라 할 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 두 동경 OP, OP′이 나타내는 각의 크기이다.

(단, O는 원점이다.)

그러므로 오른쪽 그림에서 구하는 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$



(2) 부등식에의 활용

부등식 $2\sin x<1$, $2\sin x>-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 부등식을 $\sin x>k$ ($\sin x\ge k$, $\sin x<k$, $\sin x\le k$)의 꼴로 변형한다.

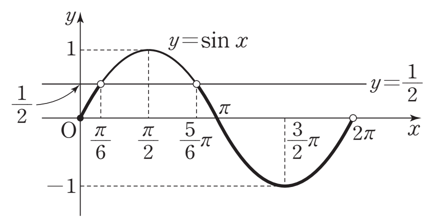
② 주어진 범위에서 삼각함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하여 해를 구한다. 이때 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구하여 해를 구한다.

예 $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\sin x<\frac{1}{2}$의 해를 구해 보자.

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

이때 부등식 $\sin x<\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$$0\le x<\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi<x<2\pi$$



참고 (1) 삼각함수를 포함한 부등식도 삼각함수를 포함한 방정식과 마찬가지로 단위원을 이용하여 풀 수 있다.

(2) 두 개 이상의 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식은 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 등을 이용하여 하나의 삼각함수로 변형하여 풀면 편리하다.

예제 5 삼각함수의 활용

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-1=0$을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 합은?

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

풀이 전략 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$과 삼각함수의 성질을 이용하여 하나의 삼각함수만 있는 방정식으로 나타낸 후 방정식을 푼다.

풀이 $2\cos^2 x+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-1=0$에서

$2\cos^2 x+\sin x-1=0$

$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1=0$

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

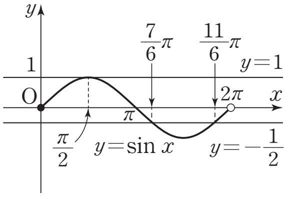
$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이고, 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$



답 ④

유제

정답과 풀이 21쪽

9 [22008-0067]

$0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\cos^2 x-\sin^2 x+3\cos x-1<0$을 만족시키는 해가 $\alpha<x<\beta$이다. $\cos(\beta-\alpha)$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10 [22008-0068]

$0\le x<2\pi$이고 $\cos x\ne 0$일 때, 방정식 $\sin x\tan x=\cos x$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 합은?

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

Level 1 기초 연습

[22008-0069]

1 중심이 O인 원 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 반직선 OA를 시초선으로 했을 때, 각 $\frac{\pi}{4}$를 나타내는 동경이 원과 만나는 점을 P라 하자. 호 AB의 길이가 호 AP의 길이의 2배가 될 때, 삼각형 AOB의 넓이는 2이다. 선분 AP를 포함하는 부채꼴 AOP의 넓이는?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

[22008-0070]

2 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(-5,\ 12)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

(단, O는 원점이다.)

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ $\frac{2}{13}$ ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

[22008-0071]

3 $x^2-3\pi x+2\pi^2<0$이고 $\cos x=\frac{3}{4}$일 때, $\tan x$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{7}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[22008-0072]

4 함수 $y=a\cos bx+c$의 최댓값은 3, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다. 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 abc의 값은?

(단, $a>0,\ b>0$)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[22008-0073]

5 $0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin 3x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{4}$과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 a, b라 하고, 직선 $y=-\frac{1}{4}$과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 c, d라 하자. $\cos(a+b+c+d)$의 값은? (단, $a<b$, $c<d$)

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[22008-0074]

6 $\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\tan^2\left(\frac{7}{6}\pi\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

[22008-0075]

7 $\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{2}{5}\pi+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7}{5}\pi\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6}{5}\pi\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[22008-0076]

8 $0<\theta<2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

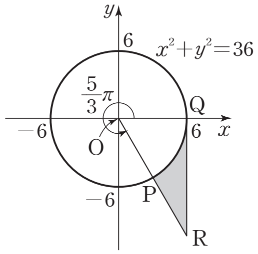
$$4x^2-(4\sin\theta)x+\cos\theta+1=0$$

이 중근을 갖도록 하는 서로 다른 모든 θ의 값의 합은?

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

[22008-0077]

1 그림과 같이 좌표평면 위의 원점 O에서 x축의 양의 방향을 시초선으로 할 때, 각 $\frac{5}{3}\pi$를 나타내는 동경과 원 $x^2+y^2=36$이 만나는 점을 P라 하자. 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점 Q(6, 0)에서의 접선과 동경 OP가 만나는 점을 R라 할 때, 호 PQ와 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 색칠한 도형의 넓이는?



① $12\sqrt{3}-6\pi$　② $12\sqrt{3}-3\pi$　③ $18\sqrt{3}-6\pi$
④ $18\sqrt{3}-3\pi$　⑤ $24\sqrt{3}-6\pi$

[22008-0078]

2 $0<\theta<2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 각 θ에 대하여 $\sin(\theta-\pi)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$의 값은?

(가) 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 서로 일치한다.
(나) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

① $-\sqrt{3}$　② $-\sqrt{2}$　③ -1　④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

[22008-0079]

3 $\sin\theta>0$이고 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=-6$일 때, $\sin\theta\times\tan\theta$의 값은?

① $-\frac{8}{3}$　② $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　③ $-\frac{1}{3}$　④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

[22008-0080]

4 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\tan^2\theta-8\tan\theta+1=0$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　② -1　③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $-\frac{1}{2}$

[22008-0081]

5 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$을 지나고 기울기가 양수인 직선이 함수 $y=\tan x$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, $\beta-2\alpha=2\pi$이다. $\tan(\alpha+2\beta)$의 값은? (단, $\alpha<\beta$)

① $-\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

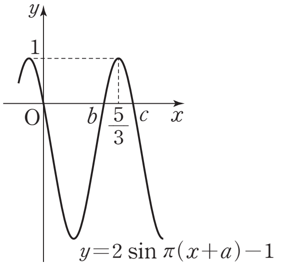
[22008-0082]

6 $0<x<2\pi$에서 두 함수 $y=\cos x$, $y=\cos 3x$의 그래프의 교점의 개수를 a라 하고, 두 함수 $y=\cos x$, $y=\cos 4x$의 그래프의 교점의 개수를 b라 하자. $a+b$의 값을 구하시오.

[22008-0083]

7 세 상수 a, b, c에 대하여 그림과 같이 원점을 지나는 함수 $y=2\sin\pi(x+a)-1$의 그래프가 x축의 양의 방향과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 b, c라 하자. $a+b+c=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<a<1$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[22008-0084]

8 어떤 실수 a에 대하여 방정식 $\tan\frac{\pi}{2}x=a$는 정수인 해를 갖는다. 이 방정식의 10 이하의 모든 자연수인 해의 합을 구하시오.

[22008-0085]

9 두 함수 $f(x)=\log_2 x+1$, $g(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$에 대하여 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{6}\pi$에서 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[22008-0086]

10 $0\le x<2\pi$에서 방정식 $\left|\cos 2x+\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$을 만족시키는 x의 최댓값과 최솟값은 각각 a, b이고, 서로 다른 모든 x의 값의 합은 c이다. $\frac{c}{a+b}$의 값을 구하시오.

[22008-0087]

11 $2\le n\le 6$인 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}x$, $g(x)=\left|\tan\frac{\pi}{n}x\right|$의 그래프가 $0\le x\le 4$에서 만나는 점의 개수가 홀수일 때, n의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[22008-0088]

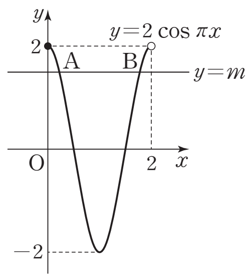
12 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\sin^2 x-4\sin x+7-k\ge 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[22008-0089]

1 그림과 같이 $0 \le x < 2$일 때, 함수 $y=2\cos \pi x$의 그래프와 직선 $y=m$ $(0<m<2)$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 직선 OA의 기울기가 직선 OB의 기울기의 7배일 때, 선분 AB의 길이를 n이라 하자. $m^2 \times n$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)



[22008-0090]

2 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=-\cos^2 x-2a\sin x+a+4$의 최솟값을 $f(a)$라 하자. 방정식 $3f(a)-a+4=0$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[22008-0091]

3 5 이하의 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=\cos 2\pi x$, $g(x)=2\sin \frac{\pi}{n}x$가 있다. $0<x<8$에서 방정식 $(f \circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 10일 때, n의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식에 관련된 문제가 출제되고 있다.

$0 \le x < 4\pi$일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

① 5π　　② 6π　　③ 7π　　④ 8π　　⑤ 9π

2021학년도 대수능

출제 의도 삼각함수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$이므로 주어진 방정식은

$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$$

$2\sin x + 3 > 0$이므로

$$2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

이때 $0 \le x < 4\pi$이므로

$$x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5}{6}\pi,\ x = 2\pi + \frac{\pi}{6},\ x = 2\pi + \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + 2\pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi + \frac{5}{6}\pi = 6\pi$$

답 ②

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 삼각함수의 성질에 관한 문제 또는 이를 이용하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 출제되고 있다.

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

2019학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned} f(x)&=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k \\ &=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k \\ &=\cos^2\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k \\ &=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k \\ &=1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k \end{aligned}$$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t\ (-1\le t\le 1)$이라 하면

$$\begin{aligned} f(x)&=-t^2-t+k+1 \\ &=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4} \end{aligned}$$

이므로 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 갖고, $t=1$일 때 최솟값 $k-1$을 갖는다.

따라서 $k+\frac{5}{4}=3$에서 $k=\frac{7}{4}$이고, $m=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$이므로

$$k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$$

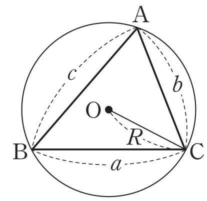
답 ③

04 사인법칙과 코사인법칙

1. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

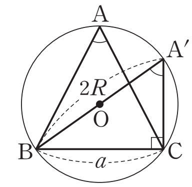
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



참고 삼각형 ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 한다.

설명 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 할 때, 등식 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립함을 ∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수 있다.

(i) $0^\circ<A<90^\circ$일 때



점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 $A=A'$이므로

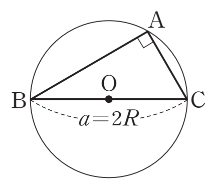
$\sin A=\sin A'$

삼각형 A′BC에서 ∠BCA′=90°이므로

$\sin A'=\frac{\overline{\text{BC}}}{\overline{\text{BA}'}}=\frac{a}{2R}$

따라서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 즉 $\frac{a}{\sin A}=2R$

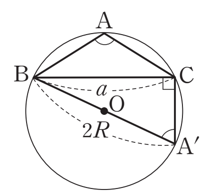
(ii) $A=90^\circ$일 때



$\sin A=\sin 90^\circ=1$이므로 $a=2R$

따라서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{2R}{1}=2R$

(iii) $90^\circ<A<180^\circ$일 때



점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 $A+A'=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-A'$

즉, $\sin A=\sin(180^\circ-A')=\sin A'$

삼각형 A′BC에서 ∠A′CB=90°이므로

$\sin A'=\frac{\overline{\text{BC}}}{\overline{\text{BA}'}}=\frac{a}{2R}$

따라서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 즉 $\frac{a}{\sin A}=2R$

(i), (ii), (iii)에서 ∠A의 크기에 관계없이 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립한다.

같은 방법으로 $\frac{b}{\sin B}=2R$, $\frac{c}{\sin C}=2R$도 성립한다.

예 ∠ABC=60°인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접할 때, 선분 AC의 길이를 구해 보자.

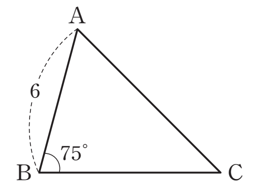
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{AC}}}{\sin(\angle\text{ABC})}=2\times1$$

즉, $\frac{\overline{\text{AC}}}{\sin 60^\circ}=2$이므로 $\overline{\text{AC}}=2\times\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

예제 1 사인법칙

그림과 같이 $\angle ABC=75^\circ$이고 $\overline{AB}=6$인 삼각형 ABC에서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 18π일 때, 선분 BC의 길이는?



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

풀이 전략

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

풀이

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 18π이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2\times3\sqrt{2},\ \frac{6}{\sin C}=6\sqrt{2},\ \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0^\circ<C<105^\circ$이므로 $C=45^\circ$

$$A=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=6\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{BC}=6\sqrt{2}\times\sin 60^\circ=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$

답 ④

유제

정답과 풀이 31쪽

1 [22008-0092]

삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접하고 $\sin A+\sin B+\sin C=2$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2 [22008-0093]

$\overline{AB}=\overline{AC}=3$인 삼각형 ABC의 외심을 O라 하자. $4\cos^2 A-5\sin A+2=0$을 만족시킬 때, 삼각형 OAB의 외접원의 반지름의 길이는?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

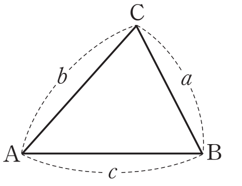
2. 코사인법칙

삼각형 ABC에서

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

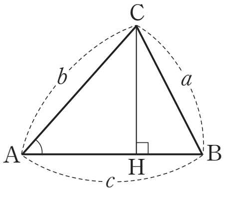
(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



설명 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 등식 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립함을 $\angle$A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수 있다.

(i) $0^\circ<A<90^\circ$일 때



직각삼각형 CAH에서

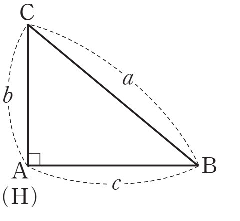
$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$, $\overline{\mathrm{AH}}=b\cos A$

또 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AH}}=c-b\cos A$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A\\&=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(ii) $A=90^\circ$일 때

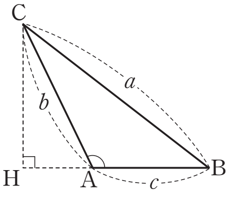


직각삼각형 ABC에서

$\cos A=\cos 90^\circ=0$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(iii) $90^\circ<A<180^\circ$일 때



직각삼각형 ACH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A$, $\overline{\mathrm{AH}}=b\cos(180^\circ-A)=-b\cos A$

또 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AH}}=c-b\cos A$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A\\&=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 $\angle$A의 크기에 관계없이

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

가 성립한다.

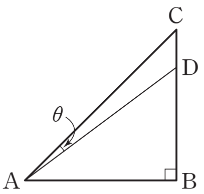
같은 방법으로

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

도 성립한다.

예제 2 코사인법칙

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\angle ABC=90^\circ$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하자. $\angle CAD=\theta$라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

풀이 전략

삼각형 ABC에서

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

풀이

선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점이 D이므로 양수 k에 대하여

$\overline{BD}=3k$, $\overline{CD}=k$라 하자.

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}=4k$이고

$\overline{AC}=4\sqrt{2}k$, $\overline{AD}=5k$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

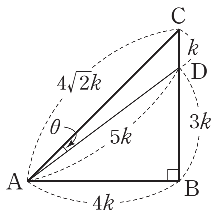
$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\theta$

이므로 $k^2=(4\sqrt{2}k)^2+(5k)^2-2\times4\sqrt{2}k\times5k\times\cos\theta$

$k^2>0$이므로 양변을 k^2으로 나누면

$1=32+25-40\sqrt{2}\cos\theta$

따라서 $\cos\theta=\frac{56}{40\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$



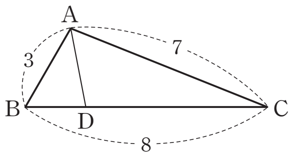
답 ⑤

유제

정답과 풀이 31쪽

3 [22008-0094]

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 D라 할 때, $\overline{AD}^2$의 값을 구하시오.



4 [22008-0095]

삼각형 ABC에서 $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$이고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $7\sqrt{3}$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 구하시오.

3. 삼각형의 모양

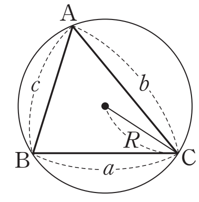
삼각형 ABC의 모양은 각의 크기 A, B, C에 대한 식을 변의 길이 a, b, c에 대한 식으로 고쳐서 알아본다.

(1) 사인법칙을 이용하는 경우

① 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

② $a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$



설명 ① 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\frac{a}{\sin A}=2R$에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$

$\frac{b}{\sin B}=2R$에서 $\sin B=\frac{b}{2R}$

$\frac{c}{\sin C}=2R$에서 $\sin C=\frac{c}{2R}$

② ①에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$$\sin A : \sin B : \sin C=\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}=a : b : c$$

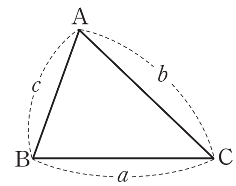
(2) 코사인법칙을 이용하는 경우

삼각형 ABC에서

① $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

② $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

③ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



설명 코사인법칙에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$에서

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

같은 방법으로 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$도 성립한다.

예 삼각형 ABC가 $a\cos A=b\cos B$를 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 모양을 조사해 보자.

코사인법칙에 의하여 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 $a\cos A=b\cos B$에서

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$a^2\times(b^2+c^2-a^2)=b^2\times(c^2+a^2-b^2)$$

정리하면 $(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

이때 $a+b\neq 0$이므로 $a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

예제 3 삼각형의 모양

자연수 n에 대하여 $\overline{AB}=n$, $\overline{BC}=n+2$, $\overline{CA}=n+4$인 삼각형 ABC가 둔각삼각형이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

풀이 전략

삼각형 ABC에서 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

풀이

세 선분 AB, BC, CA가 삼각형의 세 변이므로

$\overline{AB}=n$, $\overline{BC}=n+2$, $\overline{CA}=n+4$에서 $n+(n+2)>n+4$

$n>2$ …… ㉠

삼각형 ABC의 세 각 중 크기가 최대인 각이 $\angle$ABC이므로 삼각형 ABC가 둔각삼각형이 되려면

$90^\circ<B<180^\circ$

즉, $-1<\cos B<0$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{n^2+(n+2)^2-(n+4)^2}{2n(n+2)}=\frac{(n+2)(n-6)}{2n(n+2)}=\frac{n-6}{2n}$$

$-1<\frac{n-6}{2n}<0$에서 $2n>0$이므로 $-2n<n-6<0$

$2<n<6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<n<6$

따라서 자연수 n의 값은 3, 4, 5이고 그 합은 $3+4+5=12$

답 ②

유제

정답과 풀이 32쪽

5 [22008-0096]

$\overline{AB}=4$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

(가) $b\cos C=c\cos B$

(나) $\cos^2(A+B)=\cos^2 A+\sin^2 B$

6 [22008-0097]

삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan A$의 값은?

(가) $\sin A+\sin B\cos(A+B)=0$

(나) $2\sin A=\sin C$

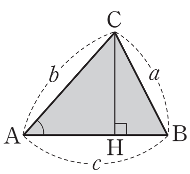
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

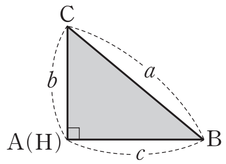
4. 삼각형의 넓이

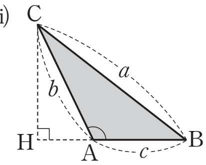
삼각형 ABC에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

설명 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 ∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 생각한다.

(i)


(ii)


(iii)


(i) $0^\circ<A<90^\circ$일 때

$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$

(ii) $A=90^\circ$일 때

$\sin A=\sin 90^\circ=1$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=b=b\sin A$

(iii) $90^\circ<A<180^\circ$일 때

$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A$

(i), (ii), (iii)에서 ∠A의 크기에 관계없이 $\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

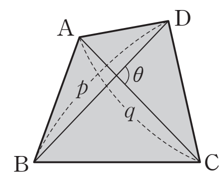
같은 방법으로

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B,\ S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

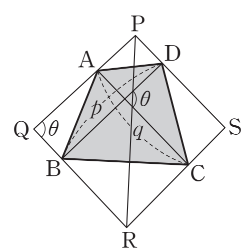
도 성립한다.

참고 그림과 같은 사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 각각 p, q이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

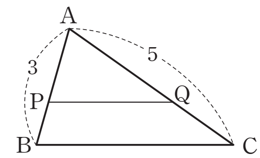


설명 그림과 같이 대각선 BD와 평행하고 두 점 A, C를 지나는 직선을 각각 그리고, 대각선 AC와 평행하고 두 점 B, D를 지나는 직선을 각각 그린다.
네 직선이 만나는 점을 각각 P, Q, R, S라 하면 사각형 PQRS는 평행사변형이다.
따라서 사각형 ABCD의 넓이는 사각형 PQRS의 넓이의 $\frac{1}{2}$이고, 삼각형 PQR의 넓이도 사각형 PQRS의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 PQR의 넓이는 같다.
즉, $S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\theta$



예제 4 삼각형의 넓이

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$, $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{3}$인 삼각형 ABC의 선분 AB 위의 점 P와 선분 AC 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overline{PQ}^2=m+n\sqrt{6}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m과 n은 유리수이다.)



(가) 선분 PQ는 삼각형 ABC의 넓이를 이등분한다.
(나) 삼각형 APQ의 둘레의 길이와 사각형 PBCQ의 둘레의 길이는 같다.

풀이 전략 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$

풀이 $\overline{AP}=x\ (0<x<3)$, $\overline{AQ}=y\ (0<y<5)$라 하면

조건 (가)에서 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 APQ의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin(\angle BAC)=2\times\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin(\angle BAC)$, 즉 $xy=\frac{15}{2}$ …… ㉠

또 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)=3^2+5^2-2\times3\times5\times\frac{1}{3}=24$$

이므로 $\overline{BC}=2\sqrt{6}$

한편, $\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$이므로 $\overline{BP}=3-x$, $\overline{CQ}=5-y$

조건 (나)에서 $\overline{AP}+\overline{AQ}+\overline{PQ}=\overline{PQ}+\overline{BP}+\overline{BC}+\overline{CQ}$이므로

$x+y=(3-x)+2\sqrt{6}+(5-y)$, 즉 $x+y=4+\sqrt{6}$ …… ㉡

따라서 삼각형 APQ에서 코사인법칙과 ㉠, ㉡을 이용하면

$$\overline{PQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\cos(\angle BAC)=x^2+y^2-2xy\times\frac{1}{3}$$
$$=(x+y)^2-\frac{8}{3}xy=(4+\sqrt{6})^2-\frac{8}{3}\times\frac{15}{2}=2+8\sqrt{6}$$

즉, $m=2$, $n=8$이므로 $m+n=2+8=10$

답 10

유제

정답과 풀이 32쪽

7 [22008-0098]

$\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=4$인 삼각형 ABC에서 $\cos(A+B)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

8 [22008-0099]

$\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$, $\overline{CA}>\sqrt{5}$인 둔각삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{\sqrt{7}}{4}$일 때, $\overline{CA}^2$의 값을 구하시오.

Level 1 기초 연습

[22008-0100]

1 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4$, $\angle CAB=100^\circ$, $\angle ABC=35^\circ$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}$　③ 4　④ $2\sqrt{5}$　⑤ $2\sqrt{6}$

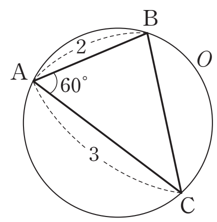
[22008-0101]

2 삼각형 ABC에서 $2\sin A=2\sqrt{3}\sin B=\sqrt{3}\sin C$가 성립할 때, $\cos A$의 값은?

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ 1

[22008-0102]

3 그림과 같이 삼각형 ABC가 원 O에 내접하고 있다. $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$, $\angle BAC=60^\circ$일 때, 원 O의 넓이는?



① 2π　② $\frac{7}{3}\pi$　③ $\frac{8}{3}\pi$

④ 3π　⑤ $\frac{10}{3}\pi$

[22008-0103]

4 둔각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=2\sqrt{3}$, $\angle BCA=30^\circ$일 때, 선분 BC의 길이는?

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

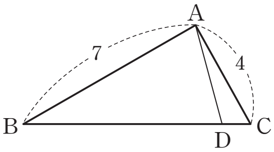
[22008-0104]

5 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\angle CAB=60^\circ$인 삼각형 ABC의 넓이는?

① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ 4

[22008-0105]

6 그림과 같이 $\overline{AB}=7$, $\overline{AC}=4$인 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle DAB):\sin(\angle CAD)=4:1$이다. 삼각형 ABD의 넓이를 S, 삼각형 ADC의 넓이를 T라 할 때, $\frac{S}{T}$의 값을 구하시오.



[22008-0106]

7 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) $\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=6$
(나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이다.

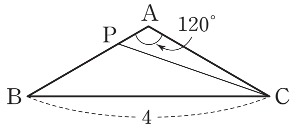
[22008-0107]

8 $\angle DAB=30^\circ$인 마름모 ABCD의 넓이가 18일 때, $\overline{AC}^2=m+n\sqrt{3}$이다. $m+n$의 값을 구하시오.

(단, m과 n은 유리수이다.)

[22008-0108]

1 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\angle CAB=120°$, $\overline{BC}=4$인 삼각형 ABC에서 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\cos(\angle CPB)$의 값은? (단, 점 P는 점 A와 점 B가 아니다.)

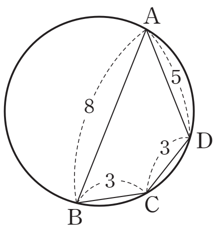


① $-\frac{3\sqrt{2}}{7}$ ② $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ ③ $-\frac{2\sqrt{6}}{7}$

④ $-\frac{3\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{30}}{7}$

[22008-0109]

2 그림과 같이 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=3$, $\overline{DA}=5$인 사각형 ABCD의 외접원의 넓이는?

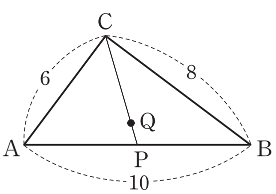


① 16π ② $\frac{49}{3}\pi$ ③ $\frac{50}{3}\pi$

④ 17π ⑤ $\frac{52}{3}\pi$

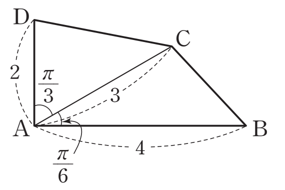
[22008-0110]

3 그림과 같이 $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=6$인 삼각형 ABC에서 선분 AB의 중점을 P, 선분 CP를 4 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자. 세 점 B, C, Q를 지나는 원의 반지름의 길이를 R라 할 때, R^2의 값을 구하시오.



[22008-0111]

4 그림과 같이 한 평면 위에 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$, $\overline{AD}=2$이고, $\angle CAB=\frac{\pi}{6}$, $\angle DAC=\frac{\pi}{3}$인 네 점 A, B, C, D가 있다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? $\left(\text{단, } \angle DAB=\frac{\pi}{2}\right)$



보기

ㄱ. 세 점 A, C, D를 지나는 원의 넓이는 $\frac{7}{3}\pi$이다.

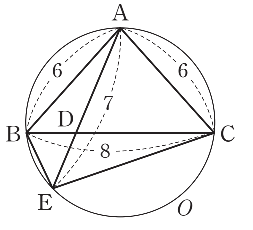
ㄴ. 점 C를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점을 C′이라 하면 $\overline{CC'}=3\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 직선 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{CP}+\overline{DP}$의 최솟값은 $\sqrt{19}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[22008-0112]

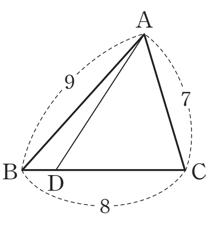
5 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=8$인 삼각형 ABC가 원 O에 내접하고 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여 직선 AD가 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 할 때, $\overline{EA}=7$이다. $9(\overline{EB}^2+\overline{EC}^2)$의 값을 구하시오.



[22008-0113]

6 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle ADC)=\frac{3\sqrt{5}}{8}$일 때, $\overline{BD}=p+q\sqrt{19}$이다. $p\times q$의 값은?

(단, p와 q는 유리수이다.)



① -9 ② -6 ③ -3

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{3}$

[22008-0114]

7 2보다 큰 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=n^2-2n$, $\overline{\mathrm{CA}}=n+4$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $\cos^2 B+\sin^2 C=1$	(나) $\cos B+\cos C=1$

① 8　② 16　③ $16\sqrt{3}$　④ 32　⑤ $32\sqrt{3}$

[22008-0115]

8 넓이가 4인 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 대각선 AC, BD에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}=10$
(나) 두 대각선 AC, BD가 이루는 예각의 크기는 $30°$이다.

$\overline{\mathrm{AC}}<\overline{\mathrm{BD}}$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값은?

① $\dfrac{3}{2}$　② $\dfrac{7}{3}$　③ 3　④ 4　⑤ 9

[22008-0116]

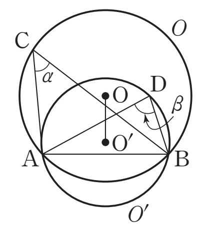
9 $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $\sqrt{2}\sin A=\sin B$	(나) $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

① $\sqrt{6}$　② $\sqrt{7}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

[22008-0117]

1 그림과 같이 한 평면에서 선분 AB를 공통변으로 갖는 두 삼각형 ABC, ABD의 외접원을 각각 O, O'이라 하고 $\angle ACB=\alpha$, $\angle ADB=\beta$라 할 때, 두 원 O, O'과 두 각의 크기 α, β는 다음 조건을 만족시킨다.



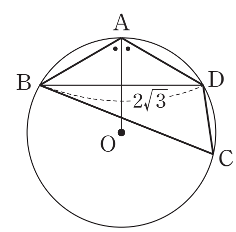
(가) $4\sin\alpha=3\sin\beta$, $\cos(\beta-\alpha)=\frac{5}{6}$
(나) 두 원 O, O'의 넓이의 합은 25π이다.

두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O′이라 할 때, 선분 OO′의 길이는?
(단, 점 C는 원 O'의 외부에 있고, 점 D는 원 O의 내부에 있다.)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

[22008-0118]

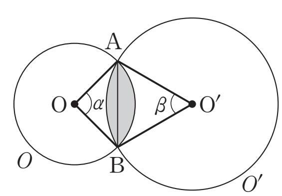
2 그림과 같이 $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$, $\overline{BD}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}+\overline{CD}=4\sqrt{2}$인 사각형 ABCD에서 $\angle DAB$의 이등분선이 사각형 ABCD의 외접원의 중심 O를 지난다. 사각형 ABCD의 넓이는?



① $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{17\sqrt{3}}{3}$

[22008-0119]

3 그림과 같이 한 평면 위에 길이가 $3\sqrt{2}$인 선분 AB를 공통현으로 갖는 두 원 O, O'이 있다. 두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle AOB=\alpha$, $\angle AO'B=\beta$라 할 때, $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\times\sin\frac{\beta}{2}$이고 사각형 AOBO′의 둘레의 길이가 $6\sqrt{2}+6$이다. 두 원 O, O'의 공통부분의 넓이는?
(단, 원 O의 중심 O는 원 O'의 외부에 있다.)



① $\frac{13}{4}\pi-3\sqrt{3}-\frac{9}{2}$ ② $\frac{13}{4}\pi-3\sqrt{3}-3$ ③ $\frac{21}{4}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{2}$
④ $\frac{21}{4}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}-3$ ⑤ $\frac{25}{4}\pi-3\sqrt{3}-\frac{9}{2}$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 삼각형에서 사인법칙을 이용하여 선분의 길이, 각의 크기 또는 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제되고 있다.

$\overline{AB}=8$이고 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{6}$ ② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 삼각형의 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어졌을 때 사인법칙을 이용하여 다른 한 변의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 삼각형 ABC에서 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$이므로

$$\angle C=180^\circ-(45^\circ+15^\circ)=120^\circ$$

이때 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle C)}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle A)}$이므로

$$\frac{8}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}$$

따라서 $\overline{BC}=\frac{8}{\sin 120^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$

답 ③

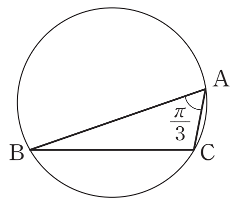
대표 기출 문제

EBS

출제 경향 삼각형에서 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이, 각의 크기 또는 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제되고 있다.

$\angle A = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오.

[4점]



2021학년도 대수능

출제 의도 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2 \times 7$$

$$\overline{BC} = 14 \times \sin\frac{\pi}{3} = 7\sqrt{3} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편, $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$이므로

$\overline{AC} = k\ (k>0)$이면 $\overline{AB} = 3k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= (3k)^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \frac{1}{2}$$

$$= 7k^2 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$7k^2 = (7\sqrt{3})^2$$

$$7k^2 = 147$$

따라서 $k^2 = 21$

답 21

05 등차수열과 등비수열

1. 수열의 뜻과 일반항

(1) 자연수 중 짝수를 차례로 나열하면

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$

이다. 이와 같이 차례로 나열한 수의 열을 수열이라 하고, 수열을 이루는 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다.

(2) 수열을 나타낼 때는 각 항에 번호를 붙여

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

과 같이 나타내며, 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$이라고 한다. 이때 n의 식으로 나타낸 제n항 a_n을 수열의 일반항이라 하며, 일반항이 a_n인 수열을 간단히 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

2. 등차수열의 뜻과 일반항

(1) 등차수열의 뜻: 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라고 한다.

(2) 등차수열의 일반항: 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

설명 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 각 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &a_1=a \\ &a_2=a_1+d=a+d \\ &a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d \\ &a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

이므로 일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

예 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=3+(n-1)\times 4=4n-1$

3. 등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등차중항이면 $b-a=c-b$이므로

$$2b=a+c,\ \text{즉}\ b=\frac{a+c}{2}$$

가 성립한다. 역으로 $b=\dfrac{a+c}{2}$이면 $b-a=c-b$이므로 b는 a와 c의 등차중항이다.

예 세 수 4, x, 12가 이 순서대로 등차수열을 이루면 x는 4와 12의 등차중항이므로

$$x=\frac{4+12}{2}=8$$

예제 1 등차수열의 일반항

모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이다.
(나) $a_3 \times a_5 = a_2{}^2 + 3$

모든 a_{10}의 값의 합을 구하시오.

풀이 전략

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = a + (n-1)d \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

풀이

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 a와 d는 모두 정수이고

조건 (가)에서 $a_n < a_{n+1}$이므로 $d > 0$이다.

조건 (나)에서

$$(a+2d)(a+4d) = (a+d)^2 + 3$$

정리하면 $4ad + 7d^2 = 3$

$d(4a+7d) = 3$에서 d는 자연수이므로 $d=1$ 또는 $d=3$이다.

$d=1$인 경우 $4a+7=3$에서 $a=-1$

$d=3$인 경우 $4a+21=1$에서 $a=-5$

따라서 $a_{10} = a + 9d$이므로 a_{10}의 값은 8 또는 22이고, 그 합은

$$8 + 22 = 30$$

답 30

유제

정답과 풀이 41쪽

1 [22008-0120]

등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_6 + a_7 = 7, \ a_7 + a_8 = 9$$

를 만족시킬 때, a_7의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

2 [22008-0121]

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d \neq 0)$이라 하자.

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 160$$

일 때, $a \times d$의 최댓값은?

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

4. 등차수열의 합

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

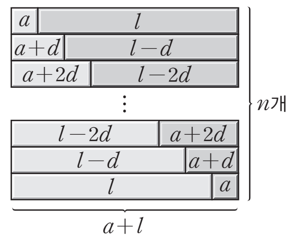
$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

설명 (1) 첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 우변의 합의 순서를 거꾸로 나타내면

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \qquad \cdots\cdots ㉡$$



㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \\ +) & S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \\ \hline & 2S_n=\underbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)}_{n\text{개}} \\ & \quad =n(a+l) \end{array}$$

따라서 $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) (1)에서 $l=a+(n-1)d$이므로

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

예 (1) 첫째항이 1이고 제10항이 19인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{10\times(1+19)}{2}=100$$

(2) 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제8항까지의 합 S_8은

$$S_8=\frac{8\times\{2\times2+(8-1)\times3\}}{2}=100$$

참고 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n$$

이다. 이때 $\dfrac{d}{2}=A$, $\dfrac{2a-d}{2}=B$라 하면 $S_n=An^2+Bn$이므로 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 n에 대한 이차식이고, 이때 상수항은 0이다.

5. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_1=a_1$이고, 2 이상인 자연수 n에 대하여

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$$

이므로 $a_n=S_n-S_{n-1}$

즉, $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge2)$가 성립한다.

예제 2 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$이

$a_6+a_7+a_8=36$, $a_{10}+a_{11}=3$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하시오.

풀이 전략

첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6+a_7+a_8=36$에서

$(a+5d)+(a+6d)+(a+7d)=36$

$3a+18d=36$

$a+6d=12$ ⋯⋯ ㉠

또 $a_{10}+a_{11}=3$에서

$(a+9d)+(a+10d)=3$

$2a+19d=3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=30$, $d=-3$

따라서 $a_{20}=30+19\times(-3)=-27$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\times(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20\times\{30+(-27)\}}{2}=30$$

답 30

유제

정답과 풀이 42쪽

3 [22008-0122]

첫째항이 $\frac{2}{5}$이고 공차가 $\frac{2}{5}$인 등차수열 $\{a_n\}$의 각 항 중 정수인 항을 작은 수부터 차례로 나열한 것을 b_1, b_2, b_3, ⋯이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은?

① 100 ② 105 ③ 110 ④ 115 ⑤ 120

4 [22008-0123]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=(n+1)^2+1$일 때, a_1+a_{10}의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

6. 등비수열의 뜻과 일반항

(1) 등비수열의 뜻: 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다.

(2) 등비수열의 일반항: 첫째항이 a, 공비가 $r\,(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

설명 첫째항이 a, 공비가 $r\,(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 각 항은 다음과 같다.

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1r=ar$$
$$a_3=a_2r=(ar)r=ar^2$$
$$a_4=a_3r=(ar^2)r=ar^3$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

예 ① 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=3\times2^{n-1}$$

② 등비수열 $\{a_n\}$이

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \cdots$$

일 때, 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

7. 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등비중항이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로

$$b^2=ac$$

가 성립한다.

역으로 $b^2=ac$이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 b는 a와 c의 등비중항이다.

예 세 수 3, x, 12가 이 순서대로 등비수열을 이루면 x는 3과 12의 등비중항이므로

$$x^2=3\times12=36$$

즉, $x=-6$ 또는 $x=6$

예제 3 등비수열의 일반항

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2 \times a_4 = 64,\ a_3 \times a_5 = 128$$

을 만족시킨다. $\log_4 (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

풀이 전략

첫째항이 a, 공비가 r $(r \neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

풀이

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$$a_2 \times a_4 = ar \times ar^3 = a^2r^4 = 64 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_3 \times a_5 = ar^2 \times ar^4 = a^2r^6 = 128 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠에서 $r^2=2$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

㉠에서 $a^2 \times 4 = 64$, $a^2=16$

$a>0$이므로 $a=4$

따라서

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 = a \times ar \times ar^2 \times \cdots \times ar^7 = a^8 \times r^{1+2+\cdots+7} = a^8 \times r^{28} = 4^8 \times (\sqrt{2})^{28} = 2^{30}$$

이므로

$$\log_4 (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8) = \log_4 2^{30} = \log_{2^2} 2^{30} = \frac{30}{2} \times \log_2 2 = 15 \times 1 = 15$$

답 ③

유제

정답과 풀이 42쪽

5 [22008-0124]

등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 + a_2 + a_3 = 14,\ a_2 + a_3 + a_4 = -42$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

6 [22008-0125]

첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 \times a_4 \times a_6 \times \cdots \times a_{20} = \left(\frac{1}{3}\right)^m$$

일 때, 자연수 m의 값을 구하시오.

8. 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

설명 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 공비 r를 곱하면

$$rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & a+\boxed{ar}+\boxed{ar^2}+\cdots+\boxed{ar^{n-1}} \\ -) & rS_n= & \quad\ \boxed{ar}+\boxed{ar^2}+\cdots+\boxed{ar^{n-1}}+ar^n \\ \hline & (1-r)S_n= & a \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -ar^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n=a(1-r^n)$$

따라서

$r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$일 때, $S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}}=na$

예 첫째항이 2이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{2\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=3\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}=3-\left(\frac{1}{3}\right)^{9}$$

참고 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a}{r-1}r^n-\frac{a}{r-1}$$

이다. 이때 $\dfrac{a}{r-1}=A$라 하면

$$S_n=Ar^n-A$$

예를 들어 첫째항이 5, 공비가 4인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{5\times(4^n-1)}{4-1}=\frac{5}{3}\times4^n-\frac{5}{3}$$

예제 4 등비수열의 합

www.ebsi.co.kr

$a_1=320$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$a_m=5,\ S_m=635$

를 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이 전략

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq 1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_n=320\times r^{n-1}$이므로 $a_m=320\times r^{m-1}$

$320\times r^{m-1}=5$에서 $r^{m-1}=\frac{1}{64}$

또 $S_n=\frac{320\times(1-r^n)}{1-r}$이므로 $S_m=\frac{320\times(1-r^m)}{1-r}$

$S_m=635$에서 $\frac{320\times(1-r^m)}{1-r}=635$

$$64\times(1-r\times r^{m-1})=127\times(1-r)$$

이때 $r^{m-1}=\frac{1}{64}$이므로

$$64\times\left(1-r\times\frac{1}{64}\right)=127\times(1-r)$$

$$126r=63,\ r=\frac{1}{2}$$

따라서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}=\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$에서 $m-1=6$이므로 $m=7$

답 ②

유제

정답과 풀이 42쪽

7 [22008-0126]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_5=5,\ S_{10}=15$일 때, S_{15}의 값은?

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

8 [22008-0127]

$a_1=2$이고 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 T_n이라 하자. $\frac{S_{10}}{T_{10}}=40$일 때, a_{10}의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

Level 1 기초 연습

[22008-0128]

1 $a_1=10$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $\dfrac{a_5}{a_{18}}=2$를 만족시킬 때, a_{25}의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22008-0129]

2 $a_1=20$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6+a_7+a_8=a_{11}$$

일 때, $a_m=0$을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오.

[22008-0130]

3 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{S_n}{n^2}$은 $a_1=p$일 때 일정한 값 q를 갖는다. $p+q$의 값을 구하시오.

[22008-0131]

4 $a_1=50$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_{10}-a_{20}=30$을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 제11항부터 제20항까지의 합은?

① 56 ② 59 ③ 62 ④ 65 ⑤ 68

[22008-0132]

5 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=2n^2-3n+4$일 때, $\frac{a_{11}}{a_1}$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[22008-0133]

6 세 수 a, b, 4는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 4, a, b는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $a+b$의 값은? (단, $a\neq b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[22008-0134]

7 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1+a_2=-1$, $a_3=4$

일 때, a_7의 값을 구하시오.

[22008-0135]

8 $a_1\neq0$이고 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_8=5S_4$

를 만족시킬 때, $\frac{a_{27}}{a_{15}}$의 값은?

① 64 ② 128 ③ 256 ④ 512 ⑤ 1024

[22008-0136]

1 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3^{\,2}+a_5^{\,2}=a_7^{\,2}+a_9^{\,2}$
(나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제12항까지의 합은 12이다.

a_{20}의 값은?

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

[22008-0137]

2 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 k에 대하여

$$b_n=(a_{n+6})^2-(a_n)^2,\ c_n=(a_{n+k})^2-(a_n)^2$$

이라 하자. 두 등차수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 할 때, $\dfrac{d_1}{d_2}=3$을 만족시키는 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[22008-0138]

3 두 자연수 a, b에 대하여 첫째항이 a이고 공차가 b인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 200일 때, 모든 $a+b$의 값의 합은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

[22008-0139]

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{10}=40$, $S_{40}=10$일 때, S_{70}의 값은?

① -250 ② -245 ③ -240 ④ -235 ⑤ -230

[22008-0140]

5 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 공차가 -2인 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 T_n이라 하자. $a_{12}+b_{12}=0$일 때, $S_m+T_m=0$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

[22008-0141]

6 모든 항이 양수이고 $a_1=\frac{1}{9}$, $a_2+a_3=\frac{4}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 부등식 $a_n>100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

[22008-0142]

7 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_1=-3$이고 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$이

$$a_1=b_2,\ a_2=b_1,\ a_3=b_3$$

을 만족시킨다. $|a_{10}|$의 값을 구하시오.

[22008-0143]

8 $a_1=1$, $a_2=2$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{2n+1}=S_{2n}+3n-1,\ S_{2n+2}=S_{2n+1}+2^n$$

을 만족시킬 때, S_{20}의 값은?

① 1149 ② 1150 ③ 1151 ④ 1152 ⑤ 1153

[22008-0144]

1 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 어떤 자연수 k에 대하여

$$a_k+a_{k+2}=40,\ S_k=45,\ S_{k+2}=88$$

을 만족시킨다. a_1의 값은?

① -9　② -7　③ -5　④ -3　⑤ -1

[22008-0145]

2 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{S_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \neq S_{n+1}$이다.
(나) 모든 S_n의 값을 큰 수부터 차례로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 할 때,
$b_1=36,\ b_2=35,\ b_3=33$이다.

$|a_{10}|$의 값을 구하시오.

[22008-0146]

3 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(a_n,\ f(a_n))$을 지나고 기울기가 b_n인 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 서로 다른 두 점의 좌표는 각각 $(a_n,\ f(a_n))$, $(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$이다.
(나) 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $\sqrt[4]{2}$인 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 21일 때, b_1의 값은?

① $\sqrt[4]{2}-1$　② $\sqrt{2}-1$　③ $\sqrt{2}$　④ $\sqrt[4]{2}+1$　⑤ $\sqrt{2}+1$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 등차수열 또는 등비수열의 두 항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구하는 문제, 등차수열 또는 등비수열의 합을 이용하여 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times 3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$a_2+a_3+a_4=13$$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$$

$$a_1r(1+r+r^2)=13 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 ㉠에 $n=2$를 대입하면

$$a_3+a_4+a_5=13\times 3=39$$

$$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$$

$$a_1r^2(1+r+r^2)=39 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢÷㉡에서 $\dfrac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\dfrac{39}{13}$

즉, $r=3$

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$a_1\times 3\times(1+3+9)=13$에서 $a_1=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a_4=a_1\times r^3=\dfrac{1}{3}\times 3^3=9$

답 9

06 수열의 합과 수학적 귀납법

1. 합의 기호 $\sum$

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 합의 기호 $\sum$를 사용하여

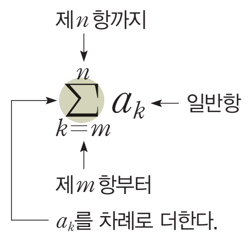
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

와 같이 나타낸다.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 제m항부터 제n항까지의 합

$$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n\ (m\le n)$$

은 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum\limits_{k=m}^{n}a_k$와 같이 나타낸다.



이것은 첫째항부터 제n항까지의 합에서 첫째항부터 제$(m-1)$항까지의 합을 뺀 것과 같으므로

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k\ (2\le m\le n)$$

이 성립한다.

예 $11+13+15+\cdots+25=\sum\limits_{k=6}^{13}(2k-1)=\sum\limits_{k=1}^{13}(2k-1)-\sum\limits_{k=1}^{5}(2k-1)$

참고 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$에서 k 대신 다른 문자를 사용해도 그 합은 같다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}a_j$$

2. 합의 기호 $\sum$의 성질

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k=c\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$ (단, c는 상수)

설명 (1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n$

$$=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$$

$$=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$

예제 1 합의 기호 $\sum$

첫째항이 3이고 공차가 $-\frac{1}{10}$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-a_{k+1})(a_k^2+a_k a_{k+1}+a_{k+1}^2)$$

의 값을 구하시오.

풀이 전략

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

풀이

$a_1=3$이고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 $-\frac{1}{10}$이므로

$$a_{11}=3+10\times\left(-\frac{1}{10}\right)=2$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-a_{k+1})(a_k^2+a_k a_{k+1}+a_{k+1}^2)&=\sum_{k=1}^{10}(a_k^3-a_{k+1}^3)\\&=(a_1^3-a_2^3)+(a_2^3-a_3^3)+(a_3^3-a_4^3)+\cdots+(a_{10}^3-a_{11}^3)\\&=a_1^3-a_{11}^3\\&=3^3-2^3\\&=27-8\\&=19\end{aligned}$$

답 19

유제

정답과 풀이 48쪽

1 [22008-0147]

$\sum_{k=1}^{10}(k^2-2)-\sum_{k=1}^{9}k^2$의 값은?

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

2 [22008-0148]

$a_1=3$인 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15}2a_{k+1}=50,\ \sum_{k=1}^{15}3a_k=30$$

을 만족시킬 때, a_{16}의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

3. 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

설명 (2) k에 대한 항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하면

$k=1$일 때, $2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$

$k=2$일 때, $3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$

$k=3$일 때, $4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$

$\vdots$

$k=n$일 때, $(n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1$

이 n개의 등식을 변끼리 더하면

$$(n+1)^3-1^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)$$
$$=\frac{n+1}{2}\{2(n+1)^2-3n-2\}$$
$$=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) (2)와 같은 방법으로 k에 대한 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이 성립함을 보일 수 있다.

예 ① $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-1\times n$$
$$=n^2$$

② $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2=\sum_{k=1}^{5}(2k)^2$

$$=4\sum_{k=1}^{5}k^2$$
$$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}$$
$$=220$$

예제 2 자연수의 거듭제곱의 합

www.ebsi.co.kr

$\sum_{k=1}^{10} k(3k+1)-\sum_{k=3}^{10} k(2k-1)$의 값을 구하시오.

풀이 전략

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

풀이

$\sum_{k=1}^{10} k(2k-1)=1+6+\sum_{k=3}^{10} k(2k-1)$이므로

$$\sum_{k=3}^{10} k(2k-1)=\sum_{k=1}^{10} k(2k-1)-7$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k(3k+1)-\sum_{k=3}^{10} k(2k-1)&=\sum_{k=1}^{10} k(3k+1)-\sum_{k=1}^{10} k(2k-1)+7\\&=\sum_{k=1}^{10}\{k(3k+1)-k(2k-1)\}+7\\&=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)+7\\&=\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k+7\\&=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}+7\\&=385+110+7\\&=502\end{aligned}$$

답 502

유제

정답과 풀이 48쪽

3 [22008-0149]

$\sum_{k=1}^{8}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(3k^2+4k-1)$의 값은?

① 204 ② 208 ③ 212 ④ 216 ⑤ 220

4 [22008-0150]

자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)$이라 할 때, $\frac{f(20)}{f(14)}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

4. 일반항이 분수 꼴인 수열의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

설명 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어진 유리식을 일반항으로 갖는 수열의 합은

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (A\neq B)$$

임을 이용하여 각 항을 두 개의 항으로 분리하여 구한다.

(1) $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\displaystyle\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

(3) 분모가 서로 다른 두 무리식의 합으로 나타내어진 식을 일반항으로 갖는 수열의 합은 분모를 유리화하여 구한다.

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

예 ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)$

$\displaystyle=1-\frac{1}{16}$

$\displaystyle=\frac{15}{16}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+\sqrt{16}$

$=-1+4$

$=3$

예제 3 일반항이 분수 꼴인 수열의 합

첫째항이 4이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{3}{a_k a_{k+1}} \ge \frac{15}{64}$$

를 만족시키는 자연수 m의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

풀이 전략 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)$임을 이용한다.

풀이 $a_n=4+(n-1)\times 3=3n+1$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\frac{3}{a_k a_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{3}{(3k+1)(3k+4)}\\&=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)\\&=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3m+1}-\frac{1}{3m+4}\right)\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{3m+4}\end{aligned}$$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{3m+4}\ge\frac{15}{64}$에서 $\frac{1}{3m+4}\le\frac{1}{64}$이므로

$3m+4\ge 64$, $m\ge 20$

따라서 구하는 자연수 m의 최솟값은 20이다.

답 ⑤

유제

정답과 풀이 49쪽

5 [22008-0151]

$\sum_{k=3}^{398}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$의 값을 구하시오.

6 [22008-0152]

x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-k=0$의 두 근을 각각 α_k, β_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{{\alpha_k}^2+{\beta_k}^2}$의 값은? (단, k는 자연수이다.)

① $\frac{11}{32}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{13}{32}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{15}{32}$

5. 수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$을

(i) 처음 몇 개의 항의 값

(ii) 이웃하는 여러 항 사이의 관계식

으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

6. 등차수열의 귀납적 정의

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+d$$

를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

예 ① $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_{n+1}-a_n=3$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고, 공차가 3인 등차수열이다.

즉, $a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$

② $a_1=1,\ a_2=5,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 $a_2-a_1=5-1=4$인 등차수열이다.

즉, $a_n=1+(n-1)\times 4=4n-3$

7. 등비수열의 귀납적 정의

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$$

을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

예 ① $a_1=5,\ a_{n+1}=3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5이고, 공비가 3인 등비수열이다.

즉, $a_n=5\times 3^{n-1}$

② $a_1=2,\ a_2=6,\ {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3$인 등비수열이다.

즉, $a_n=2\times 3^{n-1}$

예제 4 등비수열의 귀납적 정의

$a_1=3$, $a_2=2$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}^{\;2}=a_n a_{n+2}$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 $9-\dfrac{2^q}{3^p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 자연수이다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

풀이 전략

모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}^{\;2}=a_n a_{n+2}$$

를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

풀이

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, $a_1=3$, $a_2=2$이므로 공비는 $\dfrac{2}{3}$이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=9\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$$

$$=9-\frac{2^{10}}{3^8}$$

따라서 $p=8$, $q=10$이므로

$$p+q=8+10=18$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 49쪽

7 [22008-0153]

$a_3=3$, $a_{15}=29$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$$

을 만족시킬 때, a_9의 값을 구하시오.

8 [22008-0154]

공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}^{\;2}=a_n^{\;2}+8(4n-3)$$

을 만족시킨다. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은?

① 160 ② 170 ③ 180 ④ 190 ⑤ 200

8. 귀납적으로 정의된 여러 가지 수열

귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구할 때는 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하여 항의 값을 구한다.

예 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n-1}$을 만족시킬 때, a_4의 값을 구해 보자.

$a_1=2$이므로 $a_2=\dfrac{2a_1}{a_1-1}=\dfrac{2\times2}{2-1}=4$

$a_2=4$이므로 $a_3=\dfrac{2a_2}{a_2-1}=\dfrac{2\times4}{4-1}=\dfrac{8}{3}$

$a_3=\dfrac{8}{3}$이므로 $a_4=\dfrac{2a_3}{a_3-1}=\dfrac{2\times\dfrac{8}{3}}{\dfrac{8}{3}-1}=\dfrac{16}{5}$

9. 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같이 자연수 n에 대한 어떤 명제 $p(n)$이 참임을 증명하는 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

예 모든 자연수 n에 대하여

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\dfrac{1^2\times(1+1)^2}{4}=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$
$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

참고 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 $n\geq m$ (m은 자연수)인 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(ⅰ) $n=m$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq m)$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 5 귀납적으로 정의된 수열

$a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+5 & (a_n<100) \\ a_n-100 & (a_n\geq 100) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_n>a_{n+1}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 m이라 할 때, $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값은?

① 1065 ② 1067 ③ 1069 ④ 1071 ⑤ 1073

풀이 전략 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구할 때는 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 항의 값을 구한다.

풀이

$a_1=1$

$a_2=1+5=1+5\times 1=6$

$a_3=6+5=1+5\times 2=11$

$a_4=11+5=1+5\times 3=16$

⋮

$a_{20}=1+5\times 19=96$

$a_{21}=1+5\times 20=101$

$a_{22}=101-100=1$

⋮

$a_{21}>a_{22}$이므로 $m=21$

따라서 구하는 값은 첫째항이 1이고 공차가 5인 등차수열의 첫째항부터 제21항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{21} a_k=\frac{21\times(a_1+a_{21})}{2}=\frac{21\times(1+101)}{2}=1071$$

답 ④

유제

정답과 풀이 50쪽

9 [22008-0155]

$a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n+2\cos\frac{n\pi}{3}$$

를 만족시킨다. a_5의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

10 [22008-0156]

$a_1=3$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=(-1)^{n+1}a_n+1$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값을 구하시오.

예제 6 수학적 귀납법

다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\boxed{(가)}$, (우변)$=2\sqrt{1}=2$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{m}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}+\boxed{(나)}\\&<2\sqrt{m}+\boxed{(나)}\\&<2\sqrt{m}+\frac{2}{\sqrt{m+1}+\boxed{(다)}}\\&=2\sqrt{m+1}\end{aligned}$$

즉, $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(25)}{f(15)+p}$의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

풀이 전략

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

풀이

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\boxed{1}$, (우변)$=2\sqrt{1}=2$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{m}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{k}}&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}+\boxed{\frac{1}{\sqrt{m+1}}}\\&<2\sqrt{m}+\boxed{\frac{1}{\sqrt{m+1}}}\\&=2\sqrt{m}+\frac{2}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m+1}}\\&<2\sqrt{m}+\frac{2}{\sqrt{m+1}+\boxed{\sqrt{m}}}\\&=2\sqrt{m}+\frac{2(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})}{(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})}\end{aligned}$$

$=2\sqrt{m}+2(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})$

$=2\sqrt{m+1}$

즉, $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $p=1$, $f(m)=\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$, $g(m)=\sqrt{m}$이므로

$$\frac{g(25)}{f(15)+p}=\frac{5}{\frac{1}{4}+1}=4$$

답 ③

유제

정답과 풀이 50쪽

11

[22008-0157]

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$2^{3n-2}+3^n$

이 5의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

$2^{3\times1-2}+3^1=\boxed{\text{(가)}}$이므로 $2^{3\times1-2}+3^1$은 5의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, $2^{3k-2}+3^k$이 5의 배수라고 가정하면

자연수 m에 대하여 $2^{3k-2}+3^k=5m$으로 놓을 수 있다.

$2^{3(k+1)-2}+3^{k+1}=\boxed{\text{(나)}}\times m+5\times2^{\boxed{\text{(다)}}}$

이때 $\boxed{\text{(나)}}\times m$과 $5\times2^{\boxed{\text{(다)}}}$이 모두 5의 배수이므로 $2^{3(k+1)-2}+3^{k+1}$도 5의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{3n-2}+3^n$은 5의 배수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(k)$라 할 때, $p+q+f(3)$의 값은?

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

Level 1 기초 연습

[22008-0158]

1 $\sum_{k=1}^{9}\frac{2k+1}{2k+3}-\sum_{i=1}^{9}\frac{2i-1}{2i+1}$의 값은?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{13}{21}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[22008-0159]

2 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k)=18,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=2$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}(4b_k+3)$의 값은?

① 22 ② 26 ③ 30 ④ 34 ⑤ 38

[22008-0160]

3 $\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n+1}\right)$의 값은?

① $\frac{121}{6}$ ② $\frac{41}{2}$ ③ $\frac{125}{6}$ ④ $\frac{127}{6}$ ⑤ $\frac{43}{2}$

[22008-0161]

4 일반항이

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)+(2n-1)+\cdots+5+3+1$$

인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.

[22008-0162]

5 $a_1=2$, $a_2=3$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 수 a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 세 수 a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

a_7+a_8의 값을 구하시오.

[22008-0163]

6 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=n^2$일 때, $\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은?

① $\frac{16}{33}$ ② $\frac{17}{33}$ ③ $\frac{6}{11}$ ④ $\frac{19}{33}$ ⑤ $\frac{20}{33}$

[22008-0164]

7 $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=2-\frac{4}{a_n}$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{100}a_k$의 값은?

① 98 ② 99 ③ 100 ④ 101 ⑤ 102

[22008-0165]

8 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=n(n+2) \qquad \cdots\cdots (*)$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=$ $\boxed{(가)}$, (우변)$=$ $\boxed{(가)}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(2k+1)=m(m+2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\boxed{(나)}$을(를) 더하면

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k+1)=\boxed{(다)}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{f(6)+g(5)}{p}$의 값은?

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

Level 2 기본 연습

[22008-0166]

1 $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{21}=-1$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k(a_k-2a_{k+1})=98$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{18} ka_{k+2}$의 값은?

① -60 ② -59 ③ -58 ④ -57 ⑤ -56

[22008-0167]

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$의 값은?

① $\frac{388}{45}$ ② $\frac{389}{45}$ ③ $\frac{26}{3}$ ④ $\frac{391}{45}$ ⑤ $\frac{392}{45}$

[22008-0168]

3 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}_n(3n, 0)$, $\mathrm{B}(0, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}$가 있다. 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}$의 경계와 내부의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f(k)$의 값은?

① 360 ② 370 ③ 380 ④ 390 ⑤ 400

[22008-0169]

4 $\displaystyle\sum_{k=m}^{45} \frac{1}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오. (단, $m<45$)

[22008-0170]

5 $a_1=1$이고 공비가 4인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.
$\sum_{k=1}^{10}\frac{3-2^k}{3S_k+1}=m\times\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$일 때, 상수 m의 값은?

① 1011 ② 1014 ③ 1017 ④ 1020 ⑤ 1023

[22008-0171]

6 $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n+3$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[22008-0172]

7 $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{10}$$

을 만족시킨다. $\frac{a_9}{S_{10}}$의 값은?

① -100 ② -90 ③ -80 ④ -70 ⑤ -60

[22008-0173]

8 $a_1=a\ (a>0)$, $a_2=-2$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20}|a_k|=130$을 만족시키는 a의 값을 구하시오.

Level 3 실력 완성

[22008-0174]

1 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1+a_2+a_3=5$	(나) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - cn + c + 2$

$\sum_{k=1}^{10} {a_k}^2$의 값을 구하시오. (단, c는 상수이다.)

[22008-0175]

2 자연수 n에 대하여 두 집합 A_n, B_n을

$A_n = \{x \mid n^2+n \le x \le n^2+n+6,\ x\text{는 정수}\}$,

$B_n = \{y \mid 2n^2-n \le y \le 2n^2-n+5,\ y\text{는 정수}\}$

라 하자. 집합 $(A_n - B_n) \cup (B_n - A_n)$의 원소의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{37}{28}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{113}{84}$ ④ $\frac{19}{14}$ ⑤ $\frac{115}{84}$

[22008-0176]

3 $p>0$, $q<0$인 두 정수 p, q와 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$a_1=30$, $a_{n+1}=a_n+2pn+q$

를 만족시킨다. 두 부등식 $a_3>0$, $a_4<0$이 모두 성립하도록 하는 정수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오.

[22008-0177]

4 모든 항이 양수이고 $a_1=6$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$2(S_{n+1}+S_n)=(S_{n+1}-S_n)^2 \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립한다. 다음은 a_n을 구하는 과정이다.

> $S_1=a_1=6$이므로 $(*)$에 $n=1$을 대입하면
>
> $2(S_2+S_1)=(S_2-S_1)^2$
>
> $S_2=a_1+a_2=6+a_2$이므로
>
> $a_2=\boxed{\text{(가)}}$
>
> 한편, $(*)$에 n 대신 $n+1$을 대입하면
>
> $2(S_{n+2}+S_{n+1})=(S_{n+2}-S_{n+1})^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
>
> ㉠$-(*)$에서
>
> $a_{n+2}-a_{n+1}=\boxed{\text{(나)}}$
>
> 따라서 $a_1=6$, $a_n=\boxed{\text{(다)}}$ $(n\geq 2)$

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\dfrac{p+f(10)}{q}$의 값은?

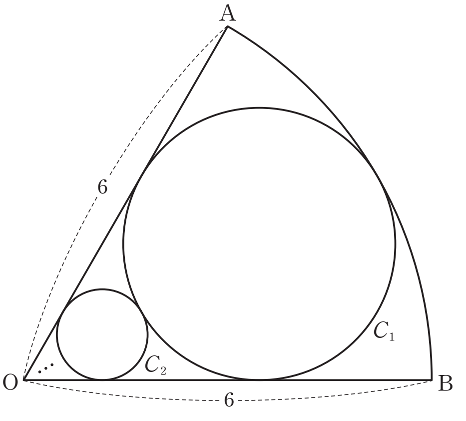
① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[22008-0178]

5 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=6$, $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$인 부채꼴 AOB의 내부에 호 AB와 두 선분 OA, OB에 모두 접하는 원을 C_1이라 하자. 원 C_1과 한 점에서 만나고 두 선분 OA, OB에 모두 접하는 원을 C_2라 하자. 이와 같은 방법으로 원 C_n과 한 점에서 만나고 두 선분 OA, OB에 모두 접하는 원을 C_{n+1}이라 하고, 원 C_n의 반지름의 길이를 a_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=p,\ a_{n+1}=qa_n$$

을 만족시킨다. $24(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $a_n>a_{n+1}$)



대표 기출 문제

EBS

출제 경향 합의 기호 $\sum$의 성질이나 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 수열의 합을 구하는 문제가 출제되고 있다.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\log_2\sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n+2}}$이다. $\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

2021학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 로그의 성질과 $\sum$의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이
$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\log_2\sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{2\times2}{3}+\log_2\frac{2\times3}{4}+\log_2\frac{2\times4}{5}+\cdots+\log_2\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\times2}{3}\times\frac{2\times3}{4}\times\frac{2\times4}{5}\times\cdots\times\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$$

이때 $\sum_{k=1}^{m}a_k=N$ (N은 100 이하의 자연수)라 하면

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}=N,\ \frac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2N},\ 2^{m+1-2N}=m+2$$

이므로 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

$m\ge1$이므로 $m=2^l-2$ (l은 2 이상의 자연수)로 놓으면

$2^{m+1-2N}=m+2$에서

$$2^{2^l-1-2N}=2^l$$

즉, $2^l-2N=l+1$

이때 좌변이 짝수이므로 l은 홀수이고, 역으로 l이 2 이상인 홀수이면 $N=\frac{1}{2}(2^l-l-1)$은 자연수이다.

$\frac{1}{2}(2^l-l-1)\le100$에서 $2^l-l-1\le200$을 만족시키는 2 이상의 홀수 l의 값은 3, 5, 7이다.

따라서 모든 m의 값은 $2^3-2,\ 2^5-2,\ 2^7-2$이고 그 합은

$$6+30+126=162$$

답 ④

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 귀납적으로 정의된 수열의 규칙성을 이용하여 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$	(나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_8-a_{15}=63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

2021학년도 대수능

출제 의도 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 조건 (가)에서

$a_4=(a_2)^2+1$, $a_8=a_2\times a_4+1=a_2\times\{(a_2)^2+1\}+1=(a_2)^3+a_2+1$

한편, 조건 (나)에서 $a_3=a_2\times a_1-2$ …… ㉠

조건 (가)에서 $a_2=a_2\times a_1+1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a_3+2=a_2-1$, $a_3=a_2-3$

또 조건 (나)에서

$a_7=a_2\times a_3-2=a_2\times(a_2-3)-2=(a_2)^2-3a_2-2$

$a_{15}=a_2\times a_7-2=a_2\times\{(a_2)^2-3a_2-2\}-2=(a_2)^3-3(a_2)^2-2a_2-2$

이때 $a_8-a_{15}=63$이므로

$\{(a_2)^3+a_2+1\}-\{(a_2)^3-3(a_2)^2-2a_2-2\}=63$

$(a_2)^2+a_2-20=0$, $(a_2+5)(a_2-4)=0$

$a_2=-5$ 또는 $a_2=4$

(i) $a_2=-5$일 때

㉡에서 $a_1=\dfrac{6}{5}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2=4$일 때

㉡에서 $a_1=\dfrac{3}{4}$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a_1=\dfrac{3}{4}$, $a_2=4$

따라서 $a_8=4^3+4+1=69$이므로 $\dfrac{a_8}{a_1}=\dfrac{69}{\frac{3}{4}}=92$

답 ②

고2~N수 수능 집중 로드맵

과목: 국어 / 영어 / 수학 / 한국사 사회 / 과학

수능 입문
- 수능 감(感)잡기
- 수능특강 Light
- 강의노트 수능개념

기출 / 연습
- 수능 기출의 미래
- 수능특강Q 미니모의고사

연계+연계 보완
- 수능연계교재의 국어 어휘
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA
- 연계: 수능특강
- 연계: 수능완성
- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능완성 사용설명서

고난도
- 수능연계완성 3/4주 특강 (고난도 · 신유형)
- 수능의 7대 함정
- 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴

모의고사
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION
- 고난도 시크릿X 봉투모의고사

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 소재 · 유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집		전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사		전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문 · 자료 · 문항 분석		전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품 · 지문과 연결된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석		국/수/영/사/과
	박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회 · 문화 표 분석 문항의 패턴 연습		사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION	신규 문항 2회분으로 국어 · 수학 · 영어 논스톱 모의고사		국/수/영
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사		국/수/영