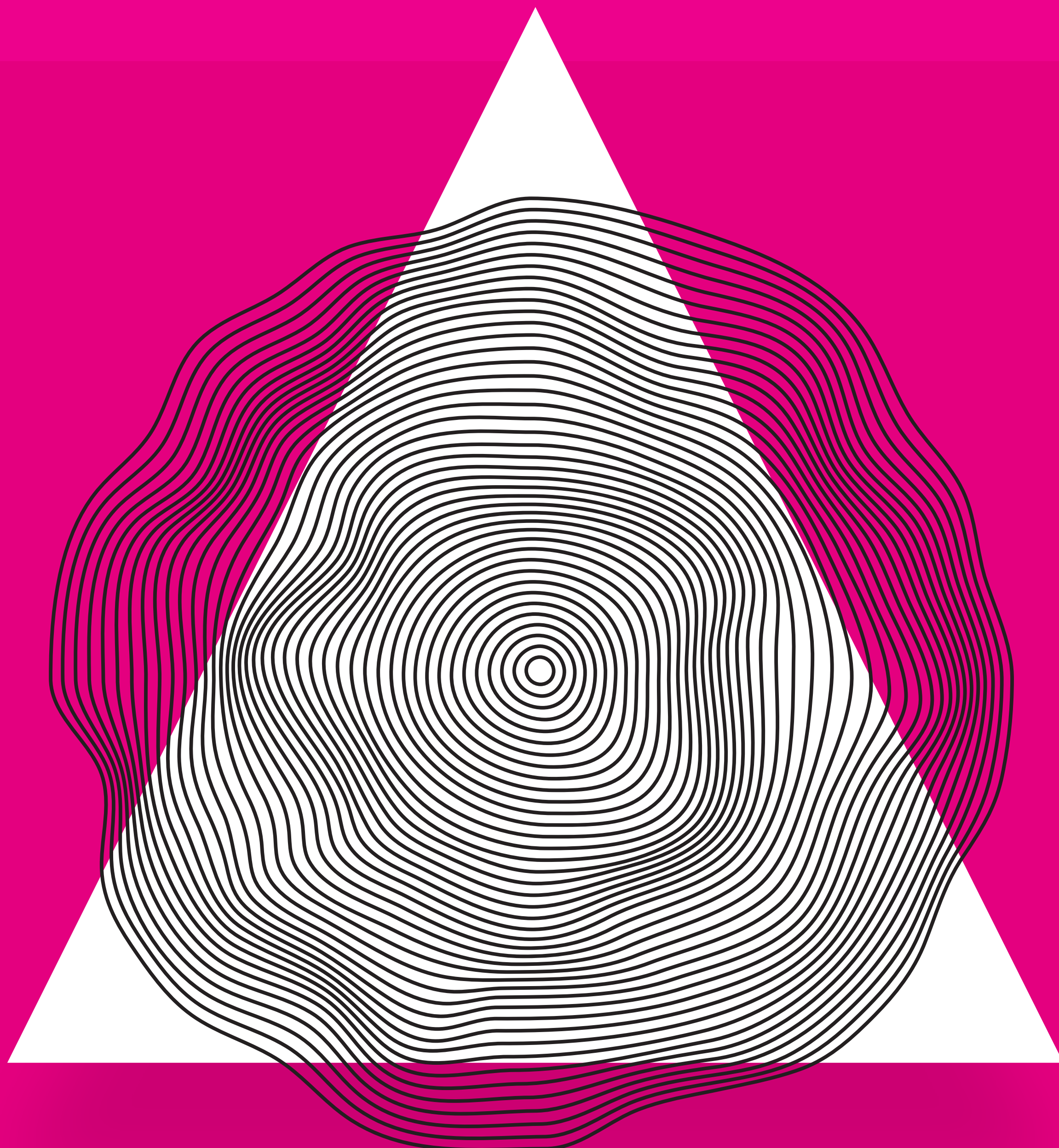
기출의_파급효과



수학영역 × 기하 × STANDARD

기하
STANDARD
기출의 파급효과

기하

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과 standard에는 기하 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

기하 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.
기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 83문제를 담았습니다.

기출의 파급효과 기하의 경우 chapter 5에 알아두면 좋은 교과외 내용도 담겨있습니다. **하지만 chapter 5에 담긴 기출은 모두 교과내입니다.** chapter 5의 기출문제 해설에는 **교과 내의 풀이와 함께** 좌표, 공간벡터 내적, 외적을 활용한 풀이가 첨부되어 있습니다. 따라서 교과 외 내용에 관심이 없더라도 **chapter 5에 속한 기출문제는 다 풀길 바랍니다.**

※ 문제 좌표에서 '나형' 또는 'A형' 또는 '인문계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계' 기출입니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 138문제로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard와 extension을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

CHAPTER

02 평면벡터

'벡터 회전'을 이용하여 내적의 최대, 최소를 구하는 것은 평가원 기하 준킬러, 킬러에 제일 많이 나오는 소재이다. $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최대, 최소를 바로 물으면 좋겠지만 대부분은 $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ 꼴처럼 단순히 그림만으로 상황을 파악하기 힘들게 주어진다. 이때 **'벡터 쪼개기'와 '벡터 내적 조건 해석'을 잘 이용하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 형태로 바꿔줘야 한다.** 이 과정이 자유자재로 된다면 벡터의 내적도 공포의 대상이 아니다.

마음을 굳게 먹자. **평가원 기하 준킬러, 킬러를 확실히 정복**할 수 있는 만큼 Chapter 2의 내용은 다른 Chapter에 비해 방대하다. '벡터 쪼개기', '벡터 내적 조건 해석', '벡터 회전'을 배우기 전에 기본적인 도구부터 살펴보자.

기본적인 도구

기본적인 도구에서는 **동점과 정점의 구별, 벡터의 평행이동, 벡터의 정사영**에 대해 다룬다.

1. 동점, 정점 구별

'동점', '정점'은 Chapter 2뿐만 아니라 이 교재 전반에 나오는 용어이다.

동점은 말 그대로 **움직이는 점**이다. **동점 P가 이루는 자취**로는 대표적으로 **좌표평면에서는 원, 호, 직선** 등이 있으며 **좌표공간에서는 구, 구면, 원뿔의 밑면의 테두리, 직선** 등이 있다.

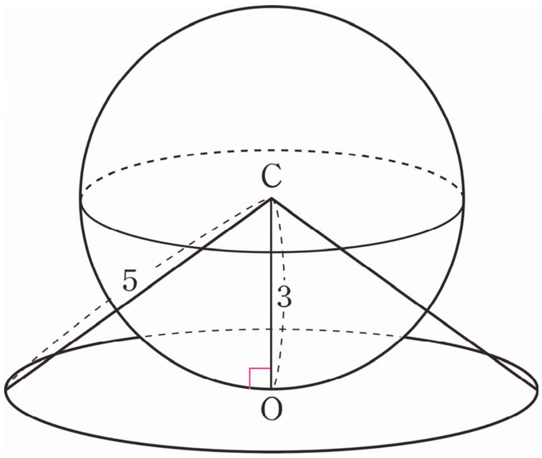
정점은 말 그대로 **고정된 점**이다. 예를 들어 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(1, 2)$이나 좌표공간에서 점 $\mathrm{B}(1, 2, 3)$처럼 **구체적인 좌표가 주어진 경우** 정점이라고 부른다. 하지만 구체적인 좌표가 안 주어진 경우에도 '정점'인 경우가 있다. 좌표평면이나 좌표공간에서 **점 C를 고정시켜도 문제 상황이 동일하다면 점 C도 '정점'이라고 할 수 있다.**

문제 상황이 동일한지의 여부는 직관적으로 판단할 수 있다. 자작 문제로 예를 들어 보겠다.

자 작 문 제

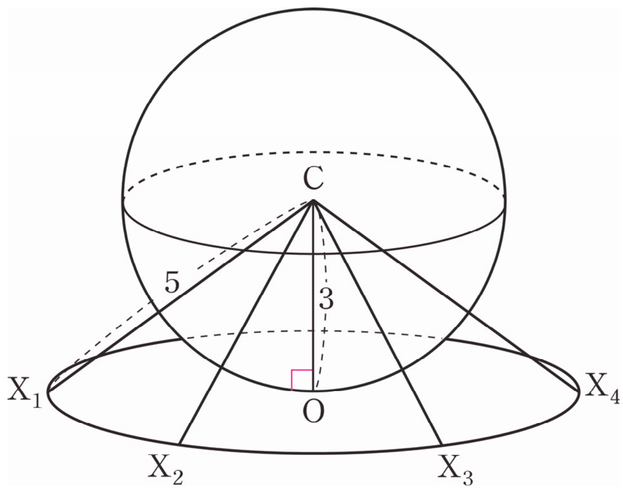
좌표공간에서 구 $x^2+y^2+(z-3)^2=9$ 위의 점 P가 있다. 구의 중심을 점 $\mathrm{C}(0, 0, 3)$이라고 할 때, $\overline{\mathrm{CX}}=5$를 만족시키며 xy 평면에 있는 점 X가 있다. 점 X와 점 P 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은?

1. 구 $x^2+y^2+(z-3)^2=9$가 원점 O에서 xy평면에 접하므로 그림도 어렵지 않게 그릴 수 있다.
점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 O이므로 **직각 표시**를 꼭 해주자.



점 X는 $\overline{\mathrm{CX}}=5$를 만족시키며 xy평면 위에 있으므로 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 위에 존재한다.

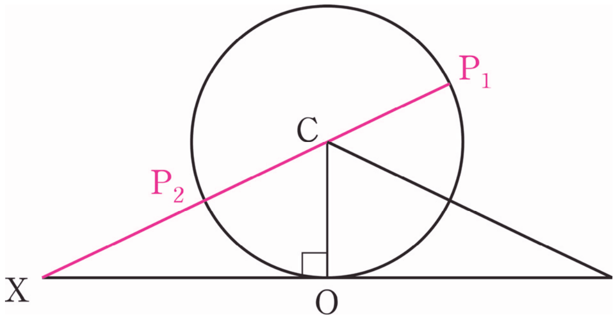
2.



점 X_1, 점 X_2, 점 X_3, 점 X_4 모두 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 위에 존재하므로 점 X 위치의 후보가 된다. 하지만 직관적으로 **점 X가 네 개의 점 중 어떤 점에 고정하더라도 점 X와 점 P 사이의 거리의 최댓값, 최솟값은 일정할 것이기에 문제 상황이 동일하다**는 것을 알 수 있다. 따라서 **점 X는 '정점'**이라 할 수 있다.

그에 반해 점 P는 구 $x^2+y^2+(z-3)^2=9$ 위의 위치에 따라 점 X와 점 P 사이의 거리의 최댓값, 최솟값이 변한다. 따라서 **점 P는 자취가 구 $x^2+y^2+(z-3)^2=9$인 '동점'**이라 할 수 있다.

3.



입체의 평면화가 쉽도록 점 X를 점 X_1에 고정시켰다. $\overline{\mathrm{XP}}$가 최댓값, 최솟값을 가질 때는 점 X, 점 C, 점 P가 일직선 위에 있다. 점 P가 점 P_1 위치에 있을 때 $\overline{\mathrm{XP}}$가 최댓값을 가지며 점 P가 점 P_2 위치에 있을 때 $\overline{\mathrm{XP}}$가 최솟값을 가진다. 따라서 $\overline{\mathrm{XP}}$의 최댓값은 $5+3=8$이며 최솟값은 $5-3=2$이다.

comment

대부분 이 정도 직관은 갖고 있겠지만 직관이 부족하더라도 걱정마라. **의심되면 점 X를 점 X_1뿐만 아니라 점 X_2, 점 X_3, 점 X_4 등의 위치에 '고정'시키며 답이 같은지 확인**하면 된다. 시간은 좀 걸리겠지만 직관이 천천히 쌓일 것이다. Chapter 2에 있는 문제를 다 풀어보면 준수한 수준의 직관이 후천적으로도 생길 것이다.

2. 벡터 평행이동

두 벡터가 크기와 방향만 같으면 서로 같은 벡터이기에 **벡터의 평행이동을 시점과 종점의 평행이동이라고 생각**하면 편하다. 2개 이상의 벡터의 합이나 내적을 편하게 다루기 위해서는 시점 또는 종점을 맞춰줘야 한다.

(1) 시점과 시점 맞추기

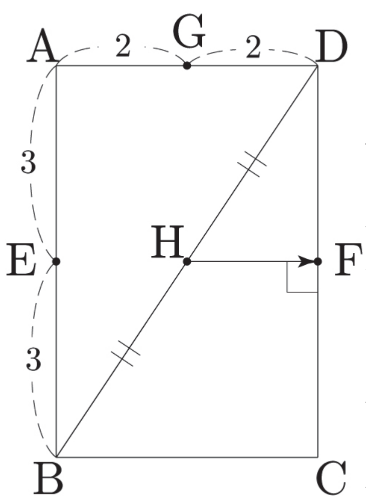
주로 벡터 내적 조건을 다룰 때는 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ **꼴처럼 두 벡터의 시점을 맞춰주는 것이 다루기 쉽다.** 두 벡터의 시점을 맞춰주어야 두 벡터가 이루는 각을 나타낼 수 있기 때문이다. 두 벡터의 시점을 맞추는 방법에는 크게 **수식적인 방법과 도형적인 방법**이 있다. 둘 다 자유자재로 다룰 줄 알아야 한다.

수식적으로 두 벡터의 시점을 맞추는 대표적인 방법은 벡터의 뺄셈을 이용한 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$이다.
이를 이용해 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) \cdot \overrightarrow{PB}$처럼 정리해 줄 수 있다.

점 A, 점 B, 점 P가 정점이냐 동점이냐에 따라 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ 꼴처럼 시점을 맞춰주는 것이 유리할 때도 있다.
점 A, 점 B, 점 P가 모두 정점이고 점 M이 점 A와 점 B의 중점일 때, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2 \times \overrightarrow{PM}$처럼 이후에 배울 **'벡터 쪼개기'를 이용**하여 벡터를 단순화하면 다루기 쉽다.

점 A, 점 B가 정점이고 점 P가 동점이고 점 M이 점 A와 점 B의 중점일 때에도 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2 \times \overrightarrow{PM}$처럼 이후에 배울 **'벡터 쪼개기'를 이용**하여 벡터를 단순화하면 다루기 쉽다. **동점 P와 정점 M과의 관계만 확인하면 되기 때문이다.** 동점 P와 정점 A와의 관계와 동점 P와 정점 B와의 관계를 동시에 생각하는 것보다 훨씬 편리하다.

도형적으로 두 벡터의 시점을 맞추는 방법은 평행이동이다.



$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG}$의 값은? $\overrightarrow{EG}$를 **평행이동하면** $\overrightarrow{HD}$이므로
$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HD} = |\overrightarrow{HF}|^2 = 4$이다.
수식적으로는 $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF} \cdot (\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HE})$로 시점을 맞춰 풀 수도 있다.

점 B를 원점으로, 직선 BC를 x축, 직선 BA를 y축으로 잡자.
점 $\mathrm{E}(0,\ 3)$, 점 $\mathrm{F}(4,\ 3)$, 점 $\mathrm{G}(2,\ 6)$, 점 $\mathrm{H}(2,\ 3)$이다.
$\overrightarrow{HF} = (2, 0)$, $\overrightarrow{EG} = (2,\ -3)$이므로 $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EG} = 4$이다.

점 E, 점 F, 점 G, 점 H가 모두 정점일 때는 좌표로 푸는 것이 제일 쉽다. 따라서 도형적으로 시점을 맞추는 방법의 유리함을 잘 느낄 수 없다. 하지만 **동점이 하나 이상 있을 때는 도형적으로 시점을 맞추는 방법이 매우 유리**하다.

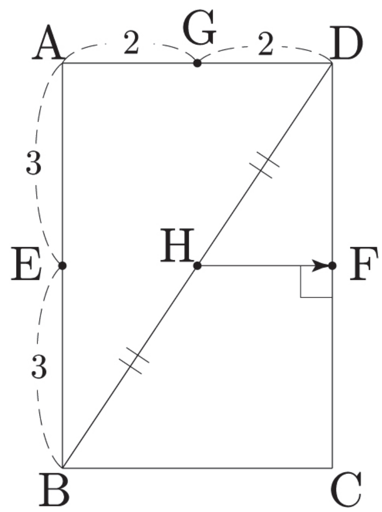
'벡터 회전'에서 예시를 풀다 보면 말이 아닌 마음으로 와닿게 될 것이다.

(2) 시점과 종점 맞추기

주로 벡터의 합 조건을 다룰 때는 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 꼴처럼 **한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞춰주는 것**이 다루기 쉽다. 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 방법에는 크게 수식적인 방법과 도형적인 방법이 있다. 둘 다 자유자재로 다룰 줄 알아야 한다.

수식적으로 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 대표적인 방법은 벡터의 덧셈을 이용한 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}$이다. 내적 조건도 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\overrightarrow{PB}$처럼 종점을 맞춰줄 수 있다.

도형적으로 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 방법은 평행이동이다.



$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HF}$를 간단히 하면? $\overrightarrow{EG}$를 **평행이동하면** $\overrightarrow{BH}$이므로
$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{BF}$로 간단히 할 수 있다.

점 E, 점 F, 점 G, 점 H가 모두 정점이라 그리 어렵지 않았을 것이다.
하지만 동점이 섞인다면 어떨까? **원점 O는 정점이고 점 A, 점 B가 동점이라면 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$를 만족하는 동점 C의 자취의 영역은 어떻게 구할까?**

이후에 배울 '벡터 쪼개기'를 이용하여 $\overrightarrow{OC}=2\times\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=2\times\overrightarrow{OM}$**로 바꾸면 쉽지 않을까?**

아니다. 점 A, 점 B가 동점이기에 점 M도 동점이다.
동점과 동점의 중점이 그리는 자취를 구해야 하는데 대부분의 문제 상황에서 쉽지 않은 일이다.

따라서 최선의 수단은 가장 기본적인 도구인 **벡터 평행이동으로 동점 C의 자취의 영역을 직접 그리는 것**이다. 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추기로 그림을 그리다 보면 선분이나 호를 연장하거나 평행이동을 해야 하는데 그림을 잘 못 그린다면 매우 힘들고 실수하기 쉽다.

어떻게 하면 벡터 평행이동의 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞춰가며 자취의 영역을 쉽고 정확하게 그릴 수 있을까?

점 A가 $\overparen{PQ}$나 $\overline{PQ}$ 위를 움직이고 점 B가 $\overparen{RS}$나 $\overline{RS}$ 위를 움직인다고 가정해보자.

먼저 **$\overrightarrow{OA}$의 종점인 점 A를 점 P에 고정**하자. **$\overrightarrow{OB}$를 평행이동하여 시점 O을 $\overrightarrow{OA}$의 종점 P에 맞추고 $\overrightarrow{OB}$를 그리자.** 이는 곧 **점 C의 자취의 '테두리'의 일부**이다.
그 이유는 $\overrightarrow{OB}$를 평행이동하여 시점 O을 $\overrightarrow{OA}$의 종점 P에 맞추면 종점 B는 점 C에 맞춰져 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{PC}$이다.
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{PC}$이므로 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}$이기 때문이다.

이제 $\overrightarrow{OA}$의 종점인 점 A를 점 Q에 고정하자. **$\overrightarrow{OB}$를 평행이동하여 시점 O을 $\overrightarrow{OA}$의 종점 Q에 맞추고 $\overrightarrow{OB}$를 그리자.** 이는 곧 **점 C의 자취의 '테두리'의 일부**이다.
그 이유는 $\overrightarrow{OB}$를 평행이동하여 시점 O을 $\overrightarrow{OA}$의 종점 Q에 맞추면 종점 B는 점 C에 맞춰져 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{QC}$이다.
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{QC}$이므로 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QC}$이기 때문이다.

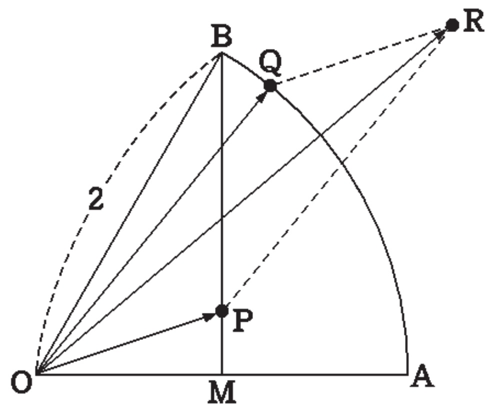
점 C의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌을 것이다. 이제 **점 A를 점 P와 점 Q 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠하고 점 C의 자취의 영역을 완성** 시키자.

점 A를 경계점에 고정하여 점 C의 자취의 영역의 '테두리'를 먼저 그리면 점 C의 자취의 영역을 구하기가 훨씬 쉽고 정확하게 그릴 수 있다. 자동차 그림을 그릴 때 자동차의 '테두리'를 먼저 스케치하고 자동차 '테두리' 내부를 색칠하는 것이 더 쉽게 자신이 원하는 자동차 그림을 그릴 수 있듯이 말이다.

자취의 영역의 '테두리'를 먼저 그리지 않고 자취의 영역 내부 색칠을 먼저 하면 자취의 영역을 그릴 때 실수가 매우 잦다. 따라서 **꼭 자취의 영역의 '테두리'부터 완성하자!** 글로만 보면 이해가 잘 안 될 것이다. 이제 문제를 통해 적용해보도록 하겠다.

예제(1) 14학년도 사관 15번

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는? [4점]

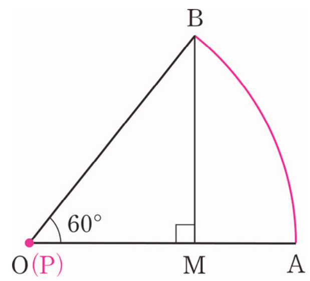


① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{3}$

1. 점 P가 두 선분 $\overline{\mathrm{OM}}$과 $\overline{\mathrm{BM}}$ 위를 움직인다. 점 P가 $\overline{\mathrm{OM}}$ 위를 움직일 때와 점 P가 $\overline{\mathrm{BM}}$ 위를 움직일 때로 각각 나누어 점 R가 나타내는 자취의 영역을 구해보자.

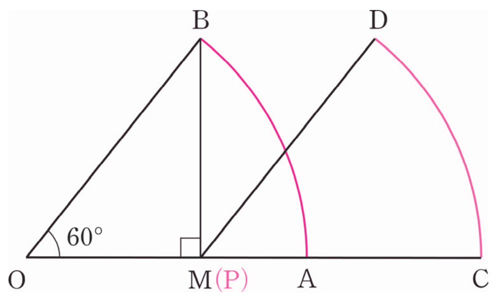
점 P가 $\overline{\mathrm{OM}}$ 위를 움직일 때 점 R가 나타내는 자취의 영역을 구해보자.
점 P를 점 O, 점 M에 각각 고정하고 점 R이 나타내는 자취의 영역의 '테두리'를 구해보도록 하겠다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 종점인 점 P를 점 O에 고정하자.



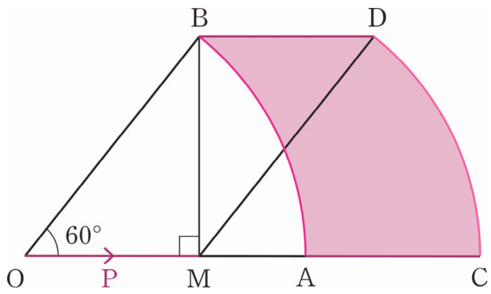
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$**에서** $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ **의 종점인 점** P**를 점** O**에 고정하고** $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$**를 그리면** $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$**가 그려진다.**

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 종점인 점 P를 점 M에 고정하자.



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$**에서** $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ **의 종점인 점** P**를 점** M**에 고정하고** $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$**를 그리면** $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$**가 그려진다.**

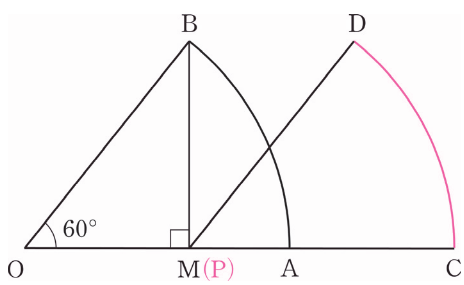
점 P가 $\overline{\mathrm{OM}}$ 위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.
테두리의 꼭짓점 A, B, C, D는 어떻게 이을까?
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$**,** $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$**는 점** Q**의 자취인** $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$**를 따왔으니**
점 P**의 자취인** $\overline{\mathrm{OM}}$**을 써먹을 차례이다.**



점 A와 점 C, 점 B와 점 D를 이을 때, 점 P의 자취인 $\overline{\mathrm{OM}}$을 이용하면 된다.
따라서 점 P가 $\overline{\mathrm{OM}}$ 위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역은 위와 같다.

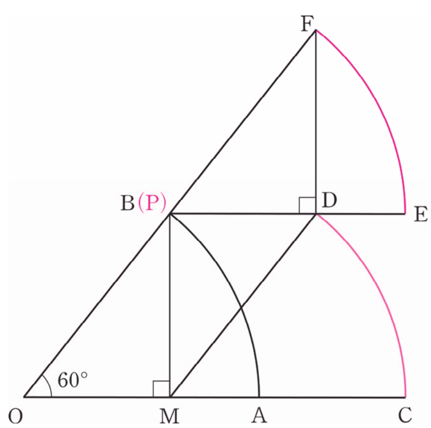
2. 점 P가 $\overline{\mathrm{BM}}$ 위를 움직일 때 점 R가 나타내는 자취의 영역을 구해보자.
점 P를 점 B, 점 M에 각각 고정하고 점 R가 나타내는 자취의 영역의 '테두리'를 구해보도록 하겠다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 종점인 점 P를 점 M에 고정하자.



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 종점인 점 P를 점 M에 고정하고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 그리면 $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$가 그려진다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 종점인 점 P를 점 B에 고정하자.

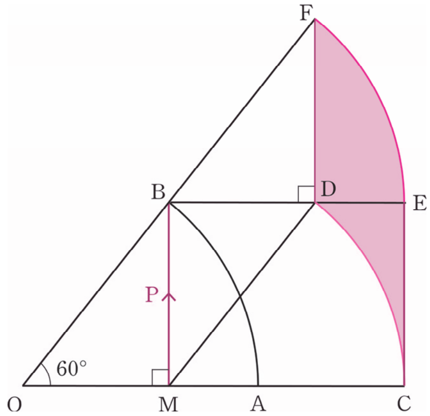


$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 종점인 점 P를 점 B에 고정하고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 그리면 $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$가 그려진다.

점 P가 $\overline{\mathrm{BM}}$ 위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.

테두리의 꼭짓점 C, D, E, F는 어떻게 이을까?

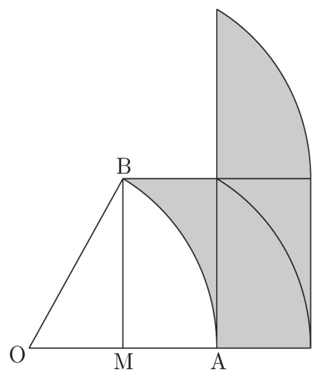
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$**는 점 Q의 자취인 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$를 따왔으니 점 P의 자취인 $\overline{\mathrm{BM}}$을 써먹을 차례이다.**



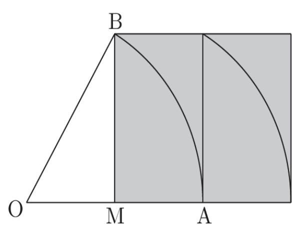
점 C와 점 E, 점 D와 점 F를 이을 때, 점 P의 자취인 $\overline{\mathrm{BM}}$을 이용하면 된다.

점 P가 $\overline{\mathrm{BM}}$ 위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역은 오른쪽 그림과 같다.

3. 결론적으로 **점 R의 자취의 영역**은 아래와 같다.



위 영역의 넓이는 아래와 같이 가로의 길이가 2이고 세로의 길이가 $\sqrt{3}$인 직사각형의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

답은 ③!!

comment

동점 2개일 때, 자취의 영역을 그릴 때는 동점 하나를 경계점에 고정한 후에 자취의 영역의 '테두리'부터 그리자. 이후에 동점을 경계점 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠한다. '테두리'의 존재로 색칠되는 영역을 예측하기 쉬울 것이다. 이제 14학년도 사관 문제가 19학년도 수능과 20학년도 6월 평가원에서 어떻게 진화하는지 보러 가자.

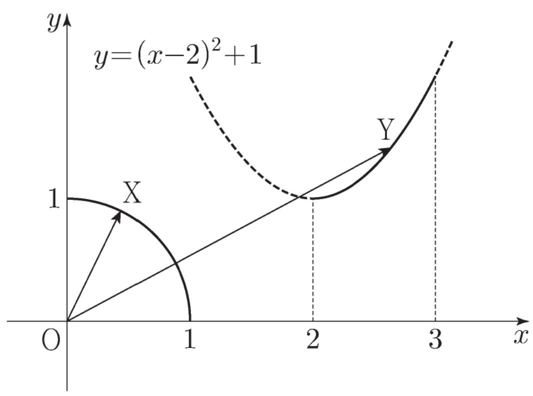
예제(2) 20학년도 9월 평가원 19번

좌표평면 위에 두 점 A(1, 0), B(0, 1)이 있다. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직이는 점 X와 함수 $y=(x-2)^2+1\ (2 \le x \le 3)$의 그래프 위를 움직이는 점 Y에 대하여

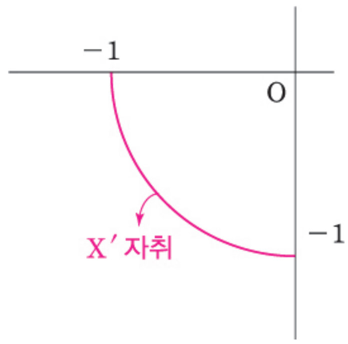
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R라 하자. 점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

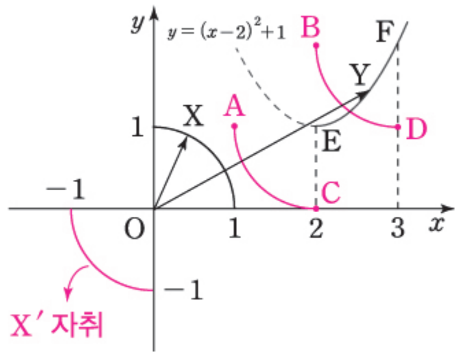
① $16-2\sqrt{5}$　② $16-\sqrt{5}$　③ 16　④ $16+\sqrt{5}$　⑤ $16+2\sqrt{5}$



1. $-\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OX'}}$라고 하자. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}+\overrightarrow{\mathrm{OX'}}$이고 점 $\mathrm{X'}$의 자취를 그리면 다음과 같다.



이를 토대로 점 P가 나타내는 자취의 영역을 그려보자.



그림과 같이 동점 Y를 점 E, 점 F에 각각 고정하고 점 P이 나타내는 자취의 '테두리'를 그려주자.

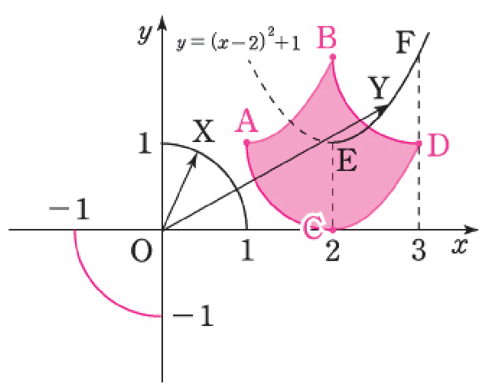
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}+\overrightarrow{\mathrm{OX'}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$의 종점인 **점 Y를 점 E에 고정하고 $\overrightarrow{\mathrm{OX'}}$를 그리면 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$가 그려진다.**

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}+\overrightarrow{\mathrm{OX'}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$의 종점인 **점 Y를 점 F에 고정하고 $\overrightarrow{\mathrm{OX'}}$를 그리면 $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$가 그려진다.**

2. 테두리의 꼭짓점 A, B, C, D는 어떻게 이을까?

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}+\overrightarrow{\mathrm{OX'}}$**에서 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$는 점 X′의 자취를 따왔으니 점 Y의 자취를 이용할 차례이다.**

점 A와 점 B, 점 C와 점 D를 이을 때, 점 Y의 자취를 이용하면 된다.
따라서 점 P가 나타내는 자취의 영역은 오른쪽 그림과 같다.



3. $\overline{\mathrm{OP}}$의 최솟값 $m=\overline{\mathrm{OE}}-1=\sqrt{5}-1$이므로 $m^2=6-2\sqrt{5}$이다.

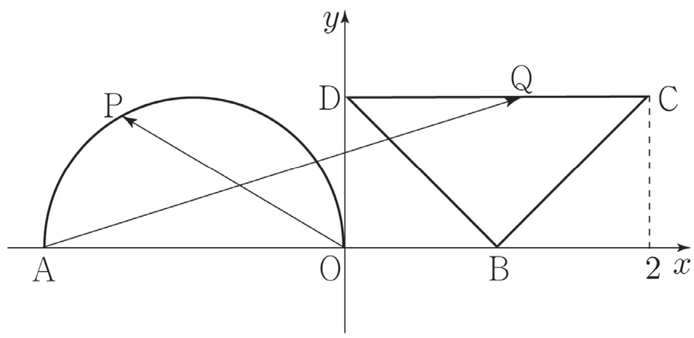
$\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값 $M=\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{10}$이므로 $M^2=10$이다.

따라서 $m^2+M^2=16-2\sqrt{5}$이다.

답은 ①!!

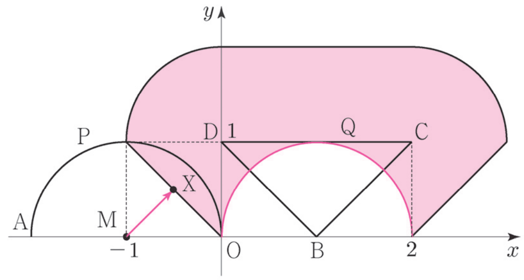
예제(3) 21년 4월 교육청 기하 29번

좌표평면 위의 네 점 A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ 0)$, C$(2,\ 1)$, D$(0,\ 1)$이 있다. 반원의 호 $(x+1)^2+y^2=1$ $(0 \le y \le 1)$ 위를 움직이는 점 P와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M^2+m^2=p+2\sqrt{q}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]



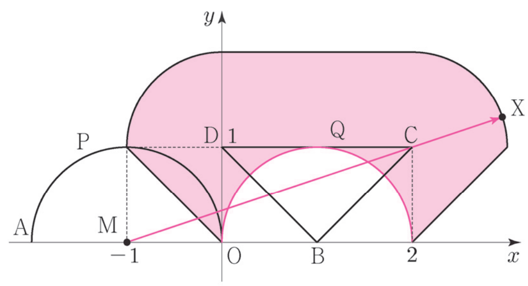
1. 원의 중심을 M 이라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 이다.
$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ 종점의 자취를 그려보자.

그림과 같이 동점 Q 를 점 B, C, D 에 각각 고정하고 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ 를 그리면 점 X 이 나타내는 자취의 '테두리'가 만들어진다. 자취의 '테두리'의 꼭짓점을 이을 때는 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 의 자취인 $\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 이용하면 된다.



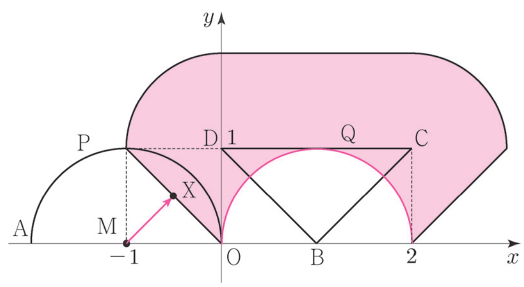
색칠된 영역 및 경계가 점 X 의 자취이다.
이때, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{MX}}$ 이다.
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|$ 이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|$ 의 값의 최대, 최소를 구하자.

2. (1) $|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|$ 의 값의 최댓값
$|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|$ 의 값이 최대일 때, 선분 MX 는 점 C 를 지난다.



이때, $|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+1^2}=\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|=1$ 이므로 $M=\sqrt{10}+1$ 이다.

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|$ 의 값의 최솟값
점 X 는 점 M 에서 원점 O 와 점 $(-1, 1)$ 을 이은 선분에 내린 수선의 발이다.



이때, 이 선분은 $y=-x$ 의 일부이므로 $\mathrm{M}(-1,\ 0)$ 와 이 선분 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

따라서 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

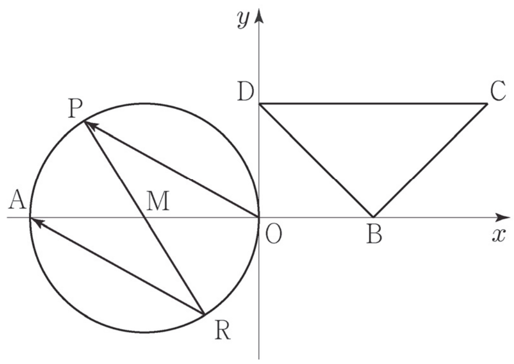
이때, $M^2+m^2=(\sqrt{10}+1)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=(11+2\sqrt{10})+\frac{1}{2}=\frac{23}{2}+2\sqrt{10}$ 이므로

$p=\frac{23}{2}$, $q=10$ 에서 $p\times q=115$ 이다.

답은 115!!

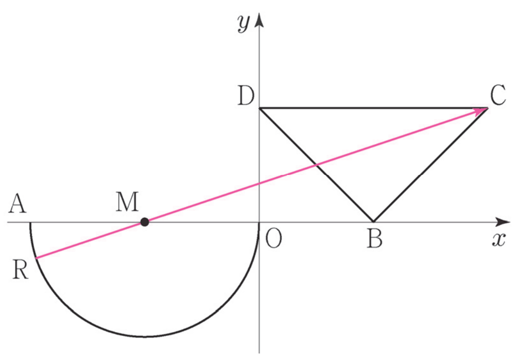
※ 다른 풀이

1. 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 는 직접 관찰하기 힘들다. 반원 $(x+1)^2+y^2=1\,(0\le y\le 1)$ 의 중심을 $\mathrm{M}(-1,\ 0)$ 이라 하고, 두 점 O, P 를 점 M 에 대하여 대칭이동시켜서 관찰하자.



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{RA}}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ 이다. $|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$ 의 값이 최대일 때와 최소일 때의 상황을 살펴보자.

2. $|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{RM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|\le 1+|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$ 이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$ 의 값이 최대일 때의 상황을 찾아보자.

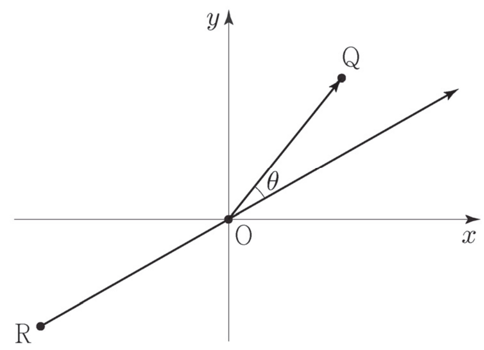


삼각형 위의 점 Q 가 점 C 에 위치할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$ 의 값이 최대이다. $\mathrm{M}(-1,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 1)$ 에서 $|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이므로 $M=\sqrt{10}+1$ 이다.

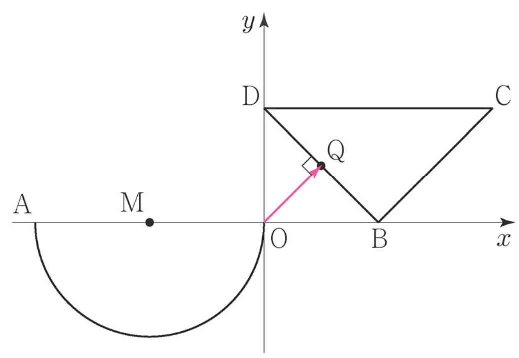
3. $|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{RO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 이다. 이때, 제3사분면 위의 점 R 와 제1사분면 위의 점 Q 에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ **가 이루는 각의 크기는** $\frac{\pi}{2}$ **보다 크므로**

$\overrightarrow{\mathrm{RO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ **가 이루는 각의 크기는** $\frac{\pi}{2}$ **보다 작다.**



따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{RO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| \geq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 이고, 점 R 가 원점 O 에 위치할 때, 등호가 성립한다.
$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 의 값이 최소일 때의 상황을 찾아보자.



삼각형 위의 점 Q 가 점 O 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발에 위치할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 의 값이 최소이다.
$\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OD}} = 1$ 이므로 점 Q가 선분 BD 의 중점일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ 의 값이 최소이고

그 값은 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

따라서 $M^2+m^2 = (\sqrt{10}+1)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (11+2\sqrt{10})+\frac{1}{2} = \frac{23}{2}+2\sqrt{10}$ 이므로

$p = \frac{23}{2}$, $q = 10$ 에서 $p\times q = 115$ 이다.

답은 115!!

예제(4) 19학년도 수능 29번

좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

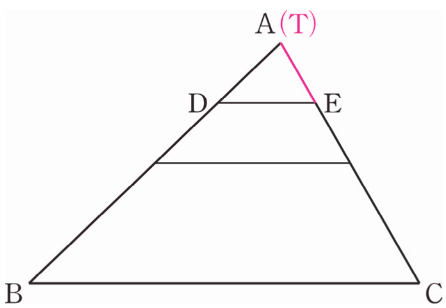
$$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. 당황스럽다. 우리는 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$처럼 동점이 2개일 때만 다뤄보고 $\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$처럼 동점이 3개일 때는 다뤄보지 못했다. 하지만 상관없다. **두 개의 벡터의 합의 종점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 마저 고려해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다.**
따라서 $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})$**에서 점 S의 자취의 영역을 먼저 구하고** $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$**에서 점 X의 자취의 영역을 구해보자.**

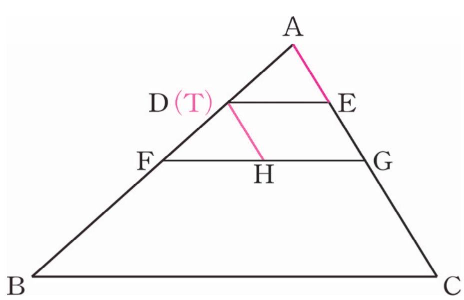
$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})$**로 두고 점 S의 자취의 영역**을 구해보자.

$\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점을 점 D라고 하자. 점 P는 $\overline{AB}$ 위를 움직이므로 $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}$로 두면 **점 T는 $\overline{AD}$ 위를 움직인다.**
$\overline{AC}$를 $1:3$으로 내분하는 점을 점 E라고 하자. 점 R는 $\overline{CA}$ 위를 움직이므로 $\overrightarrow{AU}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}$로 두면 **점 U는 $\overline{AE}$ 위를 움직인다.**
$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})=\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{AU}$로 표현할 수 있다.
$\overrightarrow{AT}$의 종점인 점 T를 점 A에 고정하자.



$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{AU}$**에서 $\overrightarrow{AT}$의 종점인 점 T를 점 A에 고정하고 $\overrightarrow{AU}$를 그리면 $\overline{AE}$가 그려진다.**

$\overrightarrow{AT}$의 종점인 점 T를 점 D에 고정하자.



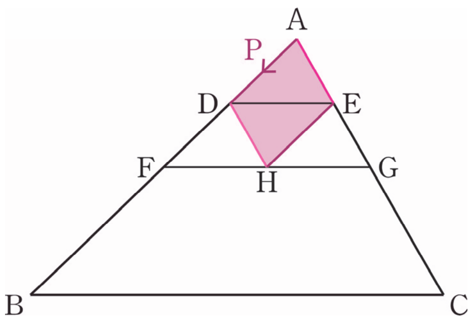
$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{AU}$**에서 $\overrightarrow{AT}$의 종점인 점 T를 점 D에 고정하고 $\overrightarrow{AU}$를 그리면 $\overline{DH}$가 그려진다.**

그 이유는 다음과 같다. $\overrightarrow{\mathrm{AU}}$를 평행이동하여 시점 A를 $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$의 종점 D에 맞추면 종점 U는 점 S에 맞춰져 $\overrightarrow{\mathrm{AU}}=\overrightarrow{\mathrm{DS}}$이다. $\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AU}}=\overrightarrow{\mathrm{DS}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AT}}+\overrightarrow{\mathrm{AU}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DS}}$이다.

점 S의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.

테두리의 꼭짓점 A, D, E, H는 어떻게 이을까?

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AT}}+\overrightarrow{\mathrm{AU}}$에서 $\overline{\mathrm{AE}}$, **$\overline{\mathrm{DH}}$는 점 U의 자취인 $\overline{\mathrm{AE}}$를 따왔으니**
점 T의 자취인 $\overline{\mathrm{AD}}$를 써먹을 차례이다.



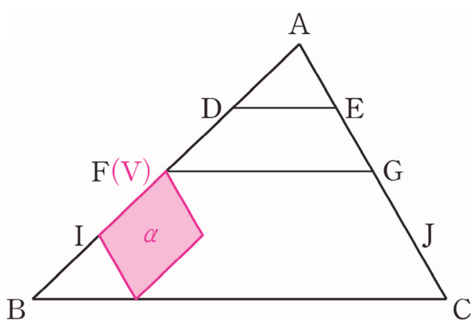
점 A와 점 D, 점 E와 점 H를 이을 때, 점 T의 자취인 $\overline{\mathrm{AD}}$을 이용하면 된다.
점 T가 $\overline{\mathrm{AD}}$위를 움직일 때 점 S의 자취의 영역은 위와 같다.

2. 점 S의 자취의 영역을 구했으니 $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$에서 **점 X의 자취의 영역**을 구해보자.

점 A와 점 B의 중점은 점 F이고 점 A와 점 C의 중점은 점 G이다. 점 Q는 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위를 움직이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AV}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$로 두면 **점 V는 $\overline{\mathrm{FG}}$ 위를 움직인다.**

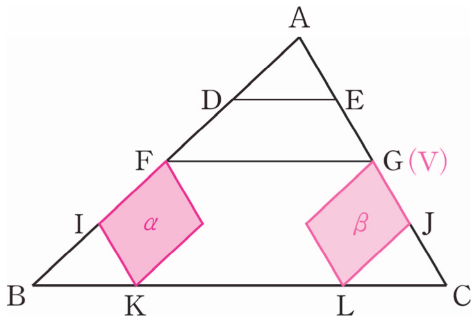
$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{AV}}$로 표현할 수 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{AV}}$의 종점인 점 V를 점 F에 고정하자.



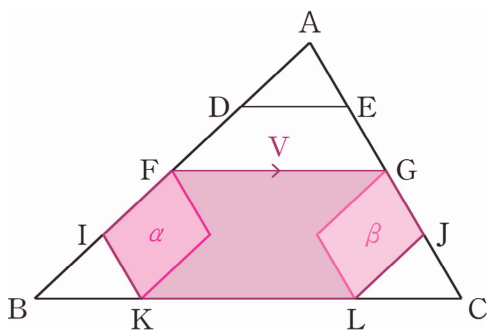
$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{AV}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AV}}$의 종점인 점 V를 점 F에 고정하고 $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$를 그리면 영역 α가 그려진다.

$\overrightarrow{AV}$의 종점인 점 V를 점 G에 고정하자.



$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$에서 $\overrightarrow{AV}$의 종점인 점 V를 점 G에 고정하고 $\overrightarrow{AS}$를 그리면 영역 β가 그려진다.

점 X의 자취의 영역의 '일부'가 만들어졌다.
테두리의 꼭짓점 F, G, K, L은 어떻게 이을까?
$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$에서 영역 α, 영역 β는 점 S의 자취의 영역을 따왔으니
점 V의 자취인 $\overline{FG}$를 써먹을 차례이다.



점 F와 점 G, 점 K와 점 L을 이을 때, 점 T의 자취인 $\overline{FG}$를 이용하면 된다.
점 V가 $\overline{FG}$ 위를 움직일 때 점 X의 자취의 영역의 '테두리'는 육각형 FIKLJG임을 알 수 있다.

점 X의 자취의 영역은 위와 같이 육각형 FIKLJG의 테두리와 그 내부이다.

$\triangle ADE$, $\triangle ABC$는 서로 닮음이다. 따라서 $\triangle ADE = \dfrac{1}{16} \times \triangle ABC = \dfrac{9}{16}$이다.

육각형 FIKLJG의 넓이는 $10 \times \triangle ADE$이므로 $\dfrac{9}{16} \times 10 = \dfrac{45}{8}$이다.

따라서 $p = 8$, $q = 45$이고 $p + q = 53$이다.

답은 53!!

comment

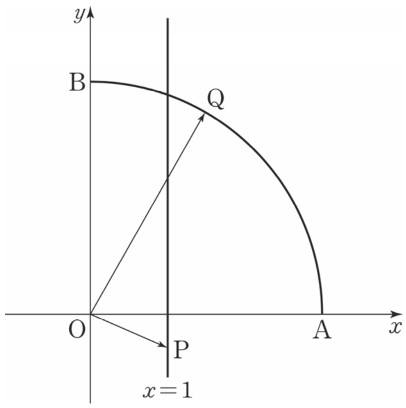
동점이 3개일 때는 두 개의 벡터의 합의 종점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 마저 고려해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다. 동점 2개일 때 자취의 영역 그리기를 2번 반복한다고 생각하면 된다.

동점 2개일 때, 자취의 영역을 그릴 때는 동점 하나를 경계점에 고정한 후에 자취의 영역의 '테두리'부터 그리자. 이후에 동점을 경계점 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠한다. '테두리'의 존재로 색칠되는 영역을 예측하기 쉬울 것이다.

자취의 영역을 직접 그리는 문제는 많이 출제된 편은 아니었다. **기존에는 '벡터 쪼개기', '벡터 회전'이 평면벡터, 공간벡터에서 큰 축을 담당**하고 있다. 하지만 19학년도 수능을 기점으로 동점이 그리는 자취의 영역 관련 문제가 등장하였고 이는 많은 수험생들에게 큰 충격으로 다가왔다. 20학년도 6월 평가원에서도 자취의 영역 관련 문제가 2개나 등장하여 평면벡터의 트렌드가 크게 바뀌었다.

예제(5) 20학년도 6월 평가원 18번

좌표평면 위에 두 점 A$(3, 0)$, B$(0, 3)$과 직선 $x=1$ 위의 점 P$(1, a)$가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=5$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $-5\sqrt{3}$　② $-4\sqrt{3}$　③ $-3\sqrt{3}$　④ $-2\sqrt{3}$　⑤ $-\sqrt{3}$

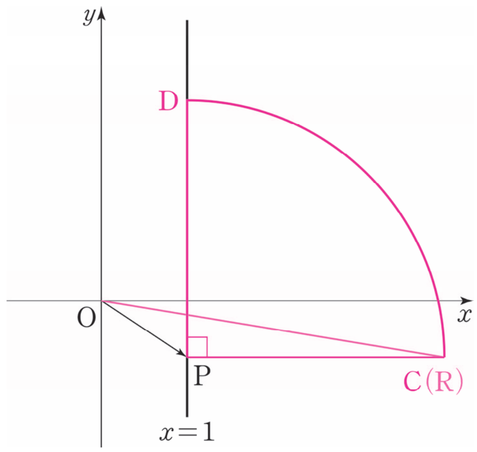
1. '벡터 회전'의 관점으로도 풀 수 있지만 19학년도 수능 29번 트렌드에 맞춰 **벡터의 평행이동**으로 먼저 풀어보겠다.

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$에서 점 R의 자취의 영역을 구해보자.

점 O, 점 P는 정점이고 점 Q는 동점이다. 점 Q는 호 AB 위를 움직인다.

점 P가 왜 정점일까? $f(a)=5$는 항등식이 아닌 방정식이다. **$f(a)=5$를 만족하는 a는 변수가 아닌 미지수**이다. **미지수는 모르는 수일 뿐이지 이미 정해져 있다.** 따라서 점 P는 동점이 아닌 정점이다.

(1) $a<0$일 때



$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$에서 $\overrightarrow{OQ}$의 시점인 점 O를 점 P에 고정하고 $\overrightarrow{OQ}$를 그리면 $\overset{\frown}{CD}$가 그려진다.

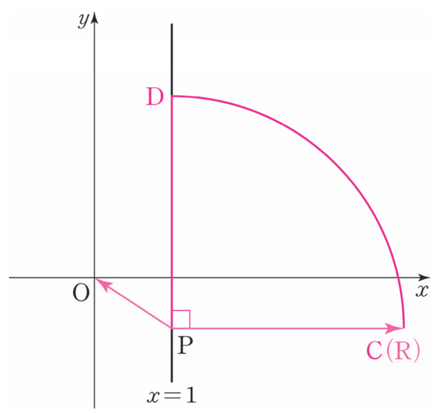
$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$는 $|\overrightarrow{OR}|$이고 $|\overrightarrow{OR}|$의 최댓값은 직관적으로 점 R가 점 C에 있을 때이다.

$|\overrightarrow{OR}|$의 최댓값은 왜 점 R가 점 C에 있을 때 생길까?

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=a^2+1$, $|\overrightarrow{OQ}|^2=9$로 **일정하므로**

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$가 최대일 때 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2$가 최대이다.

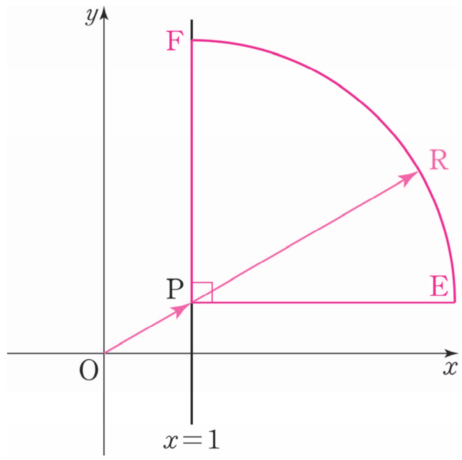


$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PR}=-\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PR}$가 최대이기 위해서는

$\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PR}$가 이루는 각이 0° 이상 180° 이하에서 최대여야 한다. 이때 점 R의 위치는 점 C이다.

점 $C(4, a)$이고 $|\overrightarrow{OR}|=\sqrt{a^2+16}=5$이므로 $a=-3$이다.

(2) $a>0$일 때



$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$**에서** $\overrightarrow{OQ}$ **의 시점인 점** O**를 점** P**에 고정하고** $\overrightarrow{OQ}$ **를 그리면** $\overset{\frown}{EF}$**가 그려진다.**

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$는 곧 $|\overrightarrow{OR}|$이고 $|\overrightarrow{OR}|$의 최댓값은 **점** O, **점** P, **점** R**가 일직선 위에 있을 때**이다.

$|\overrightarrow{OR}|=\sqrt{a^2+1}+3=5$이므로 $a=\sqrt{3}$이다.

$f(a)=5$가 되도록 하는 모든 a의 곱은 $-3\times\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$이다.

답은 ③!!

2. **'벡터 회전'의 관점**으로 풀어보겠다. **점** O, **점** P**는 정점이고 점** Q**는 동점**이다.

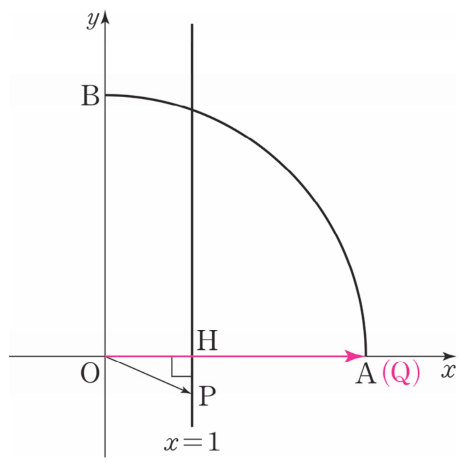
$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$가 최댓값을 가질 때는 곧 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2$가 최댓값을 가질 때와 같다.

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=a^2+1$, $|\overrightarrow{OQ}|^2=9$**로 일정하므로** $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$**가 최대일 때** $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2$**가 최대이다.**

(1) $a<0$일 때

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$**가 최대이기 위해서는** $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$**가 이루는 각이** 0° **이상** 180° **이하에서 최소여야 한다. 점** O, **점** P, **점** Q**가 일직선 위에 존재할 수 없으므로** $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$가 최대이기 위한 점 Q의 위치는 점 A이다.



점 $\mathrm{P}(1, a)$이고 점 $\mathrm{A}(3, 0)$이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=3$이다.

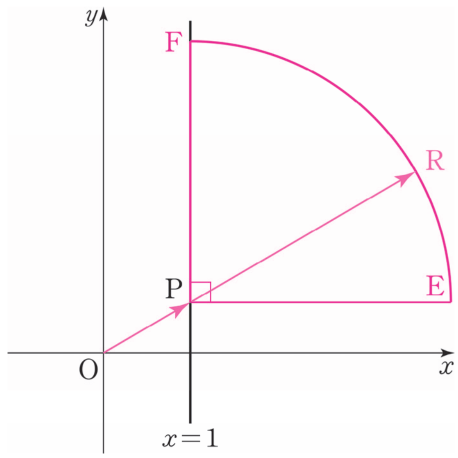
점 P에서 x축 위로 정사영을 내려

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OQ}=3$을 구해도 좋다.

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=a^2+1+9+2\times3=a^2+16=25$

따라서 $a=-3$이다.

(2) $a>0$일 때



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 이루는 각이 0° 이상 180° 이하에서 최소여야 한다.
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 이루는 각이 0° 가 가능하여 점 O, 점 P, 점 Q가 일직선 위에 존재할 수 있다.

점 Q의 위치는 그림과 같다.
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{a^2+1}+3=5$
따라서 $a=\sqrt{3}$이다.
$f(a)=5$가 되도록 하는 모든 a의 곱은 $-3\times\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$이다.

답은 ③!!

※ $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$만 보고 무작정 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=2\times\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}\right|=2\times|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$으로 '벡터 쪼개기'를 하는 경우가 있다. 결코 좋은 선택이 아니다. **정점 P와 동점 Q의 중점인 동점 M의 자취를 그리는 것이 어렵기 때문이다.**

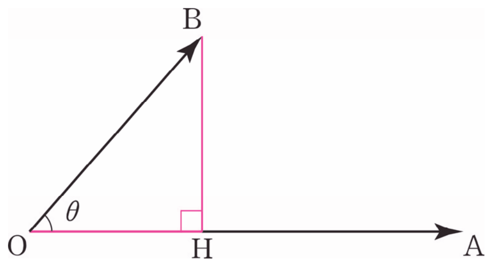
이 문제에서는 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$가 일정하기에 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$로 다루는 것이 훨씬 낫다.
이후에 '벡터 쪼개기'의 기준을 확실히 세우고 '벡터 회전'도 자세히 다루도록 하겠다.

comment

동점이 하나밖에 없어 벡터의 평행이동을 이용한 자취를 그리기 어렵지 않았다. 보통 동점이 하나밖에 없을 땐 '벡터 쪼개기', '벡터 회전'을 쓰는 것이 더 편하다. **각 점이 동점이냐 정점이냐에 따라 어떻게 '벡터 쪼개기', '벡터 회전'을 써야 하는지가 달라진다.** 이와 같은 '벡터 쪼개기' ,'벡터 회전'의 기준이 뚜렷하지 않다면 이를 이용하여 문제 풀기가 힘들 것이다.

◆ 3. 벡터 정사영

수선의 발을 내리기 쉬울 때 쓰면 매우 유용하다. 하지만 **수선의 발의 자취를 파악하기 어려운 경우는 이 대신 이후에 배울 '벡터 쪼개기'나 '벡터 회전'을 이용**하는 것이 좋다.

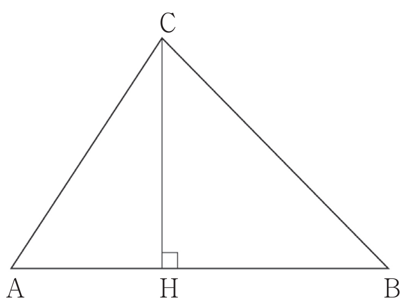


점 B의 직선 OA 위로의 수선의 발은 점 H이다. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$이다.

이를 이용할 때의 장점은 **평면벡터의 내적을 선분의 길이의 곱으로 볼 수 있다는 점이다. 평면을 다루는 것보다 한 차원 낮은 직선을 다루는 것이 훨씬 편리**하다.

예제(6) 16년 7월 교육청 19번

그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}$의 값은? [4점]

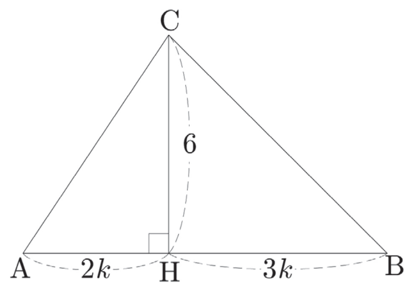


(가) 점 H가 선분 AB를 2 : 3으로 내분한다.
(나) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=40$
(다) 삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

1. 문제에서 구하고자 하는 값을 먼저 살펴보자. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{CH}|^2$이다.
$\triangle ABC$의 넓이가 30이므로 $\overline{AB}$를 구하고 $\overline{CH}$를 구하자.

2. $\overline{AB} = 5k$라 하면 조건 (가)에 의하여 $\overline{AH} = 2k$, $\overline{BH} = 3k$이다.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AH}| = 10k^2 = 40$에서 $k = 2$이다. 따라서 $\overline{AB} = 10$, $\overline{CH} = 6$이다.
따라서 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{CH}|^2 = 36$이다.

답은 ①!!

예제(7) 20학년도 6월 평가원 29번

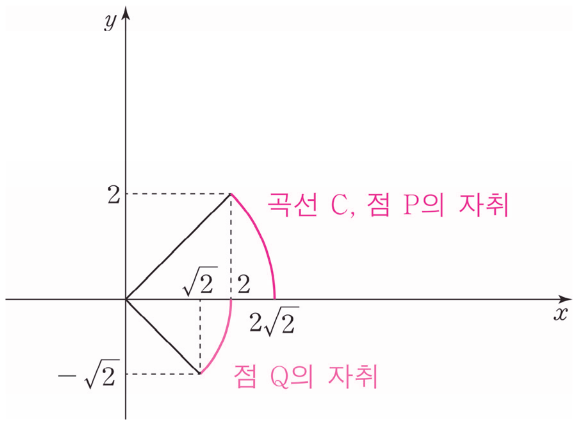
좌표평면에서 곡선 $C: y=\sqrt{8-x^2}\ (2 \le x \le 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=2$, $\angle \mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자. 점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

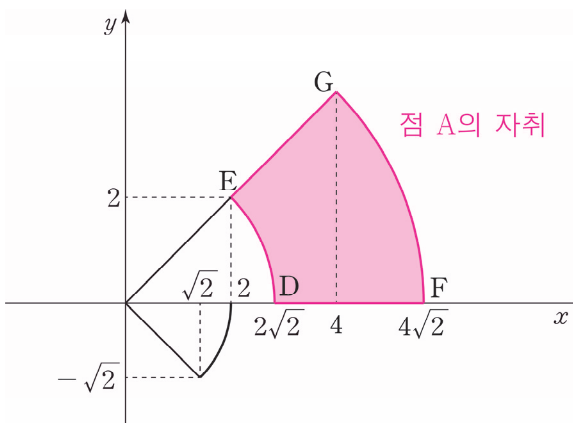
를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자. 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.) [4점]

1. 문제가 길어 조건 파악이 한 번에 되지 않는다. **한 줄씩 끊어가며 조건을 파악**하자.

좌표평면에서 곡선 C와 점 Q가 나타내는 곡선은 그림과 같다.



이제 $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역 D를 그려야 한다. **점 O는 원점으로 정점이고 점 P, 점 X, 점 Y는 동점이다. 동점이 3개인 상황에서는 두 개의 벡터의 합의 종점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 마저 고려**해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다. 따라서 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}$**에서 점 A의 자취의 영역을 먼저 구하고** $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$**에서 점 Z의 자취의 영역을 구해보자.**

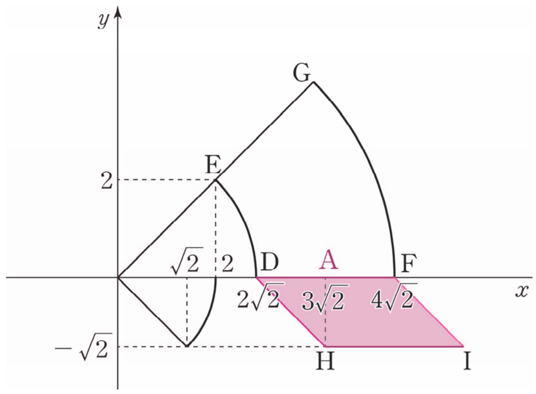


$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}$**로 두고 점 A의 자취의 영역**을 구해보자.
점 P는 호 DE 위를 움직인다. 점 X가 선분 OP 위를 움직이므로 점 O, 점 P, 점 X는 일직선 위에 있다. 따라서 **점 A의 자취의 영역**은 위와 같이 그려진다. $\overset{\frown}{GF}$는 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 원 위에 있다. $\overset{\frown}{GF}$의 중심각은 $\frac{\pi}{4}$이다.

2. 점 A의 자취를 구했으므로 $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$에서 **점 Z의 자취의 영역을 구해보자.**
점 A는 $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{GF}$, $\overline{EG}$, $\overline{DF}$로 둘러싸인 영역의 테두리와 그 내부를 움직인다.
점 Y가 $\overline{OQ}$위를 움직이므로 점 O, 점 Q, 점 Y는 일직선 위에 있다.
$\angle POQ=\frac{\pi}{4}$**를 만족시키려면** $\angle AOY=\frac{\pi}{4}$**를 만족시키며 점 Y가 움직여야 한다.**

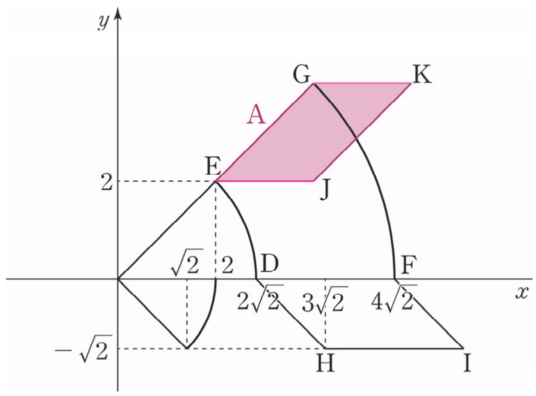
먼저 **점 A가 $\overline{\mathrm{EG}}$ 위를 움직일 때와 점 A가 $\overline{\mathrm{DF}}$ 위를 움직일 때로 각각 나누어 점 Z가 나타내는 자취의 영역 일부를 구해보자.** 미안하지만 **동점을 경계점에 고정하여 자취를 그리는 방법**을 충분히 알려줬으므로 설명을 생략하고 바로 자취의 영역을 그리도록 하겠다.

점 A가 $\overline{\mathrm{DF}}$ 위를 움직일 때 점 Z가 나타내는 자취의 영역은 아래와 같다.



평행사변형 DFIH가 그려진다.

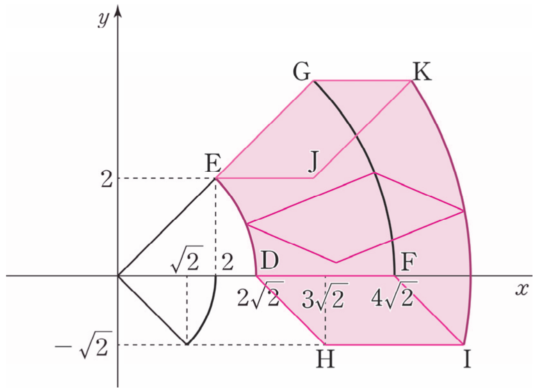
점 A가 $\overline{\mathrm{EG}}$ 위를 움직일 때 점 Z가 나타내는 자취의 영역은 아래와 같다.



평행사변형 EGKJ가 그려진다.

점 A의 자취는 길이가 $2\sqrt{2}$인 선분이 $\overline{\mathrm{DF}}$에서 $\overline{\mathrm{EG}}$까지 $\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$를 따라 회전하는 형태이다.

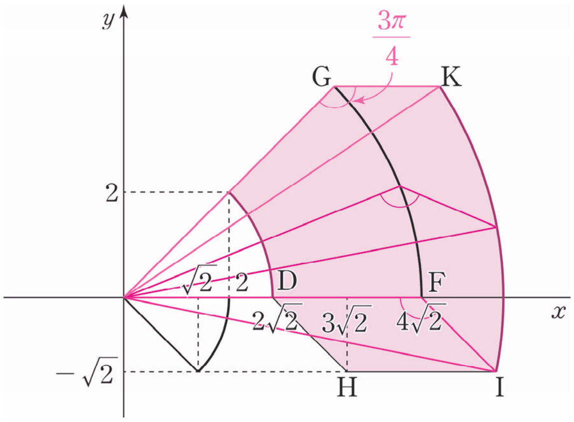
따라서 **점 Z가 나타내는 자취의 영역의 '테두리'는 평행사변형 DFIH을 평행사변형 EGKJ까지 회전시켜 구할 수 있다.**



따라서 **점 Z가 나타내는 자취의 영역의 '테두리'는** $\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{IK}}$, $\overline{\mathrm{EG}}$, $\overline{\mathrm{GK}}$, $\overline{\mathrm{HI}}$, $\overline{\mathrm{DH}}$ 이다.

$\overset{\frown}{\mathrm{IK}}$가 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{13}$인 원 위에 있다. $\overset{\frown}{\mathrm{IK}}$의 중심각은 $\frac{\pi}{4}$이다.

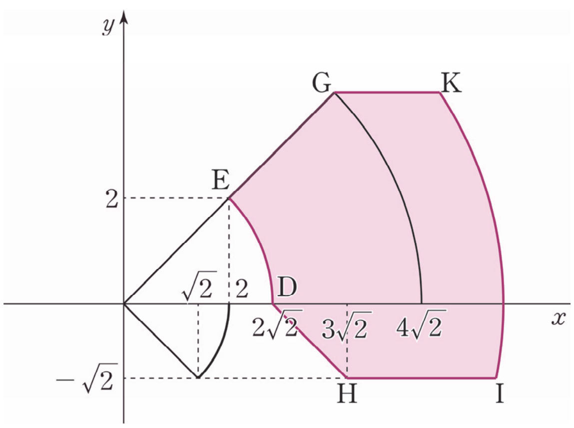
※ $\overset{\frown}{\mathrm{IK}}$가 중심이 원점 O이고 반지름이 $2\sqrt{13}$인 원 위에 있으면서 중심각이 $\frac{\pi}{4}$인 호라는 것을 어떻게 알 수 있을까?



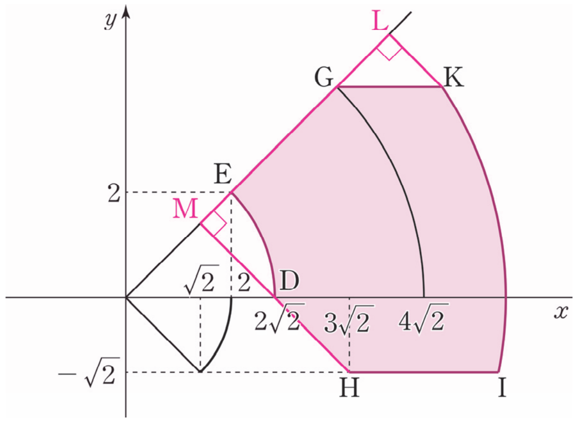
한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$, 다른 한 변의 길이가 2이고 그사이 끼인 각이 $\frac{3}{4}\pi$인 삼각형이 회전하는 형태이다.

끼인 각의 대변의 길이가 일정하므로 $\overset{\frown}{\mathrm{IK}}$가 중심이 원점 O인 원 위에 있으면서 중심각이 $\frac{\pi}{4}$인 호라는 것을 알 수 있다. 이 호의 반지름의 길이는 원점 O와 점 $\mathrm{K}(6, 4)$ 사이의 거리인 $2\sqrt{13}$이다.

3. **점 Z가 나타내는 자취의 영역 D는** $\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{IK}}$, $\overline{\mathrm{EG}}$, $\overline{\mathrm{GK}}$, $\overline{\mathrm{HI}}$, $\overline{\mathrm{DH}}$**로 둘러싸인 영역의 테두리와 그 내부**이다.



영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점은 점 E이므로 점 R는 점 E와 일치한다.
따라서 점 $\mathrm{R}(2, 2)$이다.



점 R은 직선 $y=x$ 위에 있다. $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최대, 최소를 알기 위해서 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$**에 평행한 직선 $y=x$ 위에 영역 D에 속하는 점들의 정사영을 내려보자.** 영역 D에 속하는 점들의 직선 $y=x$위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{LM}}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값은 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OL}}$일 때이다. 이때 점 Z은 점 $\mathrm{K}(6, 4)$이다.
따라서 최댓값 $\mathrm{M}=(2, 2) \cdot (6, 4)=2\times 6+2\times 4=20$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최솟값은 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$일 때이다. 이때 점 Z은 점 $\mathrm{D}(2\sqrt{2}, 0)$, 점 $\mathrm{H}(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$을 잇는 선분 $\overline{\mathrm{DH}}$ 위의 점 중 하나이다.

따라서 최솟값 $m=(2, 2) \cdot (2\sqrt{2}, 0)=2\times 2\sqrt{2}+2\times 0=4\sqrt{2}$이다.
결론적으로 $M+m=20+4\sqrt{2}$ 이고 $a=20$, $b=4$이다. $a+b=24$이다.

답은 24!!

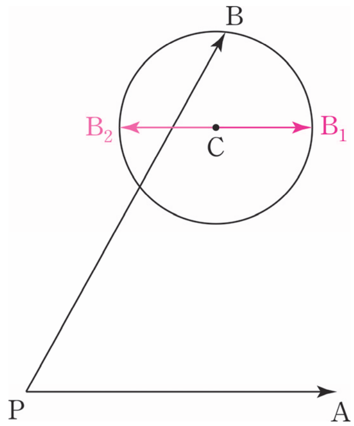
comment

벡터 평행이동을 이용한 자취의 영역을 구하고 벡터의 정사영을 이용하여 내적의 최대, 최소를 구하는 문제였다. 가히 평면벡터의 최종진화 형태라 할 수 있겠다.

벡터 쪼개기

1. 원이나 구의 중심을 거쳐 쪼개기

좌표평면에 점 $C(2, 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 B가 존재한다.
점 $P(0, 0)$, 점 $A(1, 3)$일 때 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최댓값, 최솟값을 구해보자.



점 P, 점 A는 정점이고 점 B는 동점이다. 따라서 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최대, 최소를 구하기 위해서는 원의 중심인 점 C를 거쳐 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB})$로 쪼개는 것이 유리하다. 더 복잡해지지 않았냐고? 아니다.

점 P, 점 A, 점 C는 정점이므로 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 는 고정값 $(1, 3) \cdot (2, 4) = 14$을 갖는다.
따라서 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB}$가 최대일 때 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$도 최대이고 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB}$가 최소일 때 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$도 최소이다.

$|\overrightarrow{CB}|$는 원의 반지름의 길이로 일정하다. $\overrightarrow{CB}$는 자유로운 방향을 지니는 벡터이기에 $\overrightarrow{PA}$와 어떤 각이든 이룰 수 있다.
따라서 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB}$가 최대가 되기 위해서는 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{CB}$가 이루는 각이 0°이면 되므로 점 B가 점 B_1 위치에 있으면 된다. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB}$가 최소가 되기 위해서는 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{CB}$가 이루는 각이 180°이면 되므로 점 B가 점 B_2 위치에 있으면 된다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최댓값은 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \sqrt{10}$이므로 $14 + \sqrt{10}$이고 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최솟값은 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CB_2} = -\sqrt{10}$이므로 $14 - \sqrt{10}$이다.

결론적으로 **원의 중심을 거쳐 쪼개면 크기가 일정하고 자유로운 방향을 지니는 벡터를 얻을 수 있기에 내적의 최대, 최소를 구할 때 유리**하다.

◆ 2. 중점을 거쳐 쪼개기

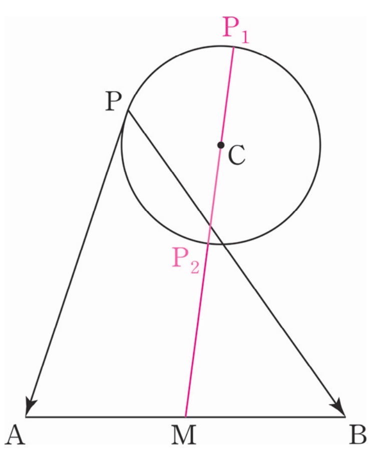
좌표평면에 점 $\mathrm{C}(2,4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 P가 존재한다.
점 $\mathrm{A}(1,3)$, 점 $\mathrm{B}(5,1)$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값, 최솟값을 구해보자.

점 P가 원 위에 있으니 무작정 원의 중심 C를 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$를 $(\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$로 쪼개는 경우가 있다.
$(\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$**는 고정값을 가지며 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$는 점 P의 위치에 따라 변하는 값을 가진다.**

$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$이 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 최대이고,
$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$이 최소일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 최소이다.
아쉽게도 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$**가 동시에 최대가 되거나 동시에 최소가 될 수 없다.**
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$의 최대, 최소를 구하기 만만치 않다.
무작정 원의 중심 C를 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$를 쪼개 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최대, 최소를 구하기 힘들다.

여기선 원의 중심을 거쳐 벡터를 쪼개는 방식이 왜 잘 안 통하는 것일까? 그리고 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$를 어떻게 쪼개야 할까?

원의 중심을 거쳐 벡터를 쪼개는 방식이 잘 안 통하는 이유는 다음과 같다.
겉으로 보기에는 이 문제가 바로 전에 푼 문제와 매우 유사해 보인다. 하지만 다른 점이 있다.
바로 **전에 풀었던 문제에서는 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최대 최소를 구해야 하는데 점 P, 점 A는 정점이고 점 B는 동점이었다.** 하지만 **이 문제에서는 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최대 최소를 구해야 하는데 점 A, 점 B가 정점이고 점 P가 동점이다!**
어떤 점이 정점이고 어떤 점이 동점이냐에 따라 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최대, 최소를 쉽게 구하기 위한 벡터 쪼개기 기준이 달라진다.



$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\mathrm{M}(3,2)$을 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$를 쪼개보자.
$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})$
$\overrightarrow{\mathrm{MA}}=-\overrightarrow{\mathrm{MB}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})=0$이고 $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}}=-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$이다.
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$로 간단히 표현할 수 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2$로 표현할 수도 있다.

점 B, 점 M은 정점이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$은 고정값 $(5-3)^2+(1-2)^2=5$를 갖는다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$가 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$도 최대이고 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$가 최소일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$도 최소이다.

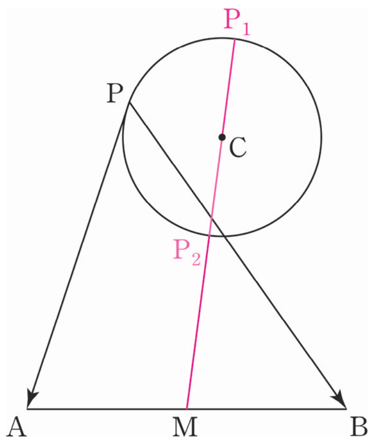
점 M, 점 C, 점 P가 일직선 위에 있을 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$이 최댓값이나 최솟값을 갖는다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$이 최대일 때는 점 P가 점 P_1 위치에 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$이 최소일 때는 점 P가 점 P_2 위치에 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{P_1M}}|^2=(\sqrt{5}+1)^2$이므로 $(\sqrt{5}+1)^2-5=1+2\sqrt{5}$이고

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{P_2M}}|^2=(\sqrt{5}-1)^2$이므로 $(\sqrt{5}-1)^2-5=1-2\sqrt{5}$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최대, 최소도 한 번 구해보자.



$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\mathrm{M}(3, 2)$를 거쳐 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$를 쪼개면 $2\times\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{2}\right|=2\times|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$가 최대일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$도 최대이고 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$가 최소일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$도 최소이다.

점 M, 점 C, 점 P가 일직선 위에 있을 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$이 최댓값이나 최솟값을 갖는다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$이 최대일 때는 점 P가 점 P_1 위치에 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$이 최소일 때는 점 P가 점 P_2 위치에 있다.

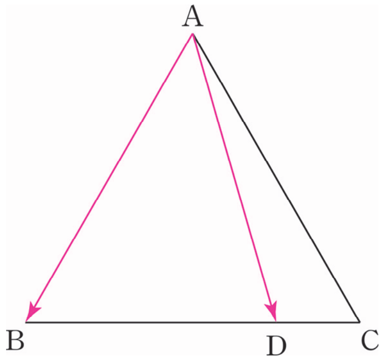
$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P_1M}}|=\sqrt{5}+1$이므로 $2\times(\sqrt{5}+1)$이고

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최솟값은 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P_2M}}|=\sqrt{5}-1$이므로 $2\times(\sqrt{5}-1)$이다.

결론적으로 **점 A, 점 B가 정점이고 점 P가 동점일 때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 M을 거쳐 벡터를 쪼개면 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$이나 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최대, 최소를 구할 때 유리**하다.

3. 꼭짓점을 거쳐 쪼개기

정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 4이고 점 D가 $\overline{BC}$의 $3:1$ 내분점일 때 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$의 값은?



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 그렇다면 $\overrightarrow{AD}$를 정삼각형 ABC의 꼭짓점 중 하나인 점 B를 거쳐 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$로 쪼개보는 것은 어떨까?

$|\overrightarrow{BD}|$를 알고 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각이 특수각이므로 계산하기 훨씬 수월하다.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=|\overrightarrow{AB}|^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

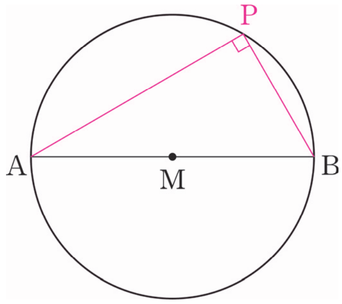
$|\overrightarrow{AB}|^2=16$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=4\times3\times\cos60^\circ=6$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=10$이다.

이처럼 **다각형이나 공간도형의 꼭짓점을 거쳐 벡터를 쪼갤 수도 있다.**

평면벡터 내적 조건 해석

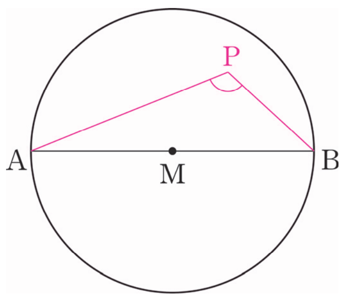
1. 점 A, 점 B가 정점이고 점 P가 동점

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$ 일 때



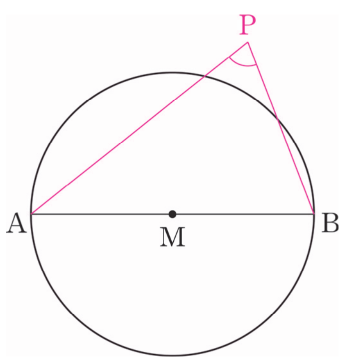
좌표평면에서 점 P**의 자취는** $\overline{\mathrm{AB}}$**를 지름으로 하는 원**이다.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} \leq 0$ 일 때



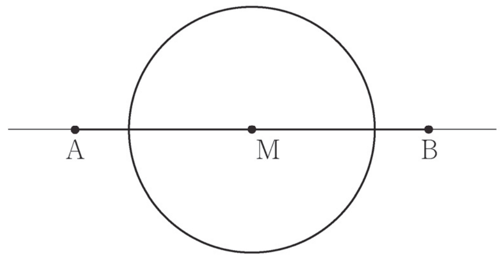
좌표평면에서 점 P**의 자취는** $\overline{\mathrm{AB}}$**를 지름으로 하는 원의 테두리와 그 내부**이다.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} \geq 0$ 일 때



좌표평면에서 점 P**의 자취는** $\overline{\mathrm{AB}}$**를 지름으로 하는 원의 테두리와 그 외부**이다.

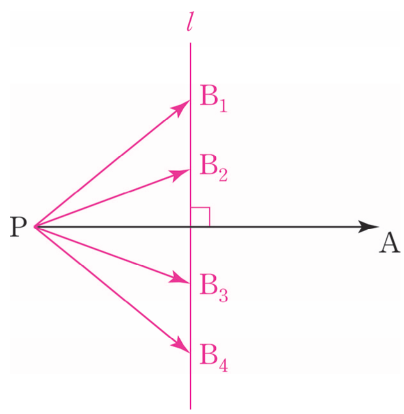
(4) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = k$ 일 때 (단, k는 상수이다.)



$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = k$에서 점 A, B가 정점이므로 $\overline{AB}$의 중점 M을 거쳐 벡터를 쪼개면
$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = k$이므로 $|\overrightarrow{PM}|^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 + k$이다.
점 P는 점 M을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{|\overrightarrow{MA}|^2 + k}$인 원이다.

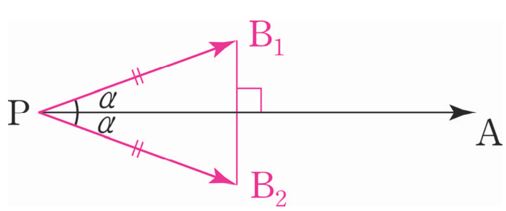
2. 점 P, 점 A가 정점이고 점 B가 동점

(1) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \mathrm{k}$ 일 때 (단, k는 상수이다.)



좌표평면에서 점 B의 자취는 직선 l이다. 직선 l은 $\overrightarrow{PA}$와 수직이다. 점 B가 직선 l위의 임의의 점의 위치에 있어도 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$가 일정하다는 것을 알 수 있다.

(2) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = k$이고 $|\overrightarrow{PB}|$가 일정할 때 (단, k는 상수이다.)



좌표평면에서 점 B는 점 B_1나 점 B_2의 위치에 있을 수 있다.

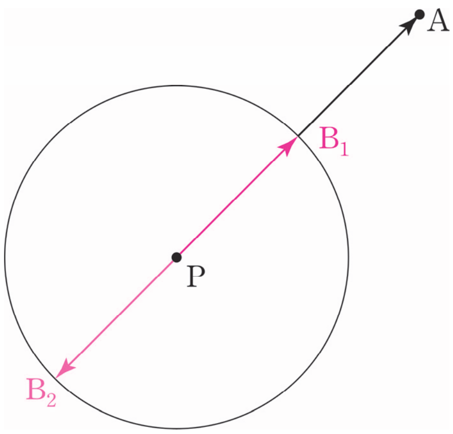
벡터 회전

평가원 기하 준킬러, 킬러에 제일 많이 나오는 소재이다. 벡터 회전을 더 잘 이용하기 위해서는 벡터의 기본적인 도구와 벡터 쪼개기가 잘 학습되어 있어야 한다.

1. 좌표평면에서의 원과 호

(1) 원

좌표평면에 점 $\mathrm{P}(0,0)$을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{2}$인 원 $x^2+y^2=2$위를 움직이는 점 B가 존재한다.
점 $\mathrm{P}(0,0)$, 점 $\mathrm{A}(2,2)$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값, 최솟값을 구해보자.



점 P, 점 A는 정점이고 점 B는 동점이다. **$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$로 일정하다. $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$는 자유로운 방향을 지니는 벡터이기에 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$와 어떤 각이든 이룰 수 있다.**

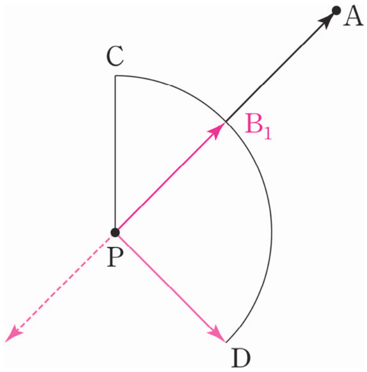
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 최대가 되기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각이 0°이면 되므로 점 B가 점 B_1 위치에 있으면 된다. $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 최소가 되기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각이 180°이면 되므로 점 B가 점 B_2 위치에 있으면 된다.

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은
$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = -|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = -2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -4$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$는 자유로운 방향을 지니는 벡터이기에 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$와 어떤 각이든 이룰 수 있으므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$, $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = -|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$이다.

(2) 호

좌표평면에 점 $\mathrm{P}(0,0)$를 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{2}$인 원 $x^2+y^2=2$위에 점 $\mathrm{C}(0,\ \sqrt{2})$, 점 $\mathrm{D}(1,\ -1)$이 존재한다. 점 B가 중심각이 135° 인 $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ 위를 움직인다. 점 $\mathrm{P}(0,0)$, 점 $\mathrm{A}(2,2)$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값, 최솟값을 구해보자.



점 P, 점 A는 정점이고 점 B는 동점이고, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$로 일정하다. **$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각이 0° 이상 180° 이하에서 최소여야 한다. 점 B가 점 B_1 위치에 있을 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각이 0° 가 가능하다.**

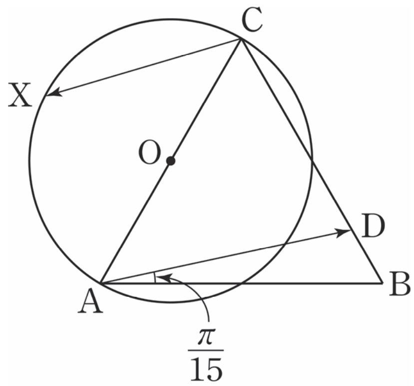
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 최소이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각이 0° 이상 180° 이하에서 최대여야 한다. $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각이 180° 가 가능하지 않다. $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각의 최댓값은 점 B가 점 D 위치에 있을 때로 90° 이다.
$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| \times \cos 90^\circ = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 0 = 0$이다.

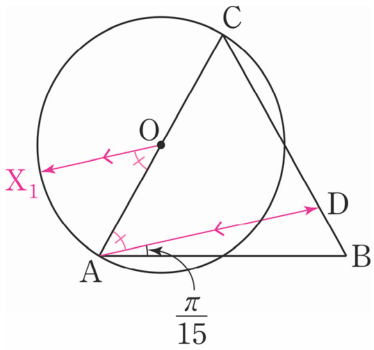
좌표평면에서 점 P, 점 A는 정점이고 점 B가 호 위를 움직이는 동점이라면 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최대, 최소를 구할 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각이 0°, 180° 가 될 수 있는지 꼭 확인하자. **점 B가 호 위를 움직일 때는** 점 B가 원 위를 움직일 때와 달리 **제한된 범위에서만 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 자유로운 방향을 지니는 벡터이기 때문이다.**

예제(8) 11학년도 수능 22번

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DAB} = \dfrac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle \mathrm{ACP} = \dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

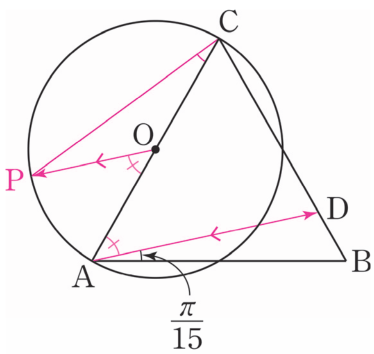


1. **점 A, 점 C, 점 D는 정점이고 점 X는 원 O를 움직이는 동점이다. 원의 중심 O를 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$를 쪼개면 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{CO}} + \overrightarrow{\mathrm{OX}})$이다. 점 O도 정점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CO}}$는 고정값을 갖는다.**
   따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 최소일 때 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$가 최소이다.



$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$는 원의 반지름의 길이로 일정하다. $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$는 자유로운 방향을 지니는 벡터이기에 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$와 어떤 각이든 이룰 수 있다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 최소가 되기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 이루는 각이 180°이면 되므로 점 X가 점 $\mathrm{X_1}$ 위치에 있으면 된다. 직선 $\mathrm{OX_1}$과 직선 AD가 평행하다는 표시를 꼭 하자.

2. 점 $\mathrm{X_1}$은 곧 점 P이다.



직선 $\mathrm{OX_1}$과 직선 AD가 평행하므로 $\angle \mathrm{AOP} = \frac{4}{15}\pi$이다. $\overparen{\mathrm{AP}}$에 대한 중심각은 $\angle \mathrm{AOP}$이고 원주각은 $\angle \mathrm{ACP}$이다. 어떤 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이다.

따라서 $\angle \mathrm{ACP} = \frac{2}{15}\pi$이고 $p = 15$, $q = 2$다. $p + q = 17$이다.

답은 17!!

comment

평면벡터 회전의 기원이 되는 문제이다. **벡터 쪼개기, 벡터 내적 조건 해석, 벡터 회전에서 정점, 동점 구분은 매우 중요하므로 꼭 각 점이 정점인지 동점이지 따져주자.**

벡터 정사영을 이용해도 되지만 **벡터 회전을 이용하는 것이 훨씬 수월**하다. 원의 중심을 거쳐 벡터를 쪼개 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}$를 얻어내고 직선 AD 위로 점 X의 정사영을 내릴 수 있으나 상대적으로 필요한 각을 찾기 어렵다.

예제(9) 19학년도 6월 평가원 29번

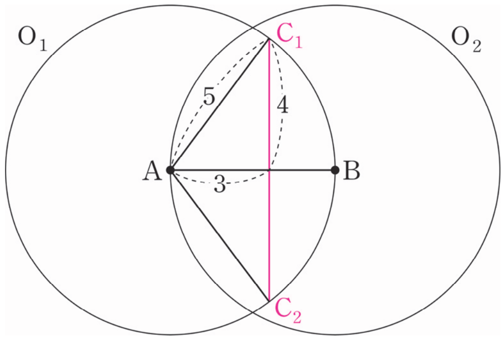
좌표평면 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=5$인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 점 C와 원 O_2 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle \mathrm{CAB})=\frac{3}{5}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

1. 조건 파악이 한 번에 되지 않는다. 한 줄씩 끊어가며 조건을 파악하자.
조건 (가)까지 고려한 그림은 아래와 같다.



$\cos(\angle \mathrm{CAB})=\dfrac{3}{5}$를 만족하는 **원 O_1 위의 점 C의 후보는 점 C_1, 점 C_2이다.**

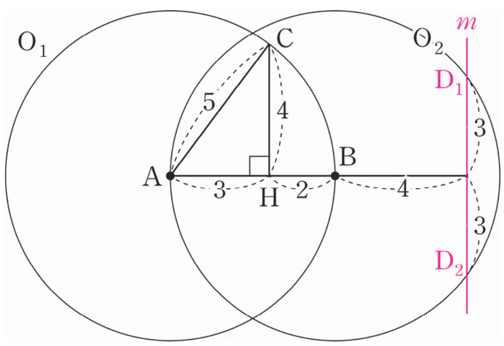
하지만 **점 C_1, 점 C_2는 $\overline{\mathrm{AB}}$에 대해 대칭이기에 점 C를 둘 중 어디에 고정해도 문제 상황이 크게 달라질 것 같지 않다.** 따라서 점 C를 점 C_1 위치에 고정하겠다.

후에 의심스러우면 점 C를 점 C_2 위치에 고정할 때 문제의 답이 똑같이 나오는지 확인하면 된다.

2. 조건 (나)를 살펴보자. **점 A, 점 B, 점 C는 정점**이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})=30$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-15$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=45$이다.

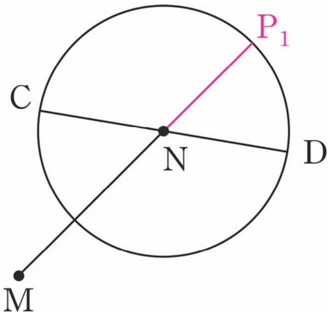
점 A, 점 B는 정점이고 점 D는 동점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=45$는 점 D가 직선 위에 존재함을 뜻한다.



점 C의 직선 AB 위로의 정사영은 점 H이고 $\overline{\mathrm{AB}}=5$이므로 **점 D는 점 H로부터 거리가 6인 직선 m 위에 존재한다.** 점 D는 원 O_2 위의 점이기도 하니 **점 D의 후보는 직선 m과 원 O_2의 교점인 점 D_1, 점 D_2이다.**

$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$까지 고려하면 원 O_2의 지름이 10이므로 직관적으로 점 D는 점 D_1 위치에 있을 듯하다. 확실히 하기 위해서는 **점 A를 원점으로 잡고 직선 AB를 x축으로 잡아 각 점의 좌표를 구하면 된다.** 점 $\mathrm{A}(0,0)$, 점 $\mathrm{B}(5,0)$, 점 $\mathrm{C}(3,4)$, 점 $\mathrm{D}_1(9,3)$, 점 $\mathrm{D}_2(9,-3)$이다. $|\overrightarrow{\mathrm{CD}_1}|=\sqrt{37}<9$, $|\overrightarrow{\mathrm{CD}_2}|=\sqrt{85}>9$이므로 **점 D의 위치는 점 D_1이 맞다.**

3. $\overline{\mathrm{CD}}$**를 지름으로 하는 원을 새로 그려주자.** 이 원의 중심은 $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점인 점 N이다.
기존에 있던 그림을 계속 사용하면 그림이 너무 더러워져 실수하기 쉽다.



$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 구해야 한다. **점 A, 점 B는 정점이고 점 P는 동점**이다. 이럴 땐 이전에 배운 내용을 떠올리면 **$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 M을 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$로 쪼개면 $|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$는 고정값을 가져 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$만 고려**하면 되기에 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 구할 때 유리하다.

점 M, 점 N, 점 P가 일직선 위에 있을 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$이 최댓값이나 최솟값을 갖는다.
$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$이 최대일 때는 점 P가 점 P_1 위치에 있다.

이제 **좌표를 이용**하여 필요한 길이들을 구해보자. 점 $\mathrm{A}(0,0)$, 점 $\mathrm{B}(5,0)$, 점 $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, 점 $\mathrm{C}(3,4)$, 점 $\mathrm{D}(9,3)$, 점 $\mathrm{N}\left(6, \frac{7}{2}\right)$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{CD}}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{37}}{2}$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 = \frac{25}{4}$, $|\overrightarrow{\mathrm{MN}}| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$와 $\overline{\mathrm{CD}}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이를 더한 값이다.
따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{P_1M}}|^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{P_1M}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 = \frac{55}{2} + \frac{7\sqrt{74}}{2}$이다.
$a = \frac{55}{2}$, $b = \frac{7}{2}$이고 $a + b = \frac{55}{2} + \frac{7}{2} = 31$이다.

답은 31!!

comment

중점을 거친 벡터 쪼개기와 벡터 내적 조건 해석을 적절히 이용한 아름다운 문제였다. **벡터 쪼개기, 벡터 내적 조건 해석, 벡터 회전에서 정점, 동점 구분은 매우 중요하므로 꼭 각 점이 정점인지 동점인지 따져주자. 최종 계산 처리는 가능하면 머리를 싸매며 기하로 하지 말고 좌표를 이용하자.**

예제(10) 19학년도 9월 평가원 16번

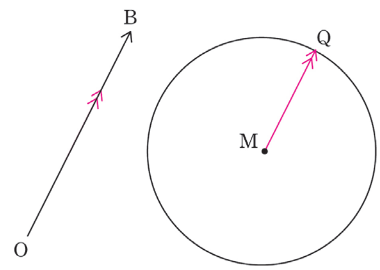
좌표평면 위의 두 점 A$(6, 0)$, B$(8, 6)$에 대하여 점 P가 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$을 만족시킨다. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

1. **점 A, 점 B는 정점이고 점 P는 동점이다. $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$를 간소화하기 위해 Chapter 2에서 배운 대로 $\overline{AB}$의 중점 M을 이용하자.** $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=2\times|\overrightarrow{PM}|$ **이므로** $|\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$ **이다.**

점 P의 자취는 중심이 점 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원이다.

점 O, 점 B, 점 M은 정점이고 점 P는 동점이다.
원의 중심 M을 거쳐 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$를 쪼개면
$\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})$**이다.** $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}$**은 고정값을 갖는다.**
따라서 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{MP}$가 최대일 때 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$도 최대이다.



$|\overrightarrow{MP}|$**는 원의 반지름의 길이로 일정하다.** $\overrightarrow{MP}$**는 자유로운 방향을 지닌 벡터이기에** $\overrightarrow{OB}$**와 어떤 각이든 이룰 수 있다.** 따라서 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{MP}$가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MP}$가 이루는 각이 0° 이면 되므로 점 P가 점 Q 위치에 있으면 된다.

※ **그림을 그릴 때 애써 좌표축을 그릴 필요가 없다.** 우리가 필요한 것은 점들의 위치 관계뿐이기 때문이다.

2. $\overrightarrow{MQ}=k\overrightarrow{OB}$ $(k>0)$여야 한다. $|\overrightarrow{MQ}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $|\overrightarrow{OB}|=10$이므로 $k=\frac{1}{2\sqrt{10}}$이다.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{OA}\cdot k\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2\sqrt{10}}\times 48=\frac{24}{\sqrt{10}}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$이다.

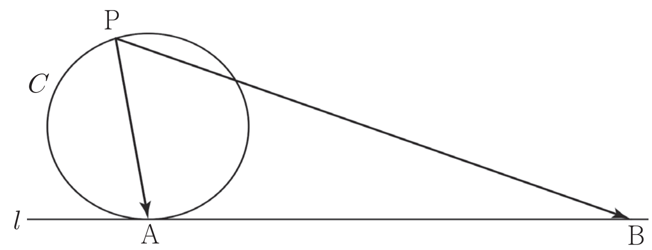
※ $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{OB}$가 평행이고, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{4}{5}$이다.

답은 ③!!

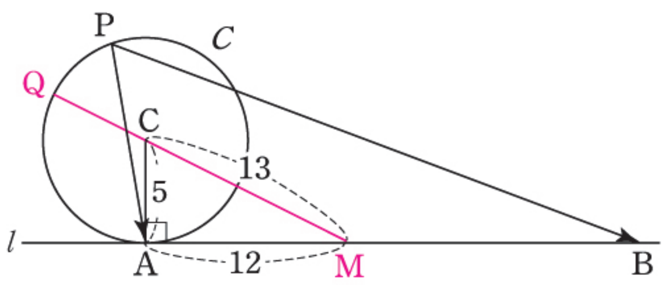
예제(11) 17학년도 사관 28번

그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C와 원 C 위의 점 A에서의 접선 l이 있다. 원 C 위의 점 P와 $\overline{\mathrm{AB}}=24$를 만족시키는 직선 l 위의 점 B에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



1. **점 A, 점 B는 정점이고 점 P는 동점이다. $\overline{\mathrm{AB}}$ 중점 M을 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$를 쪼개면**
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$**이다.**
$|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$**은 고정값을 가지므로** $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$가 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$도 최대이다.
$|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2=12^2=144$**이므로** $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-144$이다.

2. 원의 중심 C와 접점을 이어주고 직각 표시를 하자.



직각삼각형 CAM에서 $\overline{\mathrm{CA}}=5$, $\overline{\mathrm{AM}}=12$이므로 $\overline{\mathrm{CM}}=13$이다.
$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$**이 최대일 때는 점 P가 점 Q 위치에 있을 때이다.**

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|\leq|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}|+|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|=5+13=18$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값은 $18^2-12^2=(18+12)\times(18-12)=30\times6=180$이다.

답은 180!!