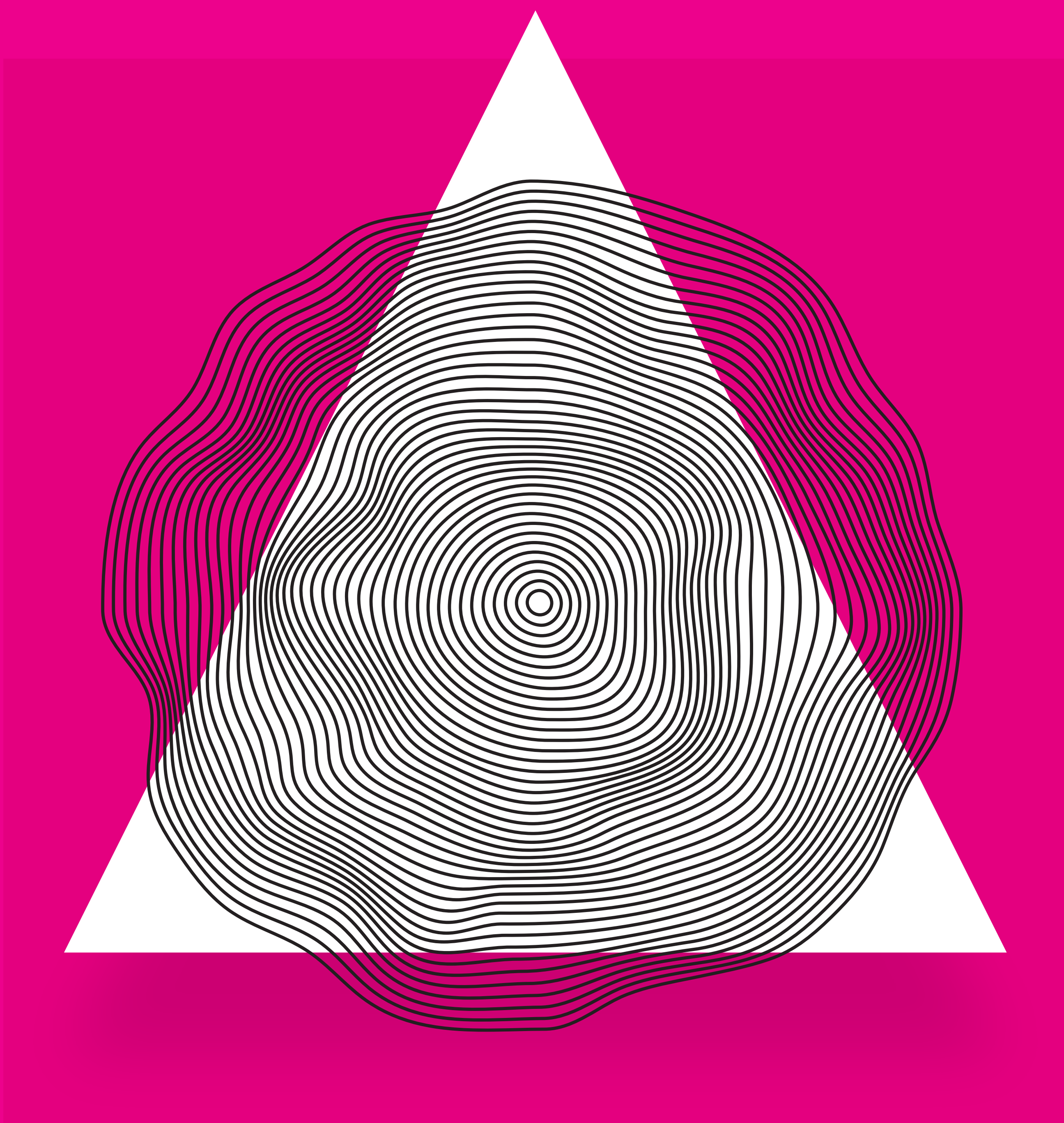
기출의_ 파급효과



smart is sexy

Orbi.kr

기출의 파급효과

수학영역 × 수학Ⅱ / 상 × STANDARD

수학Ⅱ(상)
STANDARD
기출의 파급효과

수학Ⅱ(상)

Chapter 00. 수학Ⅱ의 필수 태도와 도구_10p

Chapter 01. 함수의 극한, 연속, 미분가능성_19p

Chapter 02. 함수의 극한값 계산과 미분계수_99p

Chapter 03. 다양한 정리와 함수의 극대, 극소_160p

Chapter 04. 다항함수, 대칭성_191p

Chapter 05. 도함수의 활용_297p

저자의 말

1. 기출의 파급효과 standard에는 수학Ⅱ 기출을 푸는 데 필수적인 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.
1년 동안 열심히 공부한 학생이 현장에서 평가원 문제를 틀리는 이유는 개념이 부족해서가 아니라, 조건이 필연적으로 요구하는 태도와 도구가 없기 때문입니다. 따라서 각 Chapter를 교과서 목차를 따르지 않고 기출을 푸는데 필요한 태도와 도구를 바탕으로 작성했습니다.

2. 분권의 이유
'미적분도 아니고 수학Ⅱ 수준에서 분권이 필요할 정도의 분량이 나올 수 있나?' 하는 의문이 들 수도 있습니다. 분권에는 크게 두 가지 이유가 존재하는데,

(1) 필수적이지만 교과서에는 없는 Chapter의 존재
〈Chapter 3. 다양한 정리와 함수의 극대, 극소〉, 〈Chapter 4. 다항함수, 대칭성〉, 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉, 〈Chapter 10. 복합적 개념이 포함된 킬러 문항〉 다섯 개의 챕터는 교과서에 없지만 중요한 태도와 도구를 정리한 챕터입니다.

특히 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉는 저학년 과정에서 모두 배우는 내용이지만 방정식, 항등식, 부등식, 합성함수, 역함수의 대강의 '느낌'만 가진 채 실제 문제에서 '어떻게' 처리해야 하는지 모르는 학생이 많아 독립된 챕터를 구성했습니다. 따라서 실제 수학Ⅱ 교육과정에서 직접적으로 다루는 내용보다 훨씬 많은 내용을 다룹니다.

(2) 자세한 해설
기출 해설을 정말 자세히 썼습니다.

어떤 조건부터 적용해야 하는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 할 수밖에 없는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 하면 안 되는지,
여기서 왜 식으로 풀어야 하는지,
여기서 왜 그래프로 풀어야 하는지에 관한 내용을 다 담았습니다.

'딱딱하고', '불친절하게' 해설하면 분량은 많이 줄일 수 있겠으나, 그 경우 '기출의 파급효과'를 선택하는 의미가 퇴색되죠. 진정한 기출 분석은 위와 같은 질문에 모두 답할 수 있게끔 공부하는 것이기에 최대한 해설을 자세하게 썼습니다.

따라서 위의 두 가지 이유로 불가피하게 분권하게 되었습니다. 추천하는 것은 상하권을 순차적으로 학습하는 것이지만 본인이 어느 한 권에 해당하는 내용에는 자신이 있으면 다른 한 권만 공부하셔도 됩니다.

3. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다. 예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

4. 선별 문항

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다. 이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 기출의 파급효과 수학II standard에는 평가원, 교육청, 사관학교, 경찰대 기출 중 가장 핵심이 되는 150문제를 담았습니다. 경찰대 문제는 매우 적습니다. **standard 수학II(상) 90문제, standard 수학II(하) 60문제입니다.**

※ 문제 좌표에서 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 나형' 또는 'A형' 또는 '인문계' 기출입니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 **extension 수학II(상) 158문제, extension 수학II(하) 116문제**로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard와 extension을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

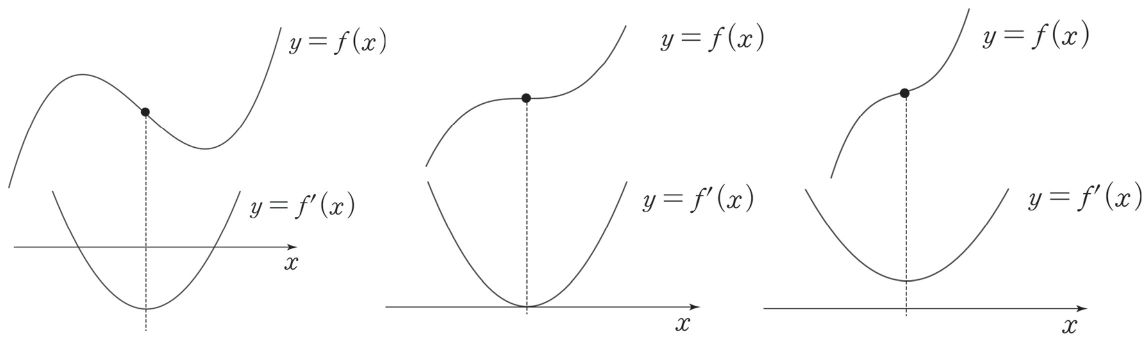
삼차함수

1. 변곡점

변곡점이라는 개념은 수학II 교육과정에서는 다루지 않는다. 변곡점을 다루기 위해서는 미분을 두 번 하는 이계도함수를 언급해야 하는데 이계도함수는 수학II 교육과정에 포함되지 않기 때문이다.

물론 여기서도 이계도함수 내용을 언급하면서까지 변곡점을 가르치지는 않을 것이다. 본 교재에서 변곡점은 **'삼차함수의 점대칭 점'의 의미로만 받아들이자.** 이때, 삼차함수의 점대칭 점(변곡점)의 x좌표는 삼차함수의 도함수인 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 같다. 여러 수학II 강의에서 언급하는 변곡점도 이런 의미인 경우가 많다.

매번 삼차함수의 점대칭 점으로 표현하기 번거로우므로 변곡점이라는 표현을 도입한다는 느낌으로 받아들이자.

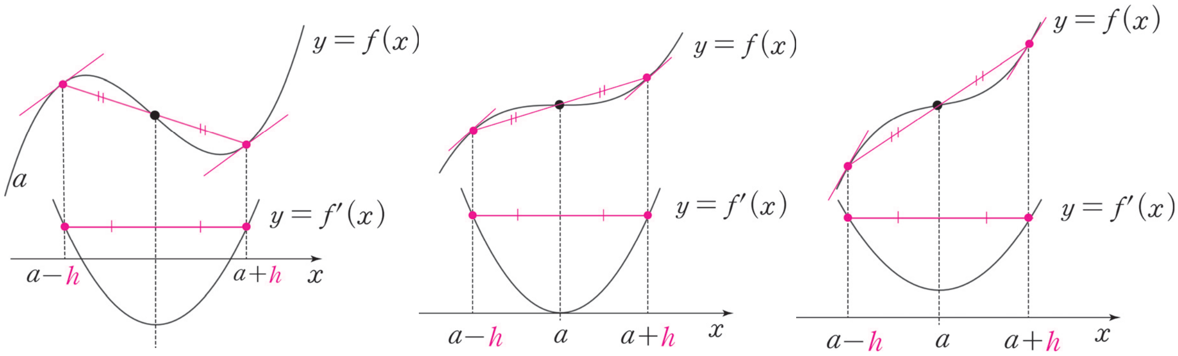


※ **변곡점의 x좌표는 $f''(x)=0$을 만족하는 x이다.** 삼차함수 $f(x)$의 변곡점의 x좌표는 이차함수 $f'(x)$의 꼭짓점의 x좌표와 같다. 이차함수의 꼭짓점의 x좌표는 미분계수가 0이 되는 지점이므로 변곡점의 x좌표는 $f'(x)$의 미분계수가 0이 되는 x, 즉 $f''(x)=0$을 만족하는 x이다.

$f''(x)$는 미적분에서 배우는 이계도함수이므로 삼차함수의 변곡점의 x좌표를 구할 때를 제외하고는 거의 쓸 일이 없다.

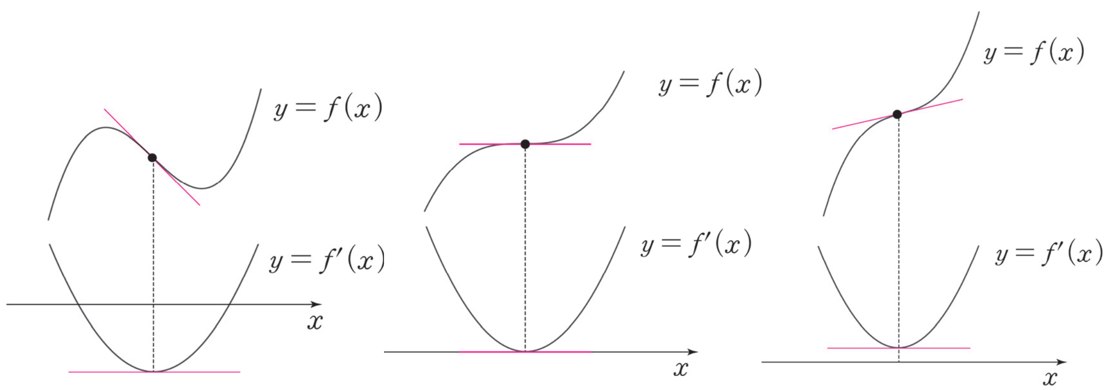
(1) 변곡점을 기준으로 대칭인 두 점에서의 미분계수는 서로 같다.

아래의 그림에서 알 수 있듯이 도함수인 이차함수는 대칭축을 기준으로 대칭이다.
따라서 도함수인 이차함수에서 대칭축을 기준으로 대칭인 두 점에서 함숫값은 같다.
= 원함수인 삼차함수에서 변곡점을 기준으로 대칭인 두 점에서 미분계수는 같다.



만약 $y=f(x)$ 위에서 그은 서로 다른 두 접선의 기울기가 같다면, 두 접점은 변곡점에 대하여 대칭이다.

(2) 삼차함수의 미분계수는 변곡점에서 최솟값 혹은 최댓값을 갖는다.



(그림에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.)

삼차함수의 변곡점의 x좌표는 도함수인 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 일치한다.
이때, **이차함수의 함숫값은 꼭짓점에서 최소 혹은 최대**가 된다.
도함수의 함숫값은 원함수에서 미분계수를 의미하므로 변곡점에서 미분계수는 최소 혹은 최대가 된다.

예제(6) 18학년도 9월 평가원 20번

삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

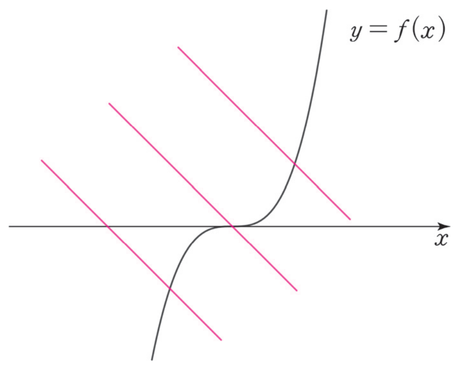
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제에서 새롭게 정의한 함수인 $g(t)$가 등장했으므로 빠르게 $g(t)$라는 함수를 이해해야 한다.

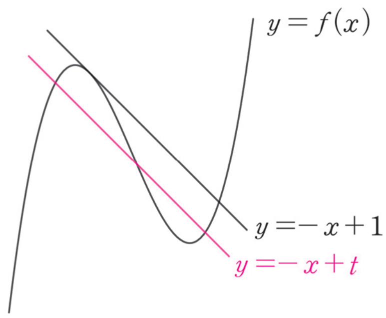
새롭게 정의한 함수에서 가장 중요한 것은 정의역과 치역의 실질적 의미이다.
정의역(t) : t에 따라 기울기가 -1인 일차함수가 위아래로 움직인다.
치역($g(t)$) : 기울기가 -1인 직선과 삼차함수 $f(x)$의 교점의 개수

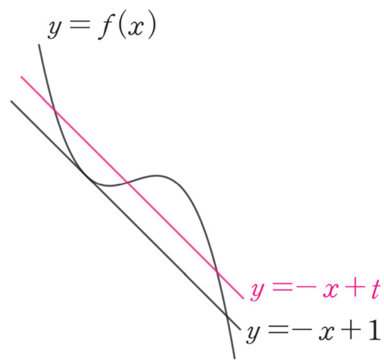
포인트는 치역이 '교점의 개수'라는 점이다. $g(t)$라는 함수를 제대로 이해했으니 보기로 들어가자.

1. $y=x^3$의 그래프를 그려 본다면 쉽게 파악할 수 있는 보기이다. 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$이므로 함수 $g(t)$는 상수함수이다. (O)



2. $g(1)=2$이므로, 직선 $y=-x+1$와 곡선 $f(x)$의 교점이 2개다. 즉, 한 점에서 접하고 한 점에서 만난다. 조건을 만족시키도록 곡선 $f(x)$와 직선 $y=-x+1$의 위치 관계를 그래프로 표현하면 $f(x)$의 최고차항의 계수에 따라 다음과 같이 두 가지 경우가 가능하다.





당연히 $g(t)=3$인 t가 존재한다. (O)

3. 변곡점을 다루는 중요한 보기이다. 해설을 보면서 ㄷ 보기와 변곡점의 연관성을 잘 공부하길 바란다.

> 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

이 진술은 전형적인 ㄱㄴㄷ 합답형 문항의 '단정적 진술'이면서, 조건문($p \rightarrow q$)에 해당한다.
태도 : 단정적 진술의 참, 거짓을 판별하기 위해서는 반례를 찾으려고 하자.

ㄷ과 같은 '$p \rightarrow q$ 조건문'의 경우에는 '$p \rightarrow \sim q$에 해당하는 케이스'가 반례가 되겠다. **함수 $g(t)$가 상수함수일 때, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지는 케이스를 찾으면 되는데 그렇게 쉽지는 않다.** 함수 $g(t)$가 상수함수인 모든 경우를 따지기는 어렵기 때문이다.

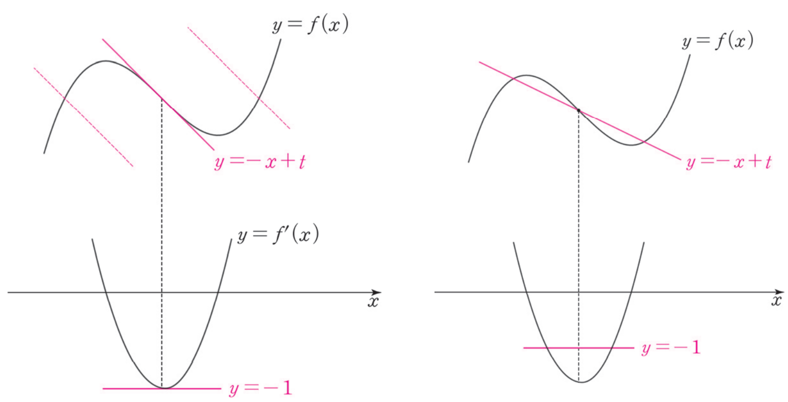
따라서 '대우명제'를 생각할 수 있어야 한다. $p \rightarrow q$가 아닌 $\sim q \rightarrow \sim p$로 바라보자.

> 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.
> ⇔ **삼차함수 $f(x)$의 극값이 존재하면, 함수 $g(t)$는 상수함수가 아니다.**

대우명제의 경우는 반례를 찾기 훨씬 수월하다. 삼차함수 $f(x)$의 극값이 존재하는 개형은 딱 하나 존재하기에 $f(x)$를 확정할 수 때문이다.
태도 : 조건문인 명제를 그 자체로 따지기 어렵다면 대우 명제를 떠올리자.

(ㄷ)의 대우 명제의 반례는 '$f(x)$의 극값이 존재하면서 $g(t)$가 상수함수인 CASE'이다. 변곡점에서 삼차함수의 미분계수가 최소 혹은 최대가 된다는 특징을 떠올리자.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때, '(변곡점에서의 기울기)≥ -1'이면 $g(t)$는 상수함수이다.



따라서 최고차항의 계수가 양수이고 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 $x=a$에서 변곡점을 가질 때, $-1 \leq f'(a) < 0$이면 $g(t)$는 상수함수이므로 ㄷ은 틀렸다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이므로 **답은 ③!!**

comment

도구

삼차함수의 변곡점의 특징

태도

1. 단정적 진술의 참, 거짓을 판별하기 위해서 반례를 찾자.
2. 조건문인 명제를 그 자체로 따지기 어렵다면 '대우명제'를 떠올리자.

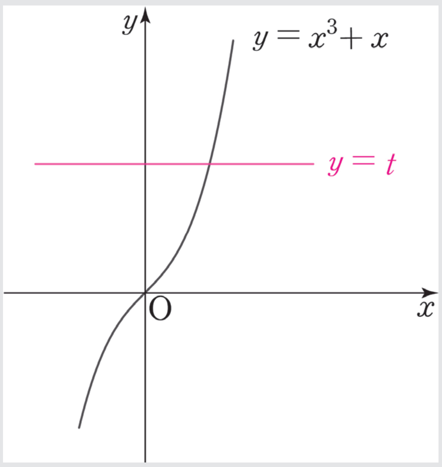
※차이함수 풀이

차이함수는 〈Chapter 5. 도함수의 활용〉에서 자세히 다룬다. 아직 차이함수를 배우기 전이지만 이 풀이를 이해하는 데에는 큰 어려움이 없을 것이다. 차이함수 풀이가 출제 의도인지는 확신이 들진 않지만 충분히 좋은 풀이이므로 알아두자.

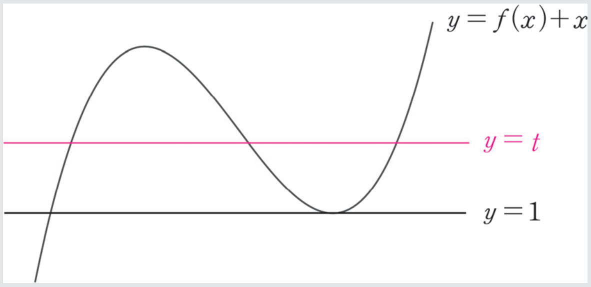
$y=f(x)$와 $-x+t$의 교점의 개수는 삼차함수와 일차함수의 교점의 개수인데, **삼차함수와 일차함수를 따로따로 보기 불편할 수도 있다.**

$f(x)=-x+t$의 실근은 $f(x)+x=t$의 실근과 동일하므로 **$y=f(x)+x$와 $y=t$의 교점의 개수로 보자.** 이 경우 **삼차함수와 x축과 평행한 직선의 교점**이므로 비교적 수월하게 관찰할 수 있다.

1. $y=x^3+x$와 $y=t$의 교점을 관찰하자. $y'=3x^2+1$이므로 $y=x^3+x$은 극값을 갖지 않는다. 따라서 교점의 개수는 항상 1이다. (O)



2. $g(1)=2$이므로 방정식 $f(x)+x=1$의 실근의 개수가 2이다.
$f(x)+x$도 마찬가지로 삼차함수이므로 다음과 같이 그래프를 그릴 수 있다.

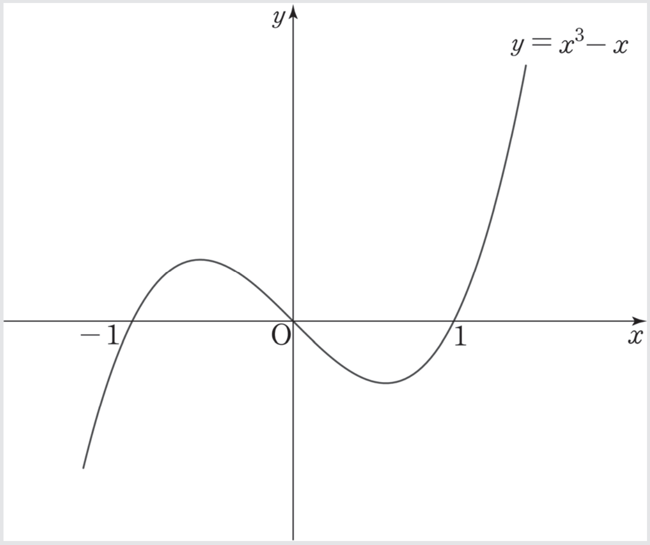


$g(t)=3$인 t는 당연히 존재한다. (O)

3. ‘$g(t)$는 상수함수이다.’는 ‘$f(x)+x$의 극값이 존재하지 않는다.’와 같으므로 선지 (ㄷ)을 다음과 같이 서술할 수 있다.

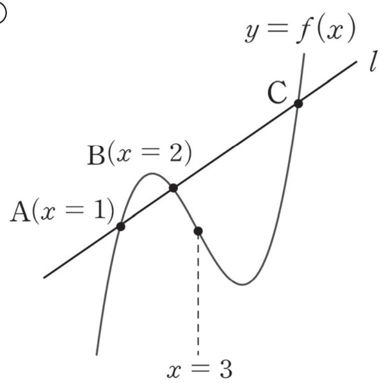
함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.
⇔ 함수 $f(x)+x$의 극값이 존재하지 않으면 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

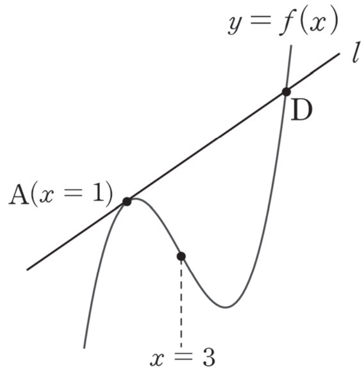
$f(x)+x$를 극값이 존재하지 않는 가장 대표적인 삼차함수인 x^3라고 한다면,
$f(x)=x^3-x$가 되고 $f(x)$의 극값은 존재한다. 반례가 존재하므로 ㄷ은 틀렸다. (X)



(3) 3×(변곡점의 x좌표)=삼차방정식의 세 근의 합

Q) 아래 그림에서 삼차함수 $f(x)$의 변곡점의 x좌표가 3일 때, 점 C의 x좌표와 점 D의 x좌표는?

①


②


A) 점 C의 x좌표는 6이고, 점 D의 x좌표는 7이다. 지금부터 천천히 그 이유를 알아보자.

$y=ax^3+bx^2+cx+d$, $y'=3ax^2+2bx+c$ (단, $a\neq0$)

변곡점의 x좌표는 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 같으므로 변곡점의 x좌표 : $-\dfrac{b}{3a}$

(혹은 두 번 미분하여 구할 수 있다. $y''=6ax+2b=0$에서 $x=-\dfrac{b}{3a}$)

근과 계수의 관계에 의해 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근의 합 : $-\dfrac{b}{a}$

∴ 3×(변곡점의 x좌표)=삼차방정식의 세 근의 합

이 내용을 바탕으로 위의 두 그림을 다시 보자.
그림 ①에서 점 C의 x좌표를 c라 하고, 직선 l의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.
그림 ②에서 점 D의 x좌표를 d라 하고, 직선 l의 방정식을 $y=h(x)$라 하자.

① 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 세 실근은 $1,\ 2,\ c$이다.
② 삼차방정식 $f(x)-h(x)=0$의 세 실근은 $1,\ 1,\ d$이다.

한편, 삼차함수와 직선을 연립한 삼차방정식에서 직선은 **삼차함수의 삼차항과 이차항에 아무런 영향도 주지 않는다. (변곡점의 x좌표)와 (삼차방정식의 세 근의 합)은 삼차항과 이차항에만 영향받으므로 삼차함수의 그래프와 직선이 만날 때에도 '3×(변곡점의 x좌표)=삼차방정식의 세 근의 합'은 유효하다!**

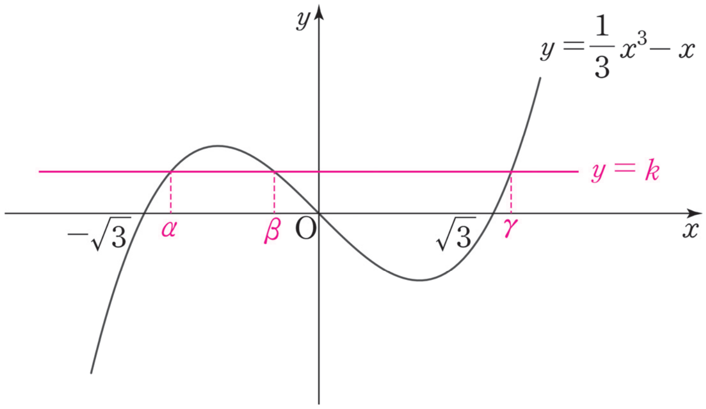
① $f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 3이므로 $3\times3=1+2+c$ $\therefore\ c=6$
② $f(x)-h(x)$의 변곡점의 x좌표는 3이므로 $3\times3=1+1+d$ $\therefore\ d=7$

예제(7) 05학년도 수능 가형 24번

x에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3 - x = k$가 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

1. **x에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3 - x = k$의 근 ⇔ 함수 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$와 함수 $y = k$의 교점**

$y = \frac{1}{3}x^3 - x$와 $y = k$ 그래프를 그리자.



※ $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값을 구하는 데에 k의 부호와 α, β, γ의 대소관계는 상관없으므로 $\alpha < \beta < \gamma$, $k \geq 0$으로 설정했다.

2. **문제에서 요구하는 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$은 서로 다른 세 교점의 합과 굉장히 유사하다.**
삼차함수의 '근과 계수의 관계'에 의해 $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$\alpha + \beta + \gamma$와 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$를 연결지어야 하는데 이 둘을 어떻게 연결지을 수 있을까?
여기서 그래프 관찰의 중요성이 드러난다. 그래프를 관찰하면 서로 다른 세 실근의 '부호'를 알 수 있다. α, $\beta < 0$, $\gamma > 0$

따라서 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = -(\alpha + \beta) + \gamma$이 되고 $\alpha + \beta = -\gamma$이므로
$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = -(\alpha + \beta) + \gamma = 2\gamma$

γ은 $k = 0$일 때 최솟값 $\sqrt{3}$을 가지므로 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.
$\therefore (2\sqrt{3})^2 = 12$

답은 12!!

comment

1. α, β, γ의 부호를 알기 위해서는 **그래프를 관찰**해야만 했고, $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$을 보고 근과 계수의 관계를 떠올려 **삼차방정식의 세 근의 합을 이용**할 수 있어야 했다. 식과 그래프 모두가 필요했던 문항이므로 굉장히 잘 만든 문항이다. 특히나 그래프를 필수적으로 관찰해야 했다는 점이 너무 마음에 든다.

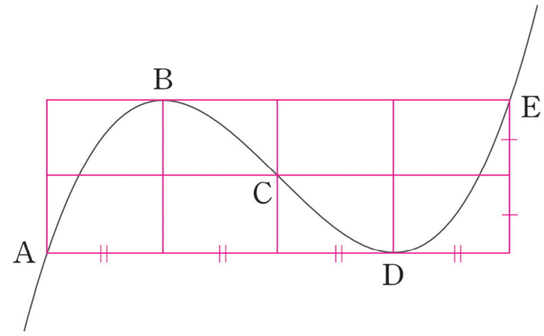
2. $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값을 구하는 데에 k의 부호와 α, β, γ의 대소관계는 상관없다고 한 것이 찝찝하다면 직접 $k \leq 0$일 때를 따져보면 된다. **제시된 삼차함수는 '기함수'이기 때문에** $k \leq 0$일 때에도 똑같은 답이 나온다.

2. 삼차함수의 비율

(1) $1:1:1$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수가 점 C에서 변곡점, 두 점 B, D에서 극값을 가질 때, **점** A, B, C, D, E**의 x좌표는 순서대로 등차수열을** 이룬다.

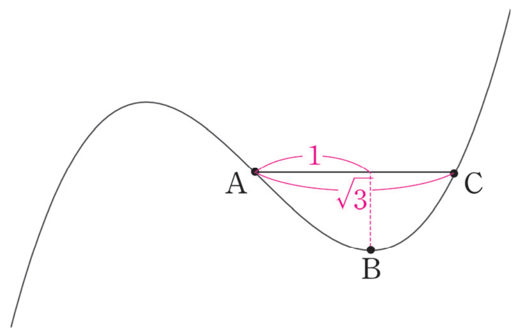
또한, 두 점 A, E는 점 C에 대하여 대칭이고, 두 점 B, D는 점 C에 대하여 대칭이다.
(그래프로 이해하자.)



설명을 외우기보다는 위의 그림 자체를 이해하여 문제에서 자유자재로 활용하는 것이 중요하다.
$1:1:1:1$ 비율 혹은 $1:2$ 비율로도 불리지만 모두 의미는 같다.

(2) $1:\sqrt{3}$

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수가 점 A에서 변곡점이고 점 B에서 극값을 가질 때, A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c라 하자. 이때, $b-a:c-a=1:\sqrt{3}$이다.
(그래프로 이해하자.)



위의 두 비율은 삼차함수 그래프의 본질적 특성이므로 삼차함수의 최고차항의 계수가 음수일 때도 성립한다.

예시 04학년도 수능 10번

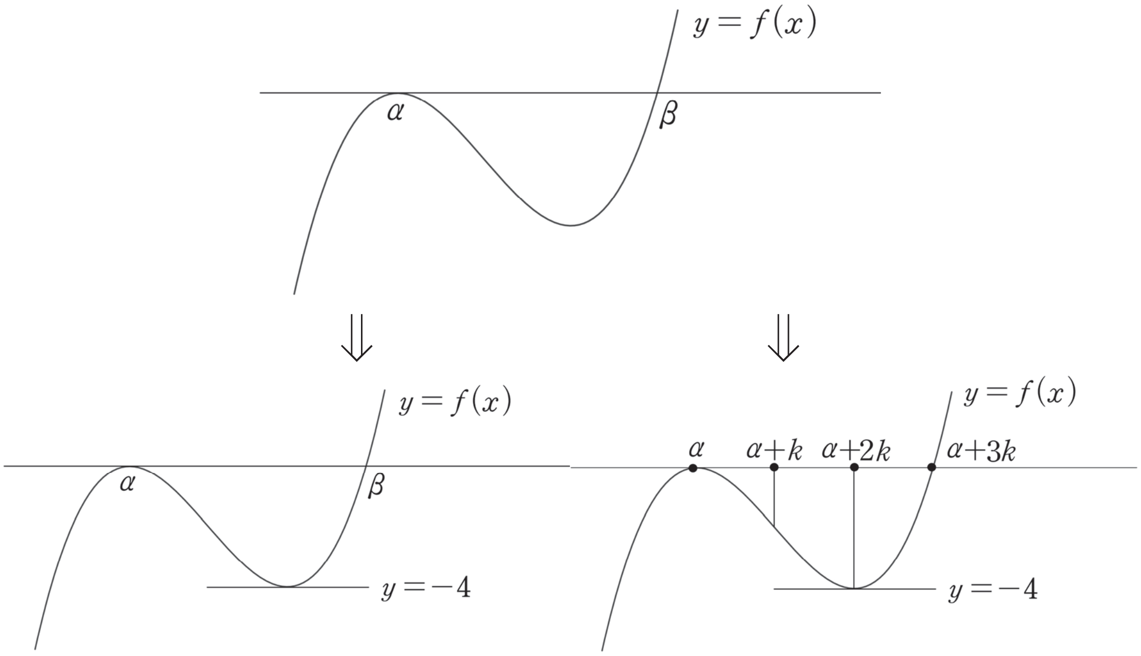
삼차함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖고, 그 그래프가 원점에 대하여 대칭일 때, 이 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표 중에서 양수인 것은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

$1:\sqrt{3}$ 비율에 따라 **답은 ②!!**

앞으로는 $1:1:1$ 비율과 $1:\sqrt{3}$ 비율은 외워둠으로써, 매번 삼차함수를 미분하여 x좌표를 찾는 수고를 덜자.

(3) 삼차함수 비율과 미지수 설정



다음과 같이 극솟값이 -4인 삼차함수가 제시되었을 때, 비율 관계를 고려한다면 $\beta=\alpha+3k$로 설정하는 것이 계산에 훨씬 편하다.

β를 **그대로 사용한 채 삼차함수의 극솟값을 구한다고 생각해보자.**

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$에서 삼차함수의 비율에 의해 $f(x)$는 $x=\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

그러나 $f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)=-4$를 계산하기는 까다롭다.

반면, $\beta=\alpha+3k$**로 설정해보자.**

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-3k)$에서 비율관계에 따라 $x=\alpha+2k$에서 극솟값을 갖는다.

이 경우 계산이 훨씬 간단해진다.

이렇게 삼차함수의 $1:1:1$ 비율에서 1을 k로 설정하는 것이 실전에서 계산할 때 많은 도움이 되므로 적극 활용하자.

예제(8) 18학년도 사관 20번

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

(가) $f(2)=f'(2)=0$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq -3$이다.

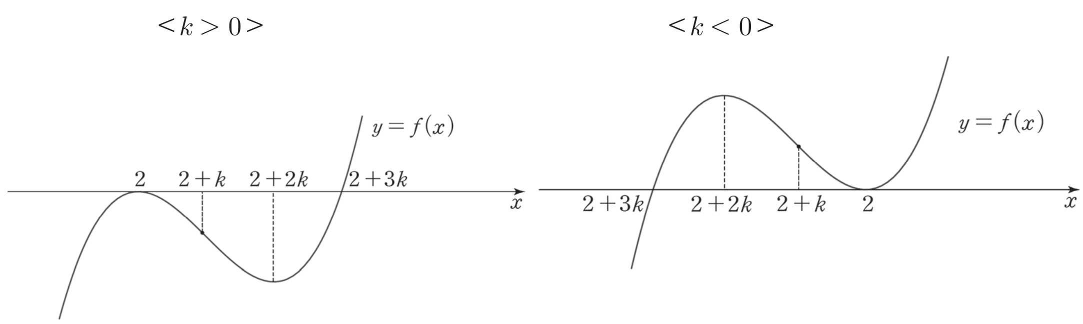
① 128 ② 144 ③ 160 ④ 176 ⑤ 192

1. **도함수인 이차함수 $f'(x)$의 최솟값이 -3 이상임을 적용하여 이차함수의 최솟값 풀이로 풀 수도 있지만 삼차함수 파트에서 배운 내용을 활용해보자.**

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq -3$ 이다.
최고차항 계수가 양수인 삼차함수의 미분계수는 변곡점에서 최소가 되므로
'(변곡점에서의 미분계수) ≥ -3'으로 해석할 수 있다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로 $f(x)$의 식을 다음과 같이 작성할 수 있다.
$f(x)=(x-2)^2(x-k)$ (k는 실수)

삼차함수 비율을 통해 변곡점의 x좌표를 구한 다음 이를 '(변곡점에서의 미분계수) ≥ -3'에 대입하여 풀면 된다. 이때, $f(x)$의 나머지 인수 $(x-k)$를 그대로 살려서 간다면 계산이 많이 복잡해지므로 비율을 고려하여 미지수를 바꿔서 작성하자.



$f(x)=(x-2)^2(x-2-3k)$
$k=0$인 경우에도 $2=2+k=2+2k=2+3k$이므로 변곡점의 x좌표는 $2+k$라 할 수 있다.

2. **삼차함수 비율에 따라 변곡점의 x좌표는 $2+k$이므로 $f'(2+k) \geq -3$**

$f'(x)=2(x-2)(x-2-3k)+(x-2)^2$
$f'(2+k)=2k(-2k)+k^2=-3k^2 \geq -3$
$\therefore -1 \leq k \leq 1$

$f(6)=16(4-3k)=64-48k$이므로 최댓값 $M=64+48$, 최솟값 $m=64-48$
따라서 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은 128이다.

답은 ①!!

comment

이차함수의 최솟값 풀이로 풀어도 궁극적으로는 같은 의미이다. 단지 본문에서 학습한 내용을 적용해 보는 차원에서 삼차함수의 특징을 적용해서 푼 것이다.

예제(9) 18학년도 6월 평가원 20번

함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1\ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

1. **두 접선 l, m의 기울기가 주어졌으므로 방정식 $f'(x)=3k^2$를 풀어서 A, B의 x좌표를 구하자.**

$f'(x)=x^2-2kx=3k^2$

$(x-3k)(x+k)=0$

A, B의 대소관계는 중요하지 않으므로 점 A의 x좌표를 $-k$, 점 B의 x좌표를 $3k$라 하자.

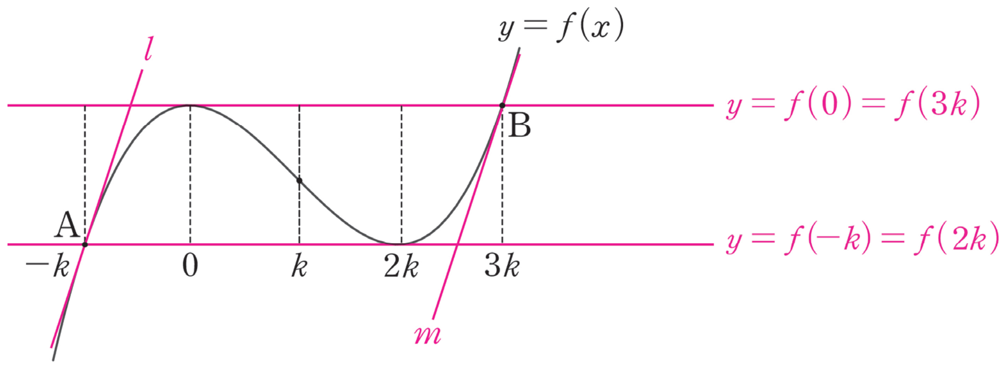
도형의 개형을 파악해야 하고 $f(x)$의 식이 주어졌기 때문에 풀이의 기본으로 그래프를 그리는 것은 당연하다. $y=f(x)$의 그래프를 그리자. 이런 이유를 차치하고서도 미적분의 핵심은 그래프이고 킬러 문항 중에서 그래프 없이 풀 수 있는 문제는 거의 없다.

태도 : 웬만하면 그래프는 그리고 봐라.

$f'(x)=x^2-2kx=0$

(극댓값을 가지는 x좌표) : 0

(극솟값을 가지는 x좌표) : $2k$



그래프를 관찰함으로써 생성된 도형이 평행사변형임을 파악했다.

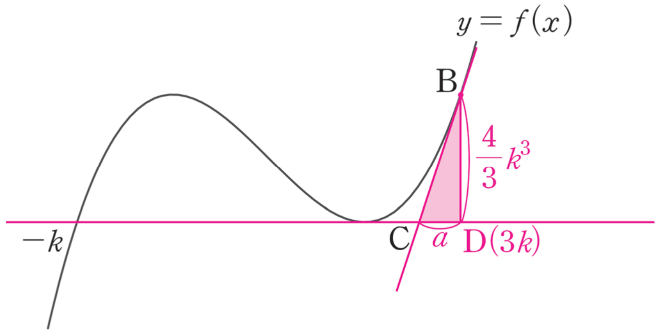
이제 우리의 목표는 밑변과 높이를 구하는 것이다.

2. **그래프를 보면, 높이는 쉽게 구할 수 있다.**

(높이) = (극댓값-극솟값) = $1-\left(1-\dfrac{4k^3}{3}\right)=\dfrac{4k^3}{3}$

밑변은 높이에 비해 까다롭다. 밑변을 구하는 방법에는 두 가지가 있는데, 어떤 방법일지 고민해 보고 다음 페이지를 보자.

(1) 가장 쉬운 방법은 삼각형의 기울기를 이용하는 것이다.



삼각형 BCD에서 (빗변의 기울기) = $\left(\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}\right)$

(빗변의 기울기) : 곡선 $f(x)$의 점 B에서의 접선의 기울기 : $3k^2$

$\left(\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}\right)$: $\frac{\frac{4k^3}{3}}{a}$

방정식 $3k^2=\frac{\frac{4k^3}{3}}{a}$을 풀면 $a=\frac{4k}{9}$이다.

따라서 밑변의 길이는 $4k-\frac{4k}{9}=\frac{32k}{9}$이고, 높이는 $\frac{4k^3}{3}$이므로

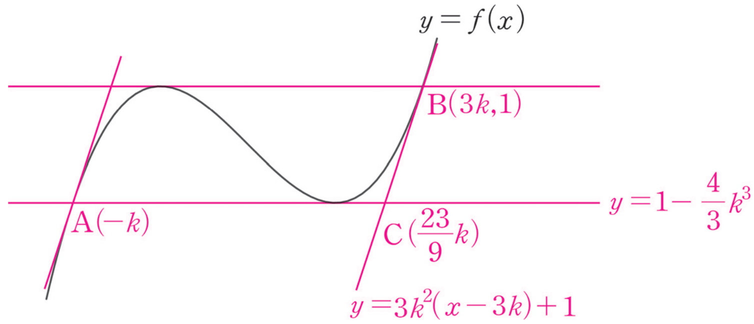
(평행사변형의 넓이)$=\frac{32k}{9}\times\frac{4k^3}{3}=24$, $k^4=\frac{81}{16}$ $\therefore\ k=\frac{3}{2}$ $(\because\ k>0)$

답은 ③!!

※ 이 방법은 다소 발상적이다. 그러나 **평가원은 발상적인 풀이가 유일한 풀이가 되도록 문제를 설계하지 않으므로 다른 풀이도 존재한다. 이러한 점이 평가원이 대단하고 믿음직**스러운 부분이다. 정직하게 공부하면 평가원은 반드시 보답해준다. 다음 페이지를 보자.

(2) 두 번째 방법은 좌표를 이용하는 것이다.

점 C의 좌표를 구해 평행사변형의 밑변을 구하는 방법이고 이것이 출제 의도일 확률이 높다.



(점 B에서의 접선의 방정식) : $y=3k^2(x-3k)+1$

점 C의 x좌표를 t라 할 때, $3k^2(t-3k)+1=1-\frac{4}{3}k^3$이다.

$3k^2(t-3k)=-\frac{4}{3}k^3$에서 $k>0$이므로 양변을 $3k^2$으로 나누자.

$t-3k=-\frac{4}{9}k$

$\therefore\ t=\frac{23}{9}k$

(평행사변형의 밑변의 길이)=(점 C의 x좌표)-(점 A의 x좌표)$=\frac{23k}{9}-(-k)=\frac{32k}{9}$

계산을 마저 해주면 (1)과 똑같은 답이 나온다.

예제(10) 22학년도 예비시행 22번

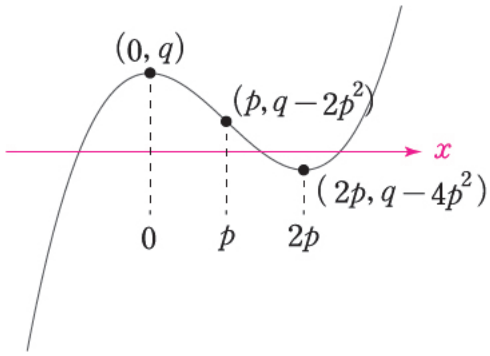
함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 $p,\ q$의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 $\lvert f(x)\rvert$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다. (나) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값은 같다.

1. **함수 $|f(x)|$가 조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 극값을 가져야 하고,**
극솟값과 극댓값의 부호가 달라야 한다.

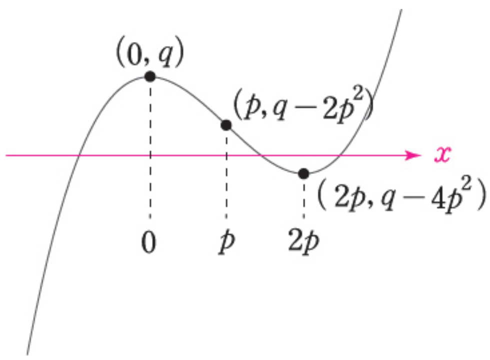


$f(x)=x^3-3px^2+q$에서 $f'(x)=3x(x-2p)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지고, $x=2p$에서 극솟값을 가지고, $x=p$에서 변곡점을 가진다.

$f(0)>0$, $f(2p)<0$에서 $q>0$, $8p^3-12p^3+q=q-4p^3<0$이다. 따라서 $0<q<4p^3$이다.

2. 주어진 만족시키는 순서쌍을 구해보자. 순서쌍을 한꺼번에 생각하기가 어렵다.
일단 p를 고정해놓고 조건을 만족시키는 q를 찾자.

도구: 두 개 이상의 변수가 제시되면, 하나를 고정한 채로 다른 하나를 관찰한다.

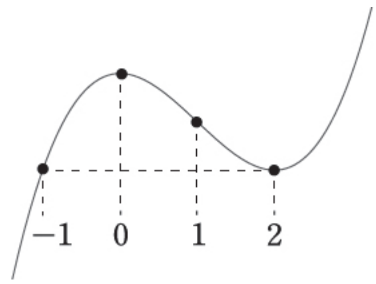


주어진 상황을 보자. $f(x)=x^3-3px^2+q$의 그래프에서
구간 $[-1, 1]$과 구간 $[-2, 2]$를 살펴보자.

함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 $x=0$에서 최댓값 q를 갖는다.
만일 $|f(-1)|>f(0)$이면 함수 $|f(x)|$는 구간 $[-1, 1]$에서 최댓값 $|f(-1)|$을 갖는다.
하지만 $|f(-1)|<|f(-2)|$이므로 조건 (나)에 모순이 되어 $|f(-1)|>f(0)$이 아니다.

따라서 함수 $|f(x)|$ 또한 구간 $[-1, 1]$에서 $x=0$에서 최댓값 q를 가지므로
함수 $|f(x)|$는 구간 $[-2, 2]$에서 최댓값 q를 가져야 한다.

(1) $p=1$일 때, $0<q<4p^3$에서 $0<q<4$이다.

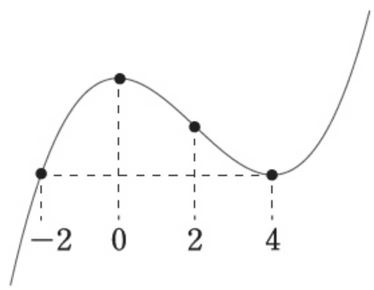


$|f(x)|=|x^3-3x^2+q|$에서 구간 $[-2,\ 2]$에서의 최댓값을 구해보자.

$f(-2)=q-20$**에서** $f(-2)\geq 0$**이면** $q\geq 20$**이므로** $0<q<4$**라는 조건에 모순된다.**

$f(-2)<0$**이면** $|f(-2)|\leq f(0)$**이어야 한다.** $20-q\leq q$**에서** $q\geq 10$**이므로** $0<q<4$**라는 조건에 모순된다.**

(2) $p=2$일 때, $0<q<4p^3$에서 $0<q<32$이다. q는 25 이하의 자연수이므로 $0<q\leq 25$이다.



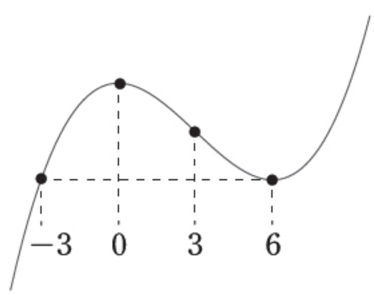
$|f(x)|=|x^3-6x^2+q|$에서 구간 $[-2,\ 2]$에서의 최댓값을 구해보자.

$f(-2)=q-32$**에서** $f(-2)\geq 0$**이면** $q\geq 32$**이므로** $0<q\leq 25$**라는 조건에 모순된다.**

$f(-2)<0$**이면** $|f(-2)|\leq f(0)$**이어야 한다.** $32-q\leq q$**에서** $q\geq 16$**이므로** $16\leq q\leq 25$**이다.**

따라서 (2)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $25-16+1=10$이다.

(3) $p=3$일 때, q는 25 이하의 자연수이므로 $0<q\leq 25$이다.



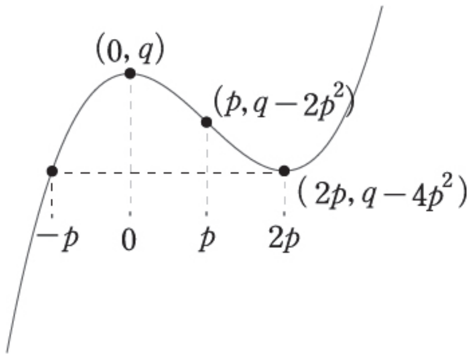
$|f(x)|=|x^3-9x^2+q|$에서 구간 $[-2,\ 2]$에서의 최댓값을 구해보자.

$f(-2)=q-44$**에서** $f(-2)\geq 0$**이면** $q\geq 44$**이므로** $0<q\leq 25$**라는 조건에 모순된다.**

$f(-2) < 0$**이면** $|f(-2)| \le f(0)$**이어야 한다.** $44 - q \le q$**에서** $q \ge 22$**이므로**
$22 \le q \le 25$**이다.**

따라서 (3)을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $25 - 22 + 1 = 4$이다

(4) $p \ge 4$일 때, q는 25 이하의 자연수이므로 $0 < q \le 25$이다.



$|f(x)| = |x^3 - 3px^2 + q|$ 에서 구간 $[-2,\ 2]$에서의 최댓값을 구해보자.

$f(-2) = q - 8 - 12p$**에서** $f(-2) \ge 0$**이면** $q \ge 8 + 12p$**이므로** $0 < q \le 25$**라는 조건에 모순된다.**

$f(-2) < 0$**이면** $|f(-2)| \le f(0)$**이어야 한다.** $8 + 12p - q \le q$**에서** $q \ge 4 + 6p$**이므로**
$0 < q \le 25$**라는 조건에 모순된다.**

(1), (2), (3), (4)에 의하여 구하고자 하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 $10 + 4 = 14$이다.

답은 14!!

comment

1. 이 문제가 어려운 이유는 두 개의 변수 p, q가 존재하기 때문이다. 수학II에서 변수가 2개 이상이고 개수와 관련된 문항의 해결법은 두 변수를 복합적으로 고려하는 것이 아니라, 하나의 변수를 고정해놓고 다른 하나의 변수를 관찰하는 것이다.

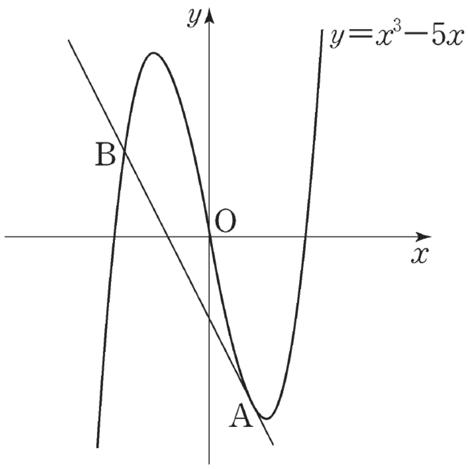
   이 문제에서 확실한 것은 '$y = f(x)$**의 비율을 형성하는** $x = -p, 0, p, 2p$'**와 '두 닫힌구간** $[-1, 1]$, $[-2, 2]$'이다. 따라서 p에 자연수를 대입하면서 그에 따라 조건을 만족시키는 q의 개수를 찾는 것이 필연적인 길이다.

2. 삼차함수가 제시되면 비율은 기본적으로 고려해야 한다. 이 문제도 삼차함수의 비율을 고려하지 않으면 해결하기 까다로워진다.

◆ 3. 삼차함수 비율 확장 : 삼차함수와 접선이 이루는 비율

예제(11) 13학년도 6월 평가원 17번

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 A$(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는? [4점]



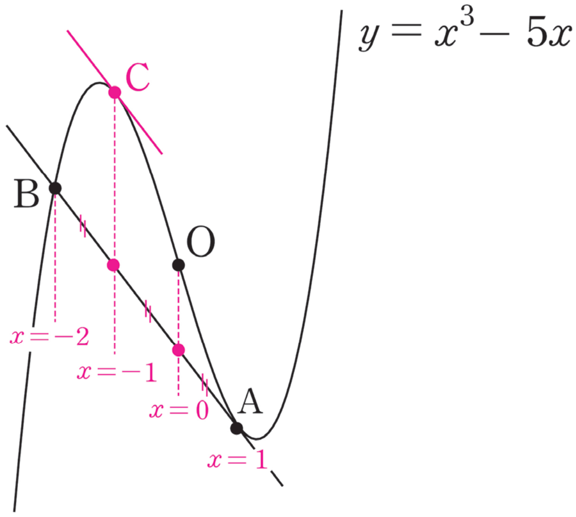
① $\sqrt{30}$　② $\sqrt{35}$　③ $2\sqrt{10}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $5\sqrt{2}$

1. 정석적으로 풀자면,

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선의 방정식을 작성한 다음,

접선과 삼차함수를 연립하여 교점 B를 구하는 식으로 풀면 된다.

그러나 '삼차함수와 접선이 이루는 비율'을 이용하면 그래프를 보자마자 바로 교점 B의 x좌표를 구할 수 있다. 그래프를 통해 한 번에 이해하자.



2. 점 O는 $y=x^3-5x$의 변곡점이다.

그래프에서 보이는 바와 같이 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 미분계수와 동일한 미분계수를 가지는 곳을

점 C라 할 때 **점 B, C, O, A의 x좌표는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.**

점 A의 x좌표가 1이고

점 O의 x좌표는 0이므로

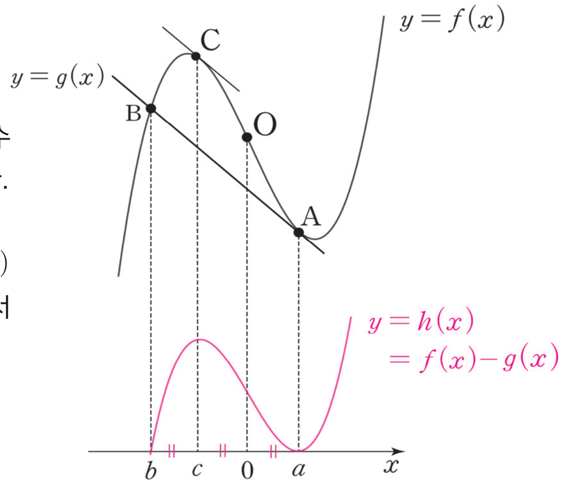
$1:1:1$ 비율에 의해 B의 x좌표는 -2이다. (그래프를 통해 이해하자.)

※ 꼭 삼차함수의 비율 확장이 아니어도 **앞서 배운 '$3\times$(변곡점의 x좌표)=삼차방정식의 세 근의 합'** 공식을 이용할 수도 있다. $y=x^3-5x$의 변곡점의 x좌표는 0이므로 $0\times3=1+1-2$이다. 따라서 점 B의 x좌표는 -2이다.

따라서 $\mathrm{A}(1,\ -4)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$이므로 선분 AB의 길이는 $3\sqrt{5}$이다.

답은 ④!!

삼차함수와 접선의 비율에서도 $1:1:1$ 비율이 나타나는 이유를 차이함수를 통해 알아보자. 차이함수는 함수의 차를 이용하여 새로운 함수를 관찰하는 방식으로 **<Chapter 5. 도함수의 활용>**에서 자세히 배운다.



삼차함수 $f(x)=x^3-5x$와 두 점 A, B를 지나는 일차함수 $g(x)$의 차이함수를 $h(x)$라 하면 $h(x)=f(x)-g(x)$이다.

$f(x)$와 $g(x)$는 점 $\mathrm{B}(b, f(b))$에서 만나고 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$에서 접하므로 $h(x)$는 $x=b$에서 x축을 지나고 $x=a$에서 x축에 접하는 삼차함수이다.

여기서 잠시 변곡점에 대해 복습하자.

> 삼차함수 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a \neq 0)$
>
> → 도함수 : $y'=3ax^2+2bx+c$
>
> 변곡점의 x좌표는 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 같으므로 변곡점의 x좌표 : $-\dfrac{b}{3a}$
>
> (혹은 $y''=6ax+2b=0$을 만족하는 $x=-\dfrac{b}{3a}$)

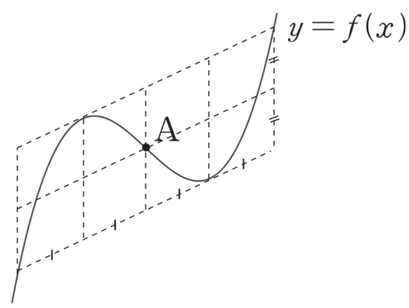
즉, 변곡점은 삼차함수의 삼차항과 이차항에만 영향을 받고 일차항, 상수항과는 아무 관련이 없다. 삼차함수 $f(x)$에서 일차함수 $g(x)$를 빼더라도 $f(x)$의 삼차항과 이차항은 그대로 유지되기 때문에 **삼차함수 $f(x)$와 차이함수 $h(x)$의 변곡점의 x좌표는 0으로 동일**하다. 따라서 삼차함수의 비율에 의해 네 점 B, C, O, A의 x좌표는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

Q) $h(x)$에서 $h'(c)=0$인 이유는?

A1) $f'(c)=f'(a)=g'(c)$이므로 $h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$이다.

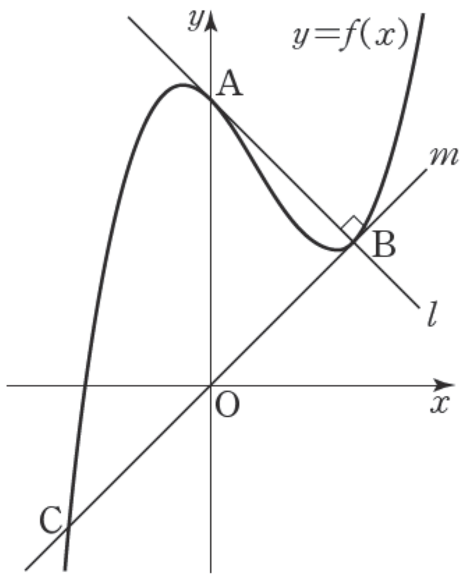
A2) 변곡점에 대해 대칭인 두 점에서의 미분계수가 같다는 점을 이용해도 좋다. $f'(c)=f'(a)$이므로 $\dfrac{c+a}{2}=0$이다. 이때, $h(x)$는 $x=a$에서 극솟값, $x=0$에서 변곡점을 가지므로 $x=c$에서는 극댓값을 가진다.

※ 오른쪽 그림을 통해 삼차함수와 접선이 이루는 비율을 직관적으로 이해하자.



예제(12) 16학년도 사관 21번

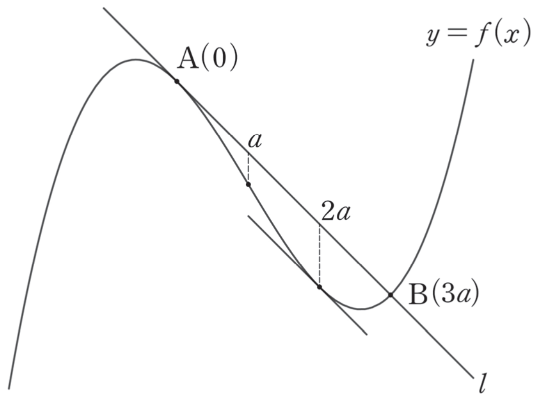
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.) [4점]



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

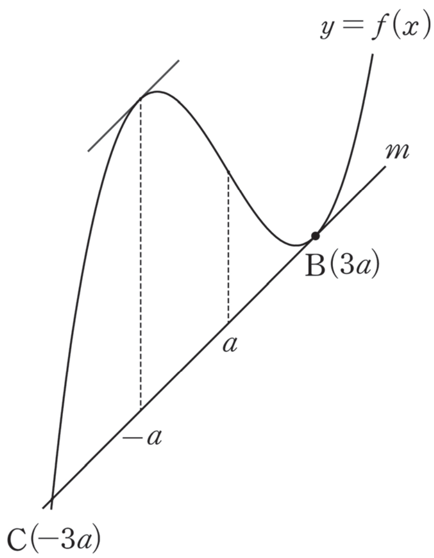
1. **삼차함수와 두 개의 접선이 제시되었다. 삼차함수와 접선이 이루는 비율**을 이용하자.

우선 접선 l부터 살펴보자.



점 A는 y축 위에 존재하므로 x좌표는 0이다. 따라서 $f(x)$의 변곡점의 x좌표를 a라 할 때, 점 B의 x좌표는 $3a$이다. (이처럼 스스로 미지수를 설정해서 문제 속 상황을 미지수로 나타내는 능력은 매우 중요하다.)

다음으로 접선 m을 살펴보자.



점 B의 x좌표가 $3a$이고 $f(x)$의 변곡점의 x좌표가 a이므로 점 C의 x좌표는 $-3a$이다.

2. 두 직선 l, m이 서로 수직이다. 따라서 두 직선 l, m의 기울기의 곱은 -1이다.

직선 m은 $y=x$이므로 m의 기울기는 1이다. 따라서 직선 l의 기울기는 -1이다.

직선 l의 기울기=점 A와 점 B를 지나는 직선의 기울기

점 B는 직선 m, 즉 $y=x$ 위에 존재하므로 B의 좌표는 $(3a,\ 3a)$이다.

점 A의 좌표를 $(0,\ k)$라 할 때 $\frac{3a-k}{3a-0}=-1$, $k=6a$이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 6a)$이다.

3. 최종 목표인 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기를 구하자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기를 알기 위해서는 $f(x)$의 식을 알아내야 한다.
접선이 제시되었으므로 차이함수를 이용하자.

직선 m의 방정식은 $y=x$이므로 $f(x)$**와 m의 차이함수를 이용하면**

$f(x)-x=(x+3a)(x-3a)^2$

점 A$(0,\ 6a)$는 곡선 $f(x)$ 위에 존재하므로 $f(0)=6a$을 대입하면

$f(0)-0=3a\times(-3a)^2=27a^3=6a$

방정식 $27a^3=6a$을 풀어주면,

$27a^3-6a=0$

$a(27a^2-6)=0$

$\therefore\ a=\sqrt{\frac{2}{9}}\ (\because\ a>0)$

4. 점 C의 x좌표는 $-3a$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는 $f'(-3a)$이다.

$f(x)-x=(x+3a)(x-3a)^2$

$f'(x)-1=(x-3a)^2+(x+3a)(2x-6a)$

$f'(-3a)-1=(-6a)^2$

$f'(-3a)=36a^2+1=36\times\left(\sqrt{\frac{2}{9}}\right)^2+1=9$

답은 9!!

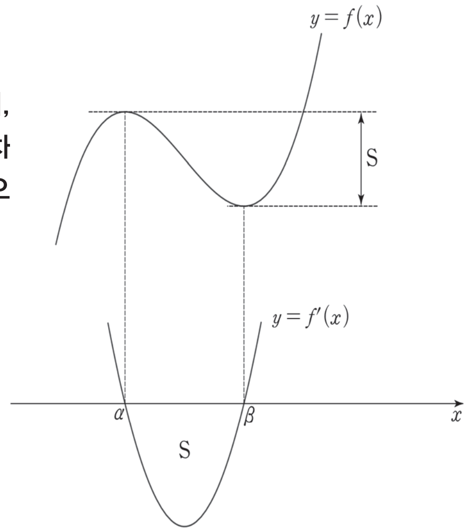
comment

1. **미지수 설정, 삼차함수 비율, 차이함수**가 중요했다. 차이함수는 〈Chapter 5〉에서 자세히 배운다.

2. 해설은 두 직선 l, m의 기울기의 곱을 먼저 따졌지만, 차이함수를 먼저 작성하고 난 뒤에 따져도 상관은 없다. 이런 문항은 명확한 풀이 순서가 정해져 있지 않다.

◆ 4. 이차함수 넓이 공식과 삼차함수 극값의 관계

최고차항의 계수가 a $(a>0)$인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소일 때, 삼차함수 $f(x)$의 극값의 차는 도함수인 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 $\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$이다. (그래프로 이해하자.)



(증명)

$f'(x)$는 연속함수이므로 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)$이고

$\displaystyle\int_\alpha^\beta |f'(x)|dx=f(\alpha)-f(\beta)$이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 a이므로 이차함수 $f'(x)$의 최고차항 계수는 $3a$이다. 이때, 이차함수 넓이 공식에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이($\displaystyle\int_\alpha^\beta |f'(x)|dx$)는 $\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}$이므로 $\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$이다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때도 똑같은 방법으로 증명하면 된다.

※ 이차함수 넓이 공식

이차함수 $f(x)$의 최고차항 계수가 a이고, 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가질 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$이다.

공식 $\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$는 다음과 같은 경우에 유용하게 써먹을 수 있다.

① 삼차함수의 극댓값과 극솟값을 알고 있을 때

$\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$의 우변을 알고 있는 셈이므로, 이 공식을 통해 극값을 갖는 x좌표와 최고차항 계수에 관한 관계식을 얻을 수 있다.

② 삼차함수의 최고차항 계수와 극값을 갖는 x좌표를 알고 있을 때

$\dfrac{3a(\beta-\alpha)^3}{6}=f(\alpha)-f(\beta)$의 좌변을 알고 있으므로, 이 공식을 통해 극값의 차를 알아낼 수 있다.

예제(13) 19년 10월 교육청 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이다. (나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

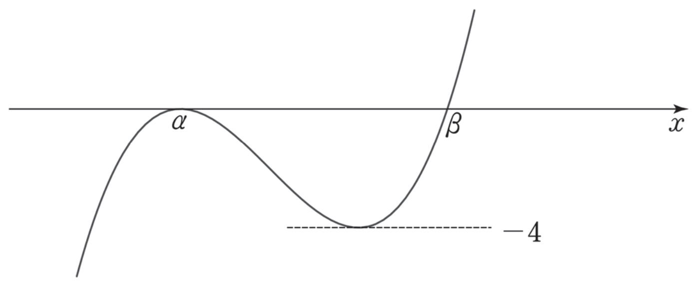
ㄱ. $f'(\alpha)=0$

ㄴ. $\beta=\alpha+3$

ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

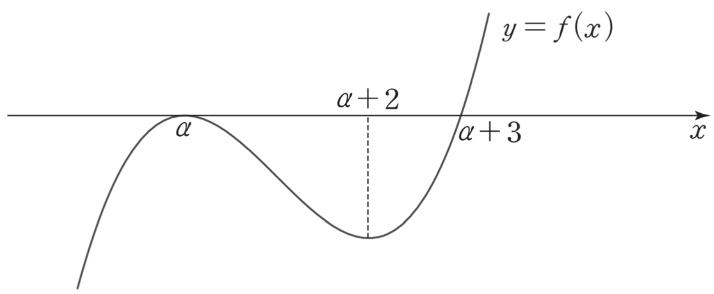
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

조건 (가), (나)를 모두 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



1. 함수 $y=f(x)$는 $x=\alpha$에서 x축에 접한다. 따라서 $f'(\alpha)=0$. (O)

2. **삼차함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 알고 있는 상황에서 극값을 갖는 x를 묻는 보기다.**
   〈이차함수 넓이 공식과 삼차함수 극값의 관계〉를 활용하자. $f(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값을 k라 할 때, $\frac{|3|}{6}(k-\alpha)^3=4$이므로
   $k-\alpha=2$이다. 따라서 삼차함수 비율에 의해 $\beta-\alpha=3$이다. (O)



3. **ㄱㄴㄷ 문항에서 선지 (ㄱ), (ㄴ)은 (ㄷ)을 위한 기반 작업이자 (ㄷ)를 위한 힌트가 된다.**
   선지 (ㄴ)에서 구한 $\beta-\alpha=3$을 이용하면 $\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+(\alpha+3)^2$이고
   $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-3)$이다.

   $f(0)=16$을 적용하자. $f(0)=\alpha^2(-\alpha-3)=16$, $\alpha^3+3\alpha^2+16=0$
   조립제법을 이용하면 $(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$, $\alpha=-4$

   $\therefore\ \alpha^2+\beta^2=\alpha^2+(\alpha+3)^2=(-4)^2+(-1)^2=17$ (X)

옳은 선지는 ㄱ, ㄴ이므로 **답은 ②!!**

5. 조건 해석을 통한 삼차함수의 그래프 그리기

제시되는 표현을 잘 보자. **동일한 그래프를 나타내는 데에도 여러 표현을 사용할 수 있다.** 단, 이런 표현들을 무작정 외우려 하지 말자. '공부'해서 주어진 문장을 그 자리에서 바로 따질 있는 실력을 갖춰야 한다.

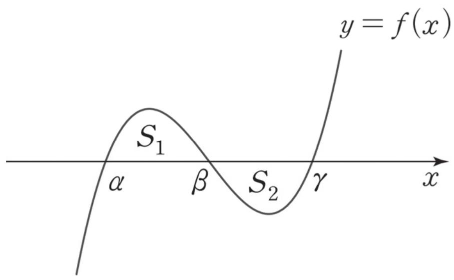
$f(x)$**는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고,** α, β, γ**는** $\alpha < \beta < \gamma$**를 만족하는 실수라 하자.**

(1) $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$
$f(x) = 0$**이 서로 다른 세 실근** α, β, γ**를 가진다.**
$f(x)$**가** $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$**를 인수로 가진다.**

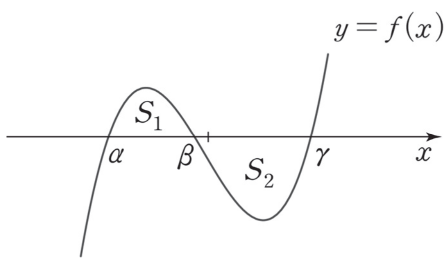
이 경우 α, β, γ**의 위치 관계에 따라** $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$**와** $\int_\beta^\gamma |f(x)|dx$**의 대소관계가 변한다.**

$\int_\alpha^\beta |f(x)|dx = S_1$, $\int_\beta^\gamma |f(x)|dx = S_2$라 하자.

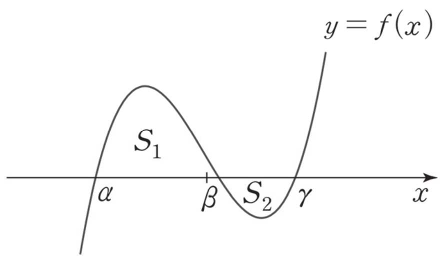
(i) $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$**이면,** $S_1 = S_2$ **(**β**가** α**와** γ**의 중앙에 존재할 때)**



(ii) $\beta < \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$**이면** $S_1 < S_2$ **(**β**가** γ**보다** α**에 더 가까이 존재할 때)**



(iii) $\beta > \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$**이면** $S_1 > S_2$ **(**β**가** α**보다** γ**에 더 가까이 존재할 때)**



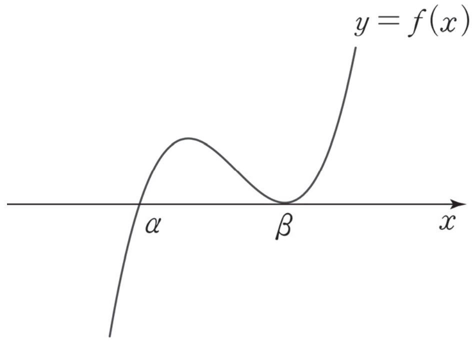
(2) $f(\beta)=f'(\beta)=0,\ f(\alpha)=0$

$f(x)=0$**이** β**를 중근으로 갖고,** α**를 하나의 실근으로 가진다.**

$f(x)$**가** $(x-\beta)^2(x-\alpha)$**를 인수로 가진다.**

$f(x)=0$**의 실근은** $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$**뿐이고** $f(x)$**의 극댓값은 양수이다.**

$f(x)=0$**의 실근은** $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$**뿐이고** $f(x)$**의 극솟값은** 0**이다.**



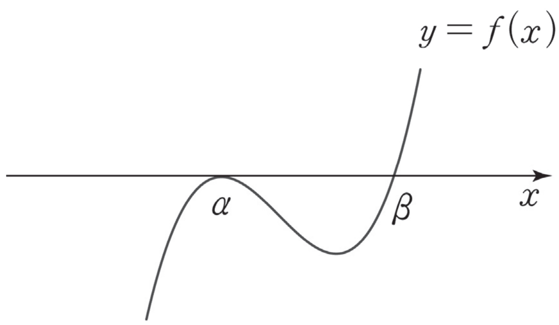
(3) $f(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$

$f(x)=0$**이** α**를 중근으로 갖고,** β**를 하나의 실근으로 가진다.**

$f(x)$**가** $(x-\alpha)^2(x-\beta)$**를 인수로 가진다.**

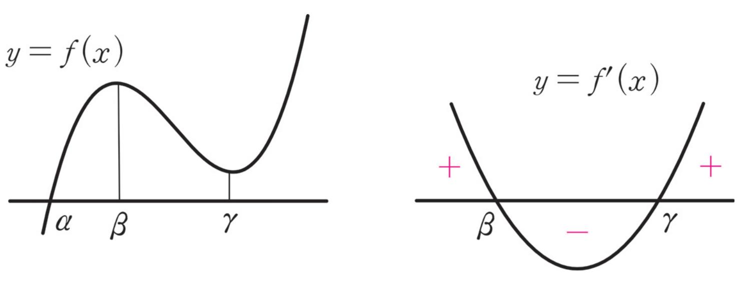
$f(x)=0$**의 실근은** $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$**뿐이고** $f(x)$**의 극댓값은** 0**이다.**

$f(x)=0$**의 실근은** $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$**뿐이고** $f(x)$**의 극솟값은 음수이다.**



(4) $f(x)=0$**이** α**를 오직 하나의 실근으로 갖고,** $f'(x)=0$**이 서로 다른 두 실근** $\beta,\ \gamma$**를 가진다.**

$f(x)$**가 극값을 갖고, 극댓값과 극솟값은 모두 양수이다.**

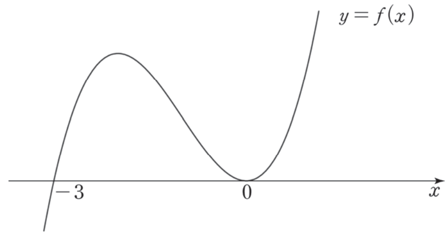


함수식 : $f(x)=(x-\alpha)(x^2+\cdots),\ \ f'(x)=3(x-\beta)(x-\gamma)$

이 경우 써먹을 수 있는 좋은 조건이 있다. $f(x)$**와** x**축의 교점이 1개라는 점 (**$f(x)=0$**이** α**를 오직 하나의 실근으로 가진다는 점)**에 집중하자. **$f(x)=(x-\alpha)(x^2+\cdots)$에서 $(x^2+\cdots)$의 해는 존재하지 않으므로 $(x^2+\cdots)$의 판별식은 0보다 작다.**

(5) 연습: $y=f(x)$의 그래프를 그리기 위해 반드시 $y=f'(x)$를 관찰할 필요는 없다!

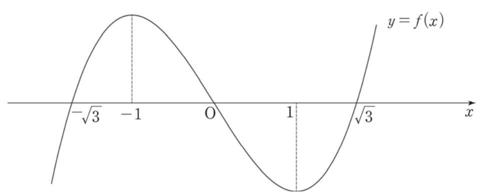
① $f(x)=x^3+3x^2$의 그래프



인수분해를 해주면 $f(x)=x^2(x+3)$이다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 x축에 접하고, $x=-3$에서 x축과 만난다.

삼차함수의 $1:1:1$ 비율에 의해 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=-1$에서 변곡점을 갖는다. 위와 같이 인수분해가 가능한 식을 보면, 그래프를 그리기 위해 $f'(x)$를 관찰할 필요가 없다. 제시된 식의 인수를 바탕으로 그래프를 그릴 수 있고, 삼차함수 비율에 의해 극점과 변곡점도 모두 찾을 수 있다.

② $f(x)=x^3-3x$의 그래프



인수분해를 하면 $f(x)=x(x^2-3)=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
따라서 $f(x)$는 $x=0$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$에서 x축과 만난다.

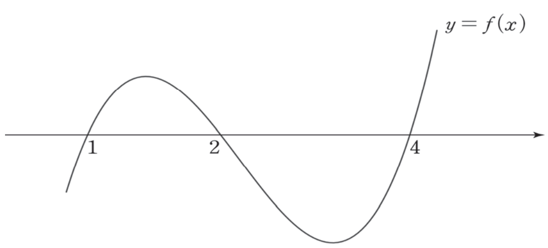
삼차함수의 $1:\sqrt{3}$ 비율에 의해 $f(x)$는 $x=\pm1$에서 극값을 갖는다. 또한, $f(x)$는 홀수차항만으로 이루어져 있으므로 기함수(원점대칭)이다. (함수의 대칭성은 이번 챕터의 마지막 부분에서 배운다.)

③ $f(x)=x^3-7x^2+14x-8$의 그래프 ($f'(x)=0$의 정수근이 존재하지 않는다면, $f(x)=0$이 정수근을 가질지도..?)

일단 식을 보자마자 당황할 수도 있다. 위의 두 개의 식은 상당히 간단했는데 이 식은 꽤(?) 복잡하기 때문이다. 아마 대부분 그래프를 그리기 위해 $f'(x)=3x^2-14x+14=0$의 근을 관찰할 것인데,
$3x^2-14x+14=0$은 인수분해가 되지 않는다! 그렇다고 근의 공식까지 쓰면서 그래프를 그려야 할까?
NO. 아직 $x^3-7x^2+14x-8=0$의 인수분해는 시도하지 않았다.

삼차방정식의 인수분해 TIP을 주겠다. $x=\pm1$을 대입했을 때 0이 된다면 $(x-1)$ 또는 $(x+1)$을 인수로 갖기 때문에 인수분해가 출제 의도인 경우가 많다. (혹은 $x=\pm2$까지도 대입할 수도 있다.)

$f(1)=1-7+14-8=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다. **조립제법을 사용하여 인수분해를 해보면, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$이다.** 따라서 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다. x축과의 교점 사이의 거리를 의식하여 x축과 $f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이도 고려하여 그려야 한다.



예제(14) 21학년도 6월 평가원 30번

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오.
[4점]

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
(나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

1. 함수 $g(x)$와 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 접하므로 차이함수를 작성해보자.
(차이함수는 Chapter 5에서 자세히 배운다.)

$p(x)=g(x)-f(x)$라 하면 $p(0)=p'(0)=0$이므로 $p(x)=ax^3+bx^2$으로 표현할 수 있다.

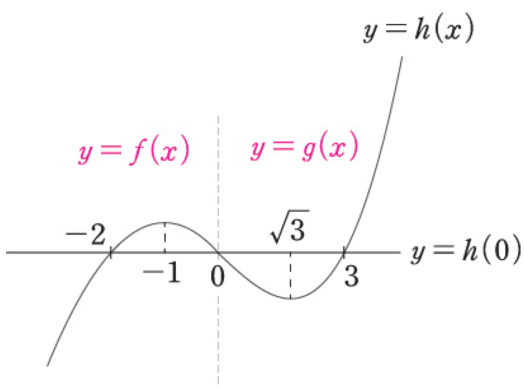
$g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $-b$이고,
$f'(-1)=0$이므로 $f(x)=-b(x+1)^2+c=-bx^2-2bx+f(0)$이다.

따라서 $g(x)=p(x)+f(x)=ax^3-2bx+g(0)$이고,
함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이므로 점 $(0, g(0))$에 대하여 대칭이다.

2. 조건 (가)에 맞게 함수 $h(x)$를 그려보자. $h(0)=f(0)=g(0)$이다.

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에 대하여 대칭이고
$f(0)=h(0)$이므로 $f(-2)=f(0)=h(0)$이다.

삼차함수 $g(x)$는 점 $(0, h(0))$에 대하여 대칭이고,
방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합이 1이므로
삼차함수 $g(x)$는 세 점 $(-3, h(0))$,
$(0, h(0))$, $(3, h(0))$을 지난다.



삼차함수의 $1:\sqrt{3}$ 비율에 의하여 함수 $g(x)$의
극솟점의 x좌표는 $\sqrt{3}$이다.

3. $g(x)=ax^3-2bx+g(0)$, $g(3)=g(0)$이므로 $g(3)-g(0)=27a-6b=0$에서 $9a=2b$이다.

조건 (나)를 적용하자. 구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $f(-1)=b+f(0)$
함수 $h(x)$의 최솟값은 $g(\sqrt{3})=3\sqrt{3}a-2\sqrt{3}b+g(0)$이므로

$b+f(0)-(3\sqrt{3}a-2\sqrt{3}b+g(0))=(1+2\sqrt{3})b-3\sqrt{3}a=3+4\sqrt{3}$에서 $9a=2b$와 연립하면
$b=3$, $a=\dfrac{2}{3}$를 얻는다.

4. $f'(x)=-6x-6$, $p'(x)=2x^2+6x$에서 $g'(x)=2x^2-6$이다.
따라서 $h'(-3)+h'(4)=f'(-3)+g'(4)=12+26=38$이다.

답은 38!!

※ 차이함수를 작성하지 않고도 풀 수 있다.

함수 $g(x)$의 이차항의 계수가 0이라는 것은 방정식 $g(x)=g(0)$의 실근의 합이 0이라는 것과 같다.
단, $g(x)$는 삼차함수이므로 $g(x)=g(0)$의 실근의 개수는 3 또는 1이다.

문제 조건에 의하여 $f(x)-f(0)=ax(x+2)$이고,
방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이므로 $g(x)-g(0)=bx(x-3)(x+3)$으로 작성이 되는 것을 알 수 있다.

($g(x)=g(0)$의 실근에 3이 포함되어야 하므로 $g(x)=g(0)$은 서로 다른 세 실근 $-3, 0, 3$을 가진다.)