

제 2 교시

수학 영역



5 지 선 다형

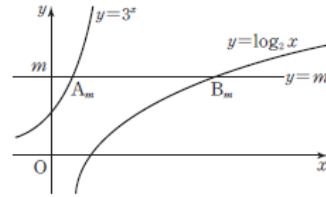
1. 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$ 라 하자. 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = 3^{x-2} + 4$ 일 때, 상수a의 값은? 1)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

2. 원 $x^2 + y^2 = t^2$ 과 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 개수를 $f(t)$ 라 하자. 함수 $(x+k)f(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 연속일 때, $f(1)+k$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)2)

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

3. 그림과 같이 자연수 m 에 대하여 두 함수 $y = 3^x$, $y = \log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=m$ 이 만나는 점을 각각 A_m , B_m 이라 하자. 선분 A_mB_m 의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이라 할 때, a_3 의 값은? 3)

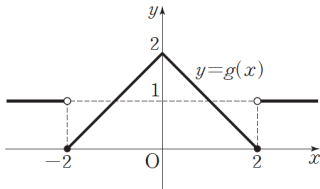


- ① 502
- ② 504
- ③ 506
- ④ 508
- ⑤ 510

4. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} -|x| + 2 & (|x| \leq 2) \\ 1 & (|x| > 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y = f(x-a)g(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은? ⁴⁾



- ① -16
- ② -12
- ③ -8
- ④ -4
- ⑤ -1

5. 로그방정식 $\log_2(4+x) + \log_2(4-x) = 3$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 곱은? ⁵⁾

- ① -10
- ② -8
- ③ -6
- ④ -4
- ⑤ -2

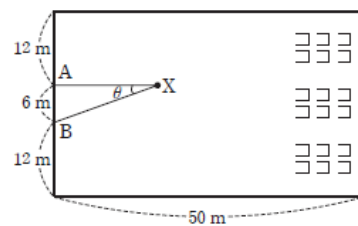
6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq a) \\ x^2-4 & (x > a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은? ⁶⁾

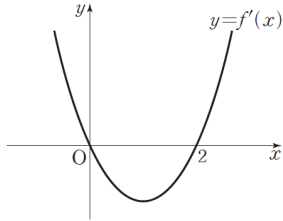
- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 2

7. 직사각형 모양의 어느 극장에서 무대를 잘 볼 수 있는 좌석을 구별하려고 한다. 아래 그림은 그 극장의 평면도이다. 중앙 무대의 폭이 6m이고, 무대 좌우 양 끝점 A, B와 객석 내의 한 점 X가 이루는 각 $\angle AXB = \theta$ 라고 하자. 이때 이 각 θ 가 30° 이상 되는 영역에는 특별석, 15° 이상 30° 이하가 되는 영역에는 일등석을 놓으려고 한다. 일등석을 놓으려고 하는 영역의 넓이는? (단위는 m^2) ⁷⁾



- ① $3\pi(12+11\sqrt{3})+18$
- ② $3\pi(24-11\sqrt{3})+18$
- ③ $10(24-11\sqrt{3})+18$
- ④ $9(14+11\sqrt{3})$
- ⑤ $9(26-11\sqrt{3})$

8. 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



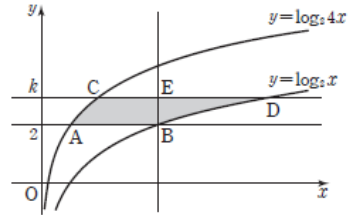
< 보 기 >

- ㄱ. $f(0) < 0$ 이면 $|f(0)| < |f(2)|$ 이다.
 ㄴ. $f(0)f(2) \geq 0$ 이면 함수 $|f(x)|$ 가 $x=a$ 에서 극소인 a 의 값의 개수는 2이다.
 ㄷ. $f(0)+f(2)=0$ 이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

- ① ㄱ
 ② ㄱ, ㄴ
 ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ
 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

9. 그림과 같이 직선 $y=2$ 가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$ ($k>2$)가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 CD와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 CD를 1 : 2로 내분한다. 사각형 ABDC의 넓이를 S라 할 때, 12S의 값을 구하시오. 9)



10. 자연수 a 에 대하여 두 함수

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2, \quad g(x) = 3x^2 + a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a 의 값을 구하시오.¹⁰⁾

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$f(x) \leq 12x + k \leq g(x)$$

를 만족시키는 자연수 k 의 개수는 30이다.

12. 양수 a 에 대하여 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad f(0) = g(0)$$

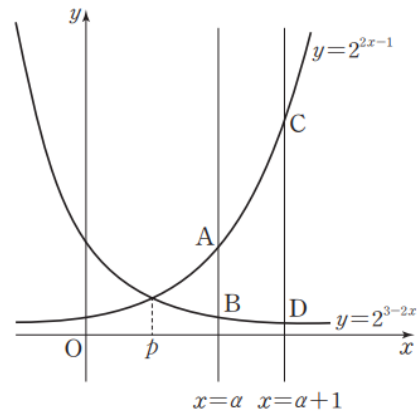
$$(나) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = 0$$

$$(다) \quad \int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx = 36$$

$3 \int_0^a |f(x) - g(x)| dx$ 의 값을 구하시오.¹²⁾

1. 그림과 같이 두 함수 $y = 2^{2x-1}$, $y = 2^{3-2x}$ 의 그래프가 직선 $x = a$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고

$\overline{AB} = \frac{15}{2}$ 일 때, 두 함수 $y = 2^{2x-1}$, $y = 2^{3-2x}$ 의 그래프가 직선 $x = a+1$ 과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 선분 CD의 길이를 l , 두 함수 $y = 2^{2x-1}$, $y = 2^{3-2x}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표를 p 라 할 때, $8lp$ 의 값을 구하시오. (단, $a > p$)¹³⁾



11. 등차수열 $\{a_n\}$ 과 공비가 1보다 작은 등비수열 $\{b_n\}$ 이

$$a_1 + a_8 = 8, \quad b_2 b_7 = 12, \quad a_4 = b_4, \quad a_5 = b_5$$

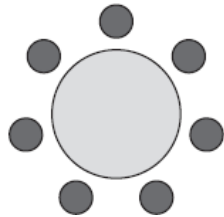
를 모두 만족시킬 때, a_1 의 값을 구하시오. ¹¹⁾

제2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5 지선 다형

1. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러 앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) ¹⁴⁾



- ① 96
② 100
③ 104
④ 108
⑤ 112

2. 세 숫자 1, 2, 3 만을 사용하여 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 세 숫자 1, 2, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하고 숫자 2를 반드시 짝수 번째 자리에만 오도록 놓는 경우의 수를 구하려고 한다. 다음은 이것을 구하는 과정의 일부이다.

일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.

(i) 숫자 2를 한 번 사용한 경우

2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\boxed{(가)}$ 이다. 2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1$ 이다. 그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$ 이다.

(ii) 숫자 2를 두 번 사용한 경우

□ (중략)

(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한번 이상씩 사용하여 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\boxed{(다)}$ 이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는 2900이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, p+q+r의 값은? ¹⁵⁾

- ① 262
② 267
③ 272
④ 277
⑤ 282

단답형

3. 자연수 a 에 대하여 두 함수

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2, \quad g(x) = 3x^2 + a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a 의 값을 구하시오.¹⁶⁾

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$f(x) \leq 12x + k \leq g(x)$$

를 만족시키는 자연수 k 의 개수는 30이다.

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

1) [정답/모범답안]

4

[해설]

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은

$$y = \log_3(x-a) + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로

$$f(x) = \log_3(x-a) + 2$$

함수 $f(x)$ 의 역함수를 구하기 위해 $\textcircled{1}$ 을 x 에 대하여 정리하면

$$\log_3(x-a) = y-2$$

$$x-a = 3^{y-2}, \quad x = 3^{y-2} + a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = 3^{x-2} + a$$

따라서

$$f^{-1}(x) = 3^{x-2} + a = 3^{x-2} + 4$$

이므로

$$a=4$$

2)

[정답/모범답안]

3

[해설]

원 $x^2 + y^2 = t^2$ 과 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 개수를 $f(t)$ 는 다음과 같다.

$$f(t) = \begin{cases} 2 & (|t| > 1) \\ 1 & (|t| = 1) \\ 0 & (|t| < 1) \end{cases}$$

함수 $(x+k)f(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } (1+k)f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+k)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+k)f(x)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+k)f(x) = (1+k) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = (1+k) \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+k)f(x) = (1+k) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1+k) \times 2 = 2k+2$$

$$(1+k)f(1) = 1+k$$

에서

$$0 = 2k+2 = 1+k$$

따라서 $k = -1$ 이므로

$$f(1)+k = 1+(-1) = 0$$

3)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$$m = 3^x \text{에서 } x = \log_3 m \text{이므로 } A_m(\log_3 m, m)$$

$$m = \log_2 x \text{에서 } x = 2^m \text{이므로 } B_m(2^m, m)$$

$$\text{그러므로 } \overline{A_m B_m} = 2^m - \log_3 m$$

$\overline{A_m B_m}$ 이 자연수이기 위해서는 m 과 2^m 이 자연수이므로 $\log_3 m$ 이 음이 아닌 정수이다.

$$m=3^0 \text{일 때, } a_1 = 2^1 - \log_3 1 = 2$$

$$m=3^1 \text{일 때, } a_2 = 2^3 - \log_3 3 = 7$$

$$m=3^2 \text{일 때, } a_3 = 2^9 - \log_3 9 = 510$$

따라서 $a_3 = 510$

4)

[정답/모범답안]

1

[해설]

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 0 \text{ 이고}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

같은 방법으로

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$$

그러므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 의 두 근이 $x=2$, $x=-2$ 이므로

$$f(x) = (x+2)(x-2)$$

함수 $f(x-a)g(x) = (x-a+2)(x-a-2)g(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되기 위해서는

$$a-2=2 \text{ 또는 } a+2=-2$$

$$\text{이므로 } a=4 \text{ 또는 } a=-4$$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$4 \times (-4) = -16$$

5) [정답/모범답안]

2

[해설]

로그의 진수 조건에 의하여

$$4+x>0, \quad 4-x>0 \text{이므로}$$

$$-4 < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(4+x) + \log_2(4-x) = 3 \text{에서}$$

$$\log_2(4+x)(4-x) = 3$$

$$(4+x)(4-x) = 2^3 = 8$$

$$16 - x^2 = 8, \quad x^2 = 8$$

$$\text{즉, } x = 2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = -2\sqrt{2}$$

이 값은 $\textcircled{1}$ 의 범위에 포함되므로 주어진 방정식을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$2\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) = -8$$

6) [정답/모범답안]

5

[해설]

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a^-} |f(x)| = |f(a)|$$

$|a^2 - 4| = |a + 2|$ 에서

$$a^2 - 4 = \pm(a + 2)$$

(i) $a^2 - 4 = a + 2$ 일 때

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$(a + 2)(a - 3) = 0$$

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

(ii) $a^2 - 4 = -(a + 2)$ 일 때

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a + 2)(a - 1) = 0$$

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a 의 값은 $-2, 1, 3$ 이므로 그 합은

$$(-2) + 1 + 3 = 2$$

7)

[정답/모범답안]

1

[해설]

{풀이 전략} 코사인법칙과 여러 가지 넓이 구하는 공식을 이용한다.

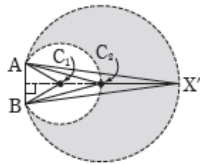
{문제 풀이}

{STEP 1} 원을 적당히 그리고 원주각의 크기가 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 임을 이용하여 일등석의 영역을 찾는다.

$\overline{AB}=6$ 을 한 변으로 하는 정삼각형 ABC_1 을 그리면

$$\angle AC_1B = 60^\circ$$

또, C_1 을 중심으로 하고 $\overline{AB} = \overline{C_1A} = \overline{C_1B}$ 를 반지름으로 하는 원을 그리면 그림과 같다.



$$\overline{AC_2B} = \frac{1}{2} \angle AC_1B$$

$$= \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

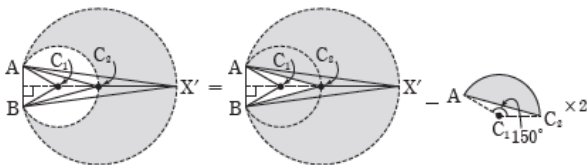
다시 C_2 를 중심으로 하고 $\overline{C_2A} = \overline{C_2B}$ 를 반지름으로 하는 원을 그리면

$$\angle AX'B = \frac{1}{2} \angle AC_2B = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ$$

따라서 일등석을 놓을 수 있는 영역은 위의 그림의 색칠한 부분과 같다.

{STEP 2} 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구한다.

구하는 영역의 넓이는 다음과 같다.



이때 원 C_2 의 반지름 $\overline{AC_2}$ 의 길이는

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC_2}^2 + \overline{BC_2}^2 - 2\overline{AC_2} \times \overline{BC_2} \times \cos 30^\circ$$

$$36 = \overline{AC_2}^2 + \overline{AC_2}^2 - 2\overline{AC_2}^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AC_2}^2 = 36(2 + \sqrt{3})$$

{STEP 3} 부채꼴의 넓이 구하는 공식과 삼각형의 넓이 구하는 공식을 이용한다.

따라서 구하는 넓이는

$$\pi \times \overline{AC_2}^2 \times \frac{330^\circ}{360^\circ} - 2 \left\{ \pi \times \overline{AC_1}^2 \times \frac{150^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times \overline{AC_1} \times \overline{C_1C_2} \times \sin 150^\circ \right\}$$

$$= \pi(72 + 36\sqrt{3}) \times \frac{11}{12} - 2 \left\{ \pi \times 36 \times \frac{150^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 3\pi(12 + 11\sqrt{3}) + 18$$

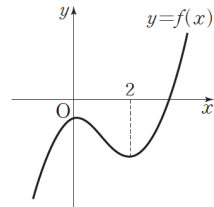
8)

[정답/모범답안]

5

[해설]

ㄱ. $f(0) < 0$ 이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



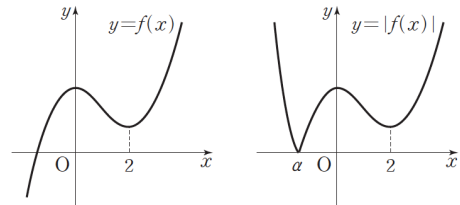
이때 $f(2) < f(0) < 0$ 이므로

$$|f(0)| < |f(2)| \text{ (참)}$$

ㄴ. $f(0)f(2) \geq 0$ 일 때, $f(0) > f(2)$ 이므로 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형을 각 경우에 따라 그리면 다음과 같다.

(i) $f(0) > f(2) > 0$ 일 때

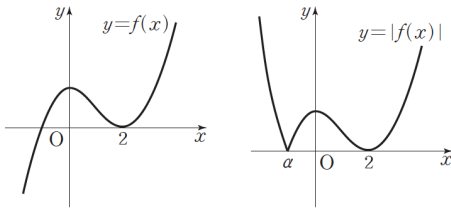
함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $|f(a)| = 0$ ($a \neq 2$)라 하면 구하는 a 의 값은 a 와 2의 2개이다.

(ii) $f(0) > f(2)$ 이고 $f(2) = 0$ 일 때

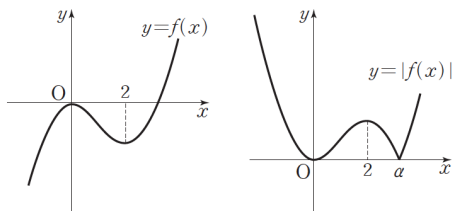
함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $|f(\alpha)|=0$ ($\alpha \neq 2$)라 하면 구하는 a 의 값은 α 와 2의 2개이다.

(iii) $f(0)=0$ 이고 $f(2)<0$ 일 때

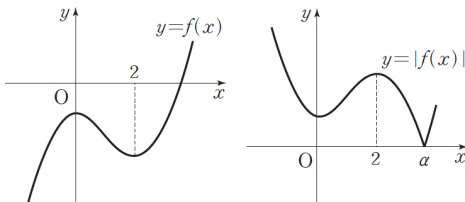
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $|f(\alpha)|=0$ ($\alpha \neq 0$)이라 하면 구하는 a 의 값은 0과 α 의 2개이다.

(iv) $f(2)<f(0)<0$ 일 때

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



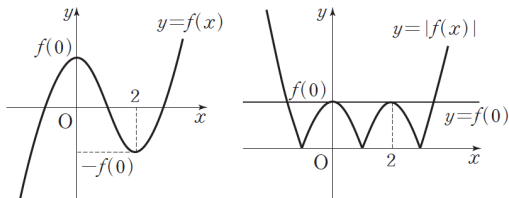
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ ($\alpha \neq 0$)이라 하면 구하는 a 의 값은 0과 α 의 2개이다.

(i)-(iv)에서 극소인 a 의 값의 개수는 20이다. (참)

$\therefore f(0)+f(2)=0$ 이므로

$f(2)=-f(0)$

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 방정식 $|f(x)|=f(0)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=f(0)$ 의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=f(0)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 40이므로 방정식 $|f(x)|=f(0)$ 의 서로 다른

실근의 개수도 40이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9) [정답/모범답안]

54

[해설]

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 A(a, 2)는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점 이므로

$$2=\log_2 4a, 4a=2^2$$

$$a=1$$

따라서 점 A의 좌표는 (1, 2)

점 B의 x좌표를 b라 하면 점 B(b, 2)는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 이므로

$$2=\log_2 b$$

$$b=4$$

따라서 점 B의 좌표는 (4, 2)

점 C의 x좌표를 c라 하면 점 C(c, k)는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점 이므로

$$k=\log_2 4c, 4c=2^k$$

$$c=2^{k-2}$$

따라서 점 C의 좌표는 $(2^{k-2}, k)$

점 D의 x좌표를 d라 하면 점 D(d, k)는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 이므로

$$k=\log_2 d$$

$$d=2^k$$

따라서 점 D의 좌표는 $(2^k, k)$

점 E의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로 4이고,

점 E가 선분 CD를 1 : 2로 내분하므로

$$4=\frac{1 \times 2^k + 2 \times 2^{k-2}}{1+2}$$

$$=2 \times 2^{k-1} + 2^{k-1}$$

$$=3 \times 2^{k-1}$$

$$=2^{k-1}$$

$$k-1=2$$

$$k=3$$

따라서 C(2, 3), D(8, 3), E(4, 3)이고

$$\overline{AB}=3, \overline{CD}=6, \overline{BE}=1$$

사각형 ABDC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2} \times (\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{BE}$$

$$=\frac{1}{2} \times (3+6) \times 1$$

$$=\frac{9}{2}$$

$$\text{따라서 } 12S=12 \times \frac{9}{2}=54$$

10)

[정답/모범답안]

34

[해설]

{풀이 전략} 도함수를 이용하여 부등식과 관련된 문제를 해결한다.

{문제 풀이}

{STEP 1} 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 12x + k \leq g(x)$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구한다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 12x + k \leq g(x)$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구해 보자.

(i) $f(x) \leq 12x + k$ 일 때

$$f(x) \leq 12x + k \text{에서 } f(x) - 12x \leq k$$

$$h(x) = f(x) - 12x \text{라 하면}$$

$$h(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x$$

$$h'(x) = -4x^3 - 6x^2 - 2x - 12 = -2(x+2)(2x^2 - x + 3)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -2$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$

함수 $h(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최대이고 최댓값은 20이다.

그러므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq 12x + k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$k \geq 20$$

(ii) $g(x) \geq 12x + k$ 일 때

$$g(x) \geq 12x + k \text{에서 } g(x) - 12x - k \geq 0$$

부등식 $3x^2 - 12x + a - k \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 12x + a - k = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 3 \times (a - k) \leq 0, \quad k \leq a - 12$$

그러므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $g(x) \geq 12x + k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$k \leq a - 12$$

{STEP 2} a 의 값을 구한다.

(i), (ii)에 의해 $20 \leq k \leq a - 12$ 이고 이를 만족시키는 자연수 k 의 개수는 30이므로 $22 \leq a - 12 < 23$

따라서 $34 \leq a < 35$ 이므로 자연수 a 의 값은 34이다.

11) [정답/모범답안]

18

[해설]

{풀이 전략} 등차수열과 등비수열의 성질, 이차방정식의 근과 계수의 관

계를 이용한다.

{문제 풀이}

{STEP 1} 등차수열과 등비수열의 성질을 이용하여 a_4 와 a_5 의 관

계를 식을 구한다.

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로

$$a_1 + a_8 = a_4 + a_5$$

$$\text{따라서 } a_4 + a_5 = 8$$

수열 $\{b_n\}$ 은 등비수열이므로

$$b_2 b_7 = b_4 b_5$$

$$\text{이때 } b_4 b_5 = a_4 a_5 \text{이므로}$$

$$a_4 a_5 = b_4 b_5 = b_2 b_7 = 12$$

{STEP 2} 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a_4 , a_5 의 값을 구한다.

a_4 , a_5 가 이차방정식의 두 근이라 하면 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 의 두 근이다.

$$(x-2)(x-6)=0 \text{에서}$$

$$x=2 \text{ 또는 } x=6$$

$$\text{이때 } a_4 = b_4, \quad a_5 = b_5 \text{이고}$$

등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비가 1보다 작으므로

$$b_4 > b_5 \text{에서 } a_4 > a_5$$

$$\text{따라서 } a_4 = 6, \quad a_5 = 2$$

{STEP 3} 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하여 a_1 의 값을 구한다.

$$a_5 - a_4 = 2 - 6 = -4 \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -4인 등차수열이다.

따라서

$$a_4 = a_1(4-1) \times (-4) = 6$$

$$a_1 - 12 = 6$$

$$\text{따라서 } a_1 = 18$$

12)

[정답/모범답안]

340

[해설]

{풀이 전략} 함수의 극한을 이용한 미정계수의 결정을 활용한다.

{문제 풀이}

{STEP 1} 조건 (가), (나)를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 식을 구한다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 는 조건 (가), (나)에서 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ 이므로 $f(x) = x^2$

{STEP 2} 조건 (가), (나)를 이용하여 함수 $g(x)$ 의 식을 구한다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 는 조건 (가), (나)에서 $g(0) = 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) = 0$ 이므로

$$g(x) = x(x-a)^2$$

{STEP 3} 조건 (다)를 이용하여 상수 a 의 값을 구한다.

$$\int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_0^a \{x^3 - (2a+1)x^2 + a^2x\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2a+1}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{3}a^3 = 36$$

$$\text{그러므로 } (a-6)(a^3 + 2a^2 + 12a + 72) = 0$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 6$$

수학 영역 [확률과 통계]

교 3

{STEP 4} 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 교점을 구해 정적분의 값을 구한다.

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 교점을 구하면

$(0, 0)$, $(4, 16)$, $(9, 81)$

$$\int_0^6 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^4 \{g(x) - f(x)\} dx + \int_4^6 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 18x^2 \right]_0^4$$

$$+ \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 18x^2 \right]_4^6 = \frac{340}{3}$$

따라서

$$3 \int_0^6 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= 3 \int_0^6 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= 3 \times \frac{340}{3} = 340$$

13)

[정답/모범답안]

255

[해설]

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2^{2\alpha-1} - 2^{3-2\alpha} \\ &= 2^{2\alpha} \times 2^{-1} - 2^3 \times 2^{-2\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \times (2^\alpha)^2 - \frac{8}{(2^\alpha)^2} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

에서 $2^\alpha = X(X > 0)$ 라 하면

$$\frac{1}{2}X^2 - \frac{8}{X^2} = \frac{15}{2}$$

양변에 $2X^2$ 을 곱하여 정리하면

$$\begin{aligned} X^4 - 15X^2 - 16 &= 0 \\ (X^2 + 1)(X^2 - 16) &= 0 \end{aligned}$$

에서 $X^2 > 0$ 이므로 $X^2 = 16$, 즉

$$2^{2\alpha} = 16, 2^{2\alpha} = 2^4$$

그러므로 $2\alpha = 4, \alpha = 2$

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= 2^{2(\alpha+1)-1} - 2^{3-2(\alpha+1)} \\ &= 2^{2 \times 3-1} - 2^{3-2 \times 3} = 2^5 - 2^{-3} \\ &= 32 - \frac{1}{8} = \frac{255}{8} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } l = \frac{255}{8}$$

한편, $2^{2x-1} = 2^{3-2x}$ 에서

$$2x-1 = 3-2x, 4x = 4$$

이므로 $x = 1$, 즉 $p = 1$

따라서 $81p = 255$

14)

[정답/모범답안]

1

[해설]

1학년 학생 2명을 한 묶음으로, 2학년 학생 2명을 한 묶음으로 생각하고 3학년 학생 3명과 함께 원 모양의 탁자에 둘러앉히는 경우의 수는 회전하여 일치하는 것을 고려하면

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이때 1학년 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!, 2학년

학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2! \times 2! = 96$$

15)

[정답/모범답안]

1

[해설]

일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.

(i) 숫자 2를 한 번 사용한 경우

2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!1!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{6!}{1!5!} = 62 \text{이다.}$$

2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 $C_{1sub3} = 3$ 이다.

그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3 \times 62 = 186$ 이다.

(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이므로 나머지 자리에 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3을 나열하여 만든 것이다.

그러므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!3!} = 14 \text{이다.}$$

따라서 $p=62$, $q=186$, $r=140$ 이므로

$$p+q+r=62+186+14=262$$

{다른 풀이}

(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이다.

즉, 구하는 경우의 수는 1, 3을 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열하는 경우의 수에서 1을 네 개, 3을 네 개 선택한 경우의 수 2를 뺀 것이므로 $4! - 2 = 24 - 2 = 22$ 이다.

16)

[정답/모범답안]

34

[해설]

{풀이 전략} 도함수를 이용하여 부등식과 관련된 문제를 해결한다.

{문제 풀이}

{STEP 1} 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 12x + k \leq g(x)$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 구한다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq 12x + k \leq g(x)$ 를 만족시키는 k 의

값의 범위를 구해 보자.

(i) $f(x) \leq 12x + k$ 일 때

$f(x) \leq 12x + k$ 에서 $f(x) - 12x \leq k$

$h(x) = f(x) - 12x$ 라 하면

$$h(x) = -x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x$$

$$h'(x) = -4x^3 - 6x^2 - 2x - 12 = -2(x+2)(2x^2 - x + 3)$$

$h'(x) = 0$ 에서 $x = -2$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$

함수 $h(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최대이고 최댓값은 20이다.

그러므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq 12x + k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$k \geq 20$$

(ii) $g(x) \geq 12x + k$ 일 때

$g(x) \geq 12x + k$ 에서 $g(x) - 12x - k \geq 0$

부등식 $3x^2 - 12x + a - k \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 12x + a - k = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 3 \times (a - k) \leq 0, \quad k \leq a - 12$$

그러므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $g(x) \geq 12x + k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$k \leq a - 12$$

{STEP 2} a 의 값을 구한다.

(i), (ii)에 의해 $20 \leq k \leq a - 12$ 이고 이를 만족시키는 자연수 k 의 개수는 30이므로 $22 \leq a - 12 < 23$

따라서 $34 \leq a < 35$ 이므로 자연수 a 의 값은 34이다.