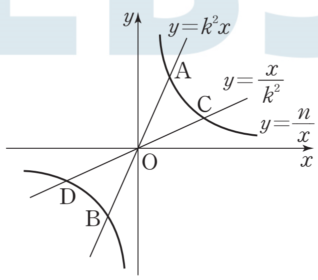
20

▸ 21054-1110

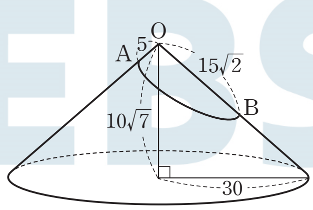
$k>1$인 상수 k와 자연수 n에 대하여 그림과 같이 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=k^2x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{k^2}$가 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 할 때, 네 수 d, b, a, c는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 네 수 d, b, a, c의 공차가 16 이하인 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, 점 A와 점 C는 제1사분면의 점이다.) [4점]



21

▸ 21054-1111

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 30이고 높이가 $10\sqrt{7}$인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 옆면 위를 움직이는 점 P가 이 원뿔의 꼭짓점 O로부터 거리가 5인 점 A에서 출발하여 꼭짓점으로부터 거리가 $15\sqrt{2}$인 지점 B에 최단거리로 이동하여 도착하였다. 점 P가 이동한 거리를 구하시오. (단, 세 점 A, O, B에서 밑면에 내린 수선의 발을 각각 A′, O′, B′이라 할 때, 점 O′은 선분 A′B′ 위에 있다.) [4점]



22

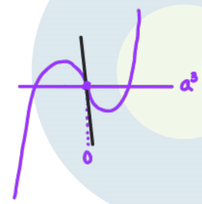
(0, a³) 대칭

▸ 21054-1112

15 이하인 두 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$과 곡선 밖의 점 P(b, 0)이 있다. 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 세 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 p, 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 두 개가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x) = x^3-a^2x+a^3$

$f'(0) = -a^2$, $f'(0)$ ⇒ 일차항의 계수

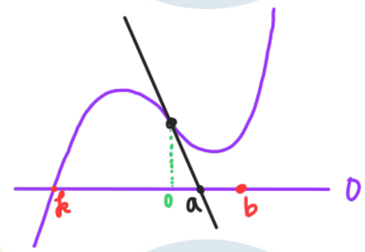


$y = -a^2x + a^3$ ⇒ $(a, 0)$ 지남

접선의 개수가 3개이려면

$a<b$ (∵ $b>0$이므로 $b<k$일 수 없음)

'15 이하의 자연수' 조건에 따라



$a=1$, $b \Rightarrow 2\sim15$

$a=2$, $b \Rightarrow 3\sim15$

⋮

$a=14$, $b \Rightarrow 15$

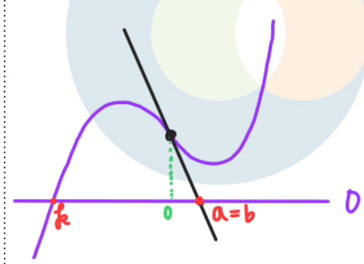
$\frac{14\cdot15}{2}=105$

$\boxed{p=105}$

접선의 개수가 2개이려면

$a=b$ (∵ $b>0$이므로 $b\neq k$)

'15 이하의 자연수' 조건에 따라



$a=1$, $b=1$

$a=2$, $b=2$

⋮

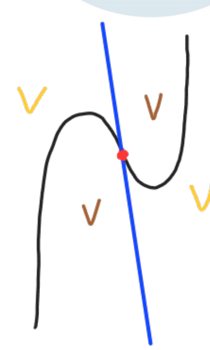
$a=15$, $b=15$

$\boxed{q=15}$

∴ $\boxed{p+q=120}$

점 P의 y좌표가 0이기 때문에
'접선의 개수' 개념을 알고 있었다면 쉽게 해결 가능

접선의 개수



① 점대칭점 1개

② 점대칭점 접선위(①제외) 2개

③ 곡선위(①제외) 2개

④ V 영역 1개

⑤ U 영역 3개