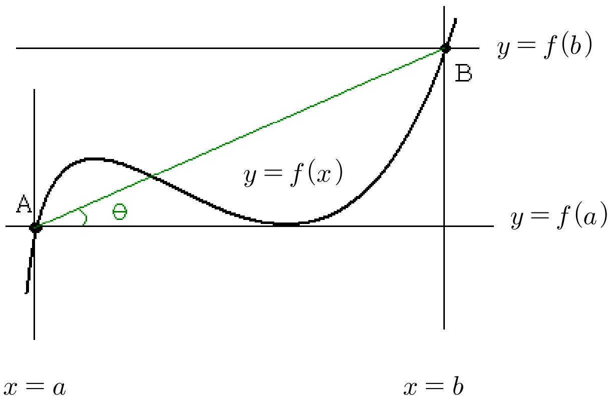
미분

홍현기

미분이란 무엇인가?

먼저 미분을 배우기에 앞서 미분이 무엇인지 알아보자. 미분(微分)을 말 그대로 풀이하면 '작게 쪼갠다.'라는 의미를 가지고 있다. 즉, 어떤 대상을 잘게 쪼개어 그것을 분석하는 도구(Tool)가 미분이다. 예를 들어 어떤 물체의 시간에 따른 위치를 함수로 표현해 그래프로 나타내자. 이때 시간 t_1에서 t_2까지 위치의 변화를 Δs라고 할 때 시간의 변화와 위치의 변화의 비, $\dfrac{\Delta s}{t_2 - t_1}$는 시간 t_1에서 t_2까지 물체의 평균속도가 될 것이다. 이때, 시간의 변화량을 한없이 작게 만들어보자. 쉽게 이해하기 위해 t_1은 그대로 두고 t_2를 't_1에 한없이 가까이 다가간다.'라고 생각하면 t_1에서 t_2까지 물체의 평균속도는 점점 t_1에서의 순간속도에 가까워 질것이고 그 값에 수렴할 것이다. 이처럼 미분은 어떤 물체의 운동이나 그래프의 변화를 분석하는데 쓰이는 도구(Tool)이다. 지금부터 미분에서 배워야 할 개념들을 살펴보자.

- 평균변화율



$$\begin{cases} \text{원인} & x : a \to b \\ & \Delta x = b - a\ (x\text{의 증분}) \\ \text{결과} & y : f(a) \to f(b) \\ & \Delta y = f(b) - f(a)\ (y\text{의 증분}) \end{cases}$$

이 때 $[a,b]$에서의 f의 평균변화율 : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \tan\theta$

점A와 점B사이의 '평균변화율'은 점 A와 점 B의 x의 변화량과 y의 변화량의 비로 정의된다. 계속해서 점A를 고정시키고 점B를 점A에 한없이 가까이 다가가게 하자.

- $[a,x]$ or $[x,a]$에서의 f의 평균변화율의 극한값

$$\underbrace{\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{우방미분계수}}=\underbrace{\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{좌방미분계수}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\underbrace{=}_{x-a=h}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)=\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

: $x=a$에서의 순간변화율, 미분계수

폐구간이 $[a,x]$ 또는 $[x,a]$인 것은 점B가 점A의 오른쪽에서도, 왼쪽에서도 가까이 다가갈 수 있기 때문이다. 이때 점B가 점A의 왼쪽에서 다가갈 때 평균변화율의 극한값을 '좌방미분계수'라 부르고 오른쪽에서 다가갈 때는 '우방미분계수'라고 부른다. 그리고 우방미분계수와 좌방미분계수가 같을 때 우리는 그것을 $f'(a)$ 또는 $\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$라고 쓰고 $x=a$에서의 f의 순간변화율 또는 미분계수라고 부른다. 따라서 좌방미분계수와 우방미분계수가 다르면 그 점에서 미분계수가 존재하지 않는다. 평균변화율은 두 점 A와 B를 이은 선분의 기울기였다. 따라서 점B가 점A로 한없이 가까이 다가갔을 때의 평균변화율, 즉 순간변화율(미분계수)은 점A에서의 접선의 기울기가 된다. 우리는 지금 어떤 함수가 주어지더라도 특정한 점에서 미분계수가 존재한다면, 그 점의 접선의 기울기를 구할 수 있는 방법을 배웠다. 하지만 100개의 점에서의 미분계수를 구한다고 생각해보자. 매우 귀찮은 일이 될 것이고 인내심에 한계를 느낄 것이다. 그래서 이번에는 특정한 점에서의 미분계수가 아닌 임의의 점에서의 미분계수에 대하여 알아보자.

- $y=f(x)$위의 임의의 점 $(x,f(x))$에서의 변화율 : $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\Rightarrow$ 도함수

우리는 위에서 $A(a,f(a))$에서 미분계수를 구하는 방법을 배웠다. 하지만 그 점이 특정한 점이 아니라 임의의 점 $(x,f(x))$라면 x에다 어떤 점의 x좌표만 대입하면 쉽게 미분계수를 구할 수 있다. 따라서 임의의 점 $(x,f(x))$에서의 미분계수는 x에 대한 함수가 되고 우리는 이것을 '도함수'라고 부른다.

지금까지 평균변화율, 순간변화율(미분계수), 도함수의 정의와 의미를 살펴봤다.
위에서 말한 세 가지(평균변화율, 순간변화율, 도함수)는 미분의 가장 기본이자 핵심이므로 반드시 정의와 의미를 알아두자.

다음 문제를 풀어보자.

$ex.$ $f(x)=|x|$일 때, $f'(x)$를 구하시오.

해설) 만약 그래프의 모양만 보고 $f'(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$라고 답한 학생이 있다면 답은 맞지만 정의를 이용한 풀이는 아니다. 우리는 위에서 도함수의 정의를 배웠고 그것을 이용해보자.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(|x+h|-|x|)(|x+h|+|x|)}{h(|x+h|+|x|)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h(|x+h|+|x|)}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h(|x+h|+|x|)}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{|x+h|+|x|}=\frac{2x}{2|x|}=\frac{x}{|x|}$$

x의 범위를 나누면 정확히 $f'(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$와 일치한다. 말하고 싶은 것은 도함수를 반드시 도함수의 정의를 이용해 풀어야만 좋은 풀이라는 것이 아니라 그것을 활용할 줄 알아야한다는 것이다. 지금은 미분을 배우는 첫 단계이기 때문에 기본적인 내용을 충분히 연습해야한다.

도함수의 정의를 이용하는 예제를 간단히 살펴보았다. 하지만 함수가 주어질 때 마다 그것을 정의에 대입해 도함수를 구하는 것도 매우 귀찮은 일이다. 그래서 몇 가지 특별한 형태를 가진 함수의 도함수를 공식으로 외워두면 도함수를 구할 때 매우 유용하게 쓰일 것이다.

여러 가지 함수의 미분법

- $f(x)=C$ (C는 상수)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0$$

상수함수의 도함수는 0이다.

- n : 자연수, $f(x)=x^n$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{{}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_nh^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

$f(x)=x^n$이고 n이 자연수일 때 도함수의 정의와 이항정리를 이용하면 $f'(x)=nx^{n-1}$임을 알 수 있다.

- $(cf(x))'=cf'(x)$

- $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$

함수에 실수가 곱해져있으면 실수는 그대로 두고 함수만 미분하면 된다.
함수가 어떤 두 함수의 합 또는 차의 형태로 주어져있으면 각각 따로 미분하면 된다.

지금까지 알아본 것으로 우리는 모든 다항함수를 쉽게 미분할 수 있다.
임의의 다항함수 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ \cdots\ +a_nx^n$의 각각의 항을 주어진 공식대로 하나씩 미분하면 쉽게 $f'(x)$를 구할 수 있다.

계속해서 다른 형태의 함수의 도함수도 구해보자.

- 곱의 미분법

$h(x)=f(x)\times g(x)$

$h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)+f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\{g(x+h)-g(x)\}+g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

- 몫의 미분법

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h(g(x+h)g(x))}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)\}-\{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)\}}{h(g(x+h)g(x))}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h(g(x+h)g(x))}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

곱의 미분법과 몫의 미분법은 공식만 외워두고 과정은 참고정도로 하면 된다.
몫의 미분법을 통해 새로운 사실을 알 수 있다.

$y=x^n$ (n : 정수)

우리는 n이 자연수일때 주어진 함수의 도함수가 ny^{n-1}임을 증명했다.

남은것은 n이 0과 음수일때인데 0일때는 주어진 함수가 상수함수이므로 제외하고

음수일때를 살펴보자.

if. $n=-m$ (m : 자연수)

$y=\frac{1}{x^m}$ (몫의 미분법)

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$

n이 정수일 때 주어진 함수의 도함수가 ny^{n-1}임을 알 수 있다.

• 합성함수의 미분법

$y=h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}\underbrace{=}_{\substack{f(x)=z\\ f(x+h)=z+\Delta\\ \Rightarrow\Delta=f(x+h)-f(x)}}\lim_{h\to 0}\frac{g(z+\Delta)-g(z)}{\Delta}\times\frac{\Delta}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(z+\Delta)-g(z)}{\Delta}\times\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g'(z)\times f'(x)=g'(f(x))f'(x)=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}\ (\text{연쇄법칙})$$

합성함수의 미분법에 대해서 자세히 살펴보자. $y=h(x)=(g\circ f)(x)$의 도함수를 구하는 과정을 살펴보면 f를 z로 치환한 뒤 y를 z에 대해 미분하고($\frac{dy}{dz}$), z를 x에 대해 미분하여($\frac{dz}{dx}$) 곱한다. 즉, 우리가 구하고자 한 $\frac{dy}{dx}$는 $\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}$와 같다. 마치 분수의 곱처럼 약분하면 두 값이 같음을 알 수 있다. 그리고 우리는 이것을 연쇄법칙(chain-rule)이라고 부른다.

그런데 바로 $\frac{dy}{dx}$를 구하면 될 것을 왜 굳이 $\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}$로 변형하여 구해야 할까? 이것을 이해하기 위해서는 먼저 $\frac{dy}{dx}$라는 기호에 대한 의미를 알아야한다. $\frac{dy}{dx}$의 의미가 무엇인가? 아마 대부분의 학생들은 '도함수'라고 답할 것이다. 틀린 말은 아니다. 하지만 좀 더 본질적인 해석을 할 필요가 있다. $\frac{dy}{dx}$에서 y부터 시계방향으로 네 개의 문자 y,x,d,d에다가 하나씩 동그라미를 치면서 '$\underbrace{y\text{를}}_{y}$ $\underbrace{x\text{에}}_{x}$ $\underbrace{\text{대해}}_{d}$ $\underbrace{\text{미분한다.}}_{d}$'라고 해석하자.

(물론 필자가 생각해낸 방법이지 교과서에 소개된 내용은 아니니 오해하지말자.)

다시 합성함수의 미분법으로 돌아가면 $\frac{dy}{dx}$를 구해야 하는데 y는 x에 대한 함수가 아니라 $z(=f(x))$에 대한 함수이다. 따라서 y를 z에 대해 미분해야하고 연쇄법칙에 따라 z를 x에 대해 미분한 것을 곱해주어야 한다. 따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}$이다.

만약 z도 x에 관한 식이 아니었다면 한 번 더 연쇄법칙을 이용해 식을 확장해야한다. 예를 들어 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{da}\times\frac{da}{dx}=\frac{dy}{da}\times\frac{da}{db}\times\frac{db}{dx}=\cdots$와 같은 식으로 필요에 따라서 계속 식을 확장할 수 있다.

• 음함수의 미분법

①$\dfrac{d}{dx}(y^n)=\dfrac{d}{dy}(y^n)\dfrac{dy}{dx}=ny^{n-1}\dfrac{dy}{dx}$

②$\dfrac{d}{dx}(xy)=y+x\dfrac{dy}{dx}$

③$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{dy}{dx}x-y}{x^2}$

음함수란 $f(x,y)=0$꼴로 표시되는 함수를 말한다. 음함수의 미분법이라고 해서 전혀 새로운 것이 아니니 겁먹을 필요는 없다. 방금 전 배운 '연쇄법칙'을 그대로 적용하면 된다. 위에 있는 예시를 해설을 통해 공부해보자.

해설)

① : $\dfrac{d}{dx}(y^n)$은 'y^n을 x에 대해 미분하라.'이다. 하지만 y^n은 y에 관한 식이므로 y에 대해 미분해야 하므로 $\dfrac{d(y^n)}{dy}\times\dfrac{dy}{dx}=ny^{n-1}\dfrac{dy}{dx}$이다.

② : $\dfrac{d}{dx}(xy)$는 'xy를 x에 대해 미분하라.'이다. 곱의 미분법에 따라 순서대로 미분하면 $\dfrac{d}{dx}(xy)=y+x\dfrac{dy}{dx}$이다.

③ : $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right)$는 '$\dfrac{y}{x}$를 x에 대해 미분하라.'이다. 몫의 미분법에 따라 순서대로 미분하면 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{dy}{dx}x-y}{x^2}$이다.

예제를 하나 풀어보자.

$ex)$ $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2}$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 구하시오.

해설) 양변을 x에 대해 미분하자. $\dfrac{d\left(\dfrac{x}{y}\right)}{dx}=\dfrac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}$, $\dfrac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dx}x-y}{x^2}$이고 $x,y\neq 0$이므로 $\dfrac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}+\dfrac{\dfrac{dy}{dx}x-y}{x^2}=0$이고 정리하면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y^2-x^2)}{x(y^2-x^2)}$이다. 그런데 $y=\pm x$일 때, 주어진 등식이 성립하지 않으므로 $y\neq\pm x$이고 약분하면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$이다.

음함수의 미분법을 통해 새로운 사실을 알 수 있다.

$y = x^n,\ n:$ 유리수

n이 정수일때는 주어진 함수의 도함수가 ny^{n-1}임을 확인했다.

n이 정수를 제외한 유리수일때 주어진 함수의 도함수를 구해보자.

$n = \frac{q}{p}$(p,q는 서로소인 정수)

$y = x^{\frac{q}{p}} \Leftrightarrow y^p = x^q$(음함수의 미분법)

$py^{p-1}\frac{dy}{dx} = qx^{q-1}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}x^{q-1}\left(x^{\frac{q}{p}}\right)^{1-p} = \frac{q}{p}x^{\frac{q}{p}-1} = nx^{n-1}$

따라서 n이 유리수일 때 주어진 함수의 도함수가 ny^{n-1}임을 알 수 있다.

- 역함수의 미분법

$f^{-1}: g: y = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \underbrace{=}_{\substack{g(x)=y \ \ g(x+h)=y+\varDelta \\ f(y)=x \ \ f(y+\varDelta)=x+h \\ \Rightarrow h=f(y+\varDelta)-f(y)}} \lim_{h \to 0}\frac{(y+\varDelta)-y}{f(y+\varDelta)-f(y)}$$

$$= \lim_{\varDelta \to 0}\frac{1}{\frac{f(y+\varDelta)-f(y)}{\varDelta}} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

역함수의 미분계수를 구하는 과정을 보니 식으로는 굉장히 어려워 보인다. 하지만 구하는 방법만 잘 숙지하면 전혀 어렵지 않다.
예를 들어 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 미분계수 $g'(a)$를 구한다고 하자.
① $g(a) = b$를 만족하는 b를 구한다. : $g(a) = b$이면 $f(b) = a$이므로 쉽게 찾을 수 있다.
② $g'(a) = \frac{1}{f'(b)}$이다. : 따라서 $f'(b)$를 구하여 역수를 취해주면 된다.

간단한 예제를 통해 연습해보자.

$ex1)\ f(x)=x^3+7x-5,\ f^{-1}:g$일 때 $g'(3)$을 구하시오.

해설) $g(3)=b$이면 $f(b)=3$이므로 $b^3+7b-5=3$이다. 정리하면 $(b-1)(b^2+b+8)=0$이므로 $b=1$이다. ($b^2+b+8\neq 0$인 이유는 f는 정의역이 실수이고 주어진 이차식은 실근을 갖지 않기 때문이다.) 따라서 $f'(1)=3+7=10$이고 $g'(3)=\dfrac{1}{f'(1)}$이므로 답은 $\dfrac{1}{10}$이다.

- 매개변수로 이루어진 함수의 미분법

$x=f(t),\ y=g(t)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

매개변수란 x와 y의 직접적인 관계식이 주어져있지 않았을 때, x와 y사이를 연결해주는 다리(bridge)와 같은 역할을 하는 변수이다. 예를 들어 $x=t,\ y=t^2$이라 하자. 식을 이용해 x와 y의 관계식을 구하면 $y=x^2$이다. 즉, t라는 매개변수가 x와 y를 중간에서 연결해주고 있는 모양새이다.

본론으로 돌아가서 매개변수 t로 이루어진 함수의 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하자면 식을 $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$로 변형한다. 그리고 $\dfrac{dy}{dt}$와 $\dfrac{dx}{dt}$를 각각 구하여 대입하면 도함수를 구할 수 있다. 그렇다면 매개변수로 이루어진 함수의 이계도함수는 어떻게 구해야할까? 이계도함수는 도함수의 도함수이다. 즉 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$를 x에 대해 미분하면 되므로 $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$이다. 따라서

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$ 와 같이 식을 변형해 이계도함수를 구하면 된다.

예제를 풀어보자.

$ex)\ x=t^3+3t,\ y=\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{1}{2}t^2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$을 각각 구하시오.

해설) $\frac{dx}{dt}=3t^2+3,\ \frac{dy}{dt}=t^3+t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^3+t}{3(t^2+1)}=\frac{1}{3}t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{3}}{3(t^2+1)}=\frac{1}{9(t^2+1)}$$

- 고계도함수

고계도함수는 주어진 함수를 세 번 이상 미분하여 얻어진 도함수를 말한다.
도함수는 $f'(x)$, 이계도함수는 $f''(x)$로 ′(prime)이라는 기호를 이용하지만 세 번 이상 미분하여 얻어진 고계도함수는 $f^{(n)}(x)$(f를 n번 미분한 고계도함수)의 꼴로 표현한다.

- 삼각함수의 미분법

◦ $(\sin x)'=\cos x$ ◦ $(\mathrm{cosec}x)'=-(\mathrm{cosec}x)(\cot x)$
◦ $(\cos x)'=-\sin x$ ◦ $(\sec x)'=(\sec x)(\tan x)$
◦ $(\tan x)'=\sec^2 x$ ◦ $(\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2 x$

삼각함수의 미분법에서는 총 6개의 공식이 있다. 물론 다 외우고 있어야 하지만 귀찮다고 생각하는 학생은 $\sin x, \cos x, \tan x$ 세 개의 도함수만 외우고 있을 것이다. 나머지 세 개의 함수는 앞의 함수들의 역수이기 때문에 몫의 미분법을 통해 금방 구해낼 수 있기 때문이다.
하지만 나중에 적분을 공부할 때 문제가 생길 수 있으니 다 외워두도록 하자.
간단하게 $(\sin x)'=\cos x$를 증명해보자.

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=\cos x$$

$\cos x, \tan x$도 도함수의 정의를 이용하면 쉽게 증명할 수 있다.

- 지수, 로그함수의 미분법

◦ $(a^x)'=(\ln a)a^x$ ◦ $(e^x)'=e^x$
◦ $(\log_a x)'=\frac{1}{(\ln a)x}$ ◦ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

마찬가지로 증명은 도함수의 정의를 이용한다.

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = (\ln a)a^x$$

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{(\ln a)x}$$

$(e^x)' = e^x$이다. 즉 도함수가 자기 자신인 함수이다.

주어진 명제를 풀어보자.

$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots$ 이면 $f(x) = ke^x$이다. (단, k는 실수) ( )

해설) 반례를 들어보겠다.

$$f(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

이면 아무리 미분하여도 항상 같은 함수가 나온다. 반례로 적당해 보인다.
하지만 반례라고 얘기한 함수 $f(x)$는 e^x와 같다. 이유는 고등학교 과정에서는 전혀 중요하지 않으므로 생략한다. 궁금한 학생이 있다면 미분 심화편에서 '테일러전개'를 참고하면 된다.
결과적으로 주어진 명제는 옳은 명제이다. 증명은 적분을 이용해 할 수 있으나 우리는 아직 적분을 배우지 않았기 때문에 생략한다. 따라서 아무리 미분하여도 자기 자신과 일치하는 함수는 ke^x이다.

미분가능성

- $x = a$에서 함수f가 미분가능 $\Leftrightarrow f'(a)$가 존재한다.

$x = a$에서 미분가능하다는 말은 어떤 의미일까.
위처럼 '$x = a$에서 함수 f가 미분가능하다.'라는 말은 '$x = a$에서 미분계수가 존재한다.'라는 말과 일치한다. 서로 필요충분조건이다. 하지만 학생들은 이렇게 생각하기 쉽다.

"미분계수가 그래프에서 그 점의 접선의 기울기와 같았으니 접선이 존재하면 미분가능하다!"

하지만 잘못된 생각이다. 반례를 들어보자. 중심이 원점이고 반지름이 1인 반원 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$이 있다. 이 때, 점 $(1, 0)$에서의 접선은 존재하고 y축과 평행하다.
직접 $f'(1)$을 구해보자.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(1+h)^2}-\sqrt{1-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{-2h-h^2}{h^2}}=\lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{-2-h}{h}}$$

$=\lim_{h\to 0}\sqrt{-1-\frac{2}{h}}$: 존재하지 않는다.

$f'(1)$이 존재하지 않으므로 주어진 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.
즉 접선이 존재하더라도 미분 불가능한 경우가 존재한다.
따라서 접선이 존재하면 그 점에서 미분가능하다는 생각은 옳지 않다.

'미분가능하다는 것은 미분계수가 존재한다는 것과 일치한다.'

이 문장을 머릿속에 '선명히' 새겨놓자.

다음 두 개의 명제를 풀어보자.

① $x=a$에서 f가 미분가능 $\Rightarrow$ $x=a$에서 f는 연속 ( )

② $x=a$에서 f는 연속 $\Rightarrow$ $x=a$에서 f는 미분가능 ( )

해설)
① : 대부분의 학생들이 주어진 명제는 옳다고 알고 있다. 물론 주어진 명제는 옳다.
하지만 왜 옳은지 설명하는 학생은 많지 않다. 앞에서 $x=a$에서 f가 미분가능하다는 것은 $f'(a)$가 존재한다는 것과 일치한다고 배웠다.

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\alpha$ (α는 상수)

이고, 극한의 성질에 따라 분모의 극한값이 0이면 분자의 극한값도 0이어야한다.
즉, $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$이다. '$x=a$에서 f는 연속이다.'의 정의와 일치한다.
따라서 $x=a$에서 f가 미분가능하면 $x=a$에서 f는 연속이다.

②: ①의 식을 그대로 이용해보자. $x=a$에서 f가 연속이라면 $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$이다.
$x=a$에서 f가 미분가능하려면 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재해야 한다. 하지만 분모와 분자의 극한값이 둘 다 0이라고 해서 항상 극한값을 갖는 것은 아니다. 따라서 ②는 옳지 않다.

다음 예제를 풀어보자.

$ex)$ $f(x)$가 전구간에서 연속함수이고 $f(0) \neq 0$이다.

주어진 보기에서 $x=0$에서 미분가능한 것만 있는대로 고르시오.

ㄱ. $xf(x)$ ㄴ. $x+f(x)$ ㄷ. $\dfrac{x}{f(x)}$

해설) ㄱ, ㄴ, ㄷ에 주어져있는 함수를 각각 미분공식을 이용해 미분한 뒤 0을 대입해 문제를 푸는 것은 옳지 않다. 주어진 함수를 미분해 0을 대입한다는 것은 $x=0$에서 그 함수가 미분가능하다는 사실을 알고 있어야하기 때문이다. 하지만 그런 조건은 어디에도 없다.
미분계수의 정의를 이용하여 풀어보자.

ㄱ. $g(x)=xf(x)$

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hf(h)}{h}=\lim_{h\to 0}f(h)=f(0)$$

함수 f는 전구간에서 연속인 함수이므로 $\lim_{h\to 0}f(h)=f(0)$이고 주어진 함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. 따라서 ㄱ은 옳다.

ㄴ. $h(x)=x+f(x)$

$$h'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h(h)-h(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)$$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$은 $f'(0)$와 같다. 하지만 f가 $x=0$에서 미분가능하다는 조건은 없으므로 $h'(0)$이 존재한다고 할 수 없다. 따라서 ㄴ은 옳지 않다.

ㄷ. $i(x)=\dfrac{x}{f(x)}$

$$i'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{i(h)-i(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{f(h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(h)}=\frac{1}{f(0)}$$

f는 전구간에서 연속이고 $f(0)\neq 0$이므로 $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{f(h)}=\dfrac{1}{f(0)}$이고 $i'(0)$은 존재한다. 따라서 ㄷ은 옳다.

다음 두 명제를 풀어보자.

① $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능 $\Rightarrow \lim_{x\to a}g'(x)$이 존재 ( )

② $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능 $\Rightarrow g'(x)$는 $x=a$에서 연속 ( )

해설) 주어진 두 명제는 $g'(a)$가 존재할 때, '$x=a$에서 $g'(x)$의 극한값이 존재하느냐?' 그리고 '$g'(x)$는 $x=a$에서 연속인가?'이다. 결과부터 말하자면 두 명제는 모두 옳지 않다. 고개를 갸우뚱하는 학생들이 많을 것이다. 아래의 예를 보자.

$cf.\ f_n(x)=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \end{cases}$ (단, $n=0,1,2$)

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$x=0$에서의 f_n의 연속성			
$x=0$에서의 f_n의 미분가능성			
$x=0$에서의 f'_n의 연속성			

n의 값에 따라 세 가지 내용을 각각 조사하여 옳으면 O, 틀리면 X를 표시하시오.

$i)\ n=0$

먼저 $x=0$에서 f_0의 연속성을 알아보자. $f_0(0)=0$이다. 하지만 $\lim_{x\to 0} f_0(x)=\lim_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$은 존재하지 않으므로 f_0는 $x=0$에서 불연속이다. 따라서 $x=0$에서 f_0의 미분가능성이나 f'_0의 연속성은 굳이 조사하지 않아도 X이다.

$ii)\ n=1$

$x=0$에서 f_1의 연속성을 알아보자. $f_1(0)=0$이다.
$\lim_{x\to 0} f_1(x)=\lim_{x\to 0}\left(x sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=0$이므로($\sin e$함수는 특정한 범위를 가지는 함수이다.) $x=0$에서 f_1은 연속이다. 계속해서 $x=0$에서 f_1의 미분가능성을 알아보자.

$f_1{}'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f_1(h)-f_1(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h sin\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$이므로 $f_1{}'(0)$은 존재하지 않는다. 따라서 f_1은 $x=0$에서 미분가능하지 않고 f'_1도 $x=0$에서 불연속이다.

$iii)\ n=2$

$x=0$에서 f_2의 연속성을 알아보자. $f_2(0)=0$이다. $\lim_{x\to 0} f_2(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=0$이므로

$x=0$에서 f_2는 연속이다. 계속해서 $x=0$에서 f_2의 미분가능성을 알아보자.

$f'_2(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f_2(h)-f_2(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(hsin\left(\dfrac{1}{h}\right)\right)=0$이므로 $f_2{}'(0)$은 존재한다.

마지막으로 $x=0$에서 f'_2의 연속성을 알아보자.

$f'_2(x)=2xsin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x^2}x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=2xsin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$이다.

(단, $x\neq 0$일 때)

$\lim_{x\to 0}f'_2(x)=\lim_{x\to 0}\left\{2xsin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}$의 값은 존재하지 않으므로 $x=0$에서 f'_2는 불연속이다.

$y=f_2(x)$가 두 명제 ①, ②의 반례가 된다.

따라서 ①, ②는 모두 옳지 않다.

알아두면 좋은 Tip

$\boxed{1}$

(1) $f(x)=f(-x)$

양변을 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$이다.

따라서 우함수를 미분하면 기함수이다.

(2) $f(x)=-f(-x)$

양변을 미분하면 $f'(x)=f'(-x)$이다.

따라서 기함수를 미분하면 우함수이다.

$\boxed{2}$

$f(x)$는 다항함수

$f(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나눈 나머지가 $ax+b=R(x)$

$\Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+(ax+b)$

$x=\alpha : f(\alpha)=a\alpha+b$ $-$①

양변미분 : $f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$

$x=\alpha : f'(\alpha)=a$ $-$②

①,② : $b=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$

$\therefore R(x)=f'(\alpha)x+f(\alpha)-\alpha f(\alpha)$

if. $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.

$\therefore f(\alpha)=f'(\alpha)=0$

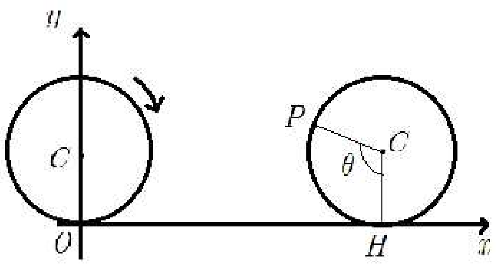
$f(x)$가 다항함수일 때 $(x-\alpha)^2$을 인수로 가지면 $f(\alpha)$와 $f'(\alpha)$가 모두 0이라는 사실을 알 수 있다. 반대로 $f(\alpha)$와 $f'(\alpha)$가 모두 0이라면 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 가진다.

이렇게 가끔씩 언급되는 팁들은 문제를 풀 때 조금이라도 시간을 줄일 수 있으니 알고 있도록 하자.

$cf.$ 특별한 곡선

지금부터 세 가지 곡선 cycloid, asteroid, 신개선에 대하여 살펴볼 것이다.
실제로 cycloid와 asteroid는 출제가 되었던 곡선이다. 그렇다고 해서 각각의 곡선이 무엇인지 단순히 외울것이 아니라 어떻게 그 곡선을 찾아나가는지를 공부하도록 하자.
여러분은 아직 벡터를 배우지 않았지만 잠시 벡터의 간단한 성질을 이용해 세 개의 곡선의 자취를 구하겠다. 벡터를 모르는 학생은 일단 이 부분은 남겨두고 벡터가 무엇인지 알고 난 뒤 다시 보기를 바란다.

① cycloid
중심이 $C(0,1)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 생각하자. 그리고 원 위의 점 $P(0,0)$이 있다. 이 때, x축을 평평한 바닥이라고 생각하고 원을 바퀴라고 생각한다. 바퀴를 시계방향으로 굴려 앞으로 나아가면 원 위의 점 P도 앞으로 나아가며 동시에 회전하는 운동을 한다. 이 때, 점 P의 자취를 구해보자. 우리는 이러한 곡선을 'cycloid'라 부른다.



주어진 그림에서 원의 중심 C에서 바닥(x축)에 내린 수선의 발을 H라하고 $\angle PCH=\theta$라 두자.
우리가 구해야할 것은 $\overrightarrow{OP}$이다. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CP}$이므로 각각의 벡터를 구한 뒤 더해주면 된다. 먼저 $\overrightarrow{OH}$는 점 H의 좌표와 일치한다. 그런데 호 $\widehat{PH}$의 길이와 선분 $\overline{OH}$의 길이가 일치함을 알 수 있다. 쉽게 설명하자면 굴려나간 바퀴를 다시 반대방향으로 굴려 제자리로 돌려놓는 모습을 생각하면 이해가 될 것이다. 따라서 $\overline{OH}=\theta$이고 $\overrightarrow{OH}=(\theta,0)$이다.
$\overrightarrow{HC}=(0,1)$이므로 $\overrightarrow{CP}$를 구해보자. 벡터는 평행이동이 자유롭다. 따라서 $\overrightarrow{CP}$의 C를

원점으로 평행이동하면 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\frac{\pi}{2}+\theta$인 벡터가 된다.

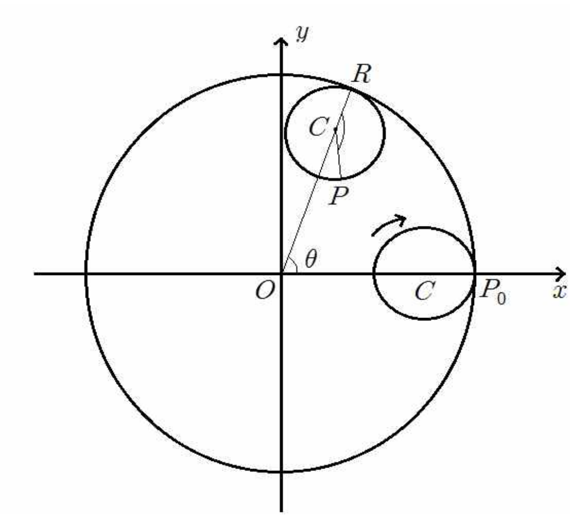
$\overrightarrow{CP}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)=(-\sin\theta, \cos\theta)$이다. 따라서

$\overrightarrow{OP}=(\theta,0)+(0,1)+(-\sin\theta,\cos\theta)=(\theta-\sin\theta, 1+\cos\theta)$이다.

$\therefore x=\theta-\sin\theta,\ y=1+\cos\theta$

② asteroid

중심이 $O(0,0)$이고 반지름이 1인 원 C_1과 중심이 $C\left(\frac{3}{4},0\right)$이고 반지름이 $\frac{1}{4}$인 원 C_2가 있다. 두 원은 서로 접한다. 이 때 원 C_2위의 한 점 $P(1,0)$이 있다.
이때 C_2가 C_1에 접한 상태로 굴러갈 때, C_2위의 점 P가 그리는 자취를 구해보자. 우리는 이러한 곡선을 'asteroid'라 부른다.



주어진 그림에서 원 C_1과 C_2의 접점을 R이라하자. 그리고 선분 $\overline{OR}$이 x축의 양의방향과 이루는 각을 θ라 한다. cycloid와 마찬가지로 우리가 구해야 할 것은 $\overrightarrow{OP}$이다.
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$이므로 각각의 벡터를 구하여 더해주면 된다. $\overrightarrow{OC}=\left(\frac{3}{4}cos\theta, \frac{3}{4}sin\theta\right)$이다.
$\overrightarrow{CP}$를 구하는 것은 조금 어려우니 집중해서 잘 보도록 하자. 호 $\widehat{PR}$의 길이는 호 $\widehat{P_0R}$의 길이와 같다. 작은 원을 다시 반대로 회전시켜 제자리로 돌려놓는 모습을 생각하면 이해하기 쉽다. 따라서 $\angle PCR=4\theta$이다. 벡터는 평행이동이 자유롭다. 따라서 $\overrightarrow{CP}$의 C를 원점으로 평행이동하면 x축의 양의방향과 이루는 각이 $2\pi-3\theta$인 벡터가 된다.

$\overrightarrow{CP}=\left(\frac{1}{4}cos(2\pi-3\theta),\ \frac{1}{4}sin(2\pi-3\theta)\right)=\left(\frac{1}{4}cos3\theta,\ -\frac{1}{4}sin3\theta\right)$이다. 따라서

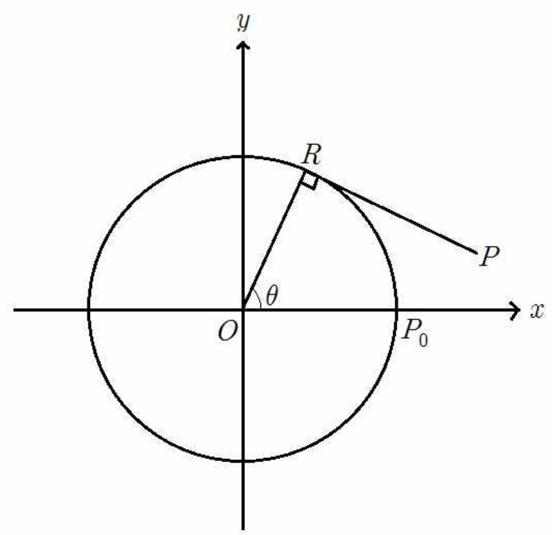
$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{3}{4}cos\theta+\frac{1}{4}cos3\theta,\ \frac{3}{4}sin\theta-\frac{1}{4}sin3\theta\right)=\left(\frac{1}{4}cos^3\theta,\ \frac{1}{4}sin^3\theta\right)$이다.

$\therefore x=\frac{1}{4}cos^3\theta,\ y=\frac{1}{4}sin^3\theta$

따라서 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{-\frac{2}{3}}$이다.

③ 신개선

중심이 원점이고 반지름이 1인 원이 있다. 우리는 이것을 마치 두루마리 휴지를 위에서 내려다 본 것이라 상상하자. 이때 점 $P(1,0)$은 휴지의 끝이고 휴지를 '팽팽한 상태'를 유지하며 반시계방향으로 풀어나간다. (단, 휴지의 두께는 무시하고 휴지를 아무리 풀어나가도 휴지의 부피는 줄어들지 않는다.) 이때 휴지의 끝 점 P가 그리는 자취를 구해보자.



휴지를 풀어나갈 때 '팽팽한 상태'를 유지한다면 선분 $\overline{OR}$과 선분 $\overline{PR}$은 항상 수직이다. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}$이므로 각각의 벡터를 구해 더해주면 된다. $\angle ROP_0=\theta$라 두면 $\overrightarrow{OR}=(\cos\theta,\sin\theta)$이다. 그리고 호 $\widehat{RP_0}$의 길이와 선분 $\overline{RP}$의 길이는 같다. 휴지를 다시 반대로 감아서 제자리로 간다고 생각하면 이해하기 쉽다. 계속해서 $\overrightarrow{RP}$를 구해보자. $\overrightarrow{RP}$의 R을 원점으로 평행이동하면 x축의 양의방향과 이루는 각이 $\theta+\frac{3}{2}\pi$인 벡터가 된다.

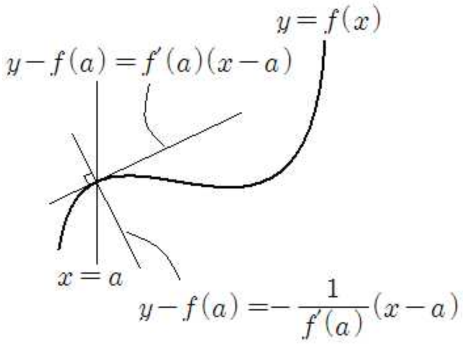
$\overrightarrow{RP}=\left(\theta\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right),\theta\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)\right)=(\theta\sin\theta,\ -\theta\cos\theta)$이다. 따라서

$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta,\sin\theta)+(\theta\sin\theta,\ -\theta\cos\theta)=(\cos\theta+\theta\sin\theta,\sin\theta-\theta\cos\theta)$이다.

$\therefore\ x = \cos\theta + \theta\sin\theta,\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta$

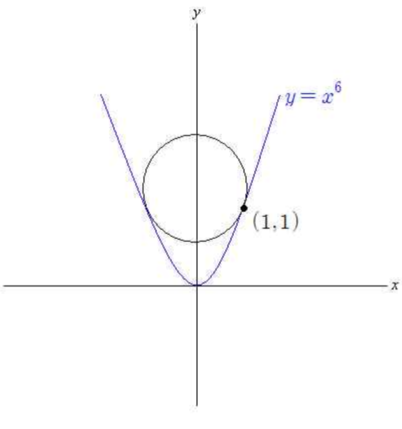
위의 세 개의 곡선이 출제된다는 것은 아니지만 자취를 구하는 과정을 공부하여 비슷한 내용의 문제가 나왔을 때 스스로 해결할 수 있도록 하자.

곡선의 접선과 미분



우리는 미분을 통해 그래프의 접선이나 접선의 기울기를 쉽게 구할 수 있게 되었다.
간단한 예제를 통해 접선을 이용한 문제를 풀어보자.

$ex1)$



그림과 같이 $y = x^6$에 접하고 중심이 y축위에 있는 원의 넓이를 구하시오.

해설) 두 도형이 접한다는 것은 접점을 동시에 지나고 그 점에서의 접선을 동시에 갖는다는 말이다. 따라서 접선 $y = 6x - 5$에서 원의 중심까지의 거리는 반지름과 같다.
원의 중심을 $(0, a)$, 반지름을 r이라 하자. $x^2 + (y-a)^2 = r^2$은 점 $(1, 1)$을 지나고 접선 $y = 6x - 5$와의 거리가 r과 같다.

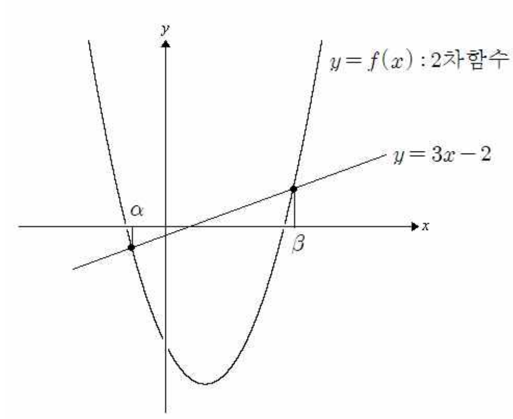
$1+(1-a)^2=r^2 \qquad -①$

$\dfrac{|-a-5|}{\sqrt{36+1}}=r \qquad -②$

이므로 주어진 조건 ①, ②를 이용해 계산하면 $a=\dfrac{7}{6},\ r=\dfrac{\sqrt{37}}{6}$이므로 원의 넓이는

$\dfrac{37}{36}\pi$이다.

$ex2)$



$f'(\alpha)=-2$이다. 점 $(\beta, f(\beta))$에서 접선의 기울기를 구하시오.

해설) 주어진 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$라 두자. 방정식 $f(x)=3x-2$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=\dfrac{3-b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{2+c}{a}$이다.

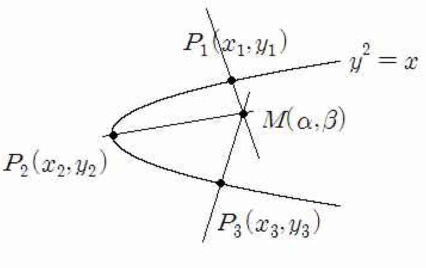
$f'(\alpha)=2a\alpha+b$이고 $f'(\beta)=2a\beta+b$이므로 두 식을 더하면

$f'(\alpha)+f'(\beta)=2a(\alpha+\beta)+2b=2a\dfrac{3-b}{a}+2b=6$이다. $f'(\alpha)=-2$이므로 $f'(\beta)=8$이다.

따라서 답은 8이다.

$cf.$ 대표점

대표점이 무엇인가? 말 그대로 두 개 이상의 점을 대표하는 한 점을 말한다.
중요한 점을 구구절절 설명하는 것 보다 예제를 통해 중요성을 알아보자.



$y^2 = x$위에 세개의 점 P_1, P_2, P_3가 있다.

세개의 점에서 그은 각각의 법선이 한점 M에서

만날 때, y_1, y_2, y_3의 관계식을 구하시오.

해설) 세 점 P_1, P_2, P_3에서의 법선을 각각 구하여 연립하려고 하면 절대 문제의 답을 낼 수 없다. 세 점의 대표점 $P_0(x_0, y_0)$를 생각하자. 점 P_0의 법선의 방정식은
$y = -2y_0(x - x_0) + y_0$이다. 점 P_0는 $y^2 = x$위의 점이고 주어진 법선은 점 (α, β)를 지난다.

$y_0^2 = x_0$ - ①
$\beta = -2y_0(\alpha - x_0) + y_0$ - ②

①을 ②에 대입해 정리하면 $2y_0^3 + (1 - 2\alpha)y_0 - \beta = 0$이 된다. 따라서 주어진 식은 y_0에 대한 삼차방정식이다. 그런데 y_0는 점 P_0의 y좌표이고 점 P_0는 세 점 P_1, P_2, P_3의 대표점이다.
따라서 y_0는 y_1, y_2, y_3의 대표값이다. 즉, y_0에 대한 삼차방정식의 세 근이 y_1, y_2, y_3이다.
근과 계수의 관계에 따라서 $y_1 + y_2 + y_3 = 0$이다.
따라서 포물선 $y^2 = x$위에 y좌표의 합이 0이 되도록 세 점을 잡으면 세 점에서의 법선이 한 점에서 만난다.

이처럼 대표점을 이용해 주어진 문제를 풀어낼 수 있었다. 하지만 딱히 '점을 대표한다.'를 강조하고 싶은 것은 아니다. 점이든 값이든 '대표한다.'가 핵심이다.

대표값에 관한 기출문제를 하나 살펴보자.

(07학년도 06월 평가원)
두 다항함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

(가) $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$
(나) $f_i{}'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_i(x) + 2kx}{f_i(x) + kx}$ $(i = 1, 2)$
(다) $y = f_1(x)$와 $y = f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교한다.

해설) 두 다항함수 $f_1(x)$와 $f_2(x)$의 대표함수 $f_i(x)$가 주어져있다.
조건 (나)의 식을 조금 변형하여 정리하면

$f_i{}'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_i(x) + 2kx}{f_i(x) + kx} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f_i(x) - f_i(0)}{x} + 2k}{\frac{f_i(x) - f_i(0)}{x} + k} = \frac{f_i{}'(0) + 2k}{f_i{}'(0) + k}$ 이다. 다시 한 번 식을 정리하면 $\{f_i{}'(0)\}^2 + (k-1)f_i{}'(0) - 2k = 0$이고 주어진 식은 $f_i{}'(0)$에 대한 이차식이다. $f_i(x)$는 $f_1(x)$와 $f_2(x)$의 대표함수이었으므로 $f_i{}'(0)$은 $f_1{}'(0)$과 $f_2{}'(0)$의 대표값이다. 따라서 $f_i{}'(0)$에 대한 이차식의 두 근은 $f_1{}'(0)$과 $f_2{}'(0)$이다. 근과 계수의 관계에 의해 $f_1{}'(0)f_2{}'(0) = -2k$인데 $y = f_1(x)$와 $y = f_2(x)$는 원점에서 서로 직교한다고 했으므로 $-2k = -1$이고 $k = \frac{1}{2}$이다.

- 롤의 정리

"폐구간 $[a,b]$에서 f가 연속이고 개구간 (a,b)에서 f가 미분가능하며 $f(a) = f(b)$일 때, $f'(c) = 0$인 c가 (a,b)에서 적어도하나이상존재한다."

증명과정을 살펴보기 전에 한마디 하자면, 모든 정리는 '전제조건'이 가장 중요하다.
전제조건을 만족하지 않으면 그것은 쓸모없는 잡답일 뿐이다. 반드시 전제조건을 머릿속에 새겨두자. 지금부터 롤의 정리의 증명해보자.

pf) ① $f'(x) = 0$의 x의 구간이 존재할 때 : 구간의 모든 x가 c로 적당.

② $f'(x) = 0$의 x의 구간이 없을때 : $f(x)$의 최댓값 $M\,(M > f(a))$ or $f(x)$의 최솟값 $m(m < f(a))$이 반드시 존재

if. $M = f(c)$

충분히 작은양수 h에 대해 $\overbrace{f(c-h) < f(c)}^{\boxed{1}} \underbrace{> f(c+h)}_{\boxed{2}}$이 성립

$\boxed{1}$: $f(c-h) - f(c) < 0$

$$\frac{f(c-h) - f(c)}{-h} > 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \ge 0 \Rightarrow f'(c) \ge 0$$

$\boxed{2}$: $f(c+h)-f(c)<0$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(h)}{h}\leq 0 \Rightarrow f'(c)\leq 0$$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$에서 $f'(c)=0$임을 알 수 있다.

롤의 정리를 좀 더 확장해보자.

- 미분의 평균값정리

"$[a,b]$에서 $f(x)$가 연속함수이고 (a,b)에서 $f(x)$가 미분가능하면

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 (a,b)에서 적어도 하나 이상 존재한다."

롤의 정리와 다르게 $f(a)=f(b)$라는 조건이 사라졌다. 반대로 미분의 평균값정리에 $f(a)=f(b)$라는 조건을 추가하면 정확히 롤의 정리와 일치함을 알 수 있다.
마찬가지로 미분의 평균값정리를 증명해보자.

$pf)$ $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$[a,b]$에서 $g(x)$는 연속함수이고 (a,b)에서 $g(x)$는 미분가능하며 $g(a)=g(b)$이다.

롤의 정리에 따라 $g'(c)=0$인 c가 (a,b)에서 적어도 하나 이상 존재한다.

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$\therefore f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 인 c가 (a,b)에서 적어도 하나 존재한다.

롤의 정리는 미분의 평균값정리의 특수한 경우이므로 따로 예제를 살펴보지 않고 미분의 평균값정리에 대한 예제를 살펴보도록 하자.

$ex1)$ $P=\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

해설) 함수 $f(x) = \sin x$라 하자. 이 때, 주어진 식은 폐구간 $[\sin x, x]$에서(x가 양수이면 $x > \sin x$이다.) f의 평균변화율의 극한값을 구하는 것이다. 이때 미분의 평균값 정리를 이용하면 $\dfrac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c) = \cos c$인 c가 $\sin x < c < x$에서 적어도 하나 이상 존재하고 x가 0으로 한없이 가까워지면 c도 0으로 한없이 가까워진다. 따라서
$P = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = \lim\limits_{c \to +0} \cos c = 0$이다. 답은 0이다.

ex2) $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$이 항상 성립함을 보여라.

해설) $f(x) = \ln x$라 하자. $\ln(x+1) - \ln x = \dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x}$이므로 주어진 식은 폐구간 $[x, x+1]$에서 f의 평균변화율을 말한다. 이때 미분의 평균값 정리를 이용하면 $\dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} = f'(c)$인 c가 $x < c < x+1$에서 적어도 하나 이상 존재한다. 따라서 주어진 부등식은 $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$이다. 그런데 부등식을 자세히 보니 c가 존재할 수 있는 범위와 일치한다! 따라서 주어진 부등식이 항상 성립함을 알 수 있다.

ex3) $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 1$일 때, $P = \lim\limits_{x \to \infty}\{f(x+1) - f(x)\}$를 구하여라.

해설) $f(x+1) - f(x) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$이므로 폐구간 $[x, x+1]$에서 f의 평균변화율과 같다. 이때 미분의 평균값 정리를 이용하면 $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c)$인 c가 $x < c < x+1$에서 존재한다. 따라서 $P = \lim\limits_{x \to \infty}\{f(x+1) - f(x)\} = \lim\limits_{c \to \infty} f'(c) = 1$이다. 답은 1이다.

$cf.$ 평균값정리를 제대로 사용하기

지금부터 평균값정리를 이용해 놀라운 사실 하나를 밝혀내겠다.

$f(x)=\sin x$라 두고 폐구간 $[x, 2x]$에서 평균값정리를 이용하자.
$\frac{\sin 2x-\sin x}{2x-x}=f'(c)=\cos c$인 c가 $x<c<2x$에서 적어도 하나 이상 존재한다. 주어진 식을 좀 더 정리하면 $\frac{\sin 2x-\sin x}{2x-x}=\frac{2\sin x cos x-\sin x}{x}=\frac{\sin x(2\cos x-1)}{x}=\cos c$이다.
이때 x가 한없이 커진다면 c도 한없이 커진다. 따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x(2\cos x-1)}{x}=\lim_{c\to\infty}\cos c$이다.
그런데 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x(2\cos x-1)}{x}=0$이므로 $\lim_{c\to\infty}\cos c=0$이다.

기가 막힌 결과가 나왔다. 분명 코사인함수는 특정한 범위를 가지는 주기함수이다. 그런데 c가 한없이 커질 때 $\cos c$의 극한값이 0이다? 분명히 잘못되었다. 처음부터 다시 읽으면서 잘못된 부분을 찾아보자. 충분히 생각을 했다면 아래로 가자.

평균값정리를 다시 한 번 읽어보자.

“$[a,b]$에서 $f(x)$가 연속함수이고 (a,b)에서 $f(x)$가 미분가능하면
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 (a,b)에서 적어도 하나 이상 존재한다.”

하나씩 꼼꼼히 짚어보면 잘못된 부분을 발견할 것이다. 위의 과정은 평균값정리를 이용한 것이 아니다. 더 정확히 말하면 평균값정리를 이용하다가 말았다.
평균값정리를 이용한다면 ‘$\lim_{c\to\infty}\cos c=0$인 c가 $x<c<2x$에서 적어도 하나 이상 존재한다.’라고 해야 한다. 주어진 문장은 분명 옳은 문장이다. x가 한없이 커지면 $2x$와 x사이에 한없이 많은 값들이 있을 것이고 $\cos c$를 0이 되게 하는 c는 충분히 존재하기 때문이다. 이처럼 어떤 정리든 어설프게 알고 있다가는 쉽게 실수하기 마련이다.

$cf.$ 로피탈의 정리

로피탈의 정리는 고등학교 과정이 아니지만 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한에서 쉽게 극한값을 구할 수 있기 때문에 많은 학생들이 알고 있고 자주 사용하기 때문에 잠시 언급하고 지나가자. 사실 고등학교 수학에서 로피탈의 정리를 사용할 필요가 없다. 그래도 편하기 때문에 사용한다면 그 내용을 정확히 알고 있어야한다. 먼저 로피탈의 정리가 무엇인지 살펴보자.

“$x=a$근방에서 f,g가 모두 미분가능하고

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$가 $\frac{0}{0}\left(\text{or } \frac{\infty}{\infty}\right)$의 꼴이고 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재할 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$가 성립한다.”

먼저 전제조건을 살펴보면 ‘$x=a$에서 미분가능하다.’가 아니라 ‘$x=a$‘근방’에서 미분가능하다.’이다. 따라서 $x=a$에서 미분가능하다는 조건만 주어졌을 때는 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$이지 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$는 아니다. 우리는 앞에서 $\lim_{x\to a}f'(x)$와 $f'(a)$의 값이 다른 반례를 보았다.($f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$)

하지만 여러분들이 지금껏 사용했던 로피탈 정리는 주어진 함수가 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$이면 분모, 분자에 있는 함수들의 도함수를 각각 구한 뒤 x에 a를 대입하여 답을 구했을 것이다. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$와 같이 문제를 푸는 것은 로피탈의 정리를 정확히 알고 문제를 푸는 것이 아니다. 물론 고등학교 수학문제에서 등장하는 함수는 대부분 $x=a$근방에서 미분가능하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$가 성립하지만 그래도 정확히 알고 있는 것이 좋다.

함수의 그래프

지금부터 함수의 그래프의 모양과 성질들에 관하여 살펴보자. 증가, 감소에 대해서 공부하기 전에 먼저 주어진 5개의 명제에 답을 해보자.

① $x=a$에서 f가 증가상태 $\Rightarrow f'(a)>0$ ( )

② $x=a$에서 f가 증가상태 $\Rightarrow f'(a)\ge 0$ ( )

③ $f'(a)\ge 0 \Rightarrow x=a$에서 f가 증가상태 ( )

④ $f'(a)>0 \Rightarrow x=a$에서 f가 증가상태 ( )

⑤ 연속함수 $f(x)$. 구간 (a,b)에서 $f'(x)\ge 0 \Rightarrow [a,b]$에서 $f(x)$는 증가함수 ( )

아마도 많은 학생들이 첫 번째 명제부터 O를 했을 것이다. 하지만 명제 ①은 틀린 명제이다. 지금부터 함수의 증가와 감소의 정의를 살펴보자.

- $x=a$에서 f가 증가한다

$x=a$근방에서 $f(x)$가 연속함수일때 충분히 작은 양수 h에 대해 $f(a-h)<f(a)<f(a+h)$이 성립한다

- $x=a$에서 f가 감소한다

$x=a$근방에서 $f(x)$가 연속함수일때 충분히 작은 양수 h에 대해 $f(a-h)>f(a)>f(a+h)$이 성립한다

정의대로 f가 $x=a$근방에서 연속이면 $x=a$에서 증가, 감소를 말할 수 있다. 부등식은 조금만 생각해보면 왜 각각 증가이고 감소인지 알 수 있으니 설명은 생략한다.
지금껏 여러분들이 알고 있던 증가와 감소의 개념과는 다른 정의일 것이다. 하지만 위에 나와있는 정의가 Original 증가, 감소의 정의이다!
그렇다면 지금껏 여러분들은 $f'(a)$가 양수이면 증가, 음수이면 감소라고 생각했는데 그것은 잘못된것일까? 물론 옳은 생각이다. 이유는 $f'(a)$가 양수이거나 음수일 때 각각 증가, 감소정의에 나와 있는 부등식을 만족하기 때문이다. 예를 들어 $f'(a)$가 양수이면 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$이다. 좌극한과 우극한을 나누어 살펴보자.

좌극한 : h가 음수이므로 $h=-s$라 두자. $\lim_{s\to +0}\frac{f(a-s)-f(a)}{-s}>0$이고 분모가 음수이므로 분자도 음수가 되어야한다. 따라서 충분히 작은 양수 s에 대해 $f(a-s)-f(a)<0$이 성립한다.

우극한 : $\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$이고 분모가 양수이므로 분자도 양수가 되어야한다. 따라서 충분히 작은 양수 h에 대해 $f(a+h)-f(a)>0$이 성립한다.

두 경우를 합치면 증가의 정의와 일치한다.

즉, $x=a$에서 미분가능해야 미분계수 $f'(a)$로 $x=a$에서의 증감을 판단할 수 있다.
주어진 명제 ①이 틀린 이유는 $x=a$에서 미분가능하다는 사실을 알 수 없는데 $f'(a)$을 말하는 것 자체가 오류이기 때문이다. ②도 같은 이유로 틀린 명제이다.
다음 명제 ③은 틀렸다. 틀린 이유가 단순히 '$f'(a)=0$일 수 있기 때문에'라고 한다면 50점짜리 해설이다.
$f'(a)=0$일 때는 $x=a$에서 f가 증가일수도 감소일수도 증가, 감소가 모두 아닐 수도 있다.
세 개의 함수 $f(x)=x^3, g(x)=-x^3, h(x)=x^2$을 살펴보자.
각각 $x=0$에서 증감을 따진다면 f는 증가, g는 감소, h는 증감을 말할 수 없다.
먼저 f를 살펴보자. 분명 $f'(0)=0$이다. 그런데 왜 $x=0$에서 f가 증가일까?
미분계수로 증감을 판단하지 말고 증가의 정의를 이용해보면 증가임을 금방 알 수 있다.
g도 같은 이유로 $x=0$에서 감소한다. 즉 미분계수 $f'(a)$가 0일 때 $x=a$ 좌우에서 모두 증가하고 있다면 $x=a$에서 f는 증가, 모두 감소하고 있다면 $x=a$에서 f는 감소한다.
하지만 마지막 h를 살펴보자. $h'(0)=0$이고 $x<0$일때는 감소, $x>0$일때는 증가한다.

따라서 h는 $x=0$에서 증감을 말할 수 없다. 따라서 명제 ③이 틀린 이유를 이와 같이 설명한다면 100점짜리 해설이 될 것이다.
명제 ④는 옳은 명제이다. 마지막으로 명제 ⑤는 틀린 명제이다. $f'(x)=0$인 x의 구간이 존재할 수 있기 때문이다. 만약 $f'(x)=0$인 x가 유한개이면 옳은 명제가 된다. 이유는 명제 ③의 해설을 참고하면 된다.

계속해서 함수의 극대, 극소에 대하여 알아보자.

- $x=a$에서 f가 극댓값을 가진다

$x=a$근방에서 f가 연속일때 충분히 작은 양수 h에 대해 $f(a-h)<f(a)>f(a+h)$이 성립한다.

- $x=a$에서 f가 극솟값을 가진다

$x=a$근방에서 f가 연속일때 충분히 작은 양수 h에 대해 $f(a-h)<f(a)>f(a+h)$이 성립한다.

증감과 마찬가지로 지금껏 여러분들은 도함수가 0이 되는 x의 값을 찾고 좌우에서 도함수의 부호가 바뀌면 그 위치에서 극값을 갖는다고 했을 것이다. 하지만 극대, 극소의 정의에는 미분계수가 등장하지 않는다. 마찬가지로 $x=a$근방에서 f가 연속이면 극값을 가질 수 있는 '자격'을 갖는다. 그리고 주어진 부등식을 만족하면 '$x=a$에서 f는 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.'라고 말한다. 예를 들어 $y=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 하지만 $x=0$에서 분명히 극솟값을 가진다.
학생들은 이런 정의들이 아무런 쓸모가 없다고 생각할 것이다. 왜냐하면 정의를 사용하지 않아도 지금껏 문제를 잘 풀어왔기 때문이다.
극대, 극소의 정의를 이용한 기출문제를 하나 풀어보자.

(10학년도 06월 평가원)

$x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

ㄱ. 함수 $\lvert f(x)\rvert$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. ㄴ. 함수 $f(\lvert x\rvert)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. ㄷ. 함수 $f(x)-x^2\lvert x\rvert$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

해설) 주어진 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 미분가능하지만 ㄱ, ㄴ, ㄷ에 나와있는 함수들은

미분가능하다고 섣불리 말할 수 없다. 따라서 지금껏 미분계수를 이용해 극대, 극소를 판단했던 학생이라면 문제를 푸는 것이 어려울 것이다. 주어진 함수의 도함수를 구할 수 없으니 난감한 상황이다. 먼저 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가진다고 하는 것은 충분히 작은 양수h에 대해 $f(-h)<f(0)>f(h)$가 성립한다는 것이다.

ㄱ. 충분히 작은 양수h에 대해 $|f(-h)|<|f(0)|>|f(h)|$이 성립하면 된다. 하지만 $x=0$근방에서 f의 부호를 알 수 없다. 만약 음수라면 주어진 부등식은 $f(-h)>f(0)<f(h)$가 되어 $x=0$에서 극솟값을 갖는 경우가 된다. 따라서 ㄱ은 옳지 않다.

ㄴ. 충분히 작은 양수h에 대해 $f(|-h|)<f(|0|)>f(|h|)$이 성립하면 된다. h는 양수이므로 주어진 부등식을 정리하면 $f(h)<f(0)>f(h)$이고 성립한다. 따라서 ㄴ은 옳다.

ㄷ. 충분히 작은 양수h에 대해 $f(-h)-(-h)^2|-h|<f(0)>f(h)-h^2|h|$이 성립하면 된다. 정리하면 $f(-h)-h^3<f(0)>f(h)-h^3$이고, h는 양수이므로 주어진 부등식은 성립한다. 따라서 ㄷ은 옳다.

이 문제를 풀고 나면 증감, 극대, 극소의 정의가 쓸모없다는 생각이 조금은 바뀔 것이다. 그렇다고 해서 모든 문제를 정의를 가지고 풀어야하는 것은 아니다. 미분가능하다면 미분계수와 도함수를 가지고 빠르게 증감과 극대, 극소를 판단할 수 있기 때문이다. 하지만 정의도 매우 중요하니 꼭 알아두도록 하자.

- 함수의 요철(凹凸)

함수의 요철이란 말 그대로 그래프의 ‘오목’, ‘볼록’을 말한다.
구간 $[a,b]$에서 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$에 대하여 호 AB가 현 AB의 위에 있으면 위로 볼록(아래로 오목), 아래에 있으면 아래로 볼록(위로 오목)이라고 한다.
고등학교 수학에서는 대부분 ‘볼록’이라는 말을 사용하기 때문에 ‘오목’이라는 단어는 사용하지 않겠다.
곡선의 볼록의 판정은 주어진 함수 $y=f(x)$가 두 번 미분가능 할 때, $f''(x)$가 양수이면 ‘아래로 볼록’, 음수이면 ‘위로 볼록’이다.
물론 증감과 극값과 마찬가지로 ‘위로 볼록’과 ‘아래로 볼록’도 주어진 함수가 연속함수이면 정의할 수 있다.

- $x=a$에서 f가 위로 볼록하다.

$x=a$근방에서 f가 연속일때 충분히 작은 양수 h에 대해 $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2}<f(a)$이 성립한다

- $x=a$에서 f가 아래로 볼록하다.

$x=a$근방에서 f가 연속일때 충분히 작은 양수 h에 대해 $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2}>f(a)$이 성립한다

부등식을 살펴보면 옳다는 것을 알 수 있다.
두 번 미분가능한 함수 f가 $x=a$에서 위로 볼록하면 $f''(a)<0$이고 이것은 $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2}<f(a)$라는 부등식을 포함해야한다. 물론 따져보면 맞다. 하지만 증명은 구구절절 나열할 만큼 중요한 내용이 아니기 때문에 생략하고 판정법과 정의에 대해서만 알아두자.

- 두 번 미분가능한 함수 f가 충분히 작은 양수 h에 대해 $f''(a-h)f''(a+h)<0$, $f''(a)=0$이면

$(a,f(a))$를 변곡점이라 한다.

두 번 미분가능한 함수 f가 $f''(a)=0$이고 $x=a$ 좌우에서 이계도함수의 부호가 바뀌면
우리는 $(a,f(a))$를 '변곡점'이라고 부른다. 이계도함수의 부호가 바뀌었단 의미는 위로(or 아래로)볼록하던 그래프가 아래로(or 위로)볼록해졌다는 것이고 그 변화의 경계가 되는 점이 변곡점이다.

지금까지 우리는 그래프의 모양을 결정하는 증감, 극값, 요철에 대해서 살펴보았다.
이제는 직접 그래프를 그려보자.

<그래프 그리기>

그래프를 그리기 위해서는 위에서 배웠던 증감, 극값, 요철에 관한 정보를 함수를 통해 수집해야한다. 아래의 순서대로 그래프를 그려보자.

① $y=f(x)$의 정의역을 조사하여 불연속점을 찾는다.

② 도함수 $f'(x)$를 구하여 $f'(x)=0$을 만족하는 x를 찾는다.

③ 이계도함수 $f''(x)$를 구하여 $f''(x)=0$을 만족하는 x를 찾는다.

④ 증감표를 만든다. : f', f''은 각 범위에서의 부호$(+,\ -)$를 적고, f는 그래프의 모양을 적는다.

⑤ 그래프를 그린다. 그래프를 그리다 점근선의 존재가 의심이 되면 점근선을 추적한다.

다음 6개의 예제를 통해 그래프를 직접 그려보자.

$ex1)\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

해설)

① 정의역을 조사한다. : 분모가 0이 되는 실수 x는 존재하지 않으므로 정의역은 실수전체이다.

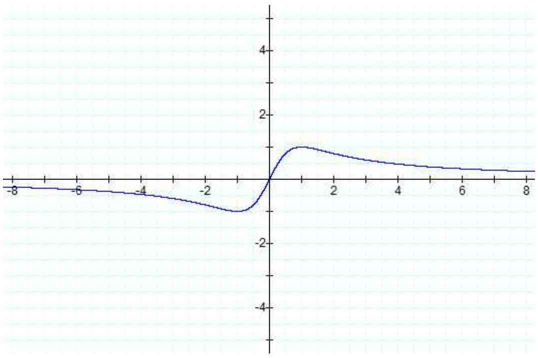
② 도함수를 구한다. : $f'(x)=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$ 이고 $f'(x)=0$을 만족하는 $x=1,-1$이다.

③ 이계도함수를 구한다. : $f''(x)=\dfrac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$ 이고 $f''(x)=0$을 만족하는 $x=0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$ 이다.

④ 증감표를 만든다. :

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
f'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
f''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f	⤵	변곡점	↳	극소	⤴	변곡점	↱	극대	⤵	변곡점	↳

⑤ 그래프를 그린다. :



그런데 x가 한없이 커질 때, 한없이 작아질 때, 주어진 그래프가 x축을 통과하는지 아닌지가 의심이 된다. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=0$이므로 x축이 점근선이 된다.

$ex2)\ f(x)=x+2\sin x\ \ (0\le x\le 2\pi)$

해설)

① 정의역을 조사한다. : 정의역은 실수전체이다.

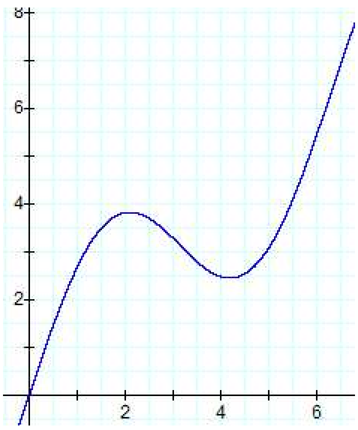
② 도함수를 구한다. : $f'(x)=1+2\cos x$이고 $f'(x)=0$을 만족하는 $x=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$이다.

③ 이계도함수를 구한다. : $f''(x)=-2\sin x$이고 $f''(x)=0$을 만족하는 $x=0, \pi, 2\pi$이다.

④ 증감표를 만든다. :

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
f'	+	+	0	-	-	-	0	+	+
f''	0	-	-	-	0	+	+	+	0
f		↗	극대	↘	변곡점	↘	극소	↗	

⑤ 그래프를 그린다. :



3번부터 6번까지 4개의 그래프는 직접 해보도록 하자.

$ex3)\ y=\frac{\ln x}{x}$

$ex4)\ y=\dfrac{x^2}{x-1}$

$ex5)\ y=e^{\frac{1}{x}}$

$ex6)\ y=x+\sqrt{1-x^2}$

*점근선의 추적

$\lim\limits_{x \to \substack{\infty \\ -\infty}} f(x) = \beta$ 이면 $y=\beta$는 점근선이다.

$\lim\limits_{x \to \substack{a-0 \\ a+0}} f(x) = \infty \,\mathrm{or} -\infty$ 이면 $x=a$는 점근선

점근선이 x, y과 평행한 경우에는 위와 같은 방법으로 점근선을 쉽게 찾을 수 있다. 그렇다면 x, y축과 평행하지 않은 직선이 점근선일 때는 어떻게 구해야 할까?

$y=f(x)$의 점근선이 $y=ax+b$라 하자.

$\lim\limits_{x \to \substack{\infty \\ -\infty}} \dfrac{f(x)}{x} = a,\ \lim\limits_{x \to \substack{\infty \\ -\infty}} (f(x)-ax) = b$

이와 같은 방법으로 일차식형태의 점근선도 쉽게 찾을 수 있다.
이차식 이상인 점근선을 추적하는 경우는 고등학교과정에서 나오지 않기 때문에 생략한다.

3차함수와 4차함수

2010학년도 6월 평가원 모의수능부터 매 시험마다 3차함수나 4차함수에 대한 문제가 출제되고 있다. 단순히 3,4차함수의 계산을 다루는 것이 아니라 주어진 함수의 그래프개형을 이용하는 문제가 출제된다. 지금부터 3,4차함수의 그래프 개형을 살펴보자.

• 3차함수

$$\overbrace{y = ax^3 - cx \ (a \neq 0)}^{①}$$

$\underbrace{\longrightarrow}_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta\\ \text{평행이동}}} \quad \overbrace{y = a(x-\alpha)^3 - c(x-\alpha) + \beta}^{\text{② 3차함수의 표준형}}$: 미정계수가 4개이므로 모든 3차함수를 대표한다.

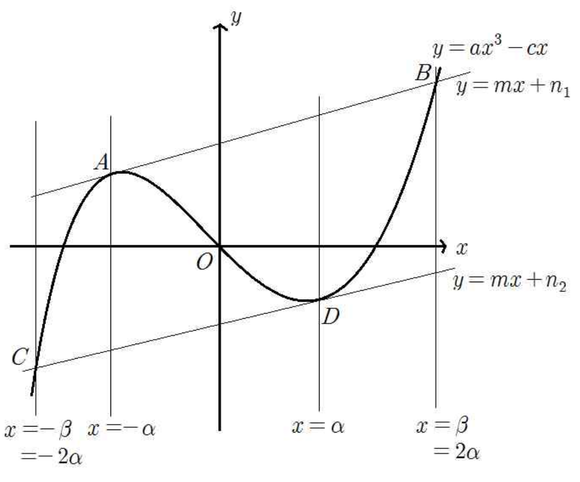
①	②
$y' = 3ax^2 - c$	변곡점 (α,β)에 스스로 점대칭
$y'' = 6ax$	
(0,0)은 변곡점	∴모든 3차함수는 오직 하나뿐인 변곡점을 가지고
(0,0)에 점대칭	그 변곡점에 스스로 점대칭

∗ ②가 모든 3차함수를 대표한다. 그런데 ①은 ②를 평행이동 했으므로 3차함수의 성질에 대해 ①을 이용해 알아볼수 있다.

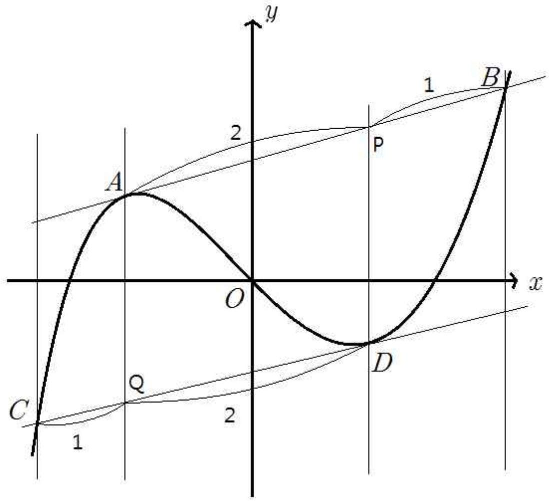
일반적인 일차함수는 미정계수가 몇 개인가? $y = ax + b$이므로 두 개다. 이런 식으로 생각해본다면 일반적인 n차함수는 미정계수가 $n+1$개다. 따라서 주어진 ②는 모든 3차함수를 대표하는 일반적인 3차함수이다.
그래프는 크게 두 가지, 개형과 위치로 나누어 살펴볼 수 있다. 예를 들어 $y = x^2$, $y = x^2 + 1$을 보자. 주어진 두 그래프는 위치는 다르지만 개형은 일치함을 알 수 있다.
②는 개형과 위치가 모두 일반적인 3차함수이다. 따라서 ②에서 (α, β)를 원점으로 평행이동하면 ①과 같이 개형만 일반적인 3차함수를 얻을 수 있다.
지금부터 ①을 이용하여 3차함수의 몇 가지 성질들에 관해 살펴보자.

◦ $y = ax^3 - cx \quad (a, c > 0)$

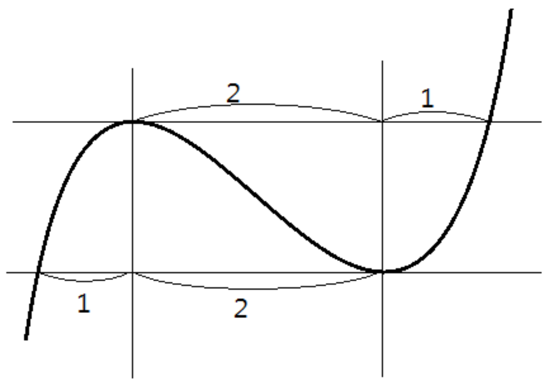
①



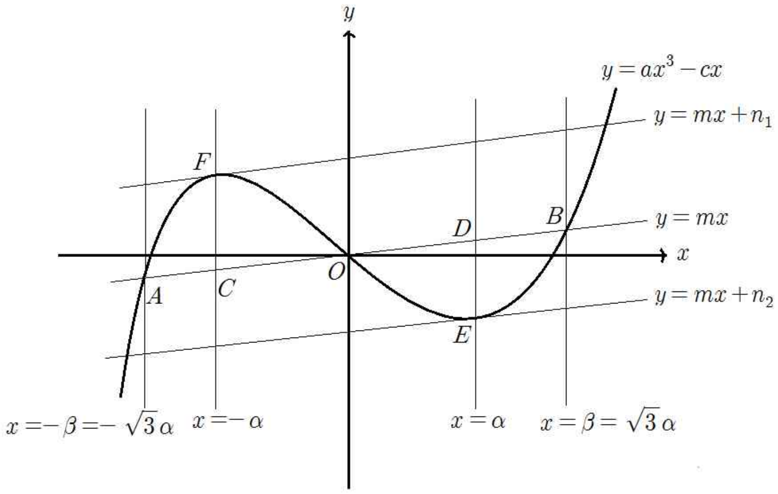
편의상 a와 c는 양수라 하자.
먼저 기울기가 m인 두 접선 $y=mx+n_1$, $y=mx+n_2$를 생각한다.
그리고 각각의 삼차함수와의 교점을 A, B, C, D라 하자. 먼저 $y=ax^3-cx$에서
$y'=3ax^2-c$이고 $3ax^2-c=m$, $x=\pm\sqrt{\dfrac{c+m}{3a}}$ 이므로 기울기가 m인 접선을 가지는 점의 x좌표는 부호만 다르다. 접점 A, D의 x좌표를 각각 $-\alpha$, α라 하자.
$3ax^3-cx=mx+n_2$, $3ax^3-(c+m)x-n_2=0$의 세 근은 $\alpha, \alpha, -\beta$이다. 근과 계수의 관계에 의해 $2\alpha-\beta=0$이므로 점 C의 x좌표는 -2α이다. 이런 식으로 나머지도 구하면 네 점 A, B, C, D의 x좌표를 구할 수 있다. 여기서 우리가 알 수 있는 것은



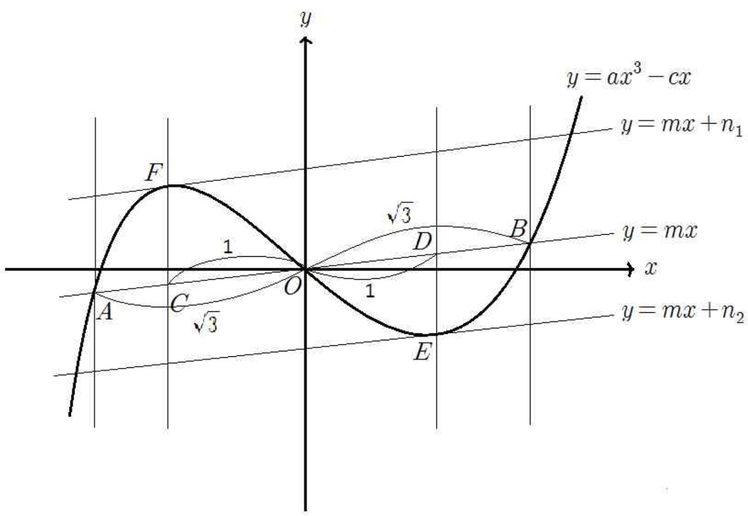
$\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$, $\overline{DQ}:\overline{QD}=2:1$이다.
좀 더 특별한 경우를 살펴보면 접선의 기울기가 0인 경우(극대, 극소점이 접점)이다.



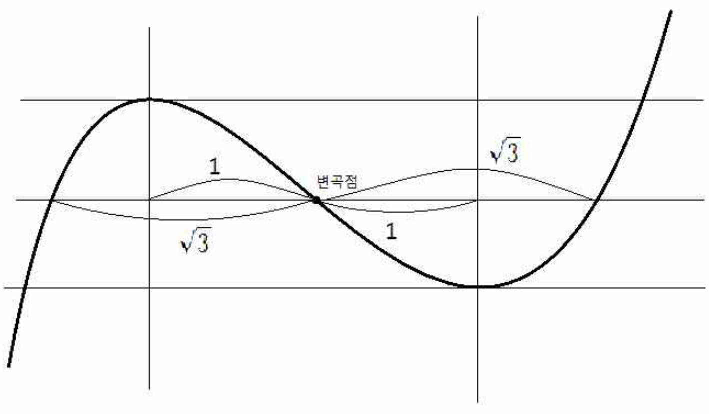
②



기울기가 m인 두 접선을 생각하자. 두 접점 E, F의 x좌표는 $3ax^2-c=m$이므로 $x=\pm\sqrt{\dfrac{c+m}{3a}}=\pm\alpha$이다. 이번에는 기울기가 m이고 주어진 삼차함수의 변곡점(원점)을 지나는 직선 $y=mx$와 $y=ax^3-cx$의 교점을 각각 A, B라 하자. A, B의 x좌표는 $ax^3-cx=mx$, $x(ax^2-(c+m))=0$이므로 $x=\pm\sqrt{\dfrac{c+m}{a}}=\pm\beta=\pm\sqrt{3}\alpha$이다.



따라서 $\overline{OD}:\overline{OB}=1:\sqrt{3}$이고 $\overline{OC}:\overline{OA}=1:\sqrt{3}$임을 알 수 있다.
좀 더 특별한 경우를 살펴보면 접선의 기울기가 0인 경우(극대, 극소점이 접점)이다.



◦ 그래프 밖의 한 점에서 그래프에 그은 접선의 개수

$y = ax^3 - cx$

그래프 밖의 한 점 $P(p,q)$에서 그래프에 그은 접선의 접점을 $A(t, at^3 - ct)$라 하자.

점 A에서의 접선은 $y - at^3 + ct = (3at^2 - c)(x - t)$이다.

주어진 접선은 점 P를 지나므로 대입하여 모두 한변으로 이항하고 그것을 t에 대한 함수 $f(t)$라 하자.

$f(t) = 2at^3 - 3apt^2 + q + pc$

$f'(t) = 6at^2 - 6apt$

만약 $p \neq 0$라면

$f'(t) = 6at(t-p)$이므로 $t = 0, p$에서 극값을 갖는다.

$f(0)f(p) < 0$이면 방정식 $f(t) = 0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

t의 값이 세 개라는 것은 접점이 세 개이므로 접선도 세 개이다.

따라서 $f(0)f(p) < 0$이면 점 P에서 그래프에 3개의 접선을 그을 수 있다.

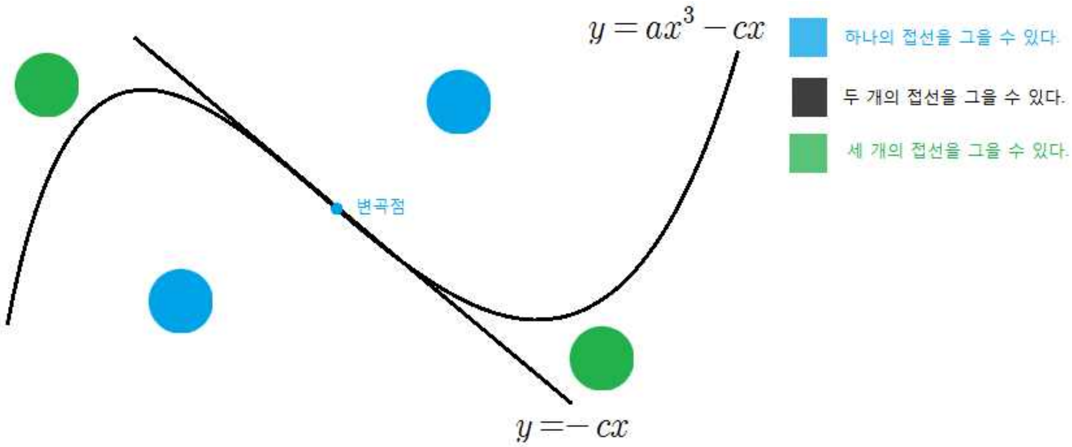
마찬가지로 $f(0)f(p) = 0$이면 한 중근과 다른 하나의 실근을 가지므로 두 개의 접선을 그을 수 있고

$f(0)f(p) > 0$이면 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가지므로 하나의 접선을 그을 수 있다.

단, $p = 0$이면 주어진 $f(t)$가 극값을 갖지 않으므로 방정식 $f(t) = 0$이 하나의 실근만 가져

하나의 접선을 그을 수 있다.

$f(0) = q + pc$, $f(p) = q - ap^3 + cp$이므로 $y = -cx$, $y = ax^3 - cx$가 경계가 되고 이것을
영역으로 표현하면



위처럼 생각할 수 있다. 이것은 삼차함수만의 내용은 아니다. 어떤 함수가 주어지더라도 그래프 밖의 한 점에서 그래프에 그은 접선의 개수를 같은 방법으로 찾아낼 수 있다.

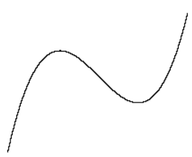
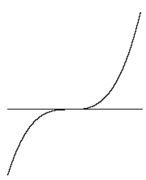
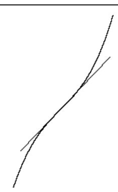
◦ 삼차함수와 사차함수의 그래프 개형

우리는 위에서 증감표를 이용하여 그래프를 직접 그려보았다. 충분한 연습을 하였다면 도함수가 근을 어떻게 갖느냐에 따라 주어진 함수의 그래프를 어느 정도 그릴 수 있다는것을 알 수 있을 것이다. 마찬가지로 삼차함수와 사차함수의 그래프도 각각의 도함수가 어떻게 근을 갖느냐에 따라 경우를 분리하여 그래프 개형을 살펴보자.

• $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

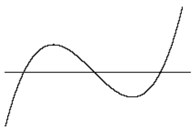
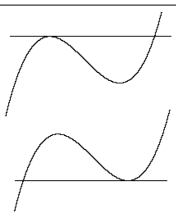
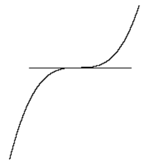
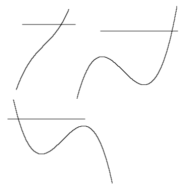
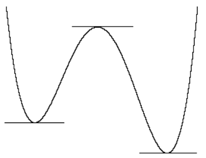
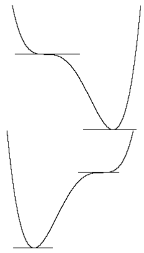
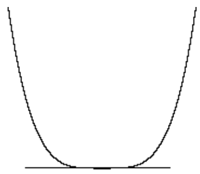
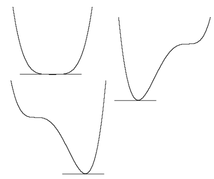
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$D/4 : b^2 - 3ac$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
		
극값을 가진다.	단조증가,감소함수 $\Rightarrow$ 일대일 대응 함수 $\Leftrightarrow$ 역함수 존재. 극값이 없다.	

• $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (a \neq 0)$

$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$에 따른 y의 그래프 개형 조사

	서로 다른 3개의 실근	한 중근과 다른 실근	3중근	한 실근과 서로 다른 두 허근
y'				
y				

위의 표는 반드시 머릿속에 넣어두자. 단순히 y의 개형만 외우지 말고 도함수가 어떻게 근을 갖느냐에 따라 y의 그래프 개형을 외워두자. 그래프 개형을 이용한 기출문제를 풀어보자.

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$ 의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x = 2$ 에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x) - f(1)|$ 은 오직 $x = a \ (a > 2)$
에서만 미분가능하지 않다.

속도와 가속도의 미분

(1) 수직선위의 동점 $P(x)$

시각 t에 대해 $x=f(t)$: 위치

$$t_1 \to t_2 \begin{cases} f(t_2)-f(t_1) & : \text{변위} \\ \dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} & : \text{평균속도} \end{cases}$$

$|\text{속도}| = \text{속력} \to v = \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

$t_2 - t_1 = h$: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h} = f'(t_1)$: t_1에서의 순간속도

$\dfrac{dv}{dt} = a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$: 가속도

(2) 평면위의 동점 $P(x,y)$

$x=f(t),\ y=g(t)$

$\overrightarrow{OP} = (x,y)$: 위치벡터

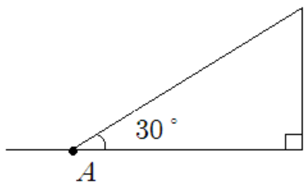
$\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$: 속도벡터 $\to |\vec{v}| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

$\vec{a} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$: 가속도벡터

(3) 도형의 변화율

길이l, 넓이S, 부피 V, 각θ : $\dfrac{dl}{dt}, \dfrac{dS}{dt}, \dfrac{dV}{dt}, \dfrac{d\theta}{dt}$

$ex1)$



A에서 처음속도 v_0로 오르막 방향으로 공을 굴리면

t분후의 공의 높이 h는 $h = \dfrac{1}{2}v_0 t - \dfrac{5}{2}t^2$이다.

$v_0 = 20(m/\text{분})$일 때 이 공이 오르막길을 굴러 올라간 거리는?

$ex2)$ 동점P가 $y=\sin x$위를 일정한 속력 v_0로 움직인다.

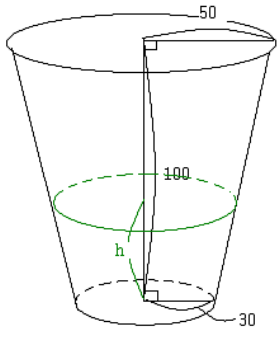
x축방향의 속력이 최대인 경우 P의 좌표는? $(0 \le x \le \pi)$

$ex3)$ $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $y=f(x)$위에 두 점 $P_1(0,1)$, $P_2(a,f(a))$ $(a>0)$

$t=0$일 때 P는 P_1을 출발하고 곡선위를 따라 P_2로 향한다.

$P(x,f(x))$에서의 속력을 $f(x)$라 할 때, P가 P_2에 도착할 때 까지 걸리는 시간을 구하시오.

$ex4)$



매초 $4\sqrt{h}$의 양의 속력으로 물이 빠져나간다.

$h=50$일 때 $\frac{dh}{dt}$를 구하시오.

$ex5$) 한변의 길이가 $3r$인 정육면체가 있다. 정육면체 내부에는 물이 들어있다.

반지름이 r이고 높이가 $2r$인 원기둥이 초당 $1cm$씩 물에 잠기고 있다.

이 때, 원기둥의 반이 물에 잠기는 순간 수면의 상승속력을 구하시오.

(단, 처음 물의 높이는 r이상이고 높이의 기준은 밑면으로 한다.)

$ex6$) $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}+\overline{CA}=2\overline{AB}$이고 $\angle B$는 $\dfrac{dB}{dt}=\dfrac{1}{2}(rad/\sec)$를 만족한다.

$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$일 때의 $\triangle ABC$넓이의 변화율을 구하시오.

$ex7$) 구모양의 얼음이 있다. 이 얼음의 부피의 감소율은 겉넓이에 비례한다.

한시간 후 부피는 처음 부피의 $\dfrac{27}{64}$배 였다. 다 녹는데 걸리는 시간은?

실전문제

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극대값을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 작은 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b, f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a\neq b$이다.)

[보 기]

ㄱ. $h'(b)=0$

ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.

ㄷ. 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여
집합 S를 $S=\{a\,|$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$ 라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\dfrac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $g'(3)=-1$

ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 $P(1,1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

x에 대한 삼차방정식 $\dfrac{1}{3}x^3-x=k$가 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다. 함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

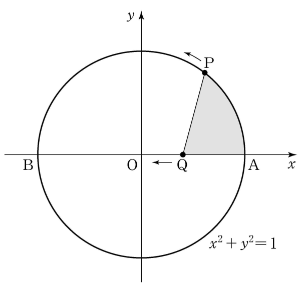
ㄱ. $f'(-x)=f'(x)$

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$

ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=a\,(a\neq 0)$에서 극대값을 가지면 $f'(x)$는 $x=-a$에서 극소값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

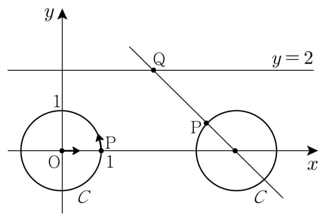
그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P는 점 A$(1, 0)$에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\dfrac{\pi}{2}$의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 Q는 점 A에서 출발하여 점 B$(-1, 0)$을 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 x축 위를 움직이고 있다. 점 P와 점 Q가 동시에 점 A에서 출발하여 t초가 되는 순간, 선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 출발한 지 1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은?



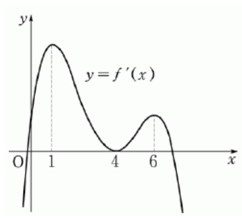
① $\dfrac{\pi}{4}-1$ ② $\dfrac{\pi}{4}$ ③ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{4}+1$

좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 원 C와 이 원 위를 움직이는 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P 는 원 C위를 시계 반대 방향으로 매초 1 의
속력으로 움직인다.
(나) 원 C는 x축의 양의 방향으로 매초 10 의 속력으로
움직인다.



원 C는 중심이 원점에서, 점 P 는 점 $(1, 0)$에서 동시에 출발할 때, 원 C의 중심과 점 P 를 지나는 직선이 직선 $y=2$와 만나는 점을 Q 라 하자. 출발한 후 $\dfrac{3}{4}\pi$ 초가 되는 순간, 점 Q 는 직선 $y=2$ 위를 매초 a의 속력으로 움직인다. a의 값을 구하시오.



오른쪽 그림은 5차 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $f'(4)=0$이고 $f''(1)=f''(4)=f''(6)=0$이다.)

[보 기]

ㄱ. $f(x)$는 서로 다른 세 점에서 극값을 갖는다.

ㄴ. $4<x_1<x_2<6$인 x_1, x_2에 대하여 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 이다.

ㄷ. $f(0)=0$일 때, 양의 실수 a에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 $y=a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 $f(x)$의 극댓값은 a이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

단면의 넓이가 $120\,(\mathrm{m}^2)$로 일정한 원통형의 물탱크에 물이 $5\,(\mathrm{m})$까지 차있다. 이 물탱크의 바닥 중앙에 있는 넓이 $\frac{1}{5}(\mathrm{m}^2)$인 구멍으로 물이 빠지고 있다. 물탱크의 바닥으로부터 수면까지의 높이가 $y(\mathrm{m})$일 때, 빠져나가는 물의 속력 $v(\mathrm{m}/초)$는 $v=\sqrt{20y}$ 로 주어진다고 하자. 다음은 이 식을 이용해서 물의 높이가 $5\,(\mathrm{m})$에서 $\frac{5}{4}(\mathrm{m})$로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 계산한 것이다.

<풀이>

v와 y가 시간에 따라 변하므로 v와 y의 관계식 $v=\sqrt{20y}$ 를

t에 관하여 미분하여 v와 y의 시간에 따른 변화율 사이의 관계식을 구하면

$$\frac{dv}{dt}=\frac{10}{\sqrt{20y}}\frac{dy}{dt}=\frac{10}{v}\frac{dy}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간변화율은 그 순간 빠져나가는 물의 양과 부호만 다르므로

[(가)] ⋯⋯⋯ (2)

(2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$를 (1) 식에 대입하여 정리하면

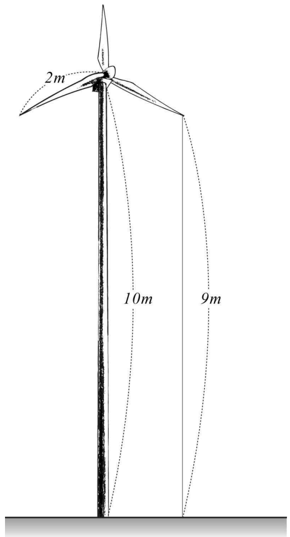
$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{60}$$

따라서 구하는 시간은 [(나)] (초)이다.

위의 풀이에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

	(가)	(나)
①	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$	240
②	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$	300
③	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	180
④	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	240
⑤	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	300

지면에서 회전 중심축까지의 높이가 $10m$이고, 길이가 $2m$인 풍력 발전기의 날개가 축을 중심으로 일정한 속력으로 시계반대방향으로 돌고 있다. 지면에서 날개 끝까지의 높이가 $9m$가 될 때, 시간(초)에 따른 높이의 변화율이 $4\pi\,(m/s)$이고, 풍력 발전기의 날개가 한 바퀴 도는데 걸리는 시간을 k초라 하자. $k^2=\frac{q}{p}$(p, q는 서로소)일 때, $10(p+q)$의 값을 구하시오.(단, 축은 지면과 평행하고 축과 날개의 두께는 고려하지 않는다.)



함수 $f(x)=\ln(2x^2+1)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$이다.

ㄴ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $|f(x_1)-f(x_2)| \le \sqrt{2}\,|x_1-x_2|$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

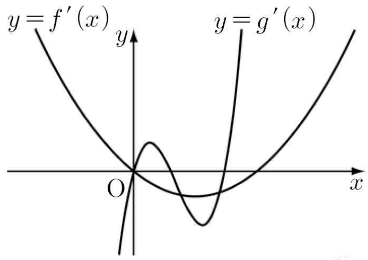
계수가 실수인 삼차함수 $y=f(x)$ 가 있다. 방정식 $f(x)=0$ 과 $f'(x)=0$ 의 근에 관한 <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f'(x)=0$ 이 서로 같은 실근을 가지면, $f(x)=0$ 도 반드시 서로 같은 실근을 가진다.
ㄴ. $f'(x)=0$ 이 허근을 가지면, $f(x)=0$ 도 반드시 허근을 가진다.
ㄷ. $f'(x)=0$ 이 서로 다른 실근을 가지면, $f(x)=0$ 도 반드시 서로 다른 두 실근을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

그림은 삼차함수 $y=f(x)$ 와 사차함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 와 $y=g'(x)$ 의 그래프이다. 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, $f'(0)=0$, $g'(0)=0$)



[보 기]

ㄱ. $x<0$ 에서 $y=f(x)-g(x)$ 는 증가함수이다.
ㄴ. $y=f(x)-g(x)$ 는 한 개의 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $h(x)=f'(x)-g'(x)$ 라 할 때, $h'(x)=0$ 은 서로 다른 2 개의 양의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

세 실수 a, b, c 에 대하여 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

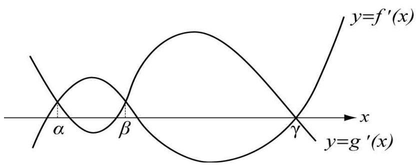
일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a=b=c$ 이면, 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖는다.
ㄴ. $a=b\neq c$ 이고 $f(a)<0$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $a<b<c$ 이고 $f(b)<0$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

그림과 같이 두 곡선 $y=f'(x), y=g'(x)$는 x 좌표가 α, β, γ 인 점에서 만나고 $h(x)=f(x)-g(x)$의 최솟값이 음수일 때, $y=h(x)$에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

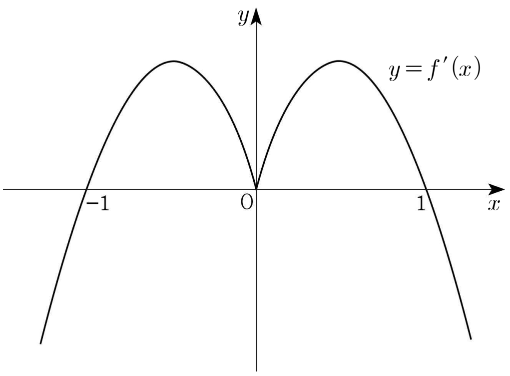


[보 기]

ㄱ. $h(\alpha)=h(\gamma)<h(\beta)$
ㄴ. $(\beta-\alpha)\{h(\gamma)-h(\beta)\}<(\gamma-\beta)\{h(\beta)-h(\alpha)\}$
ㄷ. $h(x)=0$은 적어도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

그림과 같이 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고 $x>0$일 때 위로 볼록하다.



함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$) [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

ㄴ. $f(0)=0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 0이다.

ㄷ. $f(1)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$

(나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여

$$0<xf(y)<yf(x)$$

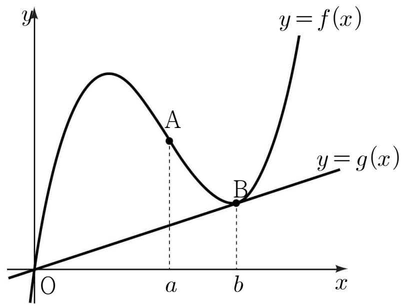
세 수 $A=f'(0)$, $B=f(1)$, $C=2\int_0^1 f(x)dx$ 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$

③ $B<A<C$ ④ $B<C<A$

⑤ $C<A<B$

그림과 같이 좌표평면에서 최고차항의 계수가 양수이고 원점을 지나는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$라 하고 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a<b$)



[보 기]

ㄱ. 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 a이다.

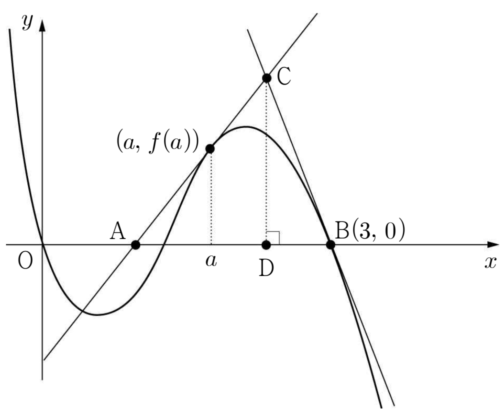
ㄴ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

그림과 같이 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x축과 만나는 점을 A, 점 $\mathrm{B}(3, 0)$에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:1$일 때, a의 값들의 곱은?



① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 일 때, $f(x)$ 가 미분가능하면 $f'(-x)=f'(x)$ 이다.

ㄴ. 임의의 실수 x 에 대하여 $|f(x)| \leq Mx^2$ 이면 $f'(0)=0$ 이다. (단, M 은 양의 상수이다.)

ㄷ. $\lim_{h\to0}\dfrac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}=0$ 이면 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

1보다 큰 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)=a^{2x}$, $g(x)=a^{x+1}-2$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를 $h(x)=|f(x)-g(x)|$라 하자. $y=h(x)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$일 때 $y=h(x)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.

ㄴ. $a=4$일 때 $x_1<x_2<\frac{1}{2}$이면 $h(x_1)>h(x_2)$이다.

ㄷ. $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나는 a의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$의 값이 존재한다.

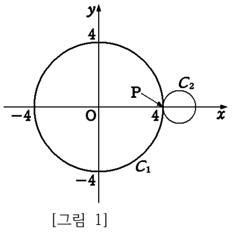
ㄴ. $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 값이 존재한다.

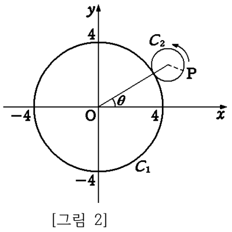
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

함수 $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$에 대해 점 $(0,a)$를 지나는 $y=f(x)$ 그래프의 접선이 하나만 존재하도록 a값을 구하시오. (단, $a>0$이고 임의의 자연수 n에 대하여 $\lim_{x\to\infty}x^n e^{-x}=0$이다.)

[그림 1]과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 큰 원 C_1과 반지름의 길이가 1인 작은 원 C_2가 점 $(4,\ 0)$에서 외접하고 있다. 이때 작은 원 위의 한 점을 P라 하자. [그림 2]와 같이 원 C_2가 원 C_1에 접한 상태로 굴러갈 때, 두 원의 중심을 연결한 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자. θ의 값이 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때, 점 $(4,\ 0)$에서 출발한 점 P가 움직인 거리는?



[그림 1]



[그림 2]

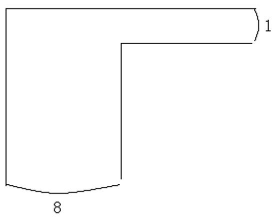
① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

$y=x^3+ax$를 원점 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전한 그래프를 $y=f(x)$라 한다. 이때, a의 범위를 구하시오.

서로 다른 세 실수 $a,b,c(a<b<c)$에 대해 $a^2(a-3)=b^2(b-3)=c^2(c-3)$을 만족한다. b의 범위를 구하시오.

각 모서리의 길이가 3인 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 부피의 최댓값을 구하시오.

수평으로 들고 지나갈 수 있는 막대기의 최대길이를 구하시오.



원형의 시계에서 긴바늘(분침)의 길이가 a, 작은바늘(시침)의 길이가 b이다. 시각 t에서 두 바늘의 끝점사이의 거리를 $x(t)$라 하고, 두 바늘의 끝점이 가까워지거나 멀어지는 속도를 $v(t)$라 할 때, 속력 $|v(t)|$가 최대가 되는 것은 오전 12시간 중 몇 번이나 일어나는가?

실수 k에 대하여 x의 삼차방정식 $x^3-3x^2-9x-k=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha,\beta,\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$를 가질 때, $\alpha\gamma$의 범위를 구하시오.

$\overline{AB}$를 지름으로 하는 반지름이 1인 반원위에 동점 P가 있고, $\angle PAB=\theta$일 때, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이다. 반원을 선분 AP로 접을 때 겹치는 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\theta=\alpha$일 때 $S(\theta)$가 최대가 된다. $\cos 2\alpha=\frac{1+\sqrt{a}}{8}$이다. 정수 a의 값을 구하시오.

심화

테일러전개 (테일러급수)

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 같다고 한다. 이것은 식의 모양이 같다는 말도 되지만, 그래프를 그렸을 때 두 그래프가 일치한다면 두 함수는 같다고 말할 수 있다. 따라서 우리가 알고 있는 초월함수(지수함수, 로그함수, 삼각함수 등)를 다항식의 무한급수로 표현할 수 있다.
예를 들어서 e^x을 보자.

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

x에 0을 대입한다.

$$1 = a_0$$

양변을 미분하여 다시 x에 0을 대입한다.

$$1 = a_1$$

같은 방법으로 양변을 미분하여 x에 0을 대입하면 $\frac{1}{2!} = a_2$, $\frac{1}{3!} = a_3$, $\frac{1}{4!} = a_4$, $\cdots$이다.
따라서 $a_k = \frac{1}{k!}$ (k는 자연수)이다.

$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}a_n + \cdots$임을 알 수 있다.

같은 방법으로 $\sin x$나 $\cos x$등의 삼각함수도 다항식의 무한급수로 표현할 수 있다.
실제로 구해보면

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$
$$\cos x = \frac{1}{0!} - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

임을 알 수 있다. $\sin x$와 $\cos x$의 테일러급수를 이용하여 좀 더 재미있는 사실을 알아내보자.

$$\cos x + isinx = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right)$$

그런데 주어진 식은 e^{ix}와 일치한다!
따라서 $\cos x + isinx = e^{ix}$이다. 우리는 이 등식을 오일러의 공식이라 부른다.
x에 π를 대입하면 $e^{i\pi} = -1$이다.

$ex)$

$$P=\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1+\cos x+isinx}{2}\right)\left(\frac{1+\cos\frac{x}{2}+isin\frac{x}{2}}{2}\right)\left(\frac{1+\cos\frac{x}{2^2}+isin\frac{x}{2^2}}{2}\right)\cdots\left(\frac{1+\cos\frac{x}{2^n}+isin\frac{x}{2^n}}{2}\right)\right\}$$

미분방정식

변수, 함수, 도함수를 포함하는 방정식을 미분방정식이라 한다. 미분방정식이 1차도함수를 포함하면 1계 미분방정식이라 부른다. 예를 들어 $y'=y$ 는 미분방정식이고 이 방정식은 1계 미분방정식이다. 미분방정식은 물리학, 경제학, 엔지니어링 등 수학 외의 학문에서도 중요한 역할을 차지하고, 유체역학, 천제역학 등의 물리적 현상의 수학적 모델을 만들 때에도 사용된다. 이러한 미분 방정식의 해를 구하는(함수 y를 찾는 것을 해를 구한다고 한다) 대표적인 방법인 변수 분리형 해법에 대해서 알아보자.

변수분리형의 일반적인 형태이다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{f(y)}$$

$$f(y)dy=g(x)dx$$

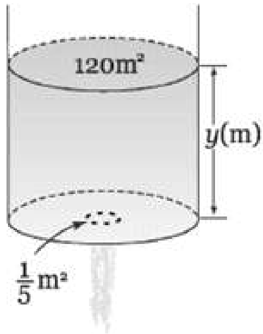
식을 정리하고 (x는 x끼리, y는 y끼리 정리하므로 변수분리형이다) 양변을 적분하면

$F(y)=G(x)+C$ (F,G는 각각 f,g의 부정적분, C는 적분상수)이다.

이 식을 미분방정식의 일반해라 하고
초기값이 주어져 적분상수를 구할 수 있으면 주어진 식을 특수해라고 한다.

주어진 예제를 보자.

단면의 넓이가 $120(\mathrm{m}^2)$로 일정한 원통형의 물탱크에 물이 $5(\mathrm{m})$까지 차 있다. 이 물탱크의 바닥 중앙에 있는 넓이 $\frac{1}{5}(\mathrm{m}^2)$인 구멍으로 물이 빠지고 있다. 물탱크의 바닥으로부터 수면까지의 높이가 $y(\mathrm{m})$일 때, 빠져나가는 물의 속력 $v(\mathrm{m}/초)$는 $v=\sqrt{20y}$로 주어진다고 하자. 다음은 이 식을 이용해서 물의 높이가 $5(\mathrm{m})$에서 $\frac{5}{4}(\mathrm{m})$로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 구하시오.



주어진 문제는 평가원 시험에 출제되었던 문제이다. 미분방정식을 이용하여 풀어보자.

구멍을 통하여 빠져나간 물기둥의 높이를 h라 하자.
빠져나간 물의 양과 물탱크에서 줄어드는 물의 양은 같으므로
$\frac{h}{5}=120(5-y)$이다. 주어진 식의 양변을 y에 대하여 미분하면 $dh=-600dy$이다.
물이 빠져나가는 속력 v는 $\frac{dh}{dt}$와 같다. $\frac{dh}{dt}=-600\frac{dy}{dt}=\sqrt{20y}$이다. 변수분리를 하면 $-\frac{600}{\sqrt{20y}}dy=dt$이고 양변을 적분하면 $\int_5^y -\frac{600}{\sqrt{20y}}dy=\int_0^t dt$이다. 적분구간을 설명하자면 시간 t가 0일 때 y는 5이기 때문이다. 정리하면 $-60\sqrt{20y}+600=t$이다. 따라서 $y=\frac{5}{4}$일 때 t의 값은 300이다.