합성함수 그려버리기 with 기출 킬러 문항

-합성함수의 정의

합성함수란 무엇인지부터 우리가 생각해봐야 합니다.

일반적으로 두 개가 합성된 꼴을 다루니 예시도 그에 맞춰서 해보겠습니다.

$f(g(x))=(f\circ g)(x)$--> f의 정의역 자리에 $g(x)$가 들어있습니다.

일반적으로 우리는 바깥에 있는 f를 겉함수, g를 속함수라고 칭합니다.

중요한 건 다른 거 다 필요없이 g가 f의 정의역 역할을 한다는 것입니다..!

엥 그게 뭐가 대수야..? 네 아주 대수입니다. 정말요.

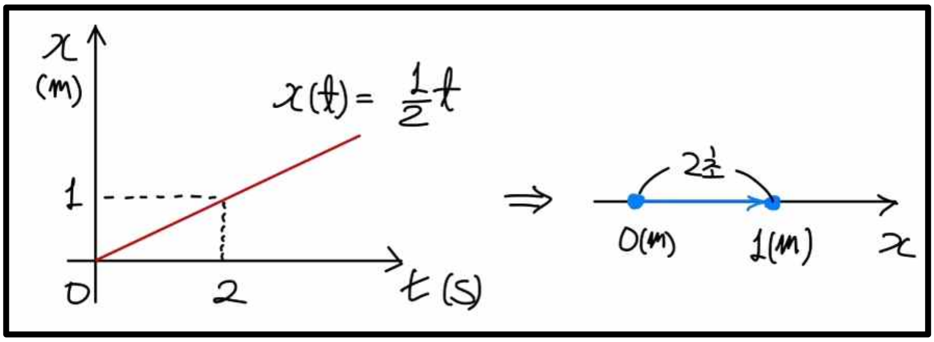
합성함수를 온전히 이해하기 위해서 제가 가져올 개념은

바로 수2나 미적분 끝에 있는 '위치-속도-가속도'그래프의 내용입니다.

이 그래프들을 완전히 이해한다면 반드시 합성함수에 대한 이해도도 한층

높아지실 겁니다. 그러면 시작해봅시다..! 합성함수 어렵지 않을 겁니다!

위치-속도-가속도 그래프로 합성함수 이해하기



간단한 위치-시간 그래프입니다.

이 그래프가 의미하는 걸 생각해봅시다.

왼쪽의 $x(t) = \frac{1}{2}t$ 그래프를 $0 \leqq t \leqq 2$에서 생각해봅시다.

점이 0초 때 원점에 있다가, 2초 동안 오른쪽으로 1(m) 지점까지 이동한거죠.

속도는 저 그래프의 기울기인 $\frac{1}{2}m/s$로 일정한 등속도 운동을 합니다.

그러니까 하고 싶은 말은 $x(t)$그래프가 좌표'평면'에 있다고 해서

점의 운동이 '평면'에서 일어나는 게 아니라, 오른쪽 그림처럼 점의 운동은

x축에서만 일어난다는 겁니다.

'즉, $x(t)$의 치역이 그대로 점이 운동하는 x축 (정의역)으로 반영된다.'는

것이고, 그래프의 기울기는 점의 이동속도를 반영한다는 거죠.

아니 그러면 이게 합성함수랑 도대체 무슨 상관인데 설명하는 건가요..?

잘 기억하고 오세요, 이제 시작하니까 :)

합성함수 식 미분해보기

$y = f(g(x))$가 있습니다. 이 식을 미분해볼까요?

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$이므로

도함수의 값이 0이 되는 곳은 $f'(g(x)) = 0$일 때와 $g'(x) = 0$일 때 2가지네요.

의미를 생각해봅시다.

$f'(g(x)) = 0$--> $f'(t) = 0$일 때 $g(x) = t$를 만족하는 x -Case1.

$g'(x) = 0$--> 말 그대로 $g'(x) = 0$의 근인 x - Case2.

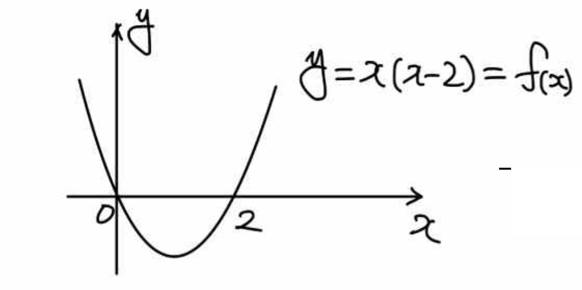
그런데 이 두 가지의 기하적 의미는 완전히 다릅니다.

이를 이제 실제로 합성함수를 같이 그려보면서 느껴볼 겁니다.

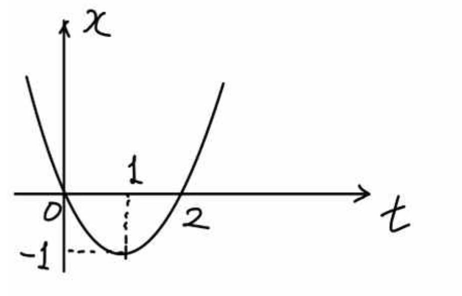
그러면, 이제 간단한 합성함수를 그려보는 작업을 해봅시다.

$f(x) = x(x-2)$라고 할 때, $f(f(x))$의 그래프 모양은?

1. $y = f(x)$**를 잠시** $x = f(t)$**라고 생각합시다.**



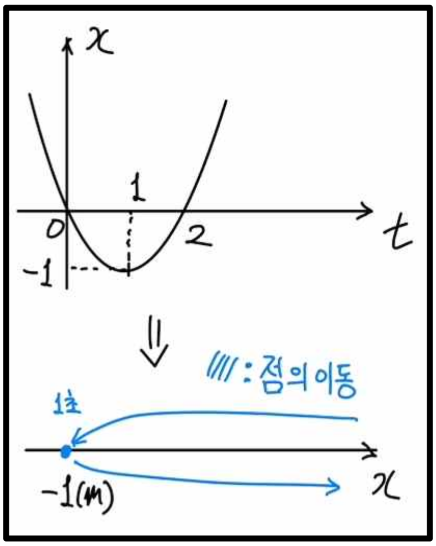
- ->



그럼 이제 $x(t)$그래프를 해석해봅시다. (t가 음수도 가능하다고 합시다)

t가 $-\infty$->1초 : 위치가 ∞->(-1)까지 이동하네요.
t가 1초->∞: 위치가 -1->∞까지 이동하네요..! 그림으로 나타내볼까요?

2. $x(t)$그래프의 의미를 생각해보며 점의 이동을 파악합시다.



: 파랑색으로 점의 이동을 표현했습니다..!

한 가지 유의할 점은 점의 이동이 달라지는 경계가 $t=1$, 즉 1초일 때라는 걸 명심하세요!

지금까지 우리가 한 건 $y=f(x)$를 $x=f(t)$라고 생각하고

$x(t)$라는 위치 그래프로 점의 이동을 파랑색으로 표현한 겁니다.

하지만 우리가 최종적으로 그려야 할 건

$f(f(x))$란 말이죠. 우리는 현재까지

이 안에 들어있는 '정의역'으로서의 f를 해석한 겁니다.

정의역 $f(x)$가 의미한 것은 결국 우리가 파랑색으로 표시한 '점의 이동'이네요

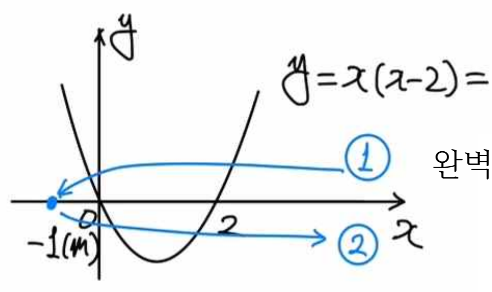
그렇다면 이제 파랑색 점의 이동을 정의역으로 해서 다시

f라는 함수에 넣으면 그게 바로 $f(f(x))$가 될 겁니다.

이해하셨나요..?

이해가 안되셨다면 위에서부터 천천히 다시 읽어주고, 다음으로 넘어가주세요!

이제 그럼 ‘파랑색으로 표시한 점의 이동’그림과 $y=f(x)$그림을 겹칠게요!

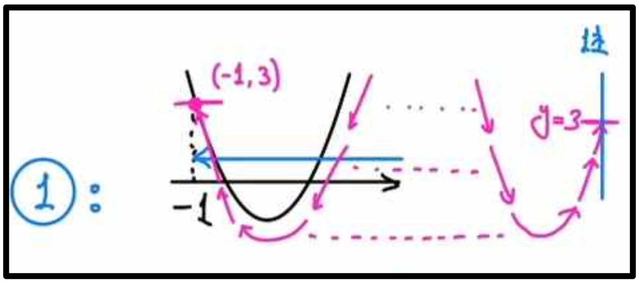


완벽하게 그림을 겹쳐놨습니다..!

3. 점의 이동에 따라 겉함수를 읽으며 합성함수를 그립시다.

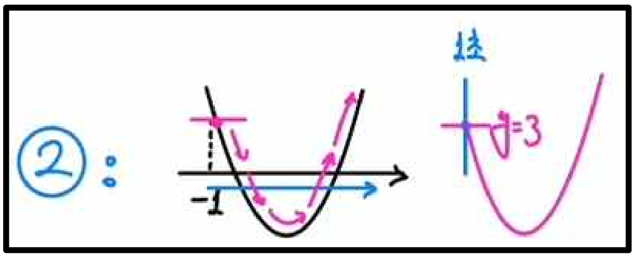
안에 있는 $f(x)$ 즉, 속함수가 어떻게 정의역 역할을 하는지.

그럼 헷갈리시지 않도록 1번과 2번을 나눠서 그림을 살펴봅시다.



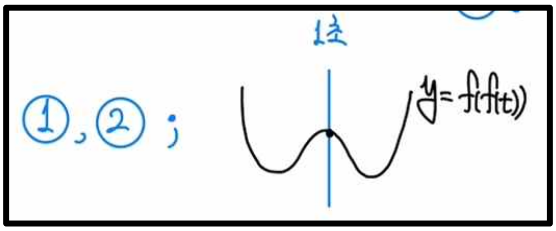
정의역이 $\infty \to -1$이니까
반대로 대입해서 그래프를 읽은 겁니다..!

똑같이 2번 경우도 해보자고요.



정의역이 $-1 \to \infty$니까
그대로 대입해서 그래프를 읽은 겁니다..!

그럼 이 두 개를 합치면..?



잉 근데 왜 가운데는 볼록하게 그렸나요..???

생각해봅시다. 아까 우리가 합성함수를 미분해봤죠?

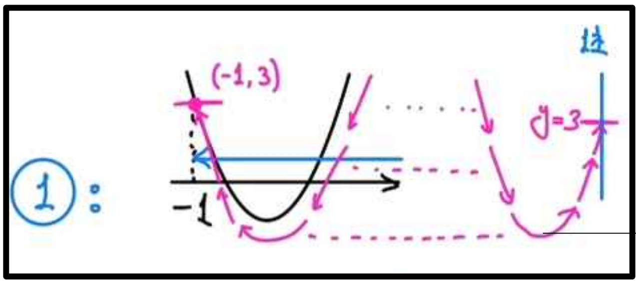
그에 따라 $f'(g(x))=0$과 $g'(x)=0$ 인 경우가 다르다고요.

f를 겉함수, g를 속함수로 통칭해서 사용합시다.

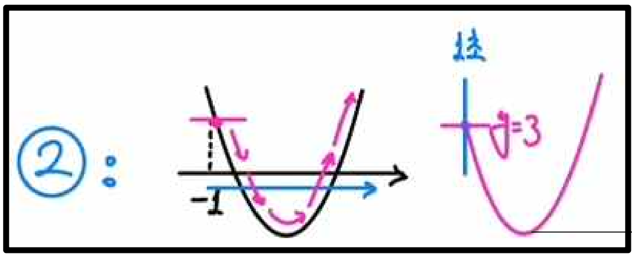
방금 우리가 그렸던 $f(f(x))$를 생각해보면,

1.$f'(f(x))=0$ - Case1. 2.$f'(x)=0$ - Case2. 두 가지가 있겠죠.

1번 경우는 우리가 그린 그림에서 어떤 걸 의미할까요?



요거랑



요거!

이렇게 두 가지 그림에서 각각 볼록한 극점들을 말하는 거겠죠.

왜냐면 $f'(\ )=0$의 정의역에 $f(x)$ 즉, 속함수를 넣은 거니까

우리는 파랑색으로 표시했던 '점의 이동'을 겉함수에 넣은거죠.

이해가 안된다면 계속 위로 올라가서 곱씹어봐야 합니다.

자신이 이해해야 하는 내용들이에요...!

한편, 2번 $f'(x)=0$은 우리가 점의 이동을 표시할 때 경계가 된 '1초',

즉, 속함수가 의미하는 ‘점의 이동’이 U턴을 할 때입니다..!

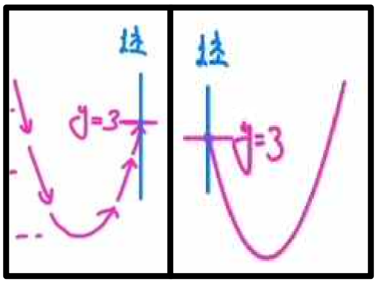
우리가 점의 이동을 속함수를 근간으로 그린 후에

그걸 겉함수에 넣어서 그리면 합성함수가 그려지는 거고,

Case1. 점의 이동으로 그린 겉함수의 극점 --> $f'(g(x))=0$

Case2. 속함수가 U턴을 하는 기점 -> $f(g(x))$에서 $g'(x)=0$

그러니까 우리가 각각 그린 겉함수 두 개



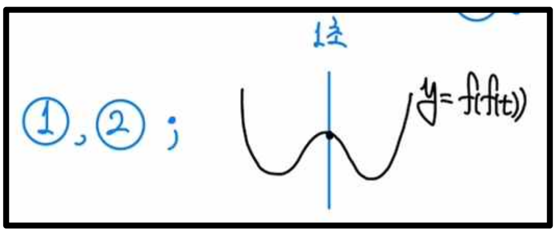
이걸 합치는 경계인 1초는 Case2.이므로
첨점이 아니라 둥글게 연결해주면 되는거죠.
언제나!!!!!

경계가 되는 부분을 따로 그려서 붙이는 순간 둥글게냐 첨점이냐가 관건인데

경계가 된다는 것 = 속함수가 U턴을 하는 순간 -> Case 2

그러니 무조건 부드럽게 연결해주시면 되는 겁니다.

최종적으로 나오는 형태는 그래서



의 형태가 되는 거죠.

그러니 우리는 합성함수의 극점을 찾을 때

Case1과 Case2를 따로 의미를 구별지어 생각해주시길 바랍니다!!!

그래서 속함수는 모양이 중요한 게 아니라 정말 '정의역'으로만

사용하면 되기에 치역을 간단히 표시해서 **'정의역화'** 해주시면 됩니다!!

이 문제에서는 f의 치역을 따면 되는거죠?

아까 한 대로 치역을 따면, $\infty \to -1 \to \infty$ 이네요..!

앞으로 합성함수 그릴 때 겁먹지 말고

속함수는 간단히 치역을 따서 그대로 정의역으로 사용해버리시면 됩니다..!

매뉴얼을 정리해볼까요?

1. 속함수의 치역을 **'정의역화'** 한다.

2. 정의역화된 속함수의 치역을 구간별로 겉함수에 대입해 그린다.

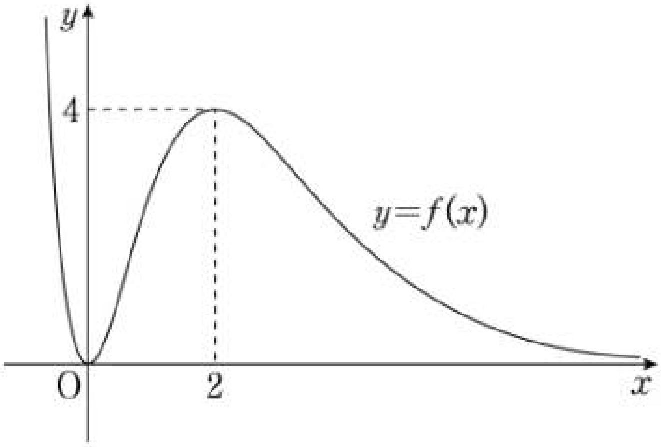
3. 각각 그린 함수들을 부드럽게 연결해준다. (by Case 2)

여기까지가 이해가 안되신다면 반드시 처음으로 돌아가 꼭 다시 봐주세요!

이제 기출 문제와 함께 지금 해본 걸 적용해보겠습니다 :)

2017.03.18. 가형 (e가 뭔지 모르셔도 f 그래프 모양으로 푸시길 바랍니다.)

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{15}{e^2}$의 교점의 개수는?

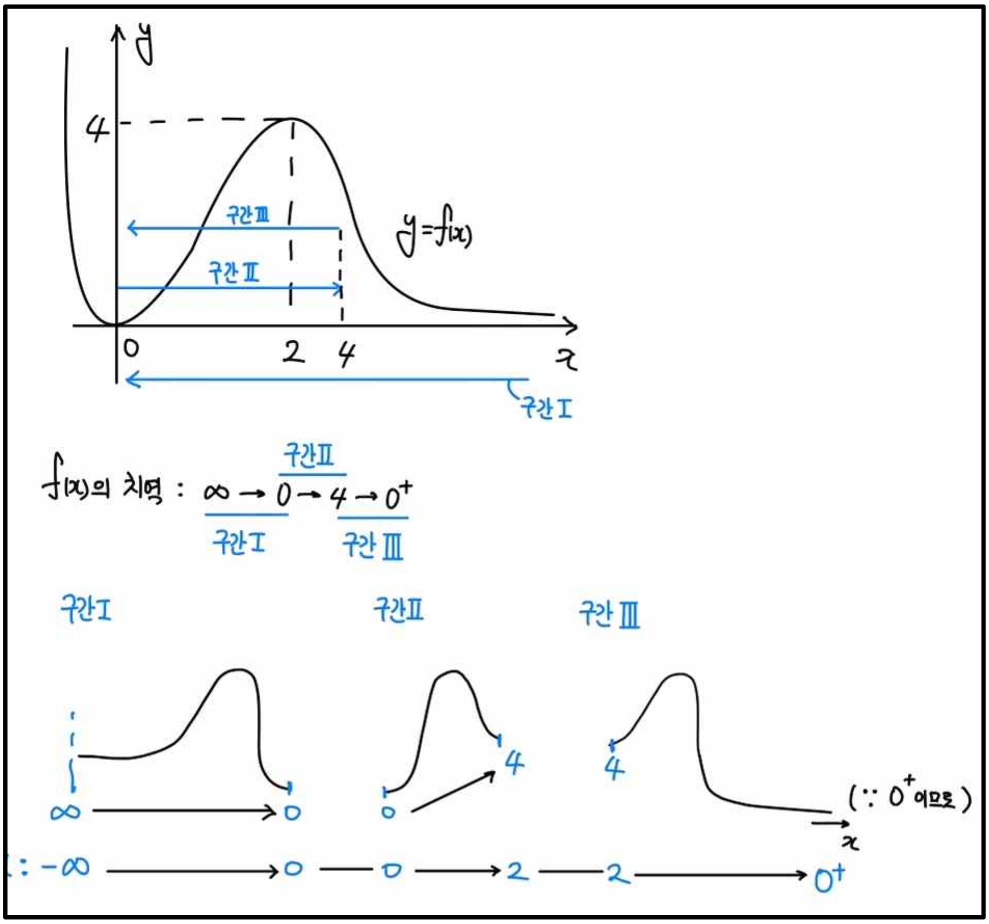
(단, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$)

합성함수를 그냥 그려볼까요?

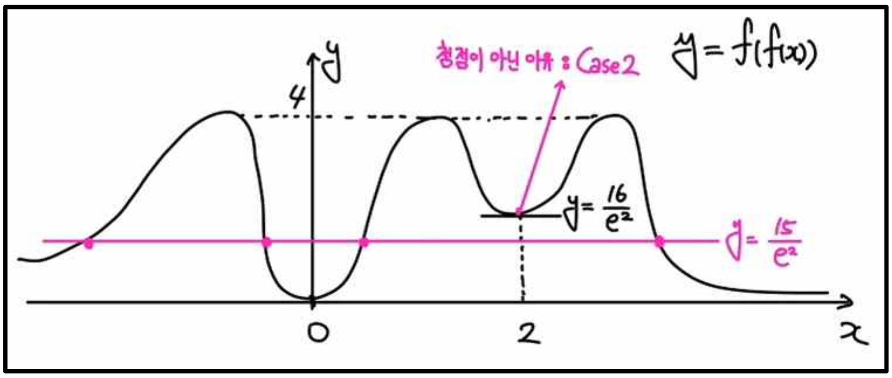
1. 속함수의 치역을 ‘정의역화’한다.

$f(x)$의 치역을 왼쪽부터 차례로 읽어줍시다...!
$\infty \to 0 \to 4 \to 0^+$ 이네요.

2. 정의역화된 속함수의 치역을 겉함수에 대입해 그린다.



3. 각각 그린 함수들을 부드럽게 연결해준다. (by Case2)



우와~ 합성함수 그리기 쉽죠?

합성함수를 그리지 않아도 식으로 문제가 풀리지만,

그릴 줄 안다는 건 합성함수에 대한 ‘이해’의 정도가 훨씬 깊어집니다.

그렇기에 그리지 않고 앞으로 문제를 풀으실 거라도 꼭 이 내용을 숙지하셔서

‘못’ 그리는 게 아닌, ‘안’ 그리시길 바랍니다 :)

이번엔 킬러 문제로 출제된 합성함수 문제를 살펴보겠습니다..!

2019. 09. 30. 가형 (e 모르시면, 해설의 g 모양 보고 푸시길 바랍니다.)

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다. (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$)

푸는 건 혼자 푸시고, 저랑 같이 풀어보겠습니다.

(가) : $h(x)$ 실근의 개수를 알려줌. --> $\{\alpha | f(\alpha)=0\}$일 때, $g(x)=\alpha$의 근이 4개.
(나) : $x=0$에서의 $h(x)$의 모양을 알려줌.
(다) : $h(x)$와 $y=8$의 교점 개수를 알려줌.

과연 어떤 조건 먼저 해석해야 할까요?

(가), (다) : $h(x)$의 전체 모양을 알아야 실근 개수 구할 수 있음.
(나) : $h(x)$의 $x=0$ 주변에서의 모양만 알아도 구할 수 있음.

우리는 $h(x)$는커녕, $f(x)$도 그리지 못합니다.
정확히 말하면, h의 조건을 f를 구하는 데에 이용해야 답인 $f'(5)$의 값을 구하겠죠.

따라서, $h(x)$의 전체가 아닌 '일부'만을 다루는 (나) 조건을 이용해야 합니다.

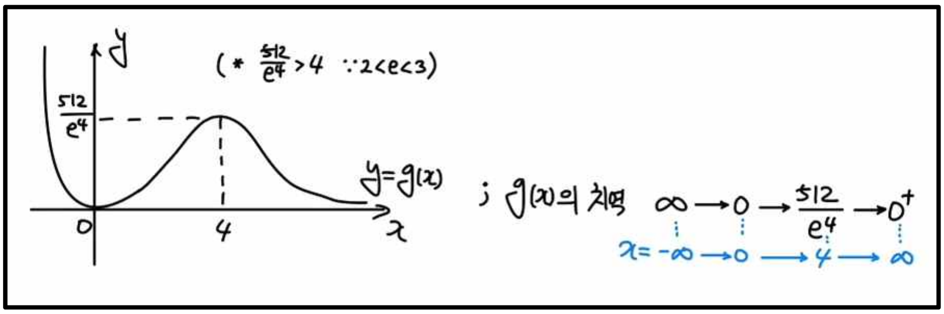
방금 한 작업은 합성함수 킬러 문제에서 어떤 조건부터 건드려야 할지의
지표가 되므로 기억해둡시다..!

그럼 (나) 조건부터 찬찬히 확인해봅시다!

(나) : $h(x)$는 $x=0$에서 극소를 가진다

그러면, $f(g(x))$를 미분해보자고요.
$h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$이네요. $g'(x)$의 부호를 $x=0$ 주변에서 살펴봅시다.

한 번 $g(x)$를 그려볼까요?



오호, $g'(x)$는 $x=0$ 주위에서 $(-)\to(+)$이네요.
$h'(x)$는 $x=0$ 주위에서 $(-)\to(+)$여야 하죠. ($\because h(x)\ has$ 극소)

즉, $f'(g(x))$는 부호가 $x=0$ 주위에서 $(+)$이네요.
$f'(g(x))=f'(\ )$; 정의역에 $g(x)$가 들어가죠.
$g(x)$ 의 함숫값을 보자고요. $f'(g(x))$가 새로운 합성함수라 생각하고 ㅎㅎ

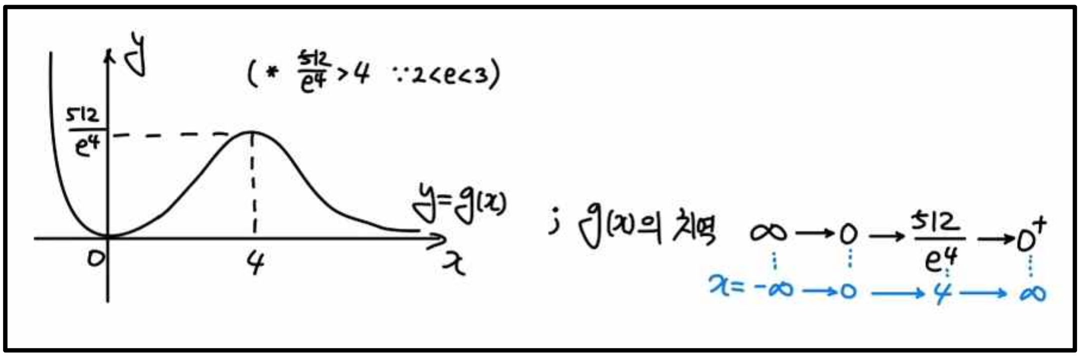
$g(x)$의 치역은 $x=0$ 주위에서 $0^+\to 0\to 0^+$이므로
$f'(g(x))$는 $f'(x)$를 $0^+\to 0\to 0^+$순으로 읽어주면 되는 것이죠..!

따라서, $x\geqq 0$에서 $f'(x)$의 부호가 $(+)$인거죠.

아시겠죠?
이제 다음 조건을 살펴보러 갑시다.

(가) : $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
--> $\{\alpha | f(\alpha)=0\}$일 때, $g(x)=\alpha$의 근이 4개. (α의 개수는 여러 개일 수 있습니다.)

$g(x)$ 그래프를 다시 생각해봅시다.



여기에 $y=\alpha$를 여러 개를 슥슥 그려서 총 교점의 개수가 4개여야 합니다.

1. $\alpha > \dfrac{512}{e^4}$: 1개

2. $\alpha = \dfrac{512}{e^4}$: 2개

3. $0 < \alpha < \dfrac{512}{e^4}$: 3개

4. $\alpha = 0$: 1개

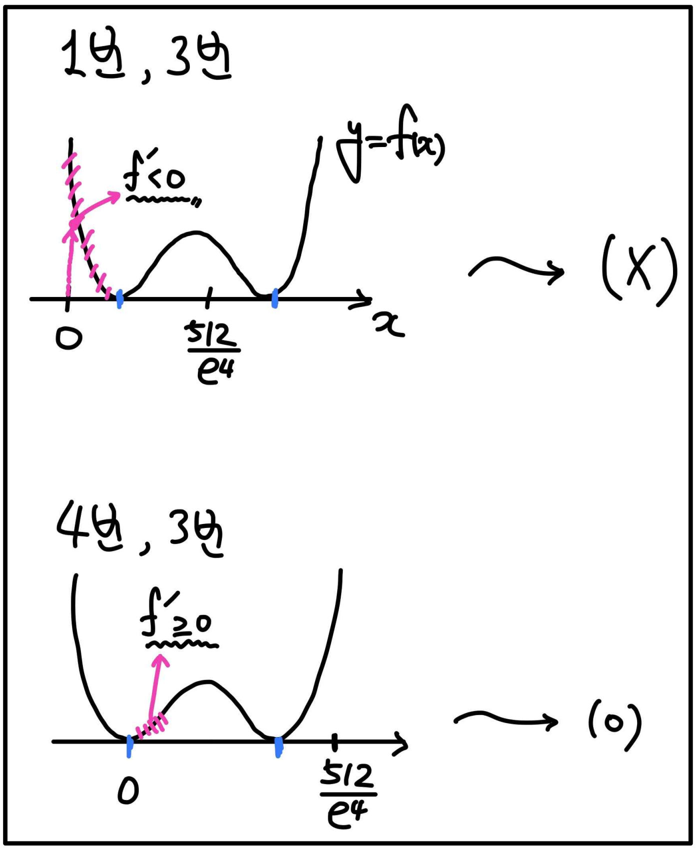
5. $\alpha < 0$: 0개

이 여러 가지를 합쳐서 총 4개가 되어야 합니다.
살펴보시면, (1개+3개) / (2개+1개+1개)의 조합뿐이네요. 번호로 바꿀게요.
(1개+3개) : 1번과 3번, 4번과 3번, 2번과 1번과 4번

α의 개수는 $f(\alpha)=0$이므로 $f(x)=0$의 근의 개수와 같습니다.
(2개+1개+1개)의 조합은 근이 3개인거죠. 하지만, 발문에서 뭐라 그랬나요?

---> $f(x)$의 최솟값이 0이다. 근이 3개면 절대 최솟값이 음수일 수밖에 없죠.
따라서, (1개+3개)의 조합만 가능하겠네요~
그럼 결국, 1개의 주인이 1번이나 4번이겠죠. 둘을 구별해야 합니다.

그림으로 살펴봅시다!

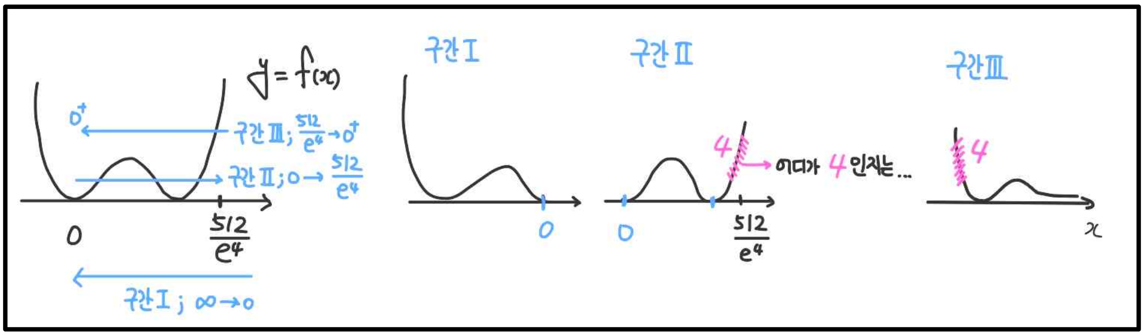


우리가 찾은 (나) 덕에 판별!!!

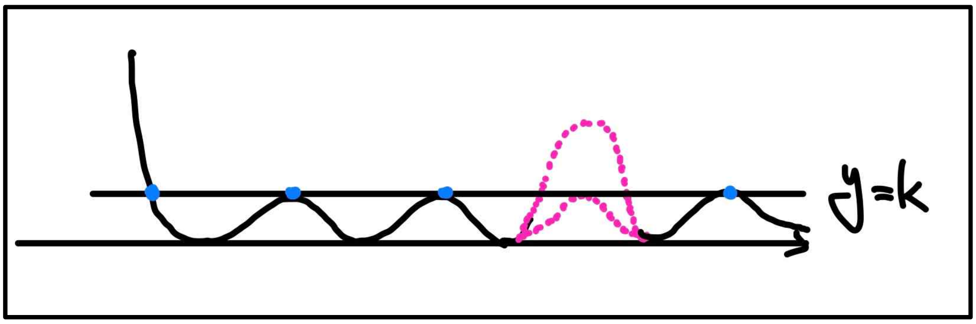
어떤가요? 여기까지 풀이가 참 논리적이죠.
어떤 문제가 나와도 이렇게 차근차근 풀 수 있도록 ‘유형화’를 잘 해놓으시길 바랍니다!

각설하고, 이제 (다) 조건을 봐봅시다.

$h(x)=8$의 실근 개수를 알기 위해 $h(x)$를 이제 그냥 그려버립시다..!
다만, ‘$f(x)=0$’의 0이 아닌 근이 정확히 나오지 않고 범위로 나와있기 때문에 정확히는 그려지지 않을 겁니다. 그 점 감안해서 그려보자고요.



각 구간 별로 그린 걸 합칩시다. (분홍색은 높이가 미정)



$k<8$: 분홍색이 $y=8$과 최대 교점 개수인 2개를 이루어줘도 교점이 3개네요 (X)
$k=8$: 분홍색 구간 제외 4개의 교점이므로 분홍색 구간의 최댓값 > 8이면 (O)
$k>8$: 분홍색 구간 제외 7개의 교점이네요. (X)

따라서 $k=8$이 확정적이네요. 아마 분홍색 구간 최댓값을 구하면 8보다는 클텐데, 필요하면 나중에 식 세울 때 쓰자고요..!

아하, 그렇다면 결국 겉함수인 $f(x)$, 4차함수의 극댓값 = k = 8이네요.

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-p)^2$이라고 하면, 극댓값 = $f(\frac{p}{2})$ = $\frac{p^4}{32}$ $=k=8$
$\therefore p^4=32\times 8 \rightarrow p=4$, $f'(5)$=30 답!!!

분명히 식으로 풀어도 풀 수 있겠지만, 합성함수를 그리는 데에 익숙해진 사람은 눈으로도 슥슥 그려버릴 수 있습니다.

그렇기에, 식으로 푸는 걸 즐겨하는 사람들도 이 방법을 알고 있다면,

검토할 때 써도 되고, 케이스를 점검할 때 대충 그려보고 바로 안되는 걸 확인하면

정확하고 빠르게 합성함수 문제를 풀 수 있을 겁니다.

그리고 잊지 마세요..! 조건들이 함수 전체를 그려야 하는 건지,

일부분만 그려도 되는 건지에 따라 문제 풀이 순서가 달라진다는 것을요!