

규 토
라이트
N 제

CONTENTS

규토 라이트 N제 오리엔테이션

책소개	6p
검토후기	8p
추천사	10p
규토 라이트 N제 100% 공부법	16p
규토 라이트 N제 추천 계획표	18p
규토 라이트 N제 학습법 가이드	24p
맺음말	26p

문제편

| 수열의 극한 |

1. 수열의 극한		2. 급수	
Guide Step	31p	Guide Step	73p
01. 수열의 수렴과 발산	32p	01. 급수의 수렴과 발산	74p
02. 극한값의 계산	37p	02. 등비급수	81p
03. 등비수열의 극한	43p	Training_1 Step	89p
Training_1 Step	47p	Training_2 Step	101p
Training_2 Step	57p	Master Step	117p
Master Step	69p		

| 미분법 |

1. 여러 가지 함수의 미분

Guide Step	123p
01. 지수함수와 로그함수의 극한	124p
02. 지수함수와 로그함수의 도함수	132p
03. 삼각함수의 덧셈정리	135p
04. 삼각함수의 극한	142p
05. 사인함수와 코사인함수의 도함수	146p
Training_1 Step	149p
Training_2 Step	163p
Master Step	181p

2. 여러 가지 미분법

Guide Step	185p
01. 함수의 몫의 미분법	186p
02. 합성함수의 미분법	190p
03. 매개변수로 나타난 함수의 미분법	195p
04. 음함수와 역함수의 미분법	198p
05. 이계도함수	204p
Training_1 Step	205p
Training_2 Step	213p
Master Step	223p

3. 도함수의 활용

Guide Step	227p
01. 접선의 방정식	228p
02. 함수의 그래프	233p
03. 방정식과 부등식에의 활용	241p
04. 속도와 가속도	244p
05. 다항함수×지수함수 형태의 그래프	246p
06. 합성함수의 그래프 그리기	249p
Training_1 Step	257p
Training_2 Step	269p
Master Step	281p

| 적분법 |

1. 여러 가지 적분법

Guide Step	291p
01. 여러 가지 함수의 적분	292p
02. 치환적분법	299p
03. 부분적분법	305p
Training_1 Step	309p
Training_2 Step	317p
Master Step	329p

2. 정적분의 활용

Guide Step	337p
01. 정적분과 급수의 합 사이의 관계	338p
02. 넓이와 부피	343p
03. 속도와 거리	348p
Training_1 Step	353p
Training_2 Step	361p
Master Step	373p

CONTENTS

해설편

| 빠른 정답 | 6p

| 수열의 극한 |

1. 수열의 극한

Guide Step	20p
Training_1 Step	25p
Training_2 Step	38p
Master Step	52p

2. 급수

Guide Step	56p
Training_1 Step	58p
Training_2 Step	72p
Master Step	95p

| 미분법 |

1. 여러 가지 함수의 미분

Guide Step	103p
Training_1 Step	108p
Training_2 Step	131p
Master Step	162p

2. 여러 가지 미분법

Guide Step	169p
Training_1 Step	173p
Training_2 Step	183p
Master Step	196p

3. 도함수의 활용

Guide Step	202p
Training_1 Step	210p
Training_2 Step	234p
Master Step	256p

| 적분법 |

1. 여러 가지 적분법

Guide Step	290p
Training_1 Step	298p
Training_2 Step	313p
Master Step	337p

2. 정적분의 활용

Guide Step	365p
Training_1 Step	367p
Training_2 Step	378p
Master Step	391p

오리엔테이션

책소개

검토후기

추천사

규토 라이트 N제 100% 공부법

규토 라이트 N제 추천 계획표

규토 라이트 N제 학습법 가이드

맺음말

개념과 기출을 이어주는 bridge 역할의 교재

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

개념, 유형, 기출을 한 권으로 Compact하게

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과서 개념, 실전개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다.

단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.

교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

2. **T**raining - 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여 수능최적화 자작으로 구성하였습니다.

기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.

단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

3. **T**raining - 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.

필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.

실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.

과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도

1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.

규토 라이트 N제 미적분의 경우 총 871제이고

문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야할지 갈피를 못잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학적 성적이 잘 오르지 않는 학생

문지유 / 울산대학교 의예과

안녕하세요! 울산대학교 의과대학 20학번 재학 중인 문지유입니다. 문제집 검토는 항상 신경이 많이 쓰이고 떨리네요 ㅎㅎ

2019학년도 현역 수능 국어에서 역대급 불수능을 맛봤던 그때가 아직도 생생합니다. 2교시 수학 시간에 시간 부족으로 30번은 찍고 나와서 96점이라 생각했는데, 이게 웬걸? 저녁에 집에서 채점을 해 보니 도형의 극한 문제 계산 실수로 인해 92점을 받았더라고요. 현역 수능 이전에 그 어떤 모의고사에서도 계산 실수를 한 적 없는 제가... 그때 느꼈던 어이 없고 허무한 감정은 평생 잊을 수 없을 겁니다. 2020학년도 재수 수능 수학은 전년도보다 난이도가 낮아서 그런 건지, 혹은 그래도 1년 더 공부해서 그런 건지 모르겠지만! 30분 정도 시간이 남더군요. 원래는 검토를 잘 안 하던 타입이라서, 검토를 할까 말까 고민하던 차에 그래도 재수생이고 시간도 남았는데 검토를 해야 하지 않나 싶어 검토하던 와중, 식은땀이 등에 짝 흐릅니다. 30번 풀이를 검토하던 도중 계산 실수를 발견하고 이를 고쳐 100점. 검토를 하지 않았다면 입시 결과가 바뀌었겠죠? 이처럼 나름 스펙타클한(?) 감정을 겪었던 저는 지금도 검토가 참 중요하다고 수험생들에게 강조, 또 강조합니다. 실수도 실력이라는 말이 괜히 나오는 게 아니라는 거죠. 검토까지도 실력!

서론이 길었네요! 고등학생 때부터 재수생 시절까지, 온갖 기출문제집과 사설문제집을 넘나들며 풀었던 저는 원하는 입시 결과를 거머쥐고 꼭 대치동 현장강의 조교로 일하거나 문제집 검토 및 문제 만드는 일을 하고 싶었어요. 여러분들 중에서도 그런 사람이 있을 거라고 생각하고요. 우연히 좋은 기회로 제 버킷 리스트 중 하나인 문제집 검토 일을 하게 되어서 정말 영광입니다 :)

문제 및 해설 검토를 진행할 때 제가 가졌던 마음가짐은 바로 이 책을 보며 공부하는 학생의 입장이 되어 생각해보는 것이었어요. 인터넷 강의가 많은 요즘은 강의를 들으며 이해를 하고 QnA 게시판에 질문을 남기고 답변을 받아 공부 가능합니다. 오류나 오타자 이외에도, 이 교재를 오롯이 혼자 보며 공부하는 수험생 여러분들이 온전히 이 문제집에 적혀 있는 글을 보고 이해하고 납득할 수 있겠는가, 혹시 보는 사람이 헛갈리도록 쓰여진 것은 없는가, 보기 불편한 점은 없는가를 위주로 어순, 줄 바꿈, 문장의 위치까지 꼼꼼히 검토했습니다.

2023 규토 라이트 N제는 고3 학생들 뿐만 아니라 중학생, 고1, 고2 학생들이 선행학습을 할 때에도 활용하기 좋을 것 같아요. 개념 설명이 간단하면서도 명료하고 깔끔하게 되어 있으면서도, 중요한 포인트를 놓치지 않는 꼼꼼한 교재입니다. 개념 공부를 하며 바로바로 이해했는지 확인할 수 있는 예제 문제가 해설과 함께 중간중간 실려 있습니다. 기본 개념을 가지고 풀 수 있는 난이도가 그리 높지 않은 Guide Step 문제부터, 유형별로 개념을 적용하여 풀 수 있는 문제(Traning - 1Step), 단원별 역대 기출들(Training - 2Step), 고난도를 연습할 수 있는 Master Step까지. 개념 공부와 함께 문제풀이를 곁들여 밸런스 있는 공부를 하기 최적화된 문제집이라고 생각합니다.

새해가 밝았습니다. 학년이 바뀌고, 나이도 어느덧 한 살 더 먹은 여러분이 규토 라이트 N제와 함께 새로운 마음으로 산뜻하게 공부하셔서, 이 교재를 풀면서 성장하는 것을 스스로 느꼈으면 좋겠습니다. 뿌듯한 한 해 되세요! 파이팅 :D

조운환 / 대성여자고등학교 교사

규토 라이트 N제는 개념 설명 + 기출 문제 + 자작 N제로 구성되어 있어 세 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 독학서입니다. 특히 수능 대비에 알맞은 컴팩트한 볼륨의 Guide step(개념 익히기편)에서 수능에 자주 출제되는 중요한 개념을 빠르게 훑고 문제 풀이로 넘어갈 수 있습니다. Guide step에서는 실전에서 사용할 수 있는 유용한 테크닉과 학생들이 개념을 공부하면서 궁금할 수 있는 포인트까지 따로 자세하게 설명해주어서 교과서나 시중 개념서에서 해결할 수 없는 의문점까지 해결할 수 있습니다.

기출 문제에 추가로 자작 문제가 포함되어 있어서 트렌디한 평가원 스타일의 문제를 다양하게 풀어볼 수 있다는 것은 규토 라이트 N제만의 큰 장점이라고 생각합니다.

저자의 TIP이 문제집과 해설집 곳곳에서 여러분들을 도와줄 것입니다. 규토 시리즈 특유의 유쾌한 해설이 무척 상세해서 규토 라이트 N제로 공부하다 보면 친절하고 과외선생님이 옆에서 설명해주는 듯한 느낌을 받을 수 있을 것입니다. 특히 책 안에 나와있는 규토 시리즈의 100% 공부법을 참고하면 수학 공부 방법에 고민이 많은 학생들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

정지영 / 울산대학교 의예과

안녕하세요! 무려 3권째 검토 중인 신입 검토자 정지영입니다. 검토는 할수록 떨리는 신기한 작업이네요.

이번 규토 라이트 N제 미적분에서 눈에 띄었던 장점은, 친절하고 세세한 설명과 교재의 유기성이었습니다. 미적분의 논리를 글로 설명하기가 쉽지 않은데, 가독성과 상세함 모두 잡은 해설이 인상 깊었습니다. Training step의 기본적인 문항부터 Master step의 킬러문항들까지 어렵지 않게 따라오실 수 있을 만큼, 깔끔한 설명이라고 생각합니다. 또한 같은 설명이 너무 반복되지 않도록 해설에서 같은 논리를 쓰는 문항들을 연계해서 설명해 주는 부분, 공통 수학의 심화 교육과정인 만큼 수2의 논리를 이용할 때에는 수2 교재의 내용과 연계해서 설명해 주시는 부분 등, 미적분 교재 자체의 완성도뿐만 아니라 시리즈로서의 완성도 역시 칭찬 부분이 눈에 띄었습니다. 문항들 역시 기초부터 킬러까지 다양한 난이도로 구성되어 있어서, 규토 '라이트'지만, Guide step의 상세한 설명과 함께 Tip를 꼼꼼히 살피며 책에 있는 논리들을 모두 섭렵할 수 있다면, 이 책만으로도 수능 만점을 받을 수 있을 정도로 완성도와 퀄리티 모두 높은 교재입니다. 규토 라이트 N제와 공통수학을 함께 해오신 학생 여러분, 혹은 규토 라이트 N제를 미적분으로 처음 접하시는 분들 모두에게 도움이 되는 교재라고 생각합니다.

설 연휴도 지나고, 새로운 입시가 시작되네요. 긴장감, 막막함, 부담감 등 많은 감정이 교차하는, 힘든 시간이 될 거예요. 하지만 뒤돌아보았을 때 아쉬움 없는 한 해를 보내시기를 기원하고, 그 과정에서 규토 N제가 도움이 될 수 있다면 좋겠습니다. 감사합니다 :)

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하십니까, 2023 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다.

작년으로 첫 문, 이과 통합형 수능 수학 영역을 치게 됐습니다. 확통, 미적, 기하 영역이 뒤로 간 만큼 앞부분 수1, 2 공통영역의 중요성이 훨씬 올라가고, 본래 이전 (가)형이면 필수로 응시해야 했던 미적분이 선택영역으로 바뀌었습니다.

예나 지금이나 미적분은 어려운 과목으로 분류되고 있습니다. 필수로 외워야 하는 여러 공식들, 수2보다 많은 계산량, 복잡한 함수들로 이루어진 어려운 문제 등 때문입니다. 규토 라이트 N제 미적분은 기본적인 개념은 쉽고 자세하게 알려주고, 도형급수, 미분과 적분의 활용과 같은 어려운 문제들을 풀 때의 사고방식과 노하우를 알려줍니다. 책의 내용을 모두 체화하고 모든 문제들을 마스터한다면, 미적분 영역 선택시 고득점은 어렵지 않게 받을 겁니다.

마지막으로 2023 규토 시리즈로 공부하신 모든 수험생 여러분께, 올해 수능 대박을 기원합니다!

수능 수학의 시작과 마무리, 규토 라이트 N제 (오세욱)

—규토 N제 수1,수2,미적분 풀커리(라이트~고득점)로 수능 미적분 백분위 98% 달성 후기—

저는 현역 때 운 좋게 대학입시에 성공해 인서울 대학에 합격했지만 수능에 미련이 남아있는 학생 중 한명이었습니다. 수학을 잘한다고 생각했고 자부심을 가지고 있었지만 막상 수능에서는 3등급 백분위 78을 받았습니다. 수능 시험장에서 문제를 풀면서 ‘나는 개념을 놓치고 있고 조건을 해석할 줄 모르는구나’를 깨달았습니다.

그렇게 대학에 진학했다는 생각으로 놀며 2020년을 보냈고 2021년이 되자 이대로 끝내면 후회가 남을 것 같다는 생각에 다시 한번 입시 속으로 뛰어들었습니다. 대학을 병행하며 진행하고 싶었기에 과외나 학원을 다니기에는 시간이 촉박하다고 판단하여 구매하게 된 책이 바로 과외식 해설을 담은 ‘규토 라이트 N제’입니다.

규토 라이트 N제를 만나게 되면서 앞에 적힌 공부방법에 따라 개념 부분과 개념형 유제부터 자세히 읽고 풀어보며 사소하지만 실전 문제풀이에 도움이 되는 팁을 얻었습니다. 또한 함께 실린 자작문제와 기출문제에 개념을 적용해 풀며 답안지와 내 풀이의 차이점을 비교하였고 잘못되게 풀이한 부분이 있다면 다시 한번 적어보며 틀린문제는 풀이의 길을 외울 정도로 반복해서 풀었습니다. 솔직히 이러한 과정이 빠르고 쉽다 한다면 거짓말입니다. 처음 시작할 때는 막막할 정도로 문제가 벽으로 느껴졌고 모르면 아직도 모르는게 많다는 것에 화가 나기도 했습니다. 하지만 한 문제, 한 단원 넘어갈 때마다 확실하게 개념이 탄탄해지고 새로운 문제를 만나도 개념을 중심으로 풀이가 진행되는 경우가 많아 자신감과 재미를 느끼게 되었습니다. 이렇게 수1, 수2부터 미적분까지 3권을 모두 마무리하고 반복하여 풀이하다 보니 평가원 시험에서 고정적으로 1등급을 받게 되었습니다.

규토 라이트 N제는 이름과 달리 절대 ‘라이트’ 하지만은 않습니다. 선택과목 체재에서 규토 라이트 N제는 시작이며 마무리인 단계입니다. 기출을 이미 많이 접해본 N수나 고3분들 중 컴팩트하고 완전하게 개념과 기출을 정리하고 싶은 분들부터 수능 수학을 처음으로 공부해 개념을 탄탄하게 쌓고 싶은 분들까지 규토 라이트 N제를 자신있게 추천드립니다.

[중요] 만약 책을 구매하게 된다면, 규토 선생님의 방법으로 공부하세요.

추신) 여담으로 타 문제집(썬)과 규토 라이트 N제를 비교하는 글이 많아 두 문제집 모두 풀어본 입장에서 남긴다면 해설의 자세함, 친절도, 수능 수학을 할 때 필요한 문제의 질, 개념의 자세함 모두 규토 라이트 N제가 좋다고 생각합니다. 그리고 N제라는 이름 때문에 그런지 몰라도 두 책의 목적은 완전하게 다른데 비교하는 경우가 많은 것 같습니다. 이 책은 자세한 개념부터 심화문제(30번)까지 모두 다룹니다. 과장없이 미적분2022평가원문제 모두 이 책에 있는 문제를 규토 선생님의 방식으로 다뤘다면 모두 맞출 수 있었다고 생각합니다.

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데요. 9월부터 규토 라이트로 두 달동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데요. 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다.

첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 얻어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻔한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데요, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사실 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. 'theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑갈게 느껴질 때 비로소 이해한 것'이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

추천사

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 -> 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1,2학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해주었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

추천사

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지도 풀더라구요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해야겠다는 생각을 했습니다. 어쩌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부 한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정이 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산 문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까. 교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에서 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됐고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제량과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.

개념익히기와 <1 step> 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 될텐데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.

다음으로는 제가 가장 애정했던 <2 step> 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수 있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됐던 step이었습니다. 하지만 이 단계부터 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하시분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 <2 step>만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니다. 꼭 여러 번 회독하셔서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리할 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니다. <2 step>를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이있습니다.) 역시나 기출의 반복이었습니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니다.

추천사

마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전날까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니더라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니다. 시간이 조금만 남았더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.

끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학이 힘든신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문제집을 보자니 너무 두껍고 양이 많습니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 컨텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다.

코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다.

많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, “이 책을 공부하는 방법(?)”이 마치 과외를 받는 기분이 들도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다.

규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갇아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고 보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다.그 령게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.

책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다.

늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다.!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

01 수열의 수렴과 발산

성취 기준 | 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

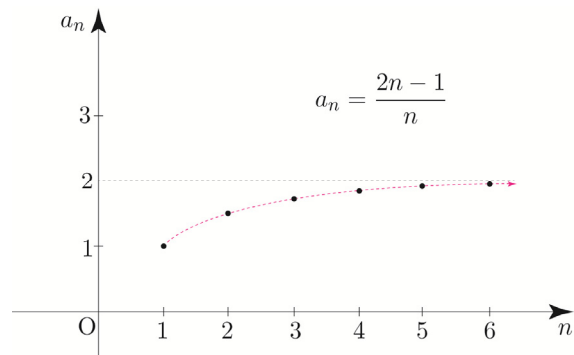
개념 파악하기 (1) 수열의 수렴과 발산이란 무엇일까?

수열의 수렴

수열 $\{a_n\} : 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots$

에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$ 을 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.

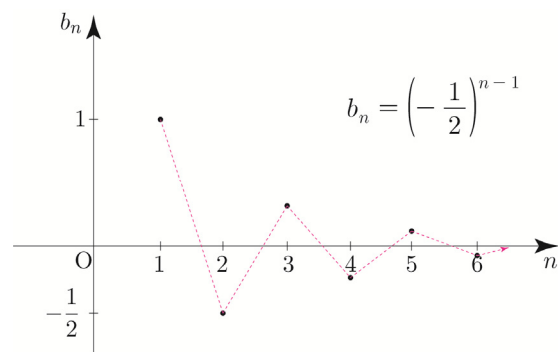
오른쪽 그래프에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $\frac{2n-1}{n}$ 의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



한편 수열 $\{b_n\} : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$

에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{b_n\}$ 을 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.

오른쪽 그래프에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



일반적으로 수열 $\{a_n\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$ 은 α 에 수렴한다고 한다.

이때 α 를 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 또는 극한이라고 하고, 기호로

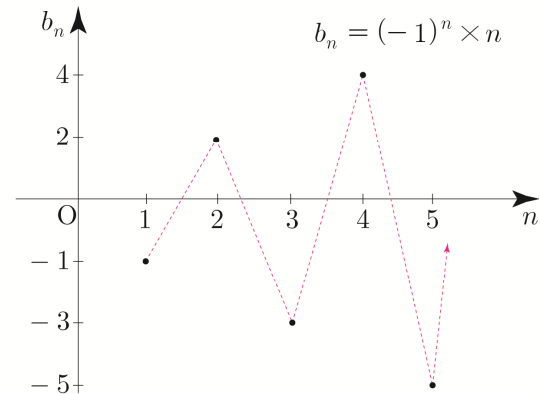
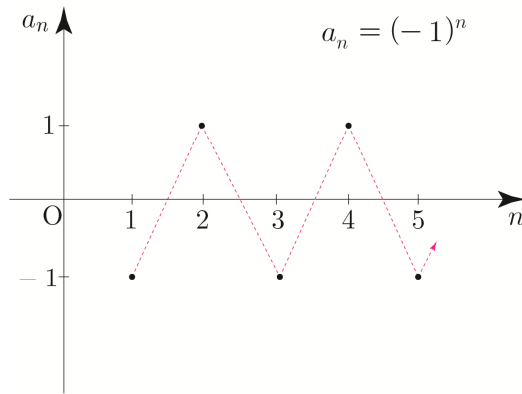
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 또는 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $a_n \rightarrow \alpha$ 와 같이 나타낸다.

ex $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

한편 발산하는 수열 중에서 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는 경우에 대해 알아보자.

$$\{a_n\} : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$\{b_n\} : -1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \times n, \dots$$



위 그래프에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 $(-1)^n$ 의 값은 교대로 -1 과 1 이 되고, 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항 $(-1)^n \times n$ 의 값은 교대로 음수와 양수가 되면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다. 이처럼 어떤 수열이 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 그 수열은 진동한다고 한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 수렴과 발산

① 수렴 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (단, α 는 실수)

② 발산 : $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty & (\text{양의 무한대로 발산}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty & (\text{음의 무한대로 발산}) \\ \text{진동} \end{cases}$

Tip 1 수열의 발산의 개념은 그래프를 통해 직관적으로 이해하면 된다.

Tip 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \pm 1$ 로 나타내거나 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \times n = \pm \infty$ 와 같이 나타내지 않도록 유의한다.

Tip 3 수렴하지 않는 모든 수열을 발산한다고 하고, 발산하는 수열은 양의 무한대로 발산, 음의 무한대로 발산, 진동 이렇게 세가지로 분류할 수 있다. 즉, 진동도 발산의 일종임을 기억하자.

Tip 4**〈진동하는 수열〉**

수열 $\{(-1)^n\}$ 과 같이 항의 번호가 커짐에 따라 특정한 값(-1 or 1)으로 반복되는 경우도 있고 수열 $\{(-1)^n \times n\}$ 과 같이 항의 번호가 커짐에 따라 항의 부호가 번갈아 바뀌고 절댓값은 한없이 커지는 경우도 있다.

진동하는 수열이 수렴하지 않음을 보이고 싶을 때는 다음 정리를 이용할 수 있다.

“수열 $\{a_n\}$ 이 α 에 수렴하면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 부분수열도 α 에 수렴한다.”

(부분수열 : 수열 $\{a_n\}$ 에서 일부항들만 가지고 늘어놓은 새로운 수열)

ex1 수열 $\{(-1)^n\}$ 에서 홀수항들만을 늘어놓은 부분수열 $\{(-1)^{2n-1}\}$ 은 모든 항이 -1이므로 극한값이 -1이고, 짝수항들만을 늘어놓은 부분수열 $\{(-1)^{2n}\}$ 은 모든 항이 1이므로 극한값이 1이다. 두 부분수열의 극한이 다르므로 수열 $\{(-1)^n\}$ 은 수렴하지 않는다.

ex2 수열 $\{(-1)^n \times n\}$ 에서 홀수항들만을 늘어놓은 부분수열 $\{(-1)^{2n-1} \times (2n-1)\}$ 은 음의 무한대로 발산하고, 짝수항들만을 늘어놓은 부분수열 $\{(-1)^{2n} \times 2n\}$ 은 양의 무한대로 발산한다. 두 부분수열의 극한이 다르므로 수열 $\{(-1)^n \times n\}$ 은 수렴하지 않는다.

■ 예제 1

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.

(1) $\{1 + \sin n\pi\}$

(2) $\{3 + (-1)^n\}$

|| 풀이 ||

(1) 일반항을 $a_n = 1 + \sin n\pi$ 라고 하면 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 1, 1, ...이므로 1에 수렴한다.

(2) 일반항을 $b_n = 3 + (-1)^n$ 이라고 하면 수열 $\{b_n\}$ 은 2, 4, 2, 4, 2, 4, ...이므로 발산한다. (진동)

■ 개념 확인문제 3

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하시오.

(1) $\{-n^2\}$

(2) $\{(-3)^{n-1}\}$

(3) $\{\cos n\pi\}$

(4) $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

예제 2

다음 극한값을 구하시오.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + 5}{n^2 + n + 1}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$$

풀이

(1) 풀이1) 정석적 방법

분자와 분모를 각각 분모의 최고차항인 n^2 으로 나눈 후 극한값을 구하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + 5}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 2$$

풀이2) 실전적 방법

실전에서는 분자, 분모에서 제일 큰 차수들의 계수만 비교하면 된다.

$n \rightarrow \infty$ 일 때, $2n^2 + 4n + 5$ 는 $2n^2$ 으로 봐도 된다.

n 이 무한대로 가는 상황에서 $4n + 5$ 는 $2n^2$ 과 비교했을 때 “새 밭의 피”이기 때문이다.

이를 이용하면 분자와 분모의 최고차항은 n^2 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + 5}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$ 이다.

(2) 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 각각 $\sqrt{n^2 + 4n} + n$ 을 곱하여 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 4n} - n)(\sqrt{n^2 + 4n} + n)}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 4n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} = \frac{4}{1 + 1} = 2 \end{aligned}$$

마지막 과정을 실전적 방법으로 계산하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n} = 2$ 이다.

Tip1 $\infty - \infty$ 꼴의 극한값을 계산할 때 무리식이 있으면 분모를 1로 생각하고 분자를 유리화하여 계산한다.

Tip2 조심해야 할 포인트는 (2)번과 같이 유리화를 필요로 하는 $\infty - \infty$ 꼴의 극한값을 계산하려면 반드시 전자, 후자의 최고차항의 차수와 계수가 모두 같은지 확인해줘야 한다.

즉, 최고차항의 차수와 계수가 같지 않다면 굳이 유리화를 할 필요가 없고 $\frac{\infty}{\infty}$ 로 처리하면 된다.

ex1 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n} - n) = \infty$

$n \rightarrow \infty$ 일 때, $\sqrt{n^4 + n} \cong n^2$ 이므로 $\sqrt{n^4 + n}$ 의 차수가 n 의 차수보다 더 크다. 따라서 이 경우 양의 무한대로 발산한다.

ex2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 - n} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$

분모에서 전자, 후자의 최고차항의 계수가 다르기 때문에 유리화하지 말고 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 처리해주면 된다.

ex3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n} = 2$

$\infty - \infty$ 꼴이 아니므로 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 처리해주면 된다.

개념 파악하기

(3) 수열의 극한의 대소를 비교할 수 있을까?

수열의 극한의 대소 관계

수렴하는 수열의 극한에서는 다음과 같은 대소 관계가 성립한다.

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (단, α, β 는 실수)일 때

- ① 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n$ 이면 $\alpha \leq \beta$ 이다.
- ② 수열 $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면 수열 $\{c_n\}$ 은 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ 이다.

Tip 1 수열의 극한의 대소 관계는 구체적인 예를 통해 직관적으로 이해하면 된다.

Tip 2 c_n 의 극한값을 직접적으로 구할 수 없을 때, 대소 관계($a_n \leq c_n \leq b_n$)를 이용하여 c_n 의 극한값을 간접적으로 구할 수 있다.

Tip 3 ①에서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < b_n$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 인 경우도 있다.

예를 들어 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < b_n$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이다.

마찬가지로 ②에서도 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{3}{n}$, $c_n = \frac{2}{n}$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n < c_n < b_n$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 이다.

Tip 4 ②를 수열의 샌드위치 정리라고도 부른다.

■ 예제 5

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{2n-2}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2n+3}{n+1}$ 를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

|| 풀이 ||

모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{2n-2}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2n+3}{n+1}$ 이고

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-2}{n+1} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 이다.

■ 개념 확인문제 8

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{5n^2-5}{n+1} \leq a_n \leq \frac{5n^2+4}{n+1}$ 를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하시오.

Training – 1 step

필수 유형편

1. 수열의 극한

8 Theme x^n 을 포함한 수열의 극한
(x 의 값이 정해지지 않은 경우)

039

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1} + 4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1} + 1} = 4$$

가 되도록 하는 모든 정수 k 의

개수를 구하시오.

040

함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 5}{x^{2n} + 1}$ 에 대하여

$f(-2) + f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2)$ 의 값은?

- ① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

041

정의역이 양수인 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + 4x}{x^n + 1}$ 에 대하여

$\sum_{k=1}^{11} f\left(\frac{k}{4}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{45}{2}$ ② 23 ③ $\frac{47}{2}$
④ 24 ⑤ $\frac{49}{2}$

042

함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} + 6x}{x^{2n} + 1}$ 에 대하여

$(f \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.

043

함수 $f(x) = -2|x-1|+2$ 에 대하여

함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{1+f(x)\}^{2n} - 2}{\{1+f(x)\}^{2n} + 2}$$

이다. 실수 $k(k \geq 0)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = kx^2 - 1$ 의 서로 다른 두 실근을 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

— | 보기 | —

- ㄱ. $k=0$ 이면 $\beta - \alpha + g(\alpha) + g(\beta) = 1$ 이다.
ㄴ. $k > 0$ 이면 $-1 < f(\alpha) < 0$ 이다.
ㄷ. $k = \frac{1}{4}$ 이면 $\beta + g(\beta) = 3$ 이다.
ㄹ. $\frac{1}{4} < k < 1$ 이면 $g(\alpha) + g(\beta) = 0$ 이다.
ㅁ. $0 < k < \frac{1}{4}$ 이면 $g(\alpha) + g(\beta) = -2$ 이다.

Guide step

개념 익히기편

2. 급수

01 급수의 수렴과 발산

성취 기준 | 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

개념 파악하기 (1) 급수의 수렴과 발산이란 무엇일까?

급수의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 덧셈 기호 $+$ 로 연결한 식 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ 을 **급수**라 하고,

기호 \sum 를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다. 또 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n ,

즉 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 이 급수의 제 n 항까지의 **부분합**이라 한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$ 이 일정한 값 S 에 수렴할 때,

즉 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ 일 때, 이 급수는 S 에 수렴한다고 한다.

이때 S 를 이 **급수의 합**이라 하고, 이것을 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 와 같이 나타낸다.

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$ 이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

Tip 1 $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 이다.

Tip 2 급수의 합은 부분합으로 이루어진 수열 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ 의 극한으로 정의한다.

ex1 급수 $1+3+5+\dots+(2n-1)+\dots$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면
 $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$ 이다. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

ex2 급수 $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면
 $S_n = \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$ 이다. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} = \frac{1}{2}$ 이므로
 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$ 에 수렴한다.

Tip 3 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴을 혼동하지 않도록 유의해야 한다.

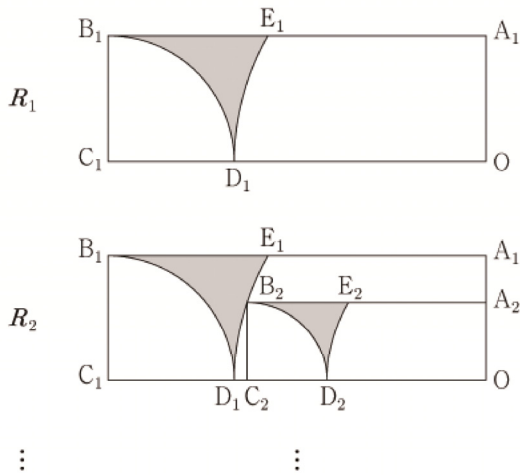
수열 $\{a_n\}$ 의 수렴, 발산은 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 조사하는 것이고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴, 발산은 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 조사하는 것이다.

Training – 2 step

기출 적용편

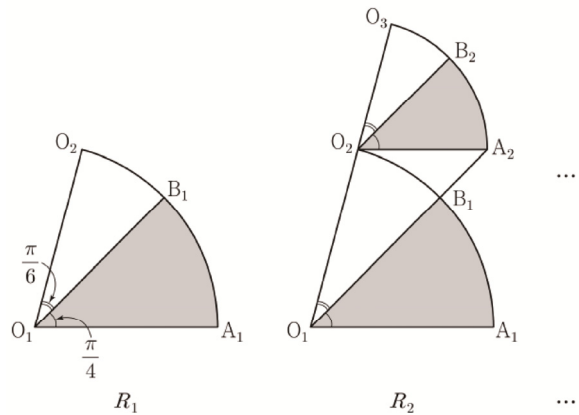
2. 급수

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$ 인 직사각형 $OA_1B_1C_1$ 이 있다. 중심이 C_1 이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$ 인 원과 선분 OC_1 의 교점을 D_1 , 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $\overline{OD_1}$ 인 원과 선분 A_1B_1 의 교점을 E_1 이라 하자. 직사각형 $OA_1B_1C_1$ 에 호 B_1D_1 , 호 D_1E_1 , 선분 B_1E_1 로 둘러싸인 ∇ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 선분 OA_1 위의 점 A_2 와 호 D_1E_1 위의 점 B_2 , 선분 OD_1 위의 점 C_2 와 점 O 를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 3 : 1$ 인 직사각형 $OA_2B_2C_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$ 에 ∇ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{7}{9}\pi$
- ② $5 - \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{35}{36}\pi$
- ③ $6 - \sqrt{3} - \frac{7}{6}\pi$
- ④ $7 - \frac{7\sqrt{3}}{6} - \frac{49}{36}\pi$
- ⑤ $8 - \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{14}{9}\pi$

그림과 같이 중심이 O_1 , 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$ 인 부채꼴 $O_1A_1O_2$ 가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1 을 $\angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{4}$ 가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 점 O_2 를 지나고 선분 O_1A_1 에 평행한 직선이 직선 O_1B_1 과 만나는 점을 A_2 라 하자. 중심이 O_2 이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$ 인 부채꼴 $O_2A_2O_3$ 을 부채꼴 $O_1A_1B_1$ 과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2 를 $\angle A_2O_2B_2 = \frac{\pi}{4}$ 가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]

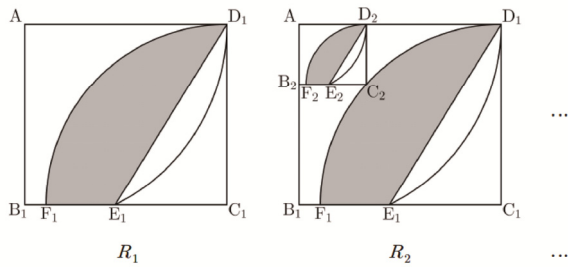


- ① $\frac{3\pi}{16}$
- ② $\frac{7\pi}{32}$
- ③ $\frac{\pi}{4}$
- ④ $\frac{9\pi}{32}$
- ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

081 | 2022학년도 사관학교 미적분

그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=\sqrt{5}$ 인 직사각형 $AB_1C_1D_1$ 이 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_1}$ 인 원과 선분 B_1C_1 의 교점을 E_1 , 중심이 C_1 이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$ 인 원과 선분 B_1C_1 의 교점을 F_1 이라 하자. 호 D_1E_1 과 두 선분 D_1E_1 , F_1E_1 로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

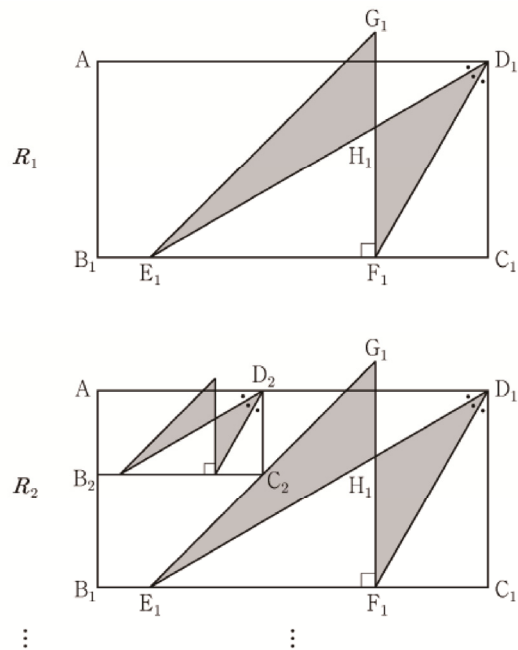
그림 R_1 에서 선분 AB_1 위의 점 B_2 , 호 D_1E_1 위의 점 C_2 , 선분 AD_1 위의 점 D_2 와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2} : \overline{AD_2} = 2 : \sqrt{5}$ 인 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 를 그린다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_2}$ 인 원과 선분 B_2C_2 의 교점을 E_2 , 중심이 C_2 이고 반지름의 길이가 $\overline{C_2D_2}$ 인 원과 선분 B_2C_2 의 교점을 F_2 라 하자. 호 D_2E_2 와 두 선분 D_2E_2 , F_2E_2 로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{8\pi+8-8\sqrt{5}}{7}$
- ② $\frac{8\pi+8-7\sqrt{5}}{7}$
- ③ $\frac{9\pi+9-9\sqrt{5}}{8}$
- ④ $\frac{9\pi+9-8\sqrt{5}}{8}$
- ⑤ $\frac{10\pi+10-10\sqrt{5}}{8}$

082 | 2022학년도 고3 9월 평가원 미적분

그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$ 인 직사각형 $AB_1C_1D_1$ 이 있다. $\angle AD_1C_1$ 을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점 중 점 B_1 에 가까운 점을 E_1 , 점 C_1 에 가까운 점을 F_1 이라 하자. $\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1 = \frac{\pi}{2}$ 이고 선분 AD_1 과 선분 F_1G_1 이 만나도록 점 G_1 을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$ 을 그린다. 선분 E_1D_1 과 선분 F_1G_1 이 만나는 점을 H_1 이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$ 로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 선분 AB_1 위의 점 B_2 , 선분 E_1G_1 위의 점 C_2 , 선분 AD_1 위의 점 D_2 와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : 2$ 인 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$ 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$
- ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$
- ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$
- ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Master step

심화 문제편

2. 급수



그림과 같이 $\overline{A_1B_1} = 2\sqrt{2}$, $\overline{B_1C_1} = \sqrt{2}$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 선분 C_1D_1 의 중점을 E_1 이라 할 때, 선분 B_1E_1 을 지름으로 하는 원과 선분 A_1B_1 의 교점 중 B_1 이 아닌 점을 F_1 라 하자. 중심이 D_1 이고 호 E_1F_1 에 접하는 원과 두 선분 C_1D_1 , A_1D_1 의 교점을 각각 G_1 , H_1 라 하자.



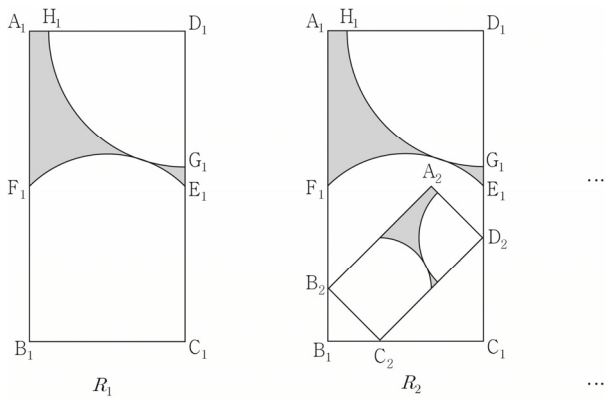
직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 두 호 E_1F_1 , G_1H_1 과 세 선분 A_1F_1 , A_1H_1 , E_1G_1 로 둘러싸인  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에 선분 F_1B_1 위의 점 B_2 , 선분 B_1C_1 위의 점 C_2 , 선분 E_1C_1 위의 점 D_2 를 선분 C_2D_2 가 선분 B_1E_1 과 평행하고 $\overline{B_2C_2} : \overline{C_2D_2} = 1 : 2$ 이 되도록 잡아 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에  모양을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?



- ① $\frac{45}{14} - \frac{9}{28}(7 - 2\sqrt{5})\pi$
- ② $\frac{45}{14} - \frac{1}{4}(7 - \sqrt{5})\pi$
- ③ $\frac{45}{14} - \frac{5}{28}(7 - 3\sqrt{5})\pi$
- ④ $\frac{50}{14} - \frac{5}{28}(7 - 2\sqrt{5})\pi$
- ⑤ $\frac{50}{14} - \frac{3}{28}(7 - 2\sqrt{5})\pi$



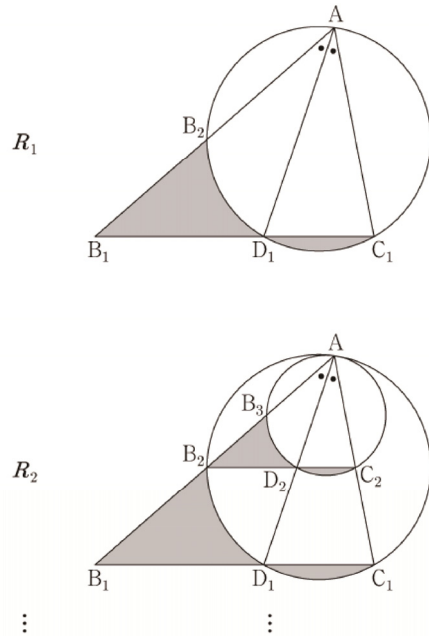
그림과 같이 $\overline{AB_1} = 3$, $\overline{AC_1} = 2$ 이고 $\angle B_1AC_1 = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 AB_1C_1 이 있다. $\angle B_1AC_1$ 의 이등분선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 D_1 , 세 점 A, D_1, C_1 을 지나는 원이 선분 AB_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B_2 라 할 때, 두 선분 B_1B_2 , B_1D_1 과 호 B_2D_1 로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1 과 호 C_1D_1 로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 점 B_2 를 지나고 직선 B_1C_1 에 평행한 직선이 두 선분 AD_1 , AC_1 과 만나는 점을 각각 D_2 , C_2 라 하자. 세 점 A, D_2, C_2 를 지나는 원이 선분 AB_2 와 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B_3 이라 할 때, 두 선분 B_2B_3 , B_2D_2 와 호 B_3D_2 로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2 와 호 C_2D_2 로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$
- ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$
- ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$
- ④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$
- ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

개념 파악하기

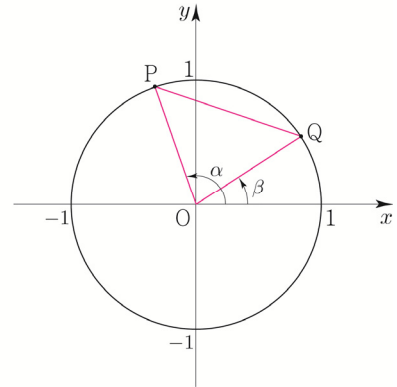
(7) 삼각함수의 덧셈정리란 무엇일까?

사인함수와 코사인함수의 덧셈정리

두 각 α, β 에 대하여 $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 의 삼각함수를 α, β 의 삼각함수로 나타내 보자.

[1단계] 동경과 단위원의 교점의 좌표를 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 두 각 α, β 를 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 $P(\cos\alpha, \sin\alpha), Q(\cos\beta, \sin\beta)$ 이다.



[2단계] 두 점 사이의 거리를 이용하여 \overline{PQ}^2 를 구한다.

두 점 P, Q 사이의 거리 $\overline{PQ} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$ 이므로
 $\overline{PQ}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) \dots \text{㉠}$

[3단계] 코사인법칙을 이용하여 \overline{PQ}^2 를 구한다.

삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle POQ) = \frac{(\overline{OP})^2 + (\overline{OQ})^2 - (\overline{PQ})^2}{2 \times \overline{OP} \times \overline{OQ}}$ 이고, $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1, \angle POQ = \alpha - \beta$ 이므로

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{1 + 1 - (\overline{PQ})^2}{2 \times 1 \times 1} \Rightarrow (\overline{PQ})^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \dots \text{㉡}$$

[4단계] 식을 정리한다.

㉠, ㉡에서 $2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)$ 이므로
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \dots \text{㉢}$

㉢에서 β 에 $-\beta$ 를 대입하면

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) \text{이므로}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

한편 ㉢에서 α 에 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 를 대입하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \text{이므로}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \dots \text{㉣}$$

또한 ㉢에서 β 에 $-\beta$ 를 대입하면

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) \text{이므로}$$

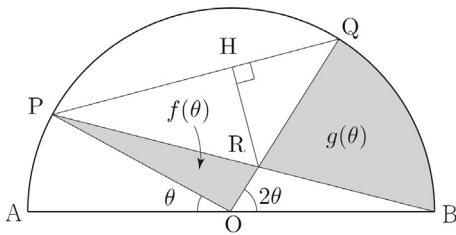
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

146 | 2021학년도 고3 9월 평가원 가형

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA = \theta$, $\angle QOB = 2\theta$ 가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{RH} = \frac{q}{p} \text{이다. } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

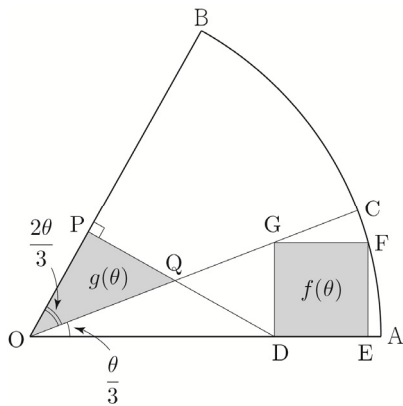


147 | 2018학년도 고3 6월 평가원 가형

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k \text{일 때, } 60k \text{의}$$

값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고, $\overline{OD} < \overline{OE}$ 이다.) [4점]



148 | 2020학년도 고3 6월 평가원 가형

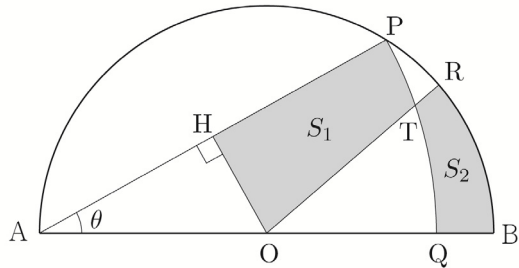
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 \overline{AP} 인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.

호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3:7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.

세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1 - S_2}{OH} = a \text{이다. } 50a \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



Master step

심화 문제편

2. 여러 가지 미분법

093



1보다 작은 양의 실수 t 에 대하여 좌표평면에서 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y=tx$ 와 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 P라 하자. 선분 OP와 호 OP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\frac{1}{2})$ 의 값을 구하시오. (단, 호 OP는 제4사분면을 지나지 않는다.)

- ① $-\frac{28}{25}$ ② $-\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{32}{25}$
 ④ $-\frac{34}{25}$ ⑤ $-\frac{36}{25}$

094



양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y=|\ln x|$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 할 때, 함수 $f(t)$ 를 $f(t) = \sqrt{|x_1 - x_2|}$ 라 하자. 미분가능한 함수 $f(t)$ 에 대하여 양수 a 가 $f(a) = \frac{\sqrt{e^4 - 1}}{e}$ 을 만족시킬 때, $f'(a)f(a)$ 의 값은?

- ① $\frac{e^4 - 1}{4e^2}$ ② $\frac{e^4 - 1}{2e^2}$ ③ $\frac{e^4 + 1}{4e}$
 ④ $\frac{e^4 + 1}{4e^2}$ ⑤ $\frac{e^4 + 1}{2e^2}$

095

| 2016학년도 수능 B형



$0 < t < 41$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 세 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$ 라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 라 할 때, $h'(5)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$
 ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

096

| 2018년 고3 3월 교육청 가형



함수 $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$ 과 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(1) = e, f'(1) = e$
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(f(x)) = f'(x)$ 이다.

함수 $h(x) = f^{-1}(x)g(x)$ 에 대하여 $h'(e)$ 의 값은?
 (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

02 함수의 그래프

성취 기준 | 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

개념 파악하기

(2) 곡선의 오목과 볼록은 어떻게 알 수 있을까?

곡선의 오목과 볼록

이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 조사해 보자.

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여

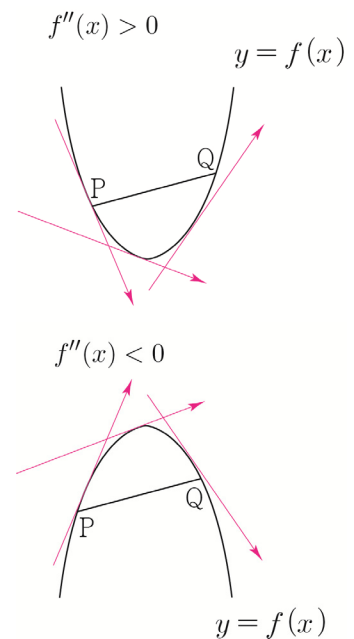
- ① 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 아래로 볼록하다고 한다.
 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 항상 $f''(x) > 0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기인 $f'(x)$ 는 증가하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 아래로 볼록하다.

ex $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 > 0$

- ② 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 위로 볼록하다고 한다.
 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 항상 $f''(x) < 0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기인 $f'(x)$ 는 감소하므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.

ex $f(x) = -x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f''(x) = -2 < 0$

Tip $f''(x)$ 는 $f'(x)$ 의 도함수이므로 $f''(x)$ 의 부호로 $f'(x)$ 의 증감을 파악할 수 있다.
 즉, $f''(x)$ 의 부호는 접선의 기울기의 증감에 관련되어 있다.



곡선의 오목과 볼록 요약

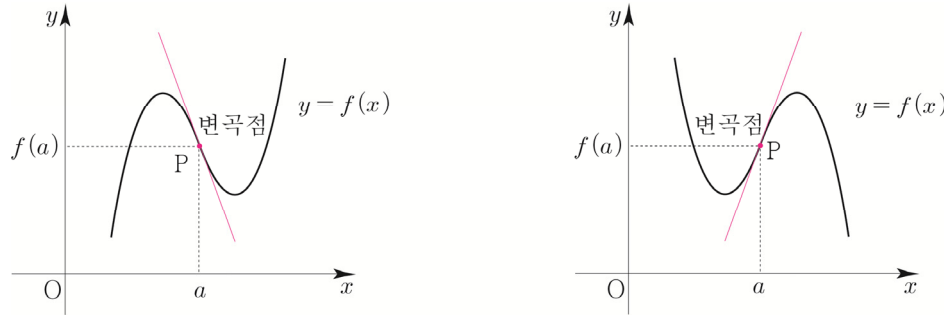
함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서

- ① $f''(x) > 0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
 ② $f''(x) < 0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 위로 볼록하다.

변곡점

곡선의 모양이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 를 경계로 하여 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀌거나 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀔 때, 점 P 를 곡선 $y=f(x)$ 의 **변곡점**이라 한다.

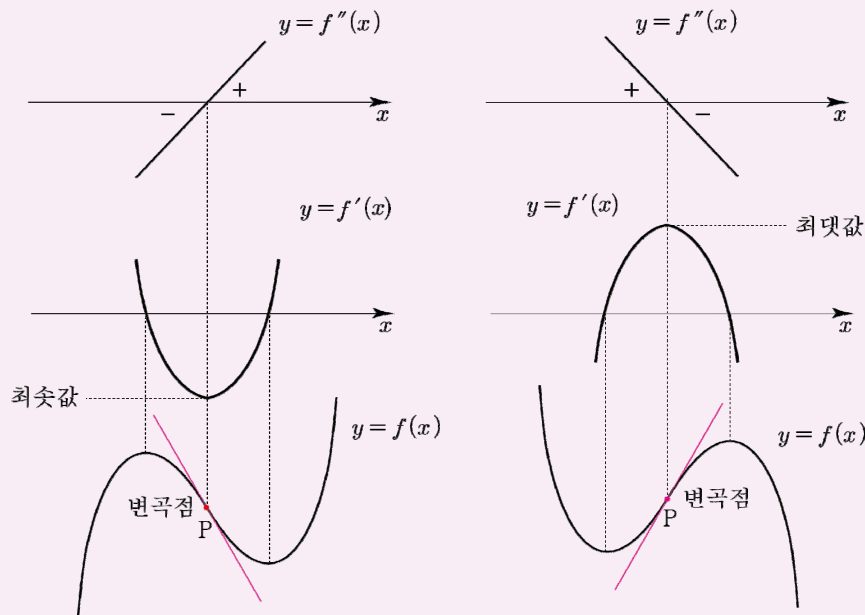
즉, 함수 $f(x)$ 에서 $f''(a)=0$ 이고, $x=a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.



Tip 1 $f''(a)=0$ 이면 항상 변곡점일까? 답은 “아니다.”이다. 예를 들어 $f(x)=x^4$ 는 $f''(0)=0$ 이지만 $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)>0$ 이므로 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 아니다. 따라서 $f''(a)=0$ 인 것뿐만 아니라 $x=a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌는지 확인해줘야 한다.

Tip 2 특별히 변곡점에서의 접선을 **변곡점접선**이라 부른다. 곡선이 변곡점에서 접선을 가지면 곡선은 그 점에서 접선과 교차한다. 즉, 뚫점(뚫는 접선)이 그려진다. 특히 삼차함수에서의 변곡점접선은 접선들 중 기울기가 $f(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 제일 작거나 제일 크기 때문에 출제하기 아주 좋은 포인트이다. (곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(a)$ 와 같다.)

- ① $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수
- ② $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수

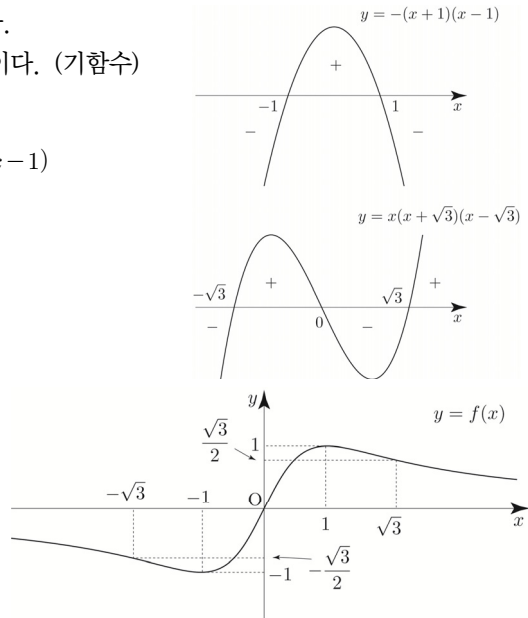


예제 7

함수 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 의 그래프의 개형을 그리시오.

풀이

- ① 분모 $x^2+1 \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
- ② $f(-x) = -f(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (기함수)
- ③ $f(0)=0$ 이므로 점 $(0, 0)$ 을 지난다.
- ④ $f'(x) = -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$ 이므로 Semi 도함수 $f'(x) = -(x+1)(x-1)$
 $f(1)=1, f(-1)=-1$ ($x=1$ 에서 극대, $x=-1$ 에서 극소)
- ⑤ $f''(x) = \frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$ 이므로
 Semi 이계도함수 $f''(x) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
 변곡점은 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), (0, 0), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
- ⑥ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로
 주어진 함수의 그래프의 점근선은 x 축이다.
 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



- Tip 1** 굳이 증감표를 그릴 필요 없이 Semi 도함수 $f'(x)$ 를 바탕으로 도함수의 부호를 판별하면 된다. 대략적인 개형을 그린 후 점근선과 이계도함수를 종합하여 조금 더 디테일하게 그려주면 된다.
- Tip 2** <실수하기 좋은 point>
 Semi 도함수 $f'(x)$ 를 미분하여 $f''(x)$ 를 구하면 안 된다.
 Semi 도함수 $f'(x)$ 는 증감을 쉽게 따지기 위해서 도입한 새로운 함수이므로 $f''(x)$ 를 구하기 위해서는 원래 $f'(x)$ 를 미분해서 구해야 한다.
- Tip 3** 기함수이므로 $x > 0$ 인 부분만 그린 뒤 원점 대칭하여 전체의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
 이때 분모 분자를 x 로 나누면 $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{x}}$ 이므로 분모에서 산술기하평균을 사용하면
 $x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$ 이고 등호조건은 $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$ ($\because x > 0$) 이므로 분모의 최솟값은 2이다.
 따라서 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최댓값 1을 갖는다.
- Tip 4** 모든 문제를 풀 때 반드시 이계도함수를 구해야 하는 것은 아니다.
 따라서 무조건 이계도함수를 조사하기보다는 문제에 따라 조사 여부를 탄력적으로 판단하면 된다.
 판단의 기준은 경험이다.
- Tip 5** 곡선 $y = \frac{ax}{x^2+1}$ 의 그래프는 매우 잘 나오므로 개형을 기억해 두자.

■ 개념 확인문제 7

다음 함수의 그래프의 개형을 그리시오.

(1) $f(x) = xe^{-x}$

(2) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(3) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 3}$

(4) $f(x) = e^x + e^{-x}$

(5) $f(x) = x^2e^x$

(6) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$)

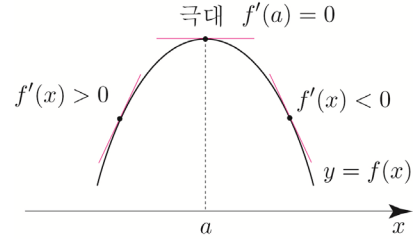
(7) $f(x) = (\ln x)^2$

이계도함수를 이용한 함수의 극대, 극소의 판정

$f'(a) = 0$ 일 때, 이계도함수를 이용하여 함수의 극대와 극소를 판정하는 방법을 알아보자.

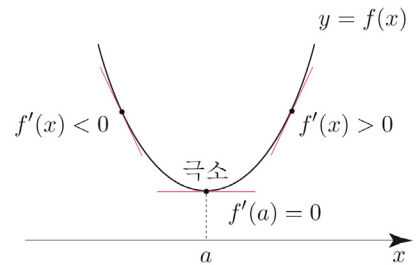
① $f''(a) < 0$ 일 때

a 를 포함한 열린구간에서 $f'(x)$ 가 감소하고
 $f'(a) = 0$ 이므로 $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가
 양에서 음으로 바뀐다.
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이다.



② $f''(a) > 0$ 일 때

a 를 포함한 열린구간에서 $f'(x)$ 가 증가하고
 $f'(a) = 0$ 이므로 $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가
 음에서 양으로 바뀐다.
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이다.



이계도함수를 이용한 함수의 극대, 극소의 판정 요약

연속인 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a) = 0$ 일 때

- ① $f''(a) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다.
- ② $f''(a) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

Tip 연속인 이계도함수 $f''(x)$ 를 갖는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a) = 0$ 일 때, $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호를 따지지 않고도 $f''(a)$ 의 부호를 이용하면 극대, 극소를 쉽게 판정할 수 있다.

ex 이계도함수를 이용하여 함수 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ 의 극값을 구하시오.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) \Rightarrow f'(0) = 0, f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 12x - 6 \Rightarrow f''(0) < 0, f''(1) > 0$$

따라서 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(0) = 5$ 를 갖고
 $x = 1$ 에서 극소이고, 극솟값 $f(1) = 4$ 를 갖는다.

05 다항함수×지수함수 형태의 그래프 (심화 특강)

성취 기준 | x 절편을 이용하여 다항함수×지수함수 형태의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있다.

개념 파악하기 (7) 다항함수×지수함수 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있는 방법은 없을까?

다항함수×지수함수 그래프의 개형 빨리 그리기

이때까지는 도함수와 이계도함수를 바탕으로 여러 가지 함수의 그래프의 개형을 그리는 방법에 대하여 배웠다. 실전에서 문제를 접근할 때, 대략적인 개형을 알고 난 뒤 문제를 접근하면 훨씬 더 용이한 경우가 존재한다. 따라서 이번에는 빈출 소재인 다항함수×지수함수 그래프의 개형을 빨리 그리는 방법에 대하여 알아보자.

[1단계] 다항함수 그래프의 개형을 그린다. (x 절편이 핵심)

[2단계] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 를 조사한다. (접근선 체크)

[3단계] 다항함수 그래프의 개형에서 접근선이 그려지려면 어떤 모양이 되어야 하는지 생각해본다.

ex1 $y = xe^{-x}$

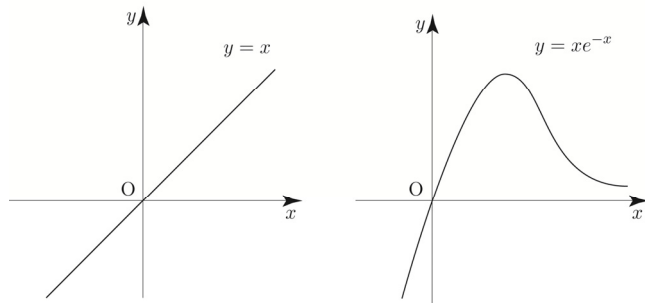
$y = x$ 를 그린 후 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이

반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 x 축이 접근선이다.

즉, $x \rightarrow \infty$ 일 때, 아래로 블록하면서 x 축으로 한없이 가까이 가야 한다.

$y = x$ 가 위로 올라가는 힘보다 $y = e^{-x}$ 가 아래로 내려가는 힘이 더 크기 때문에 x 축으로 한없이 가까이 간다고 생각하면 된다. 이를 반영하여 그래프를 그려주면 다음과 같다.



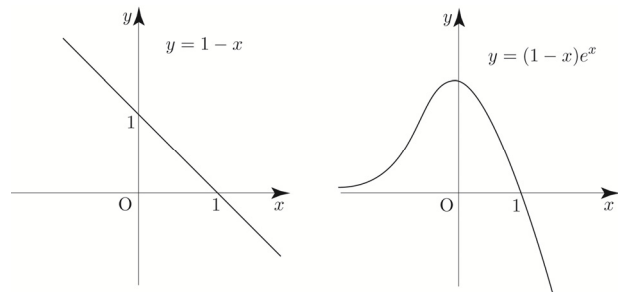
Tip 이때 극값을 갖는 x 를 구하려면 도함수를 구하여 조사하면 된다. 지금 우리가 궁금한 것은 대략적인 그래프의 개형이다.

ex2 $y = (1-x)e^x$

$1-x$ 를 그리고 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이

반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.

이를 반영하여 그래프를 그려주면 다음과 같다.

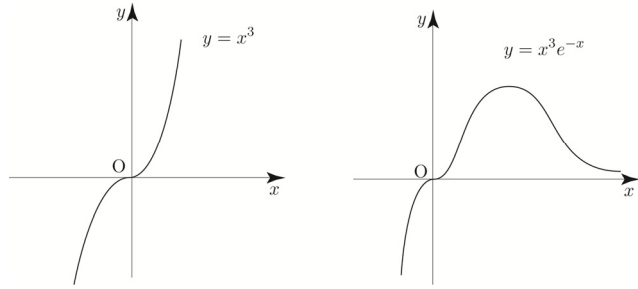


ex6 $y = x^3 e^{-x}$

$y = x^3$ 를 그린 후 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이

반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.

이를 반영하여 그래프를 그려주면 다음과 같다.



Tip

$x=0$ 에서 뚫는 접선을 갖는데 실제로 그런지 확인해보자.

$$f(x) = x^3 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x} \text{이므로}$$

$x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호 변화가 없으므로 극값을 갖지

않고 뚫는 접선을 갖는다.

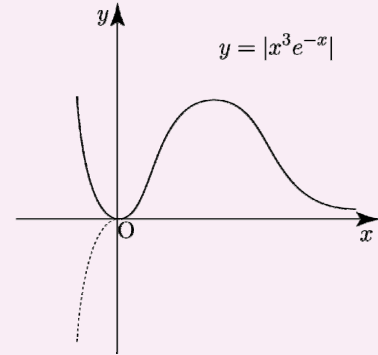
또한 $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호 변화가 있으므로

$f(x)$ 는 변곡점 $(0, 0)$ 을 갖는다.

즉, 함수 $y = |f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 뚫는 접선을 가지므로

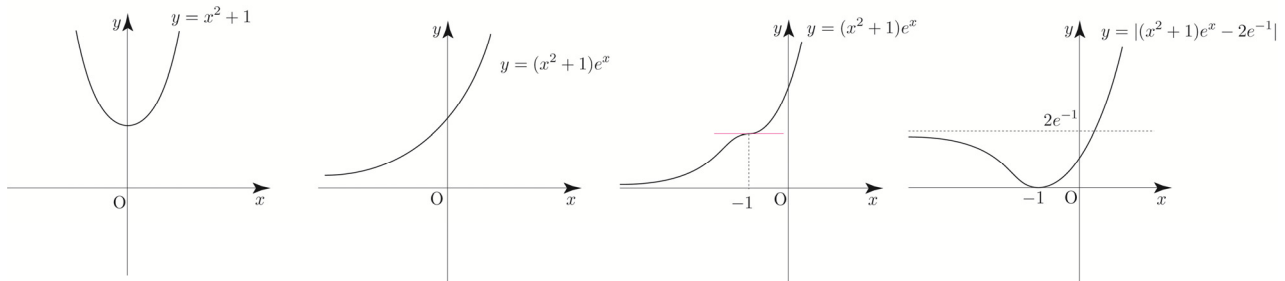
$f(x)$ 가 음수인 부분을 x 축위로 접어 올렸을 때,

스무스(smooth)하므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



ex7 $y = (x^2 + 1)e^x$

$y = x^2 + 1$ 를 그린 후 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이 반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.



대략적인 개형을 그렸을 때는 두 번째 그림처럼 그려질 것 같은데 실제로 그런지 확인해보자.

$f'(x) = (x+1)^2 e^x$ 이므로 $f(x)$ 가 증가함수인 것은 맞지만 세 번째 그림처럼 $x = -1$ 에서 뚫는 접선을 갖는다.

즉, 대략적인 개형만 판단가능하지 디테일한 것은 도함수와 이계도함수를 조사해 보아야 한다.

$f(x) = (x^2 + 1)e^x$ 는 $x = -1$ 에서 뚫는 접선을 가지므로 함수 $y = |f(x) - f(-1)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

Tip

x 절편이 모두 존재하지 않는(only 실근이 아닌) 다항함수의 경우 도함수를 구하여 판단하도록 하자.

사실 필자도 ex1 ~ ex6 과 같이 x 절편이 모두 존재하는 꼴(only 실근)만 빨리 그리기를 사용하고

그렇지 않은 꼴은 직접 도함수를 구하여 판단한다. 그 편이 더 안전하기도 하고 출제자 입장에서

뚫는 접선과 같은 특수한 포인트를 물어보도록 문제를 설계했을 확률이 높기 때문이다.

오히려 ex7 에서 대략적인 두 번째 그림으로 선불리 판단했다면 오답으로 이어질 수 있다. (오히려 독이 됨)

06 합성함수의 그래프 그리기 (심화 특강)

성취 기준 | 합성함수의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있다.

개념 파악하기

(8) 합성함수의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있는 방법은 없을까?

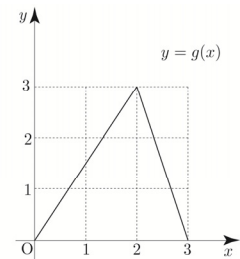
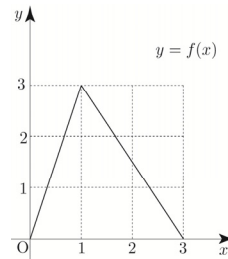
합성함수의 그래프의 개형 빨리 그리기

함수 $f(g(x))$ 의 그래프를 그린다고 가정해보자. $f(g(x))$ 를 미분하여 도함수 $g'(x)f'(g(x))$ 를 구한 후 $g'(x)f'(g(x))$ 의 부호변화를 바탕으로 증감을 파악하여 합성함수의 그래프를 그릴 수 있다.

허나 문제에 따라서는 도함수 $g'(x)f'(g(x))$ 의 부호변화를 파악하기 힘든 경우가 존재할 수 있다.

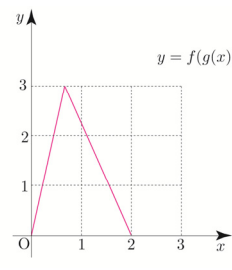
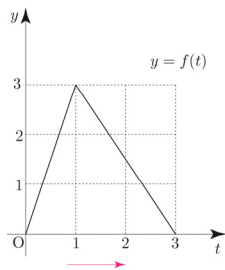
따라서 이번에는 도함수를 구하지 않고 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 각각의 증감만을 이용하여 함수 $f(g(x))$ 의 그래프의 대략적인 개형을 빨리 그리는 방법에 대하여 알아보자.

이해를 돕기 위해 오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프를 바탕으로 함수 $y=f(g(x))$ 의 그래프를 그려보자.

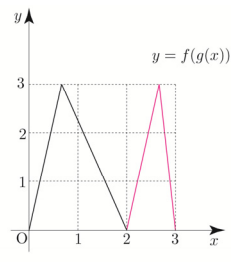
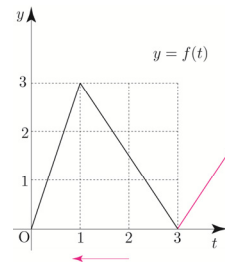


함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=2$ 를 경계로 $0 < x < 2$ 에서 증가하고 $2 < x < 3$ 에서 감소한다.

$g(x)=t$ 라 하면 x 가 $0 \rightarrow 2$ 일 때, t 는 $0 \rightarrow 3$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 에서 $0 < t < 3$ 의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $0 < x < 2$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.



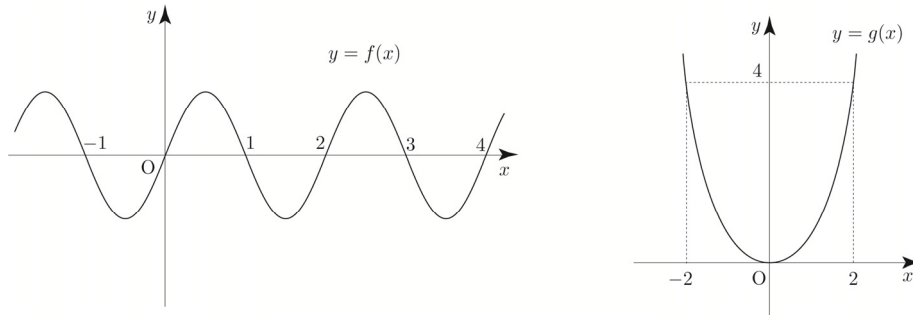
x 가 $2 \rightarrow 3$ 일 때, t 는 $3 \rightarrow 0$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 에서 $0 < t < 3$ 의 범위의 그래프를 좌우 반전시킨 후 복사하여 정의역 $2 < x < 3$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.



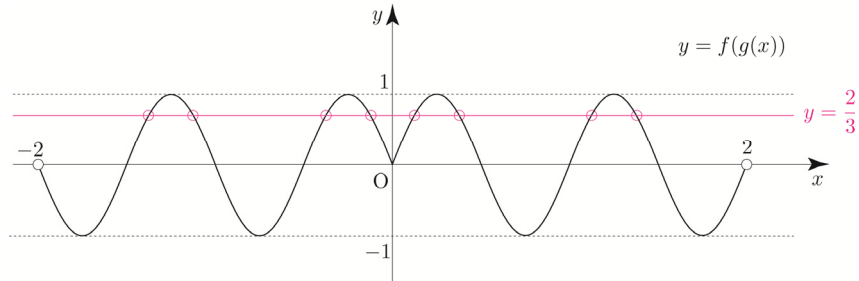
이번에는 실전문제를 통해 합성함수의 그래프 그리기가 어떻게 적용될 수 있는지 알아보자.

ex7 방정식 $\sin(\pi x^2) = \frac{2}{3}$ ($-2 < x < 2$)의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

$g(x) = x^2$ 라 보고 $f(x) = \sin \pi x$ 라 하면 $y = \sin(\pi x^2)$ 는 $y = f(g(x))$ 와 같다.



함수 $y = g(x)$ ($-2 < x < 2$)의 그래프는 $x=0$ 을 경계로 $-2 < x < 0$ 에서 감소하고 $0 < x < 2$ 에서 증가한다.
 $g(x) = t$ 라 하면 x 가 $0 \rightarrow 2$ 일 때, t 는 $0 \rightarrow 4$ 이므로 함수 $y = f(t)$ 에서 $0 < t < 4$ 의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $0 < x < 2$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.
 $y = \sin(\pi x^2)$ 은 y 축에 대하여 대칭이므로 대칭성을 이용하여 정의역 $-2 < x < 0$ 에 해당하는 그래프를 마저 그려주면 된다.



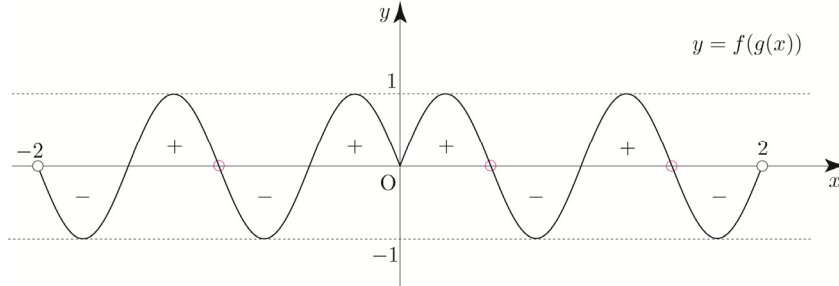
$-2 < x < 2$ 에서 함수 $y = f(g(x))$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{3}$ 의 교점의 개수가 8이므로

방정식 $\sin(\pi x^2) = \frac{2}{3}$ ($-2 < x < 2$)의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

ex8 $-2 < x < 2$ 에서 함수 $h(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2) dt$ 가 극대가 되는 x 의 개수를 구하시오.

$h'(x) = \sin(\pi x^2)$ 이므로 $g(x) = x^2$ 라 보고 $f(x) = \sin \pi x$ 라 하면 $y = h'(x)$ 는 $y = f(g(x))$ 와 같다.

ex6 에서 그렸던 그래프로 해석해보자.

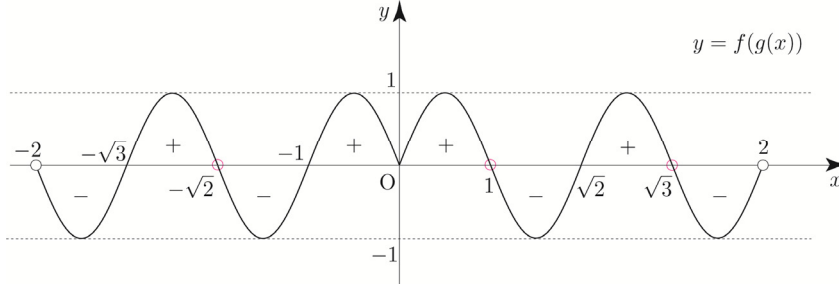


$x = a$ ($-2 < a < 2$)의 좌우에서 $h'(x) = f(g(x))$ 의 부호가 $+ -$ 로 변하는 a 의 개수는 3이므로 $-2 < x < 2$ 에서 함수 $h(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2) dt$ 가 극대가 되는 x 의 개수는 3이다.

위 문제와 별개로 함수 $h(x)$ 가 극대가 되는 x 를 직접 구해보자.

방정식 $\sin(\pi x^2) = 0$ ($-2 < x < 2$)의 서로 다른 실근은

$x = -\sqrt{3}$ or $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{3}$ 이므로 x 절편을 넣어서 그려주면 다음과 같다.



따라서 함수 $h(x)$ 는 $x = -\sqrt{2}$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$ 에서 극대이다.

Tip 증감을 기초로 한 합성함수의 그래프 그리기가 만능은 아니다. 적절한 상황에 맞춰 탄력적으로 사용해야지 무분별하게 사용하다가 오히려 독이 될 수도 있다. 합성함수의 그래프 그리기를 사용하면 오히려 시간이 더 걸리는 경우도 있고, 상황이 더욱 복잡해지는 경우도 더러 있기 때문이다. 실전에서 합성함수의 그래프 그리기를 사용할지 말지 판단하거나 실전에서 사용했다가 '이건 아니다 처음으로 다시 돌아가자'라고 판단하는 기준은 사실상 경험이다.

1 Theme 접선의 방정식(접점이 주어질 때)

001

곡선 $y = \ln(x-2)+4$ 위의 점 $(3, 4)$ 에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

002

곡선 $y = \frac{1}{x-3}$ 위의 점 $(5, \frac{1}{2})$ 에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

003

곡선 $x^2 + e^{xy} - y^2 = 0$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선과 원점 사이의 거리는?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
- ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

004

함수 $f(x) = 3x + \cos \frac{x}{2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(3\pi, \pi)$ 에서의 접선이 점 $(2\pi, a)$ 를 지난다. 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}\pi$ ② $\frac{2}{5}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$
- ④ $\frac{4}{5}\pi$ ⑤ π

005

함수 $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ 의 그래프 위의 두 점 $(-2, 2), (\frac{1}{2}, -3)$ 에서의 접선을 각각 l, m 이라 하자. 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $30\tan\theta$ 의 값을 구하시오.

006

매개변수 $t(t > \sqrt{3})$ 로 나타낸 곡선 $x = \ln(t^2-3), y = e^{-2t+4} + t^2$ 에 대하여 $t=2$ 에 대응하는 점에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $10(a+b)$ 의 값을 구하시오.

007

곡선 $y = e^{\sin 2x}$ 위의 점 $(\pi, 1)$ 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식이 $(a, \frac{\pi}{2})$ 를 지날 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

008

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \ln(1 + \sin 3x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 y 절편은?

- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π
- ④ 4 ⑤ 5

009

곡선 $2x = y\sqrt{y+1}$ 위의 점 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.)

- ① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
- ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

2 Theme 접선의 방정식(접점이 주어지지 않을 때)

010

곡선 $y = \ln(3-x)$ 에서 접하고 기울기가 -1 인 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

011

점 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 에서 곡선 $y = xe^{-x}$ ($x > 0$)에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는?
(단, O는 원점이다.)

- ① $\frac{1}{8\sqrt{e}}$ ② $\frac{1}{4\sqrt{e}}$ ③ $\frac{3}{8\sqrt{e}}$
- ④ $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ ⑤ $\frac{5}{8\sqrt{e}}$

012

곡선 $y = 3\ln(x^2+2)$ 에 접하고 기울기가 2인 서로 다른 두 직선의 y 절편을 각각 y_1, y_2 라 할 때, y_1+y_2 의 값은?

- ① $3\ln 18 - 8$ ② $3\ln 18 - 6$ ③ $3\ln 18$
- ④ $3\ln 18 + 6$ ⑤ $3\ln 18 + 8$

013

x 절편이 $-\frac{2}{3}$ 인 직선 $y = h(x)$ 가 두 곡선 $y = e^{-3x-3}$, $y = -x^3 + a$ 의 그래프와 동시에 접할 때, $h(a)$ 의 값을 구하시오. (단, $a < 0$)

014

곡선 $y = e^{2x}$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선이 곡선 $y = \sqrt{2x-a}$ 에 접할 때, 상수 a 의 값은?

- ① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{5}{4}$
- ④ -1 ⑤ $-\frac{3}{4}$

015

점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 에서 곡선 $y = \left|\frac{1-x}{x}\right|$ ($x > 0$)에 그은 서로 다른 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는?

- ① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
- ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

답

3 Theme 접선의 방정식(New 함수)

016

$0 < t < 1$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $y=t$ 와
 함수 $f(x) = \cos x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프가 만나는 점을 A라
 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서 그은 접선의 y 절편을
 $g(t)$ 라 하자. $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 의 값은?

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$
- ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$

017

함수 $f(x) = e^x + x$ 와 양의 실수 t 에 대하여 기울기가
 t 인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때 접점의 x 좌표를
 $g(t)$ 라 하자. 점 $(1, 1)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의
 기울기가 m 일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여
 $\frac{m}{g'(m)}$ 의 값은?

- ① $e^4 - e^2$ ② $e^4 - e$ ③ e^4
- ④ $e^4 + e$ ⑤ $e^4 + e^2$

4 Theme 함수의 증가와 감소

018

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x) = (x^2 + ax + 2)e^x$ 이
 증가하도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

019

함수 $f(x) = -\ln(\cos x) - ax^2$ 가 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서
 증가할 때, 실수 a 의 최댓값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
- ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

020

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x) = a \ln(x^2 + 1) - 2bx$ 가
 감소하도록 하는 10 이하의 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b)
 의 개수를 구하시오.

021

실수 k 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{(\ln x)^2 + k}{x}$ ($x > 0$)의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k 의 최솟값을 구하시오.

022

함수 $f(x) = \frac{k}{x} - e^{-x}$ 이 $0 < x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 를 만족시킬 때, 실수 k 의 최솟값은 $\frac{b}{e^a}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 자연수이다.)

5 Theme 함수의 극대와 극소

023

함수 $f(x) = (x^2 - 15)e^{-x}$ 의 극솟값과 극댓값을 각각 a, b 라 할 때, $a \times b$ 의 값은?

- ① $-60e^2$
- ② $-60e$
- ③ $-\frac{60}{e}$
- ④ $-\frac{60}{e^2}$
- ⑤ $-\frac{60}{e^3}$

024

정의역이 양의 실수인 함수 $f(x) = x^2 - k \ln x$ ($k > 0$)의 극솟값이 0일 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{1}{e}$
- ② $\frac{2}{e}$
- ③ \sqrt{e}
- ④ e
- ⑤ $2e$

025

함수 $f(x) = xe^{-2x} - (4x+a)e^{-x}$ 이 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극솟값을 가질 때, $f(x)$ 는 극댓값 b 를 갖는다. $a+b$ 의 값은?
(단, a 는 상수이다.)

- ① $-1 + 2\ln 2$
- ② $-2 + 4\ln 2$
- ③ $-3 + 6\ln 2$
- ④ $-4 + 8\ln 2$
- ⑤ $-5 + 10\ln 2$

026

□□□□□

$0 < x < 2\pi$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{\sin x}{e^{3x}}$ 는 $x = a$ 에서

극댓값을 갖고, $x = b$ 에서 극솟값을 갖는다.

두 상수 a, b 에 대하여 $\cos(a+b)$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{9}{10}$ ③ $-\frac{4}{5}$
- ④ $-\frac{7}{10}$ ⑤ $-\frac{3}{5}$

027

□□□□□

$f(x) = x - k \cos \frac{x}{4}$ 가 극값을 갖지 않도록 하는 정수 k 의 개수를 구하시오.

028

□□□□□

함수 $f(x) = \frac{10}{n}x - \ln(2x^2 + n)$ 이 극값을 갖도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.

029

□□□□□

자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} nx^2e^{-2x+2} & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(f(x)-n)$ 가 극소가 되는 모든 x 의 값의 합이 -3 이상 -2 이하가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

6 Theme 변곡점

030

□□□□□

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \sin 4x + 3x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 (a, b) 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하시오.

031

□□□□□

곡선 $y = (\ln x)^2 - 2x$ 의 변곡점에서의 접선의 y 절편은?

- ① $-e$ ② -1 ③ 1
- ④ e ⑤ $2e$

038



함수 $f(x) = 2\ln(3-x) + \frac{1}{2}x^2$ ($x < 3$)에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

—| 보기 |—

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.
- ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=3$ 을 점근선으로 갖는다.
- ㄷ. $x_1 < x_2 < 2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_2) < f(x_1)$ 이다.
- ㄹ. 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수는 2이다.
- ㅁ. 곡선 $y=f(x)$ 가 열린구간 $(-\infty, k)$ 에서 아래로 볼록하도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $3 - \sqrt{2}$ 이다.
- ㅂ. 방정식 $f(x)=3$ 은 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- ㅅ. 방정식 $f(x)=f(a)$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 개수는 2이다.
- ㅇ. $\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{|f(x)| - |f(b)|}{x-b} \neq \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{|f(x)| - |f(b)|}{x-b}$ 를 만족시키는 실수 b 는 오직 하나 존재한다.
- ㅈ. $x_1 < 3 - \sqrt{2} < x_2 < 3$ 를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2) < 0$ 이다.

7 Theme

함수의 최대와 최소

039



닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+3}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

- ① $-12e^3$ ② $-14e^3$ ③ $-16e^3$
- ④ $-18e^3$ ⑤ $-20e^3$

040



닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ 는 $x=a$ 에서 최솟값 m , $x=b$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. $\frac{b}{a} + M + m$ 의 값은?

- ① $\frac{11}{7}$ ② $\frac{12}{7}$ ③ $\frac{13}{7}$
- ④ 2 ⑤ $\frac{15}{7}$

041



두 함수 $f(x) = -\frac{\ln \sqrt{x}}{x}$, $g(x) = kxe^{-x+2}$ 에 대하여 정의역이 $\{x | x > 0\}$ 인 함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{1}{2e}$ 이 되도록 하는 양의 실수 k 의 최솟값을 구하시오.

048



함수 $f(x) = \begin{cases} -\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1} & (x < 1) \\ k(1-x)e^{-x} & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여

방정식 $|f(x)|=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 상수 k 의 값은? (단, $k > 0$)

- ① e ② $2e$ ③ e^2
 ④ $2e^2$ ⑤ e^3

049



두 함수 $f(x) = 2\ln x + \ln(6-x)$, $g(x) = x^2e^{-x+2}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

라 할 때, 방정식 $h(x) = n\ln 2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

050



정의역이 $\{x \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$ 인 함수 $f(x) = \cos x + x \sin x$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

| 보기 |

- ㄱ. $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{3}{2}\pi$ 에서 극솟값을 갖는다.
 ㄷ. 방정식 $f(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
 ㄹ. 방정식 $f(f(x)) = \frac{\pi}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.
 ㅁ. 함수 $g(x) = e^{f'(x)}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)에 대하여 $g'(a) = 0$ 이면 $\frac{1}{a} = \tan a$ 이다.
 ㅂ. 함수 $g(x) = e^{f'(x)}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)가 $x = a$ 에서 극솟값을 가지는 a 가 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에 존재한다.

099 | 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \cos x + 2x \sin x$ 가 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 극값을 가진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha < \beta$) [4점]

| 보기 |

ㄱ. $\tan(\alpha + \pi) = -2\alpha$
 ㄴ. $g(x) = \tan x$ 라 할 때, $g'(\alpha + \pi) < g'(\beta)$ 이다.
 ㄷ. $\frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} < \sec^2 \alpha$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

100 | 2016학년도 고3 6월 평가원 B형

2 이상의 자연수 n 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1} \{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자. $1 \leq g(n) \leq 8$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은? [4점]

- ① 43 ② 46 ③ 49
 ④ 52 ⑤ 55

101 | 2022학년도 고3 9월 평가원 미적분

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = \{f(x) + 2\}e^{f(x)}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a) = 6$ 인 a 에 대하여 $g(x)$ 는 $x = a$ 에서 최댓값을 갖는다.
 (나) $g(x)$ 는 $x = b, x = b + 6$ 에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 실수이다.) [4점]

102 | 2022학년도 수능 미적분

함수 $f(x) = 6\pi(x - 1)^2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = 3f(x) + 4\cos f(x)$$

라 하자. $0 < x < 2$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수는? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

Master step

심화 문제편

3. 도함수의 활용



최고차항의 계수가 6π 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = \frac{1}{2 + \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\alpha_1 = 0$ 이고 $g(\alpha_1) = \frac{2}{5}$ 이다.
- (나) $\frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$

$g'(-\frac{1}{2}) = a\pi$ 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$) [4점]



열린구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin^3 x & (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}) \\ \cos x & (\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

- (가) $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{3\pi}{2}$
- (나) 함수 $\sqrt{|f(x) - t|}$ 는 $x = k$ 에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$ 에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인

사차함수 $h(x)$ 가 있다. $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = a, g(0) = b, g(-1) = c$ 라

할 때, $h(a+5) - h(b+3) + c$ 의 값은? [4점]

- ① 96
- ② 97
- ③ 98
- ④ 99
- ⑤ 100

03 부분적분법

성취 기준 | 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

개념 파악하기 (7) 부분적분법이란 무엇일까?

부분적분법

함수 $y = xe^x$, $y = x \sin x$ 와 같이 두 함수가 곱으로 되어 있고, 치환적분법을 이용해도 부정적분을 구하기 어려울 때, 함수의 곱의 미분법을 이용하면 부정적분을 구할 수 있는 경우가 있다.

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 두 함수의 곱의 미분법에서

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로 이 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

이처럼 적분하는 방법을 **부분적분법**이라 하자.

부분적분법 요약

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Tip 1 곱해져 있는 두 함수 중에서 미분하여 그 결과가 간단하게 바뀌는 함수를 $f(x)$, 적분하기 쉬운 함수를 $g'(x)$ 로 정하고 부분적분법을 이용한다.

Tip 2 <필자가 실전에서 사용하는 부분적분 계산법>

[1단계] 왼쪽부터 차례대로 로그, 다항함수, 삼각함수, 지수함수 순으로 배치한다.

외우는 방법 (1) : 첫 글자만 따서 왼쪽부터 순서대로 **로다삼지**

외우는 방법 (2) : 오른쪽부터 역순으로 **지생각대로** <지(지수)생각(삼각)대(다항),로(로그)>

[2단계] **그 적 마 인 미 그** 순으로 나열한다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(Diagram: A curved arrow labeled '그대로' points from the first $f(x)$ to the second $f(x)$. A curved arrow labeled '미분' points from the first $f'(x)$ to the second $f'(x)$.)

$f(x)$ 를 그대로 쓰고 $g'(x)$ 를 적분한 뒤 **마이너스** 인테그랄 $f(x)$ 를 미분하고,

앞에서 $g'(x)$ 의 부정적분 $g(x)$ 를 그대로 쓴다.

외우기 쉽도록 포인트만 나열하면 **그 적 마 인 미 그**가 된다.

익숙해지면 무척 쉽다. [예제 13]에 적용해보자.

■ 예제 13

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int x e^x dx$

(2) $\int x \sin x dx$

|| 풀이 ||

(1) [1단계] 왼쪽부터 차례대로 로그, 다항함수, 삼각함수, 지수함수 순으로 배치한다.

x 는 다항함수이고, e^x 는 지수함수이므로 $x e^x$ 으로 배치하면 $\int x e^x dx$ 이다.

[2단계] **그 적 마 인 미 그** 순으로 나열한다.

$$f(x) = x, g'(x) = e^x \text{라 하면 } f'(x) = 1, g(x) = e^x$$

$f(x)$ 를 **그**대로 쓰고 $g'(x)$ 를 **적**분한 뒤 **마**이너스 **인**테그랄 $f(x)$ 를 **미**분하고, 앞에서 $g'(x)$ 를 적분한 $g(x)$ 를 **그**대로 쓴다.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

(2) [1단계] 왼쪽부터 차례대로 로그, 다항함수, 삼각함수, 지수함수 순으로 배치한다.

x 는 다항함수이고, $\sin x$ 는 삼각함수이므로 $x \sin x$ 으로 배치하면 $\int x \sin x dx$ 이다.

[2단계] **그 적 마 인 미 그** 순으로 나열한다.

$$f(x) = x, g'(x) = \sin x \text{라 하면 } f'(x) = 1, g(x) = -\cos x$$

$f(x)$ 를 **그**대로 쓰고 $g'(x)$ 를 **적**분한 뒤 **마**이너스 **인**테그랄 $f(x)$ 를 **미**분하고, 앞에서 $g'(x)$ 를 적분한 $g(x)$ 를 **그**대로 쓴다.

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

■ 개념 확인문제 16

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int (x+2)e^{-x} dx$

(2) $\int x e^{4x} dx$

(3) $\int x \sin 2x dx$

(4) $\int (3x+1)\cos x dx$

016

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{3}$
 ④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

017

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + f(2-x) = |\cos \pi x|$$

를 만족시킨다. $\int_0^2 f(x) dx$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{5}{4\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$
 ④ $\frac{7}{4\pi}$ ⑤ $\frac{2}{\pi}$

018

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$\int_0^1 f(e^{2x}) dx = 12$ 일 때, $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$ 의 값을 구하시오.

019

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x \{\ln(\sin x)\} dx = k$ 일 때, e^{k+1} 의 값을 구하시오.

020

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{3x}{x^2+1} \text{이다.}$$

(나) $f(0) = 0$

$\int_0^2 x \{f(x)\}^3 dx$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{4}(5\ln 5 - 4)$ ② $\frac{11}{4}(5\ln 5 - 4)$ ③ $\frac{13}{4}(5\ln 5 - 4)$
 ④ $\frac{15}{4}(5\ln 5 - 4)$ ⑤ $\frac{17}{4}(5\ln 5 - 4)$

021

양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$e^{x+1} f(x+1) - e^x f(x) = \frac{1}{x^2}$$

을 만족시킨다. $\int_e^{e^2} f(\ln x) dx = 1$ 일 때, $\int_1^4 e^x f(x) dx$ 의

값은?

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{23}{6}$ ③ $\frac{25}{6}$
 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

022

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

있다. $f(x)$ 의 역함수는 $g(x)$ 이고, $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ 일 때,

$\int_1^2 \frac{\sin(g(x))}{f'(g(x))} dx = k$ 이다. $100k$ 의 값을 구하시오.

3 Theme 부분적분법

023

$\int_1^e x^2(1+\ln x) dx$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}e^3 - \frac{2}{9}$ ② $\frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{9}$ ③ $\frac{3}{9}e^3 - \frac{2}{9}$
 ④ $\frac{4}{9}e^3 - \frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}e^3 - \frac{2}{9}$

024

$\int_1^a x^3 e^{x^2} dx = \frac{5}{8}e^{a^2}$ 를 만족시키는 상수 $a(a > 1)$ 에 대하여 $40a$ 의 값을 구하시오.

025

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \ln 2$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
 (단, a 와 b 는 자연수이다.)

026

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^2 x f'(2x-1) dx = -5$
 (나) $f(1)+1 = 2f(3)$

$\int_1^3 f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

027

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 x 에 대하여 $f'(x) = \ln(x^2+1)$ 이다.
 (나) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$

$f(1)$ 의 값은?

- ① $\ln 2$ ② $2\ln 2$ ③ $3\ln 2$
 ④ $4\ln 2$ ⑤ $5\ln 2$

028

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{g(x)}{f(x)} = x^2 - x$ 이다.
 (나) $\int_0^1 g'(x) \ln(f(x)) dx = \frac{1}{6}$

$\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3}$ 일 때, $\int_0^1 x f(x) dx$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

029

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0, g(1)=4$
 (나) $\int_0^1 e^{g(x)} dx = \int_1^4 2e^x f(x) dx$

$\int_1^4 e^x f(x) dx$ 의 값은?

- ① $\frac{e^4}{3}$ ② $\frac{2e^4}{3}$ ③ e^4
 ④ $\frac{5e^4}{3}$ ⑤ $2e^4$

036

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)e^{x-t} dt = \sin 3x$$

을 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ 의 값은?

- ① $\frac{2\sqrt{2}+1}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}+2}{9}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}+3}{9}$
 ④ $\frac{3\sqrt{2}+1}{9}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}+2}{9}$

037

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^2 x f(tx+1) dx = 4te^t$$

을 만족시킬 때, $f(5) \times f(-3)$ 의 값은?

- ① -26 ② -24 ③ -22
 ④ -20 ⑤ -18

6 Theme 정적분으로 정의된 함수(New 함수)

038

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t-3}{t^2-3t+4} dt$$

의 최솟값은?

- ① $\ln \frac{3}{16}$ ② $\ln \frac{5}{16}$ ③ $\ln \frac{7}{16}$
 ④ $\ln \frac{9}{16}$ ⑤ $\ln \frac{11}{16}$

039

함수 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{e^{t^2}+1} dt$ 에 대하여 상수 a 가 $f(a) = 3$ 을

만족시킬 때, $\int_0^a \frac{\{f(x)\}^2}{e^{x^2}+1} dx$ 의 값을 구하시오.

040

함수 $\int_x^{x+\ln 2} |e^t - 2| dt$ 의 최솟값을 m 이라 할 때,

$e^m = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

041

함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} \pi \sin 2x & (0 \leq x \leq \pi) \\ 1 - \cos 2x & (\pi < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 방정식 $\int_a^x f(t)dt = 0$ 의

서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 a 를
작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, \dots, a_m

(m 은 자연수)라 할 때, $m + \sum_{n=1}^m a_n = p + q\pi$ 이다.

$10(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.)

042

상수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x^2+1} & (x \geq 0) \\ (x+2)x & (x < 0) \end{cases}$$

의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때,

방정식 $\int_0^x f(s)ds = t$ 을 만족시키는 x 의 최솟값을 $g(t)$ 라

하자. 함수 $g(t)$ 는 $t=k$ 에서 불연속일 때,

$\left\{ \lim_{t \rightarrow k^+} g(t) \right\}^2 + g(k) = e^p + q$ 이다. $27(p-q)$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 유리수이다.)

043

함수 $f(x) = \int_a^x \{2 + \cos(t^3)\}dt$ 라 하자.

$f''(a) = -\sqrt{3}a^2 \cos(a^3)$ 일 때, $(f^{-1})'(0)$ 의 값은?

구하시오. (단, a 는 $0 < a < \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ 인 상수이다.)

① $\frac{2-2\sqrt{3}}{13}$ ② $\frac{4-2\sqrt{3}}{13}$ ③ $\frac{6-2\sqrt{3}}{13}$

④ $\frac{8-2\sqrt{3}}{13}$ ⑤ $\frac{10-2\sqrt{3}}{13}$

044

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와
 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $g(x) = \int_1^x \frac{f(t^3)}{t} dt$

이다.

(나) $\int_1^8 f(x)dx = 27$

$\int_1^2 x^2 g(x)dx = 13$ 일 때, $g(2)$ 의 값을 구하시오.

045

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 는

$$\int_0^2 \{f(x)\}^2 dx + \int_0^2 F(x)f'(x)dx = 12$$

을 만족시킨다. $\int_0^2 xf'(x)dx = 5$ 일 때,

$\int_0^2 \{F(x)\}^2 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (단, $F(2) > 0$)

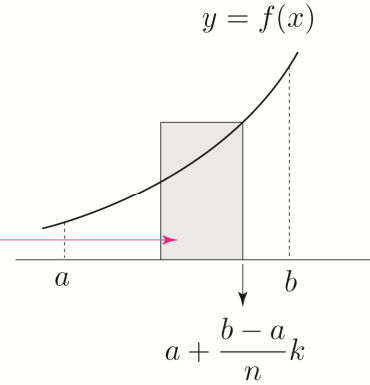
정적분을 이용하여 극한값 구하기 (실전편)

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$ 라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \overbrace{f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)}^{\text{높이}} \overbrace{\frac{b-a}{n}}^{\text{밑변}} = \int_a^b f(x) dx$$

Start

k 번째 직사각형의 넓이



ex $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$

① $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$ ($x_k = 0 + \frac{(1-0)k}{n} \Rightarrow a=0, b=1$)라 하면 $f(x) = (1+2x)^2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \int_0^1 2(1+2x)^2 dx = \left[\frac{(2x+1)^3}{3} \right]_0^1 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

② $\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_k = \frac{2k}{n}$ ($x_k = 0 + \frac{(2-0)k}{n} \Rightarrow a=0, b=2$)라 하면 $f(x) = (1+x)^2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \int_0^2 (1+x)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_0^2 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

③ $\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_k = 1 + \frac{2k}{n}$ ($x_k = 1 + \frac{(3-1)k}{n} \Rightarrow a=1, b=3$)라 하면 $f(x) = x^2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Tip 1 어떤 것을 x_k 로 잡느냐에 따라 정적분의 범위와 $f(x)$ 가 달라지는 것이 point이다. 무조건 외우려고 하지 말고 증명과정을 통해 이해하도록 하자. 확실히 이해만 하면 굳이 외울 필요도 없다.

Tip 2 정적분을 이용하여 극한값을 구할 때, $a + \frac{b-a}{n}k \Rightarrow x$, $\frac{b-a}{n} \Rightarrow dx$ 로 변환된다고 생각하면 쉽다.

■ 예제 1

정적분을 이용하여 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)$$

■ 풀이

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^3 \right\} \times \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$ ($x_k = 0 + \frac{(1-0)k}{n} \Rightarrow a=0, b=1$)라 하면 $f(x) = x^3$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

■ 개념 확인문제 1

정적분을 이용하여 다음 급수의 합을 구하시오.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(2 + \frac{1}{n}\right)^4 + \left(2 + \frac{2}{n}\right)^4 + \left(2 + \frac{3}{n}\right)^4 + \dots + \left(2 + \frac{n}{n}\right)^4 \right\}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{n} \right\}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[2n]{e^k}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

1 Theme 정적분과 급수의 관계

001

함수 $f(x) = 4x^2 + 3x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(\frac{2k}{n}\right)$ 의 값을 구하시오.

002

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(-1 + \frac{3k}{n}\right)^3 = a$ 일 때, $60a$ 의 값을 구하시오.

003

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln \sqrt{n+k} - \ln \sqrt{n}}{n}$ 의 값은?

- ① $\ln 2 - \frac{1}{2}$ ② $\ln 2 - 1$ ③ $\ln 2 - \frac{3}{2}$
- ④ $\ln 2 - 2$ ⑤ $\ln 2 - \frac{5}{2}$

004

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+2k}{n^2 + kn + k^2}\right) = a$ 일 때, e^a 의 값을 구하시오.

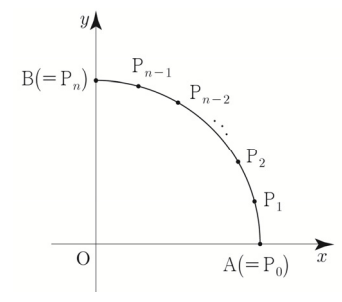
005

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k e^{2 + \frac{k}{n}}}{n^2}$ 의 값은?

- ① e ② e^2 ③ e^3
- ④ e^4 ⑤ e^5

006

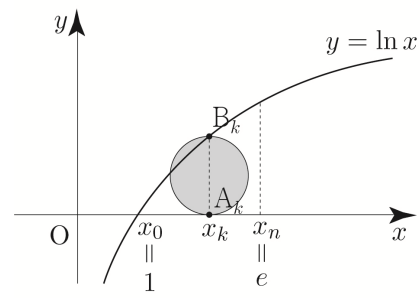
그림과 같이 자연수 n 에 대하여 사분원 $x^2 + y^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 의 호 AB를 n 등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례대로 $A(=P_0), P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, B(=P_n)$ 라 하자. 호 AP_k 의 길이를 $l_k (1 \leq k \leq n)$ 라 하고, 삼각형 OAP_k 의 넓이를 $S_k (1 \leq k \leq n)$ 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (l_k \times S_k)$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$
- ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

007

함수 $f(x) = \ln x$ 가 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1, e]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1 = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = e$ 라 하자. 두 점 $A_k(x_k, 0), B_k(x_k, f(x_k))$ 에 대하여 선분 $A_k B_k$ 를 지름으로 하는 원의 넓이를 $S_k (k=1, 2, 3, \dots, n)$ 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ 의 값은?



- ① $\frac{\pi(2e-5)}{4(e-1)}$ ② $\frac{\pi(e-2)}{2(e-1)}$ ③ $\frac{\pi(2e-3)}{4(e-1)}$
- ④ $\frac{\pi(e-2)}{4(e-1)}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$

3 Theme 두 곡선 사이의 넓이

015

원점에서 곡선 $y = \ln x$ 에 그은 접선을 l 이라 하자.
곡선 $y = \ln x$ 와 x 축 및 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

- ① $\frac{e}{2} - 1$ ② $\frac{e}{2} - \frac{3}{2}$ ③ $\frac{e}{2} - 2$
④ $\frac{e}{2} - \frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{e}{2} - 3$

016

곡선 $y = \cos \frac{\pi}{2}x + 1$ 와 y 축 및 직선 $y = x$ 로 둘러싸인
부분의 넓이는 $\frac{a}{\pi} + b$ 이다. $10(a+b)$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 유리수이다.)

017

함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} & (x \geq 1) \\ (x-1)e^{-x-1} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여

곡선 $y = |f(x)|$ 와 직선 $y = \frac{1}{e}$ 로 둘러싸인 부분의
넓이는 $b - e^a$ 이다. $6(b-a)$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 유리수이다.)

018

함수 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 와 자연수 k 에 대하여 원점과
점 $(k, f(k))$ 를 지나는 직선을 l_k 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와
직선 l_k 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(k)$ 라 할 때,
 $\sum_{k=1}^{10} e^{g(k) - \frac{1}{k^2+1}} = ae^{-b}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 자연수이다.)

4 Theme 넓이의 활용

019

곡선 $y = \sin \frac{x}{2}$ 와 x 축 및 두 직선 $x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{4}{3}\pi$ 로
둘러싸인 부분의 넓이가 직선 $y = k$ 에 의하여 이등분될 때,
상수 k 의 값은?

- ① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$
④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2\pi}$

020

곡선 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)와 x 축 및 $x = \frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인
부분의 넓이가 곡선 $y = k \cos x$ 에 의하여 이등분될 때,
 $40k$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.)

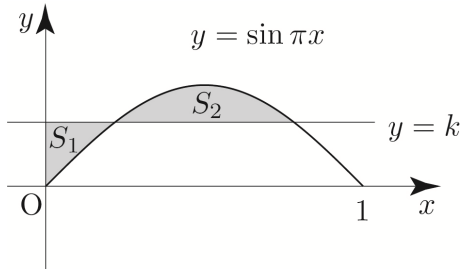
021

상수 k ($0 < k < 2$)에 대하여 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 두 직선
 $x = 0, y = k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와
두 직선 $x = 4, y = k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로
같을 때, k 의 값은?

- ① $\frac{5}{6}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

022

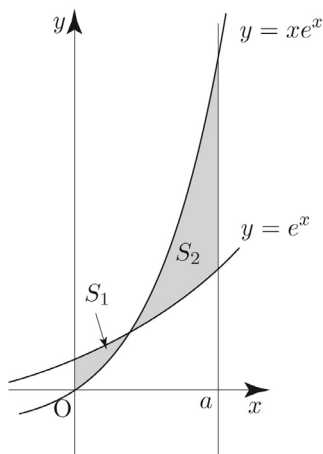
상수 k ($0 < k < 1$)에 대하여 곡선 $y = \sin \pi x$ ($0 \leq x \leq 1$)와 직선 $y = k$, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y = \sin \pi x$ ($0 \leq x \leq 1$)와 직선 $y = k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_2 = 2S_1$ 일 때, 상수 k 의 값은?



- ① $\frac{2}{3\pi}$
- ② $\frac{1}{\pi}$
- ③ $\frac{4}{3\pi}$
- ④ $\frac{5}{3\pi}$
- ⑤ $\frac{2}{\pi}$

023

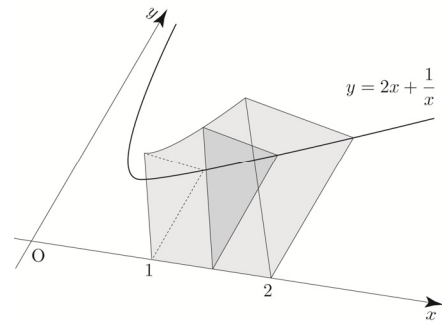
두 곡선 $y = e^x$, $y = xe^x$ 과 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 두 곡선 $y = e^x$, $y = xe^x$ 과 $x = a$ ($a > 1$)로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_2 - S_1 = 2$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하시오.



5 Theme 입체도형의 부피

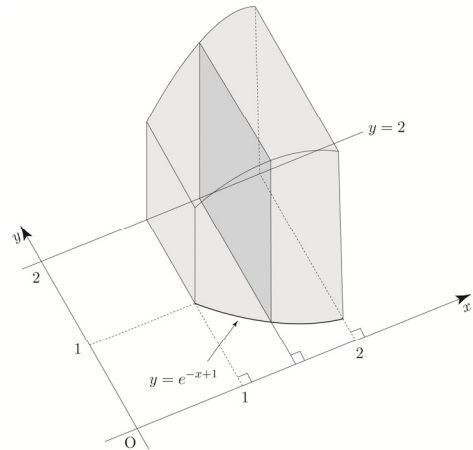
024

그림과 같이 곡선 $y = 2x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$)와 x 축 및 두 직선 $x = 1$, $x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



025

곡선 $y = e^{-x+1}$ 과 두 직선 $x = 1$, $x = 2$ 및 직선 $y = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?



- ① $\frac{e^2 + 8e - 1}{2e^2}$
- ② $\frac{e^2 + 8e - 2}{2e^2}$
- ③ $\frac{e^2 + 8e - 3}{2e^2}$
- ④ $\frac{e^2 + 8e - 4}{2e^2}$
- ⑤ $\frac{e^2 + 8e - 5}{2e^2}$

076



$x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}$ 의 역함수를

$g(x)$ 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(3 + \frac{2k}{n}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}\ln 5 - 3$ ② $2\ln 5 - 3$ ③ $\frac{5}{2}\ln 5 - 3$
- ④ $3\ln 5 - 3$ ⑤ $\frac{7}{2}\ln 5 - 3$

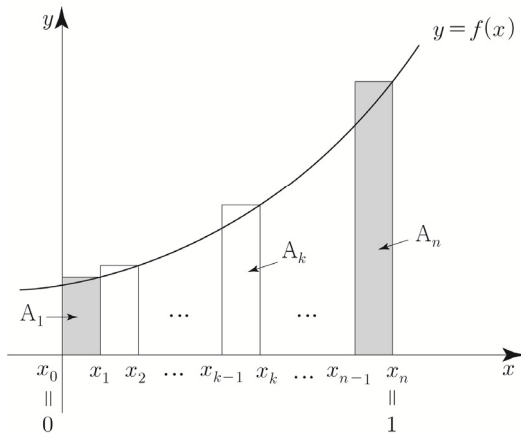
077 | 2010학년도 수능 가형



함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a \geq 0, b > 0$)가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌구간 $[0, 1]$ 을 n 등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로

$0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 1$ 이라 하자.

닫힌구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$ 인 직사각형의 넓이를 A_k 라 하자. ($k=1, 2, 3, \dots, n$)



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1 + A_n = \frac{7n^2 + 1}{n^3}$$

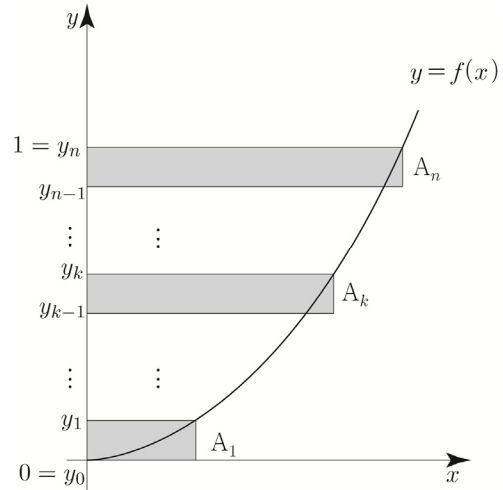
일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{8k}{n} A_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

078



정의역이 $[0, \infty)$ 인 함수 $f(x) = ax^2$ ($a > 0$)가 있다.

그림과 같이 2 이상인 자연수 n 에 대하여 점 $(0, 0)$ 과 점 $(0, 1)$ 을 이은 선분을 n 등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로 $0 = y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n = 1$ 이라 하자. $y_k - y_{k-1}$ 을 높이로 하고 밑변이 $f^{-1}(y_k)$ 인 직사각형의 넓이를 A_k 라 하자. ($k=1, 2, 3, \dots, n$)



A_k 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n A_k^2 = \frac{n+1}{2n^2}$$

일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 60 \left(A_k - \frac{k}{n^2} \right)$ 의 값을 구하시오.

수열의 극한

수열의 극한 | Guide step

1	(1) 0 (2) 3 (3) 1 (4) 4
2	(1) 음의 무한대로 발산 (2) 양의 무한대로 발산
3	(1) 음의 무한대로 발산 (2) 발산(진동) (3) 발산(진동) (4) 0로 수렴
4	(1) 2 (2) 6 (3) 0 (4) 3
5	(1) 0 (2) -2 (3) 0 (4) $\frac{1}{3}$ (5) $\frac{3}{2}$
6	(1) 음의 무한대로 발산 (2) 양의 무한대로 발산
7	3
8	5
9	(1) 수렴 (2) 발산 (진동)
10	(1) $0 < x \leq \frac{2}{3}$ (2) $2 < x \leq 6$ (3) $-1 \leq x \leq 1$ (4) $-1 < x \leq 1$
11	(1) 1로 수렴 (2) 25로 수렴 (3) 2로 수렴 (4) 양의 무한대로 발산
12	$-1 < r < 1$ 일 때, $\frac{r}{2}$ 로 수렴 $r > 1$ or $r < -1$ 일 때, r 로 수렴 $r = 1$ 일 때, $\frac{2}{3}$ 로 수렴 $r = -1$ 일 때, $-\frac{2}{3}$ 로 수렴

해설

■ 개념 확인문제 1

직관적으로 판단하면 된다.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 4$$

[답] (1) 0 (2) 3 (3) 1 (4) 4

■ 개념 확인문제 2

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (-3n) = -\infty$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

[답] (1) 음의 무한대로 발산 (2) 양의 무한대로 발산

■ 개념 확인문제 3

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$$

따라서 $\{-n^2\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.

$$(2) \text{수열 } \{(-3)^{n-1}\} : 1, -3, 9, -27, \dots$$

이므로 교대로 양수와 음수가 되면서 그 절댓값이
한없이 커지므로 진동한다.

따라서 수열 $\{(-3)^{n-1}\}$ 은 발산한다.

$$(3) \{\cos n\pi\} : -1, 1, -1, 1, \dots$$

이므로 진동한다.

따라서 수열 $\{\cos n\pi\}$ 은 발산한다.

■ 개념 확인문제 11

(1) $\left\{ \frac{2^{2n}-1}{4^n+2} \right\}$

분모와 분자 중 절댓값이 가장 큰 항만 비교하면 된다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}-1}{4^n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n-1}{4^n+2} = 1$$

따라서 수열 $\left\{ \frac{2^{2n}-1}{4^n+2} \right\}$ 은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.

(2) $\left\{ \frac{(-5)^{n+2}+3^{n+1}}{(-5)^n+3^n} \right\}$

분모와 분자 중 절댓값이 가장 큰 항끼리 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+2}+3^{n+1}}{(-5)^n+3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^2 \times (-5)^n + 3 \times 3^n}{(-5)^n + 3^n} \\ &= (-5)^2 = 25 \end{aligned}$$

Tip <정석적 방법>

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+2}+3^{n+1}}{(-5)^n+3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^2 \times (-5)^n + 3 \times 3^n}{(-5)^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^2 + 3 \left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)^n} \\ &= \frac{25+0}{1+0} = 25 \end{aligned}$$

따라서 수열 $\left\{ \frac{(-5)^{n+2}+3^{n+1}}{(-5)^n+3^n} \right\}$ 은 수렴하고,

그 극한값은 25로 수렴한다.

(3) $\left\{ \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \right\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

따라서 수열 $\left\{ \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \right\}$ 은 수렴하고,

그 극한값은 2로 수렴한다.

(4) $\{5^n - 2^n\}$

$n \rightarrow \infty$ 일 때, $5^n - 2^n \cong 5^n$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$$

따라서 수열 $\{5^n - 2^n\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.

다르게 접근해보자.

5^n 으로 묶으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right) = \infty$$

답 (1) 1로 수렴 (2) 25로 수렴

(3) 2로 수렴 (4) 양의 무한대로 발산

■ 개념 확인문제 12

[예제 7] tip에서 언급했듯이 공비에 따라 분류해보자.

수열 $\left\{ \frac{r^{2n+1}+r}{r^{2n}+2} \right\}$ 의 공비는 r^2 이므로

공비 r^2 의 범위에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다.

i) $|r^2| < 1 \Rightarrow -1 < r^2 < 1 \Rightarrow r^2 < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$

Tip $-1 < r^2$ 을 만족시키는 r 은 실수 전체이므로 $r^2 < 1$ 과의 교집합은 $r^2 < 1$ 이 된다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}+r}{r^{2n}+2} = \frac{0+r}{0+2} = \frac{r}{2} \text{ (수렴)}$$

ii) $|r^2| > 1 \Rightarrow r^2 < -1 \text{ or } r^2 > 1 \Rightarrow r^2 > 1$

$$\Rightarrow (r-1)(r+1) > 0 \Rightarrow r > 1 \text{ or } r < -1$$

분모와 분자 중 공비의 절댓값이 가장 큰 항끼리 비교하여 구하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}+r}{r^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r \times r^{2n}}{r^{2n}} = r \text{ (수렴)}$$

Tip <정석적 방법>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}+r}{r^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r + \frac{r}{r^{2n}}}{1 + \frac{2}{r^{2n}}} = \frac{r+0}{1+0} = r$$

iii) $|r^2|=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$ or $r=-1$

$$r=1 \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}+r}{r^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1}+1}{1^{2n}+2} \\ = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3} \quad (\text{수렴})$$

$$r=-1 \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}+r}{r^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1}+(-1)}{(-1)^{2n}+2} \\ = \frac{-1-1}{1+2} = -\frac{2}{3} \quad (\text{수렴})$$

답 $-1 < r < 1$ 일 때, $\frac{r}{2}$ 로 수렴
 $r > 1$ or $r < -1$ 일 때, r 로 수렴
 $r=1$ 일 때, $\frac{2}{3}$ 로 수렴
 $r=-1$ 일 때, $-\frac{2}{3}$ 로 수렴

Tip1 [개념확인 문제 12]에서 확인했듯이
 공비가 r^2 일 때도 공비가 r 일 때와 마찬가지로
 다음과 같이 분류한다.

i) $|r| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$
 $(\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ 을 이용하여 구한다.})$

ii) $|r| > 1 \Rightarrow r < -1$ or $r > 1$
 (분모와 분자 중 절댓값이 가장 큰
 항끼리 비교하여 구한다.)

iii) $|r|=1 \Rightarrow r=-1$ or $r=1$
 (r 에 직접 대입하여 구한다.)

공비가 r^2 인 경우는 정말 자주 나오는 편이니
 위의 내용을 잘 기억해두도록 하자.
 (공비가 r 일 때와 달리 공비가 r^2 일 때는
 $r=-1$ 인 경우도 물을 수 있기 때문에
 출제자 입장에서 문제를 내기 용이하다.)

예를 들어 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+2}$ 을 보자마자

실전에서 해야 하는 사고 과정은 다음과 같다.

- ① 공비를 찾는다. 공비는 x^2 이다.
- ② 공비가 x^2 일 때는 공비 x 일 때와
 마찬가지로 $|x| < 1$, $|x| > 1$, $|x|=1$ 경우로

case분류하여 구한다.

i) $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

ii) $|x| > 1 \Rightarrow x < -1$ or $x > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \times x^{2n}+1}{x^{2n}+2} = x$$

iii) $|x|=1 \Rightarrow x=-1$ or $x=1$

$x=1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1}+1}{1^{2n}+2} = \frac{2}{3}$$

$x=-1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1}+1}{(-1)^{2n}+2} = \frac{0}{3} = 0$$

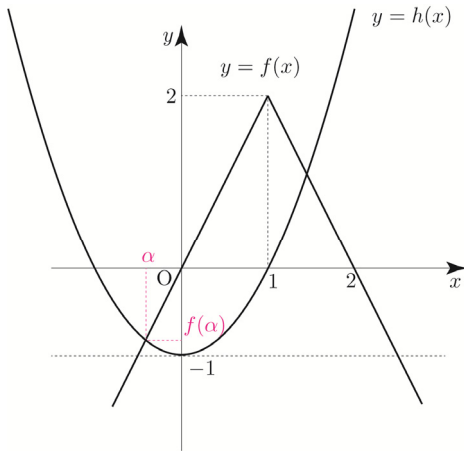
Tip2 등비수열의 극한은 수능에서 출제될 확률이
 가장 높은 파트이므로 이번 기회에 확실히
 알아 두도록 하자. 특히, 공비가 미지수일 때는
 출제하기 좋은 요소이기도 하다.
 참고로 2021학년도 수능 가형 18번 문항에서도
 출제된 적이 있다. (풀 같은 4점)
 추후 Training-2step에서 풀어보기로 하자.

ㄴ. $k > 0$ 이면 $-1 < f(\alpha) < 0$ 이다.

$h(x) = kx^2 - 1$ 라 하면

두 함수 $y = f(x)$, $y = h(x)$ 의 교점의 x 좌표가 각각 α , β 이다.

$y = h(x)$ 의 그래프를 그려서 판단해보자.

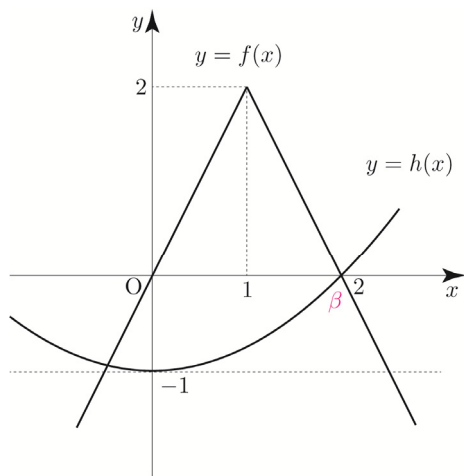


$-1 < f(\alpha) < 0$ 임이 자명하다.
따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $k = \frac{1}{4}$ 이면 $\beta + g(\beta) = 3$ 이다.

방정식 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

$h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 의 그래프를 그려서 판단해보자.



$h(2) = f(2) = 0 \Rightarrow \beta = 2, f(\beta) = 0$

$$g(\beta) = g(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{1 + f(2)\}^{2n} - 2}{\{1 + f(2)\}^{2n} + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n} - 2}{1^{2n} + 2} = \frac{1 - 2}{3} = -\frac{1}{3}$$

이므로 $\beta + g(\beta) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ 이다.

따라서 ㄷ은 거짓이다.

ㄹ. $\frac{1}{4} < k < 1$ 이면 $g(\alpha) + g(\beta) = 0$ 이다.

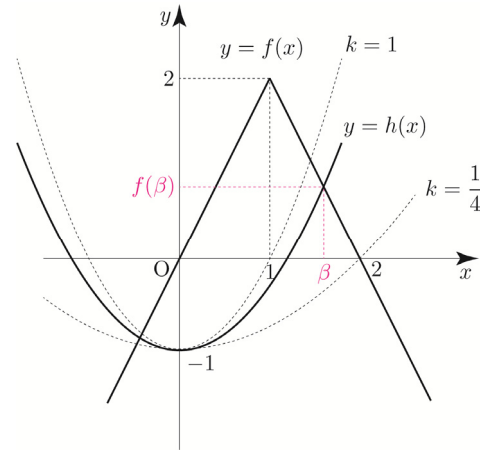
$f(x) = kx^2 - 1$

ㄴ에 의해서 $-1 < f(\alpha) < 0 \Rightarrow 0 < 1 + f(\alpha) < 1$ 이므로

$$g(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{1 + f(\alpha)\}^{2n} - 2}{\{1 + f(\alpha)\}^{2n} + 2} = \frac{0 - 2}{0 + 2} = -1$$
이다.

범위의 경계인 $k = \frac{1}{4}, k = 1$ 일 때를 유의해서

$h(x) = kx^2 - 1$ ($\frac{1}{4} < k < 1$)의 그래프를 그리면
다음과 같다.



$1 < \beta < 2 \Rightarrow f(\beta) > 0 \Rightarrow 1 + f(\beta) > 1$ 이므로

$$g(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{1 + f(\beta)\}^{2n} - 2}{\{1 + f(\beta)\}^{2n} + 2} = 1$$
이다.

$g(\alpha) + g(\beta) = -1 + 1 = 0$

따라서 ㄹ은 참이다.

ㅁ. $0 < k < \frac{1}{4}$ 이면 $g(\alpha) + g(\beta) = -2$ 이다.

ㄴ에 의해서 $-1 < f(\alpha) < 0 \Rightarrow 0 < 1 + f(\alpha) < 1$ 이므로

$$g(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{1 + f(\alpha)\}^{2n} - 2}{\{1 + f(\alpha)\}^{2n} + 2} = \frac{0 - 2}{0 + 2} = -1$$
이다.

3단계) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{S_1}{1-\frac{b^2}{a^2}}$ 를 계산한다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{S_1}{1-r} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{7-2\sqrt{5}}{4}\pi}{1-\frac{2}{9}} \\ &= \frac{9}{7} \left(\frac{5}{2} - \frac{7-2\sqrt{5}}{4}\pi \right) \\ &= \frac{45}{14} - \frac{9}{28}(7-2\sqrt{5})\pi \end{aligned}$$

이다.

답 ①

093

Guide step에서 배운 메커니즘대로 풀어보자.

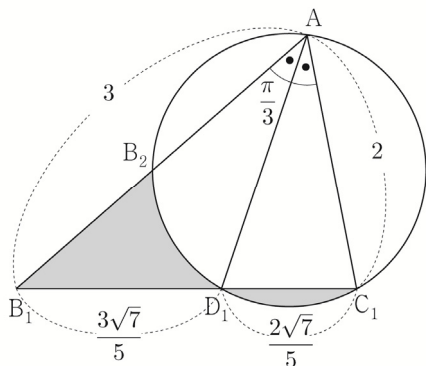
1단계) 첫 번째항 S_1 을 구한다.

삼각형 AB_1C_1 에서 코사인법칙을 사용하면

$$\begin{aligned} \cos(\angle B_1AC_1) &= \frac{(\overline{AB_1})^2 + (\overline{AC_1})^2 - (\overline{B_1C_1})^2}{2 \times \overline{AB_1} \times \overline{AC_1}} \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{9+4 - (\overline{B_1C_1})^2}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{13 - (\overline{B_1C_1})^2}{12} \\ \Rightarrow \overline{B_1C_1} &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

삼각형의 각의 이등분선과 닮음에 의해서

$$\begin{aligned} \overline{AB_1} : \overline{AC_1} &= \overline{B_1D_1} : \overline{D_1C_1} \Rightarrow 3 : 2 = \overline{B_1D_1} : \overline{D_1C_1} \\ \Rightarrow \overline{B_1D_1} &= \frac{3\sqrt{7}}{5}, \quad \overline{D_1C_1} = \frac{2\sqrt{7}}{5} \end{aligned}$$

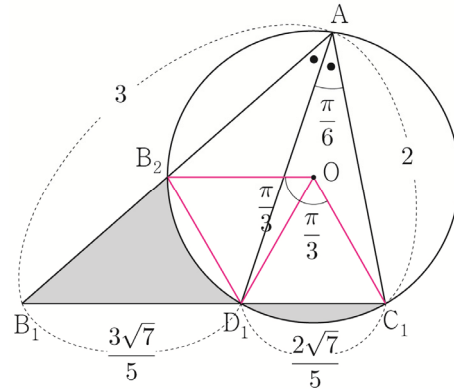


세 점 A, D_1 , C_1 을 지나는 원의 중심을 O라 하자.

중심각과 원주각의 관계에 의하여

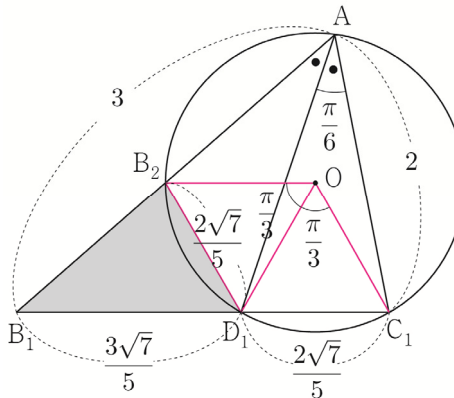
$$\angle D_1OC_1 = 2 \times \angle D_1AC_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle D_1OB_2 = 2 \times \angle D_1AB_2 = \frac{\pi}{3}$$



정삼각형 OD_1C_1 와 정삼각형 OD_1B_2 은 서로 합동이므로

$\overline{D_1C_1} = \overline{D_1B_2} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$ 이고 선분 D_1C_1 와 호 D_1C_1 로 둘러싸인 부분의 넓이는 선분 D_1B_2 와 호 D_1B_2 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



색칠한 부분의 넓이 S_1 은 삼각형 $B_1D_1B_2$ 의 넓이와 같다.

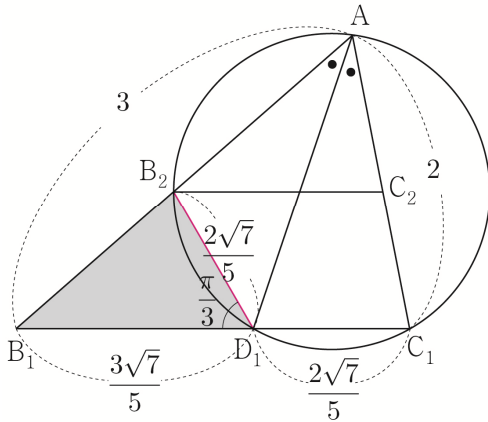
$$\angle B_2D_1B_1 = \pi - 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \times \overline{B_1D_1} \times \overline{B_2D_1} \times \sin(\angle B_2D_1B_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{5} \times \frac{3\sqrt{7}}{5} \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{21\sqrt{3}}{50} \end{aligned}$$

2단계) 첫 번째 도형과 두 번째 도형의 길이의 비가

$a : b$ 일 때, 넓이의 비 $a^2 : b^2$ 를 구하고 이를

이용하여 공비 $r = \frac{b^2}{a^2}$ 를 구한다.



삼각형 $B_1D_1B_2$ 에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos(\angle B_1D_1B_2) = \frac{(\overline{B_1D_1})^2 + (\overline{B_2D_1})^2 - (\overline{B_1B_2})^2}{2 \times \overline{B_1D_1} \times \overline{B_2D_1}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{63}{25} + \frac{28}{25} - (\overline{B_1B_2})^2}{\frac{84}{25}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{91}{25} - (\overline{B_1B_2})^2}{\frac{84}{25}}$$

$$\Rightarrow \overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$$

$$\overline{AB_2} = \overline{AB_1} - \overline{B_1B_2} = 3 - \frac{7}{5} = \frac{8}{5}$$

삼각형 AB_1C_1 의 변 AB_1 의 길이와 삼각형 AB_2C_2 의

변 AB_2 의 길이의 비가 $3 : \frac{8}{5} = 1 : \frac{8}{15}$ 이므로

넓이의 비는 $1 : \frac{64}{225}$ 이다.

즉, 공비 $r = \frac{64}{225}$ 이다.

3단계) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{S_1}{1-\frac{64}{225}}$ 를 계산한다.

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}}$$

$$= \frac{225}{161} \times \frac{21\sqrt{3}}{50} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

이다.

답 ①

Tip1 각의 이등분선, 원주각과 중심각, 코사인법칙, 합동을 이용하여 넓이 간단히 하기 ($S_1 = \triangle B_1D_1B_2$)

가 모두 쓰인 종합세트 같은 문제이다.

093번이 6평에 출제되고 그 해 수능에 088번이 출제되었는데 앞서 해설에서 언급했듯이 088번에서도 추가 요소인 삼각함수의 덧셈정리가 결합되어 출제되었다.

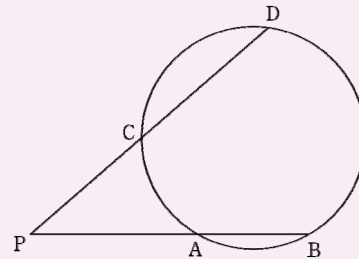
즉, 중학교 때 배운 기하만이 아니라 고등학교 때 배운 여러 가지 내용들이 복합적으로 결합되어 출제될 수도 있다는 생각을 반드시 가지고 있어야 한다.

093번은 등비급수 도형 문제에서는 나름 고난도에 속하는 문제이니 다시 한번 사고를 정리하면서 백지에 깔끔하게 풀어보자.

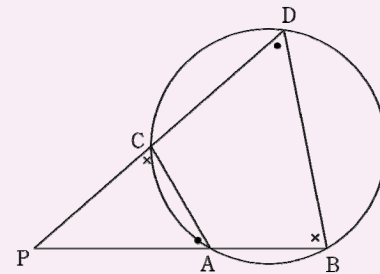
Tip2 <원과 비례에 관한 성질 中 할선 정리>

할선: 원과 두 점에서 만나는 직선

$$\textcircled{1} \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$



(증명)



원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의

크기의 합은 180° 이므로

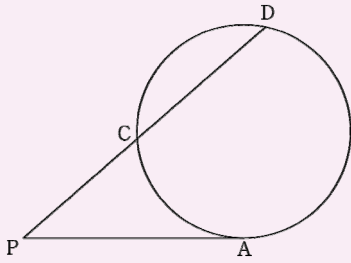
$\angle PAC = \angle PDB$, $\angle PCA = \angle PBD$ 이다.

즉, 두 삼각형 PAC, PDB는 서로 닮음이다.

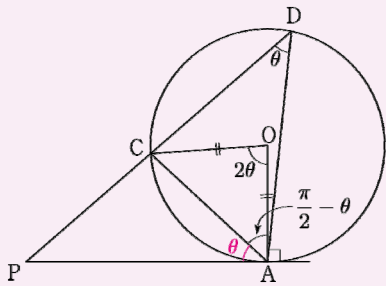
$\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$ 이므로

$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 이다.

② $(\overline{PA})^2 = \overline{PC} \times \overline{PD}$ (점 A는 접점)



(증명)



$\angle ADC = \theta$ 라 하면 원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle AOC = 2\theta$ 이다.

원의 중심을 O라 하면 삼각형 OAC은 이등변

삼각형이므로 $\angle OAC = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이다.

$\angle OAP = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle PAC = \theta$ 이다.

$\angle PDA = \angle PAC$, $\angle APD = \angle CPA$

즉, 두 삼각형 PAC, PDA는 서로 닮음이다.

$\overline{PC} : \overline{PA} = \overline{PA} : \overline{PD}$ 이므로

$(\overline{PA})^2 = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 이다.

093번 문제에서 원의 비례관계인 할선 정리를 이용하여 $\overline{B_1B_2}$ 를 구할 수도 있다.

$$\overline{B_1D_1} \times \overline{B_1C_1} = \overline{B_1B_2} \times \overline{B_1A}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{7}}{5} \times \sqrt{7} = \overline{B_1B_2} \times 3 \Rightarrow \overline{B_1B_2} = \frac{7}{5}$$

하나 교육부에서 발표한 2015 개정 교육과정 중학교 기하 단원의 교수·학습 방법 및 유의 사항을 살펴보면 “원과 비례에 관한 성질은 다루지 않는다.”라고 명시되어있다.

따라서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{B_1B_2}$ 를 구하는 것이 출제자의 의도라고 볼 수 있고 필자가 권장하는 풀이이기도 하다.

다만 할선 정리를 알아둬서 나쁠 건 없으니 이번 기회를 통해 기억해도 좋다.

따라서 $a - 4b = 1 + 2 = 3$ 이다.

답 3

055

$$f'(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 3 + 1 = 4$ 이다.

답 4

056

$$f(x) = \cos x + 4\sin x$$

$$f'(x) = -\sin x + 4\cos x$$

따라서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi - 2h) - f(\pi)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi - 2h) - f(\pi)}{-2h} \times (-2)$$

$$= -2f'(\pi) = (-2) \times (-4) = 8$$

이다.

답 8

057

$$f(x) = x \sin x + k \cos x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x + k(-\sin x) = (1 - k)\sin x + x \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 1 - k = \sqrt{3}$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\sin x + x \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{9 + \pi}{6} = \frac{a + b\pi}{6}$$

따라서 $a + b = 10$ 이다.

답 10

058

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(a)\}^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (f(x) + f(a)) \right)$$

$$= f'(a) \times 2f(a)$$

$$= 2(\sin a + \cos a)(\sin a - \cos a)$$

$$= 2(\sin^2 a - \cos^2 a)$$

$$= 2\{\sin^2 a - (1 - \sin^2 a)\}$$

$$= 2(2\sin^2 a - 1) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 a = \frac{3}{4}$$

따라서 $60\sin^2 a = 60 \times \frac{3}{4} = 45$ 이다.

답 45

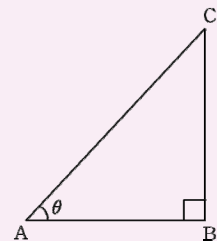
059

Tip1 <한 변을 삼각함수로 표현하기>

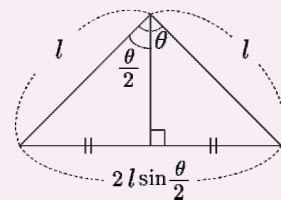
$$\overline{AB} = \overline{AC} \cos \theta$$

$$\overline{BC} = \overline{AC} \sin \theta$$

$$\overline{BC} = \overline{AB} \tan \theta$$



Tip2 <이등변삼각형에서 밑변의 길이>



위 그림을 꼭 기억하도록 하자.

보면 바로 $2l \sin \frac{\theta}{2}$ 를 쓸 수

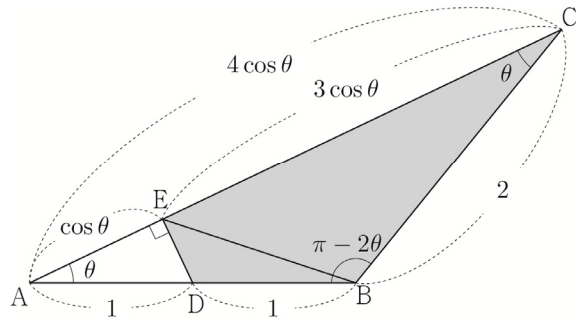
있어야 한다. 특히 원이 나오면 중심과 원 위의 두 점을 이으면 천지가 이등변삼각형이므로 공식을 쓰기 용이하다.

삼각형 ABC는 이등변삼각형이고 $\angle ABC = \pi - 2\theta$ 이므로

$$\overline{AC} = 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi - 2\theta}{2} = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 4 \cos \theta$$

$$\overline{AE} = \overline{AD} \cos \theta = \cos \theta$$

$$\overline{CE} = 4 \cos \theta - \cos \theta = 3 \cos \theta$$



삼각형 BCE의 넓이 $f(\theta)$ 는

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{CE} \times \overline{CB} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 3 \cos \theta \times 2 \times \sin \theta$$

$$= 3 \sin \theta \cos \theta$$

삼각형 BDE의 넓이 $g(\theta)$ 는 삼각형 ADE의 넓이와 같으므로

$$g(\theta) = \triangle ADE = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AE} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 1 \times \cos \theta \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\theta^2} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \times \cos^2 \theta \right) \\ &= \frac{3}{2} \times 1^2 \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이다.

답 ①

060

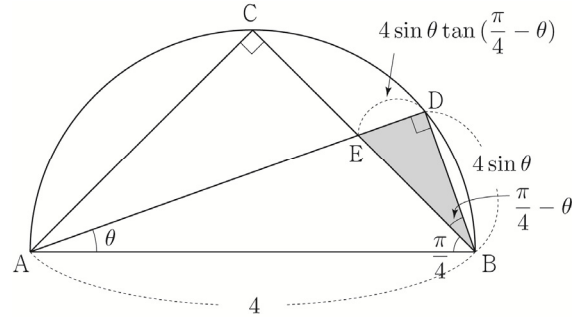
두 점 C, D는 원 위의 점이므로 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$

삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$

$$\overline{BD} = \overline{AB} \sin \theta = 4 \sin \theta$$

$$\angle EBD = \angle ABD - \angle ABE = \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \theta$$

$$\overline{DE} = \overline{BD} \times \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = 4 \sin \theta \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$



삼각형 BDE의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{DE} = \frac{1}{2} \times 4 \sin \theta \times 4 \sin \theta \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

$$= 8 \sin^2 \theta \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

$$\text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{8 \sin^2 \theta \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)}{\theta^2}$$

$$= 8 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \times \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \right)$$

$$= 8 \times 1^2 \times 1 = 8$$

이다.

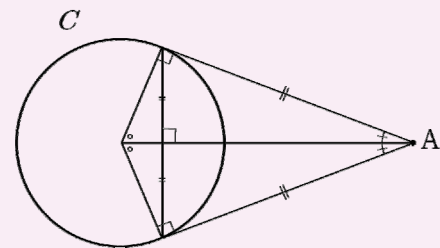
답 8

061

Tip <원과 보조선>

원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선은 문제를 풀어나가는 key point일 때가 많다. 즉, 반드시 그어야 하는 보조선 중 하나이다.

A에서 원 C에 접선을 그었을 때, 표시해야 하는 보조선은 다음과 같다.



자주 출제되는 도형이니 반드시 기억하도록 하자.

$$\overline{AC} = \overline{AB} \times \cos\theta = \cos\theta = \overline{AE}$$

원의 중심을 O라 하면

$$\angle OAE = \frac{\theta}{2} \text{ 이므로 } \overline{OE} = \overline{AE} \times \tan \frac{\theta}{2} = \cos\theta \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\angle EOD = \pi - \angle EOC = \pi - (\pi - \theta) = \theta$$

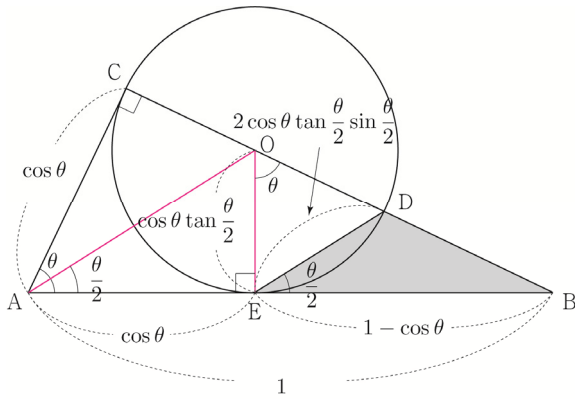
삼각형 OED는 이등변삼각형이므로 $2l \sin \frac{\theta}{2}$ 를 사용하면

$$\overline{ED} = 2 \times \cos\theta \tan \frac{\theta}{2} \times \sin \frac{\theta}{2} = 2\cos\theta \tan \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\angle OED = \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \text{ 이므로}$$

$$\angle DEB = \frac{\pi}{2} - \angle OED = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

$$\overline{EB} = 1 - \overline{AE} = 1 - \cos\theta$$



삼각형 BDE의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{ED} \times \overline{EB} \times \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\cos\theta \tan \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \times (1 - \cos\theta) \times \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \cos\theta \tan \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^5} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\cos\theta \tan \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \cos\theta)}{\theta^5} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\cos\theta \times \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\theta} \times \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\theta} \times \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\theta} \times \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \right) \end{aligned}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = a$$

이다.

$$\text{따라서 } 80a = 80 \times \frac{1}{16} = 5 \text{이다.}$$

답 5

Tip <수렴 예측>

$$S(\theta) = \cos\theta \tan \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \cos\theta)$$

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$ 을 계산하기 전에

$\tan \frac{\theta}{2}$ 는 θ 를 함축하고, $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ 는 θ^2 를 함축하고,

$1 - \cos\theta$ 는 θ^2 를 함축하고 있으므로
분모, 분자의 θ 의 개수가 모두 동일한 것을
파악할 수 있다.

$$\frac{\cos\theta \tan \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \cos\theta)}{\theta^5} \Rightarrow \frac{\theta^5}{\theta^5}$$

즉, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$ 을 계산하기 전부터 극한값이
존재할 것이라고 미리 예측할 수 있다.

다른 방법으로 풀어보자.

$$\overline{BC} = \overline{AB} \times \sin\theta = \sin\theta$$

$$\overline{CD} = 2 \times \overline{OE} = 2\cos\theta \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = \sin\theta - 2\cos\theta \tan \frac{\theta}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{BE} \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\sin\theta - 2\cos\theta \tan \frac{\theta}{2}\right) \times (1 - \cos\theta) \times \cos\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin\theta - 2\cos\theta \tan \frac{\theta}{2}\right) (1 - \cos\theta) \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^5} &= \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin\theta - 2\cos\theta \tan \frac{\theta}{2}}{\theta^3} \times \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \times \cos\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin\theta - 2\cos\theta \tan \frac{\theta}{2}}{\theta^3} \end{aligned}$$

삼각형 DEC의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \overline{ED} \times \overline{EC} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2 \sin \theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta} \times 2 \sin \theta \times \sin \theta \\ &= \frac{2 \sin^3 \theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta} \end{aligned}$$

이므로

사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{4 \sin^3 \theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{4 \sin^3 \theta \sin 2\theta}{\theta^3 \sin 3\theta} \\ &= 4 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^3 \theta}{\theta^3} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \right) \\ &= 4 \times 1^3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = a \end{aligned}$$

따라서 $60a = 60 \times \frac{8}{3} = 160$ 이다.

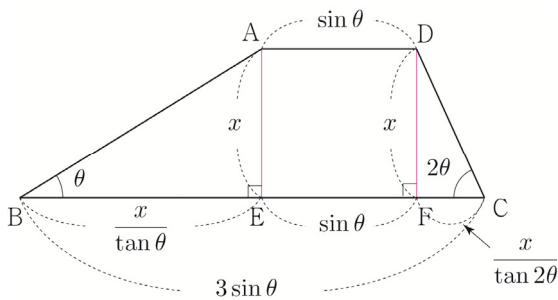
답 160

다르게 풀어보자.

두 점 A, D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, $\overline{AE} = \overline{DF} = x$ 라 하자.

삼각형 ABE에서 $\overline{BE} = \frac{x}{\tan \theta}$ 이고,

삼각형 DCF에서 $\overline{FC} = \frac{x}{\tan 2\theta}$ 이다.



$$\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EF} + \overline{FC}$$

$$\Rightarrow 3 \sin \theta = \frac{x}{\tan \theta} + \sin \theta + \frac{x}{\tan 2\theta}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \theta = x \times \frac{\tan \theta + \tan 2\theta}{\tan \theta \tan 2\theta}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \sin \theta \tan \theta \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta}$$

이므로

Tip 도형의 길이의 합을 이용한 미지수 구하기는 도형 문제에서 빈출되는 문제풀이 Technique 중 하나이다.

사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times x \times (\overline{AD} + \overline{BC})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2 \sin \theta \tan \theta \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta} \times (\sin \theta + 3 \sin \theta)$$

$$= \frac{4 \sin^2 \theta \tan \theta \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{4 \sin^2 \theta \tan \theta \tan 2\theta}{\theta^3 (\tan \theta + \tan 2\theta)}$$

$$= 4 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \times \frac{\frac{\tan 2\theta}{\theta}}{\frac{\tan \theta}{\theta} + \frac{\tan 2\theta}{\theta}} \right)$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{2}{1+2} = \frac{8}{3} = a$$

따라서 $60a = 60 \times \frac{8}{3} = 160$ 이다.

O66

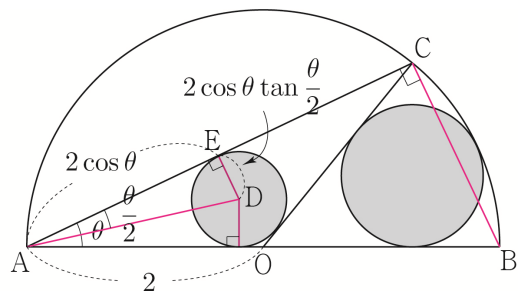
삼각형 AOC에 내접하는 원의 중심을 D라 하고

점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자.

$$\overline{AC} = \overline{AB} \times \cos \theta = 4 \cos \theta$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 2 \cos \theta$$

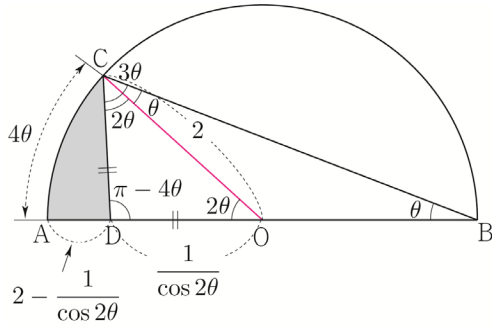
$$\overline{ED} = \overline{AE} \tan \frac{\theta}{2} = 2 \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}$$



부채꼴 OBC에 내접하는 원의 중심을 F라 하고

점 F에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직선 OF와 반원이 만나는 점을 G라 하자.



$$\overline{AD} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{DO} = \overline{AO} = 2$$

$$\widehat{AC} = 2 \times 2\theta = 4\theta$$

$$\therefore g(\theta) = 2 + 4\theta$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{g(\theta) - 2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{4\theta - \tan 2\theta}{4\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{4 - \frac{\tan 2\theta}{\theta}}{4} \\ &= \frac{4 - 2}{4} = \frac{1}{2} = a \end{aligned}$$

따라서 $100a = 100 \times \frac{1}{2} = 50$ 이다.

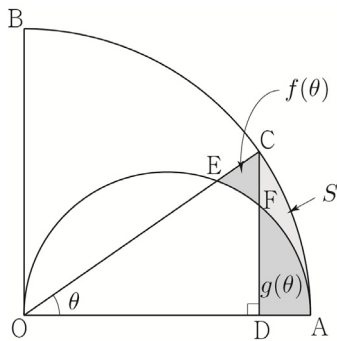
답 50

068

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{CD}}{3\theta + f(\theta) - g(\theta)}$ 의 극한값을 구하는 것이므로 $f(\theta)$, $g(\theta)$ 를 각각 구한 뒤 두 값을 빼서 $f(\theta) - g(\theta)$ 를 구하는 사고를 할 수도 있지만 막상 시도하려니 길이 보이지 않는다.

다른 방법이 없을까?

아래 그림과 같이 선분 CF와 두 호 FA, CA로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하자.



선분 CE와 두 호 EA, CA로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S + f(\theta)$ 이고, 두 선분 CD, DA와 호 CA로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S + g(\theta)$ 이므로 두 넓이를 빼면 $S + f(\theta) - (S + g(\theta)) = f(\theta) - g(\theta)$ 이다.

즉, $f(\theta)$, $g(\theta)$ 를 각각 구하지 않고도 넓이 S 를 이용하여 $f(\theta) - g(\theta)$ 를 구할 수 있다.

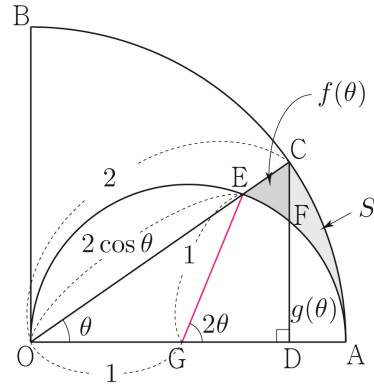
선분 CE와 두 호 EA, CA로 둘러싸인 부분의 넓이 $S + f(\theta)$ 를 구해보자.

반원의 중심을 G라 하자.

$$\angle EGA = 2\theta$$

$$\overline{OE} = \overline{OA} \times \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$S + f(\theta)$ 는 부채꼴의 OAC의 넓이에서 삼각형 OEG의 넓이와 부채꼴 GAE의 넓이의 합을 빼면 된다.



부채꼴의 OAC의 넓이

$$= \frac{1}{2} \times (\overline{OC})^2 \times \theta = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \theta = 2\theta$$

삼각형 OEG의 넓이

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OG} \times \overline{OE} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \cos \theta \times \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$$

부채꼴 GAE의 넓이

$$= \frac{1}{2} \times (\overline{EG})^2 \times 2\theta = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta = \theta$$

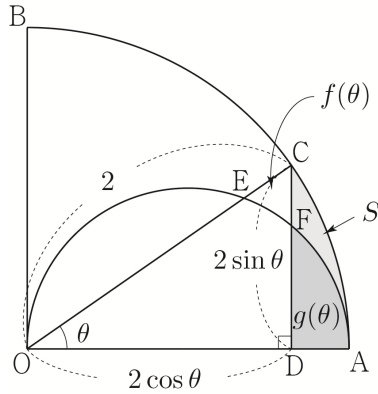
$$S + f(\theta) = 2\theta - (\sin \theta \cos \theta + \theta) = \theta - \sin \theta \cos \theta$$

두 선분 CD, DA와 호 CA로 둘러싸인 부분의 넓이 $S + g(\theta)$ 를 구해보자.

$$\overline{CD} = \overline{OC} \times \sin\theta = 2\sin\theta$$

$$\overline{OD} = \overline{OC} \times \cos\theta = 2\cos\theta$$

$S+g(\theta)$ 는 부채꼴의 OAC의 넓이에서 삼각형 OCD의 넓이를 빼서 구하면 된다.



부채꼴 OAC의 넓이

$$= \frac{1}{2} \times (\overline{OC})^2 \times \theta = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \theta = 2\theta$$

삼각형 OCD의 넓이

$$= \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{OD} = \frac{1}{2} \times 2\sin\theta \times 2\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$S+g(\theta) = 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore f(\theta) - g(\theta) = S + f(\theta) - \{S + g(\theta)\}$$

$$= \theta - \sin\theta\cos\theta - (2\theta - 2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= -\theta + \sin\theta\cos\theta$$

$\overline{CD} = 2\sin\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{CD}}{3\theta + f(\theta) - g(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\sin\theta}{2\theta + \sin\theta\cos\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2\sin\theta}{\theta}}{2 + \frac{\sin\theta}{\theta} \times \cos\theta} \\ &= \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} = \frac{q}{p} \end{aligned}$$

따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$ 이다.

다른 방법으로 풀어보자.

이번에는 두 선분 ED, FD와 호 EF로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하자.

삼각형 DEC의 넓이는 $S+f(\theta)$ 이고, 두 선분 DE, DA와 호 AE로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S+g(\theta)$ 이므로 두 넓이를 빼면 $S+f(\theta) - (S+g(\theta)) = f(\theta) - g(\theta)$ 이다.

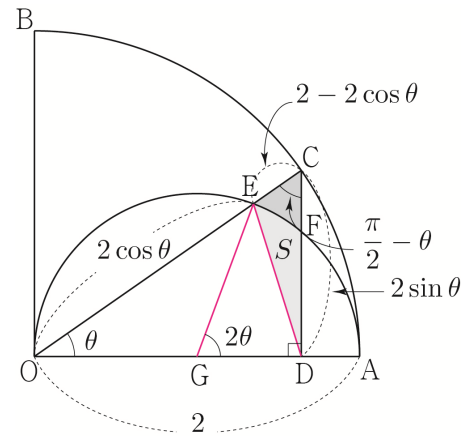
삼각형 DEC의 넓이 $S+f(\theta)$ 를 구해보자.

$$\overline{OE} = \overline{OA} \times \cos\theta = 2\cos\theta$$

$$\overline{CE} = \overline{OC} - \overline{OE} = 2 - 2\cos\theta$$

$$\overline{CD} = \overline{OC} \times \sin\theta = 2\sin\theta$$

$$\angle OCD = \frac{\pi}{2} - \theta$$



$$S+f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{CE} \times \overline{CD} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 - 2\cos\theta) \times 2\sin\theta \times \cos\theta$$

$$= 2(1 - \cos\theta)\sin\theta\cos\theta$$

두 선분 DE, DA와 호 AE로 둘러싸인 부분의 넓이 $S+g(\theta)$ 를 구해보자.

$S+g(\theta)$ 는 부채꼴 GAE의 넓이에서 삼각형 GDE의 넓이를 빼서 구하면 된다.

$$\overline{OD} = \overline{OC} \times \cos\theta = 2\cos\theta$$

$$\overline{GD} = \overline{OD} - \overline{OG} = 2\cos\theta - 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\tan\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x + 1 - (1 - \tan x)}{x(1 - \tan x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\tan x}{x(1 - \tan x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\tan x}{x} \times \frac{2}{1 - \tan x} \right) \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\tan\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{8} \\ &= 2 \times \frac{2 - \sqrt{2}}{8} = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

이다.

답 ④

Tip 만약 전 범위를 배운 학생이라면 미분계수의 정의를 이용하여

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\tan\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} \text{의 값을 구해도 된다.}$$

$f(\theta) = \tan\theta$ 라 하면 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $f'(\theta) = \sec^2\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\tan\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{f(\theta) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sec^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

<수2 내용복습>

$f(\theta)$ 는 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 에서 미분가능하므로 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 에서의

좌미분계수와 우미분계수가 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 와 같다.

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{f(\theta) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta - \frac{\pi}{4}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{f(\theta) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

146

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OB} = 1$$

$$\angle POR = \pi - (\theta + 2\theta) = \pi - 3\theta$$

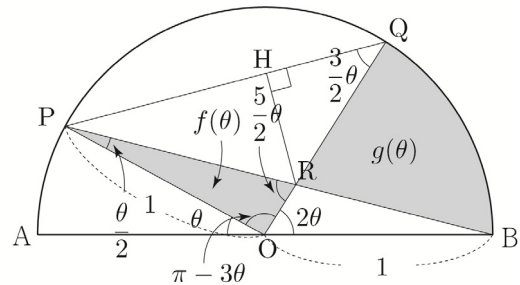
삼각형 OPB는 이등변삼각형이므로

$$\angle OPB = \frac{1}{2} \{\pi - (\pi - \theta)\} = \frac{\theta}{2}$$

$$\angle PRO = \pi - \left(\frac{\theta}{2} + \pi - 3\theta\right) = \frac{5}{2}\theta$$

삼각형 OPQ는 이등변삼각형이므로

$$\angle OQP = \frac{1}{2} \{\pi - (\pi - 3\theta)\} = \frac{3}{2}\theta$$



삼각형 POR에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{OR}}{\sin(\angle OPR)} = \frac{\overline{OP}}{\sin(\angle ORP)} \Rightarrow \frac{\overline{OR}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{5}{2}\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{OR} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$$

삼각형 POR의 넓이 $f(\theta)$ 는

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OR} \times \sin(\pi - 3\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta} \times \sin 3\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2} \sin 3\theta}{2\sin\frac{5}{2}\theta}$$

두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이 $g(\theta)$ 는 부채꼴 OBQ의 넓이에서 삼각형 OBR의 넓이를 빼서 구하면 된다.

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} \times (\overline{OB})^2 \times 2\theta - \frac{1}{2} \times \overline{OR} \times \overline{OB} \times \sin 2\theta \\ &= \theta - \frac{\sin\frac{\theta}{2} \sin 2\theta}{2\sin\frac{5}{2}\theta} \end{aligned}$$

삼각형 OEF에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$$(\overline{OF})^2 = (\overline{OE})^2 + (\overline{EF})^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{x}{\tan \frac{\theta}{3}} + x\right)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 1 = x^2 \left\{ \left(\frac{1 + \tan \frac{\theta}{3}}{\tan \frac{\theta}{3}} \right)^2 + 1 \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1 + \tan \frac{\theta}{3}}{\tan \frac{\theta}{3}} \right)^2 + 1}}$$

148

$$\overline{OB} = \overline{OP} = \overline{OA} = 1$$

$$\overline{AP} = \overline{AB} \times \cos \theta = 2 \cos \theta$$

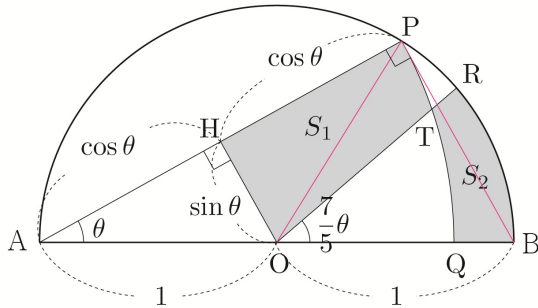
$$\overline{AH} = \overline{AO} \times \cos \theta = \cos \theta$$

$$\overline{OH} = \overline{AO} \times \sin \theta = \sin \theta$$

원주각과 중심각의 성질에 의하여 $\angle POB = 2\theta$

$\widehat{PR} : \widehat{RB} = 3 : 7$ 이므로

$$\angle ROB = 2\theta \times \frac{7}{10} = \frac{7}{5}\theta$$



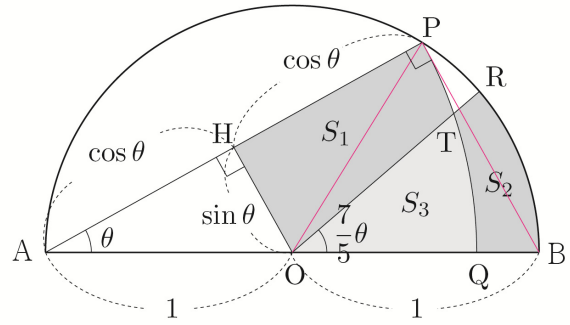
$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1 - S_2}{\overline{OH}}$ 의 극한값을 구하는 것이므로

S_1, S_2 를 각각 구한 뒤 두 값을 빼서 $S_1 - S_2$ 를 구하는 사고를 할 수도 있지만 막상 시도하려니 식이 굉장히 복잡한 것 같다.

다른 방법이 없을까?

Training-1step 068번 해설에서 배운 것과 마찬가지로 제 3의 넓이를 이용하여 구해보자.

두 선분 OT, OQ와 호 QT로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3 라 하자.



$S_1 + S_3 - (S_2 + S_3) = S_1 - S_2$ 이므로 S_1 과 S_2 를 각각 구하지 않고도 $S_1 - S_2$ 의 값을 구할 수 있다.

$S_1 + S_3$ 는 부채꼴 AQP의 넓이에서 삼각형 AOH의 넓이를 빼서 구하면 된다.

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 &= \frac{1}{2} \times (\overline{AP})^2 \times \theta - \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{HO} \\ &= 2\theta \cos^2 \theta - \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} \end{aligned}$$

$S_2 + S_3$ 는 부채꼴 OBR의 넓이와 같으므로

$$S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \times (\overline{OB})^2 \times \frac{7}{5}\theta = \frac{7}{10}\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore S_1 - S_2 &= S_1 + S_3 - (S_2 + S_3) \\ &= 2\theta \cos^2 \theta - \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} - \frac{7}{10}\theta \end{aligned}$$

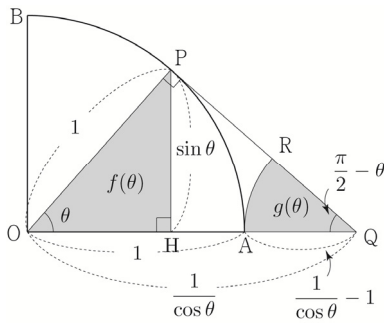
$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1 - S_2}{\overline{OH}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\theta \cos^2 \theta - \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} - \frac{7}{10}\theta}{\sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \times 2 \cos^2 \theta - \frac{\cos \theta}{2} - \frac{7}{10} \times \frac{\theta}{\sin \theta} \right) \\ &= 1 \times 2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{10} \times 1 = \frac{4}{5} = a \end{aligned}$$

따라서 $50a = 50 \times \frac{4}{5} = 40$ 이다.

답 40

149

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} = 1 \\ \overline{PH} &= \overline{OP} \times \sin\theta = \sin\theta \\ \overline{OH} &= \overline{OP} \times \cos\theta = \cos\theta \\ \angle OQP &= \frac{\pi}{2} - \theta \\ \cos\theta &= \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \overline{OQ} = \frac{1}{\cos\theta} \\ \overline{AQ} &= \overline{OQ} - \overline{OA} = \frac{1}{\cos\theta} - 1 \end{aligned}$$



삼각형 OHP의 넓이 $f(\theta)$ 는

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times \cos\theta \times \sin\theta = \frac{\sin\theta \cos\theta}{2}$$

부채꼴 QRA의 넓이 $g(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} \times (\overline{AQ})^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \left(\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sqrt{\left(\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}}{\theta \sin\theta \cos\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \left| \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta} \right| \sqrt{\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}}}{\theta \sin\theta \cos\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \left(\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}\right) \sqrt{\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}}}{\theta \sin\theta \cos\theta} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \times \frac{\theta}{\sin\theta} \times \frac{2}{\cos^2\theta} \sqrt{\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

이다.

답 ④

150

$$\begin{aligned} \overline{BM} &= \overline{MC} = 1 \\ \overline{BH} &= \overline{BM} \times \cos\theta = \cos\theta \\ \overline{HM} &= \overline{BM} \times \sin\theta = \sin\theta \end{aligned}$$

점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 N이라 하면

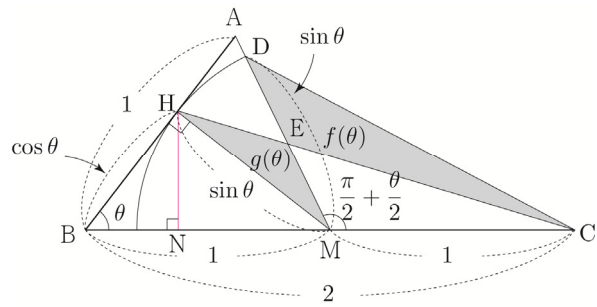
$$\overline{HN} = \overline{BH} \times \sin\theta = \sin\theta \cos\theta$$

$$\overline{MD} = \overline{HM} = \sin\theta$$

삼각형 ABM은 이등변삼각형이므로

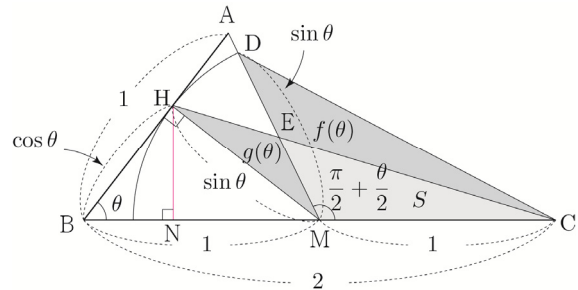
$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$\angle DMC = \pi - (\angle AMB) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$$



Training-1step 068번, Training-2step 148번 해설에서 배운 것과 마찬가지로 제 3의 넓이를 이용하여 $f(\theta) - g(\theta)$ 를 구해보자.

삼각형 MCE의 넓이를 S 라 하자.



$f(\theta) + S - (g(\theta) + S) = f(\theta) - g(\theta)$ 이므로 $f(\theta)$ 와 $g(\theta)$ 를 각각 구하지 않고도 $f(\theta) - g(\theta)$ 의 값을 구할 수 있다.

$f(\theta) + S$ 는 삼각형 MCD의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} f(\theta) + S &= \frac{1}{2} \times \overline{MC} \times \overline{MD} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \sin\theta \times \cos\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{\sin\theta \cos\frac{\theta}{2}}{2} \end{aligned}$$

152

선분 BP를 그으면 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

삼각형 APB에서

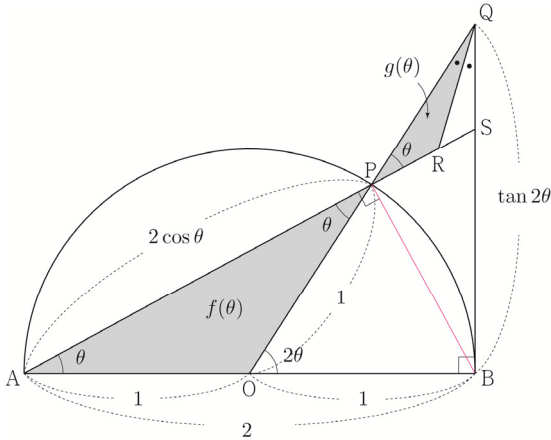
$$\overline{AP} = \overline{AB} \times \cos\theta = 2\cos\theta$$

$$\angle POB = 2 \times \angle OAP = 2\theta$$

삼각형 OBQ에서

$$\overline{BQ} = \overline{OB} \times \tan 2\theta = \tan 2\theta$$

$\angle APO = \angle QPR$ (by 맞꼭지각)



삼각형 OBQ에서

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OB}}{\cos 2\theta} = \frac{1}{\cos 2\theta} \text{ 이고, } \overline{OP} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = \frac{1}{\cos 2\theta} - 1 = \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}$$

직선 AP가 선분 BQ와 만나는 점을 S 라 하자.

삼각형 ABS에서

$$\overline{BS} = \overline{AB} \times \tan\theta = 2\tan\theta \text{ 이고, } \overline{BQ} = \tan 2\theta$$

$$\overline{QS} = \overline{BQ} - \overline{BS} = \tan 2\theta - 2\tan\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} - 2\tan\theta$$

$$= 2\tan\theta \left(\frac{\tan^2\theta}{1 - \tan^2\theta} \right) = \frac{2\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

삼각형 ABS에서

$$\overline{AS} = \frac{\overline{AB}}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta} \text{ 이고, } \overline{AP} = 2\cos\theta \text{ 이므로}$$

$$\overline{PS} = \overline{AS} - \overline{AP} = \frac{2}{\cos\theta} - 2\cos\theta$$

$$= \frac{2(1 - \cos^2\theta)}{\cos\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

이때 직선 AP는 각 $\angle OQB$ 의 이등분선이므로 삼각형 PQS에서 다음이 성립한다.

$$\overline{PQ} : \overline{QS} = \overline{PR} : \overline{RS}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} : \frac{2\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta} = \overline{PR} : \overline{RS}$$

$$\Rightarrow \overline{PR} = \overline{PS} \times \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}}{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{2\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta}}$$

$$\Rightarrow \overline{PR} = \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}}{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{2\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta}}$$

삼각형 OAP의 넓이 $f(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AO} \times \sin(\angle OAP) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\cos\theta \times 1 \times \sin\theta \\ &= \cos\theta \sin\theta \end{aligned}$$

삼각형 PQR의 넓이 $g(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR} \times \sin(\angle QPR) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} \times \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}}{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{2\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta}} \times \sin\theta \end{aligned}$$

$$h(\theta) = \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}}{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{2\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta}} \text{ 라 하면}$$

$$g(\theta) = \frac{(1 - \cos 2\theta)}{\cos 2\theta \cos\theta} \times \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} \times h(\theta) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta \cos\theta} \times \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} \times h(\theta)}{\theta^4 \cos\theta \sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1 - \cos 2\theta}{\theta^2} \times \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \times h(\theta) \right\}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ 4 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{(2\theta)^2} \times 1 \times h(\theta) \right\}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times h(\theta) \right\}$$

Tip 분모 $\cos 2\theta$ 와 $\cos \theta$ 를 모두 곱해서 뒤로 빼주면

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos 2\theta \cos^3 \theta} = 1 \text{ 이므로 구하고자 하는}$$

극한값에 영향을 주지 못한다.

즉, 극한값이 일정한 경우 계산의 편의성을 위해 계산과정에서 생략해주는 것이 좋다.

ex1 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(3 - \cos \theta) \sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \theta}{\theta} = 2 \times 1 = 2$

ex2 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2 \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} = 1^2 = 1$

ex3 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2 (1 - \tan \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} h(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta}}{\frac{1 - \cos 2\theta}{\cos 2\theta} + \frac{2 \tan^3 \theta}{1 - \tan^2 \theta}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{4 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{(2\theta)^2}}{4 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{(2\theta)^2} + \frac{2 \tan^3 \theta}{\theta^2}} \\ &= \frac{4 \times \frac{1}{2}}{4 \times \frac{1}{2} + 0} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times h(\theta) \right\}$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 2$$

이다.

답 ①

여러 가지 함수의 미분 | Master step

153	41	157	16
154	17	158	④
155	8	159	25
156	③	160	11

해설

153

$$\overline{BP} = \overline{BC} \times \tan \theta = \tan \theta$$

내접원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R이라 하자.

$$\angle OCB = \frac{1}{2} \times \theta = \frac{\theta}{2}$$

내접원의 반지름의 길이를 x라 하면

$$\overline{RC} = \frac{x}{\tan \frac{\theta}{2}}, \quad \overline{BR} = x$$

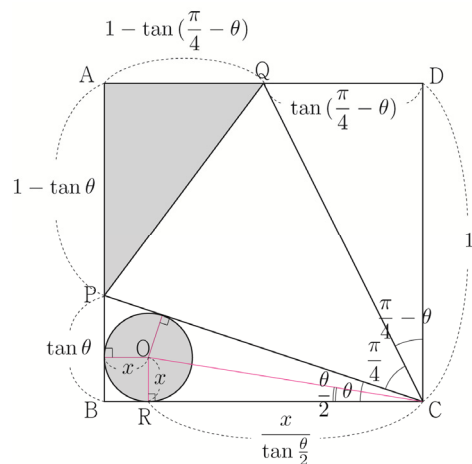
$$\overline{BC} = \overline{BR} + \overline{RC} \Rightarrow 1 = x + \frac{x}{\tan \frac{\theta}{2}} \Rightarrow x = \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta}{2} + 1}$$

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP} = 1 - \tan \theta$$

$$\angle QCD = \frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - \theta$$

$$\overline{QD} = \overline{CD} \times \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

$$\overline{AQ} = \overline{AD} - \overline{QD} = 1 - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$



여러 가지 미분법 | Training - 1 step

1	③	21	②
2	①	22	④
3	①	23	126
4	135	24	①
5	③	25	②
6	⑤	26	④
7	④	27	②
8	③	28	③
9	②	29	50
10	6	30	⑤
11	2	31	②
12	9	32	①
13	②	33	⑤
14	13	34	50
15	③	35	96
16	80	36	①
17	11	37	10
18	3	38	36
19	20	39	②
20	⑤		

해설

001

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(x+1)^2} \text{ 이므로 } f'(3) = \frac{3e^3}{16}$$

답 ③

002

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x+5)}{(x+1)^2} \text{ 이므로}$$

$$f'(0) = \frac{-3-5}{1} = -8$$

답 ①

Tip Guide step에서 언급한대로 꼴을 변형한 뒤 미분하여 구할 수 있다.

$$f(x) = x - 4 + \frac{9}{x+1} \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{(x+1)^2} \text{ 이다.}$$

따라서 $f'(0) = -8$ 이다.

003

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x^2 - (x + \ln x) \times 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x - x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - x - 2 \ln x}{x^3}$$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e) - f(e-2h) + f(e)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e-2h) - f(e)}{-2h} \times 2$$

$$= f'(e) + 2f'(e)$$

$$= 3f'(e)$$

$$= \frac{-3e-3}{e^3}$$

이다.

답 ①

$$\begin{aligned} \text{따라서 } f'(a)f(a) &= f'(2)f(2) = \frac{e^2+e^{-2}}{2\sqrt{e^2-e^{-2}}} \times \sqrt{e^2-e^{-2}} \\ &= \frac{e^2+e^{-2}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{e^2} \right) = \frac{e^4+1}{2e^2} \end{aligned}$$

이다.

답 ⑤

다른 방법으로 풀어보자.

$y = |\ln x|$ 와 $y = t$ 의 두 교점의 x 좌표를 각각 $h(t), g(t)$ ($g(t) > h(t)$)라 하면
 $f(t) = \sqrt{|x_1 - x_2|} = \sqrt{g(t) - h(t)}$

$y = |\ln x|$ 는 두 점 $(h(t), t), (g(t), t)$ 를 지나므로
 $-\ln h(t) = t, \quad \ln g(t) = t$ 가 성립한다.

두 식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$-\frac{h'(t)}{h(t)} = 1 \Rightarrow h'(t) = -h(t)$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = 1 \Rightarrow g'(t) = g(t)$$

$$\text{즉, } f'(t) = \frac{g'(t) - h'(t)}{2\sqrt{g(t) - h(t)}} = \frac{g(t) + h(t)}{2\sqrt{g(t) - h(t)}}$$

$$f(a) = \frac{\sqrt{e^4 - 1}}{e} = \sqrt{e^2 - e^{-2}} = \sqrt{g(a) - h(a)}$$

$$\Rightarrow g(a) = e^2, \quad h(a) = e^{-2} \quad (\because g(t) = e^t, \quad h(t) = e^{-t})$$

$$f'(a) = \frac{g(a) + h(a)}{2\sqrt{g(a) - h(a)}} = \frac{g(a) + h(a)}{2f(a)} = \frac{e^2 + e^{-2}}{2f(a)}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } f'(a)f(a) &= \frac{e^2 + e^{-2}}{2f(a)} \times f(a) = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{e^2} \right) = \frac{e^4 + 1}{2e^2} \end{aligned}$$

이다.

095

$h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 이므로

$h'(t) = \{f(t) - g(t)\} + t\{f'(t) - g'(t)\}$

$h'(5) = \{f(5) - g(5)\} + 5\{f'(5) - g'(5)\}$

곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 과 직선 $y = 5$ 가 만나는 세 점

중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표가 $(f(5), 5)$
가장 작은 점의 좌표가 $(g(5), 5)$ 이므로

$$x^3 + 2x^2 - 15x + 5 = 5 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 15x = 0$$

$$\Rightarrow x(x+5)(x-3) = 0 \Rightarrow f(5) = 3, \quad g(5) = -5$$

$f(5)$ 와 $g(5)$ 의 값은 쉽게 구했는데

$f'(5), g'(5)$ 의 값은 어떻게 구할 수 있을까?

두 점 $(f(t), t), (g(t), t)$ 는 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 위의 점이므로 대입하면 다음이 성립한다.

$$t = \{f(t)\}^3 + 2\{f(t)\}^2 - 15\{f(t)\} + 5 \quad \text{ⓐ}$$

$$t = \{g(t)\}^3 + 2\{g(t)\}^2 - 15\{g(t)\} + 5 \quad \text{ⓑ}$$

ⓐ의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$1 = 3f'(t)\{f(t)\}^2 + 4f'(t)f(t) - 15f'(t)$$

양변에 $t = 5$ 를 대입하면

$$1 = 3f'(5)\{f(5)\}^2 + 4f'(5)f(5) - 15f'(5)$$

$$f(5) = 3 \text{이므로}$$

$$1 = 27f'(5) + 12f'(5) - 15f'(5) \Rightarrow f'(5) = \frac{1}{24}$$

ⓑ의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$1 = 3g'(t)\{g(t)\}^2 + 4g'(t)g(t) - 15g'(t)$$

양변에 $t = 5$ 를 대입하면

$$1 = 3g'(5)\{g(5)\}^2 + 4g'(5)g(5) - 15g'(5)$$

$$g(5) = -5 \text{이므로}$$

$$1 = 75g'(5) - 20g'(5) - 15g'(5) \Rightarrow g'(5) = \frac{1}{40}$$

따라서 $h'(5) = \{f(5) - g(5)\} + 5\{f'(5) - g'(5)\}$

$$= \{3 - (-5)\} + 5 \left\{ \frac{1}{24} - \frac{1}{40} \right\}$$

$$= 8 + 5 \times \frac{1}{60} = 8 + \frac{1}{12} = \frac{97}{12}$$

이다.

답 ④

다른 방법으로 풀어보자.

첫 번째 풀이와 같은 방법으로 $f(5) = 3, g(5) = -5$ 를 얻을 수 있다.

$i(t) = t^3 + 2t^2 - 15t + 5$ 라 하면

$$i'(t) = 3t^2 + 4t - 15 \text{ 이고}$$

두 점 $(f(t), t)$, $(g(t), t)$ 는 곡선 $y = i(x)$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$$i(f(t)) = t \quad \text{㉠}$$

$$i(g(t)) = t \quad \text{㉡}$$

역함수 미분법을 이용하여 $f'(5)$, $g'(5)$ 의 값을 구해보자.

㉠의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$f'(t) i'(f(t)) = 1$$

$$f'(t) = \frac{1}{i'(f(t))} \text{의 양변에 } t = 5 \text{을 대입하면}$$

$$f'(5) = \frac{1}{i'(f(5))} = \frac{1}{i'(3)} = \frac{1}{27 + 12 - 15} = \frac{1}{24}$$

㉡의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$g'(t) i'(g(t)) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{i'(g(x))} \text{의 양변에 } t = 5 \text{을 대입하면}$$

$$g'(5) = \frac{1}{i'(g(5))} = \frac{1}{i'(-5)} = \frac{1}{75 - 20 - 15} = \frac{1}{40}$$

Tip <그뎨 그랬지>

095번은 2016년 수능 B형 21번에 출제되었던 문제였고 그 당시 B형 1등급 컷이 96점이었다. 즉, 이 문항을 틀렸다면 다른 문제들을 모두 맞아야 딱 1등급 컷이었다.

사실 지금 보면 워낙 노출이 많이 되어 아무것도 아닌 문제 같지만 그 당시 이 문제를 수능장에서 처음 본 학생들이 느끼는 체감 난이도는 아주 높았다. 시험이 끝나고 난 뒤 30번보다 21번이 더 어려웠다는 학생들이 대다수였을 정도로 결코 만만치 않았던 문제였다.

문제의 접근이 막막할 때는 문제를 풀려고 노력하기보다는 '이 문제는 어떤 개념이 사용되었을까?'를 떠올려보도록 하자.

096

$$f^{-1}(x) = j(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = f^{-1}(x)g(x) = j(x)g(x)$$

$$h'(x) = j'(x)g(x) + j(x)g'(x)$$

$$h'(e) = j'(e)g(e) + j(e)g'(e)$$

$$f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$$

$$f'(x) = (2x + a)e^x + (x^2 + ax + b)e^x$$

$$= (x^2 + (a+2)x + a+b)e^x$$

$$(가) f(1) = e, f'(1) = e$$

$$f(1) = (1+a+b)e = e \Rightarrow 1+a+b=1 \Rightarrow a+b=0$$

$$f'(1) = (1+a+2)e = e \Rightarrow a+3=1 \Rightarrow a=-2, b=2$$

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

$$f'(x) = x^2e^x$$

$$f''(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$$

$$(나) g(f(x)) = f'(x)$$

$$f(1) = e, f'(1) = e \text{이므로 양변에 } x = 1 \text{을 대입하면}$$

$$g(f(1)) = f'(1) \Rightarrow g(e) = f'(1) = e$$

$$g(f(x)) = f'(x) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x)g'(f(x)) = f''(x)$$

$$f(1) = e, f'(1) = e, f''(1) = 3e \text{이므로}$$

$$\text{양변에 } x = 1 \text{을 대입하면}$$

$$f'(1)g'(f(1)) = f''(1) \Rightarrow eg'(e) = 3e \Rightarrow g'(e) = 3$$

$$f^{-1}(x) = j(x) \text{이므로 } f(j(x)) = x$$

$$\text{양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$j'(x)f'(j(x)) = 1$$

$$j'(x) = \frac{1}{f'(j(x))} \text{의 양변에 } x = e \text{을 대입하면}$$

$$j'(e) = \frac{1}{f'(j(e))}$$

$$f(1) = e \Rightarrow j(e) = 1$$

$$f'(1) = e \text{이므로}$$

$$j'(e) = \frac{1}{f'(j(e))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e}$$

$$\text{따라서 } h'(e) = j'(e)g(e) + j(e)g'(e)$$

$$= \frac{1}{e} \times e + 1 \times 3 = 1 + 3 = 4$$

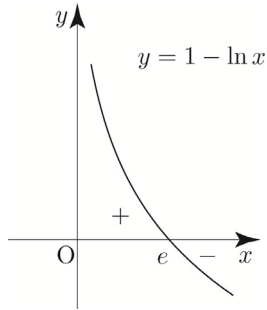
이다.

답 ④

② 대칭성과 주기성은 없다.

③ $f(1)=0$ 이므로 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

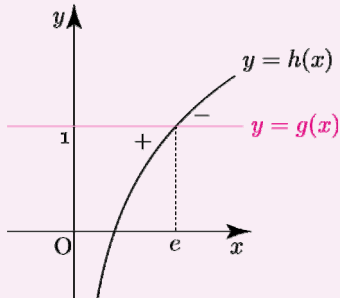
④ $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ 이므로 Semi 도함수 $f'(x) = 1 - \ln x$
 $f(e) = e^{-1}$ ($x=e$ 에서 극대)



Tip <빼기함수 Technique>

$$f'(x) = g(x) - h(x)$$

Semi 도함수 $f'(x) = 1 - \ln x$ 를 그려서 부호를 판단할 수 있지만 $g(x) = 1, h(x) = \ln x$ 라 하고 빼기함수 Technique을 적용시켜 부호를 판단할 수도 있다.

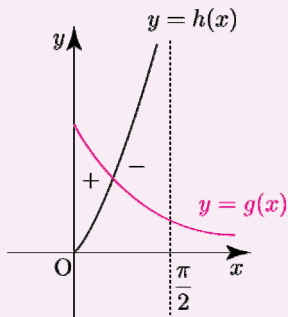


$f'(x)$ 가 복잡해지면 빼기함수 Technique을 사용하는 것이 훨씬 유리하다.

ex $f'(x) = e^{-x} - \tan x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

$$g(x) = e^{-x}, h(x) = \tan x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = g(x) - h(x)$$



Q. $f'(x) = 1 + \ln x$ 이면 빼기함수 Technique을 적용시킬 수 있을까?

$$f'(x) = 1 - (-\ln x)$$

$$g(x) = 1, h(x) = -\ln x \text{ 라 하면}$$

빼기함수 Technique을 적용시킬 수 있다.

$$f'(x) = g(x) - h(x)$$

⑤ $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ 이고 $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$ 이므로

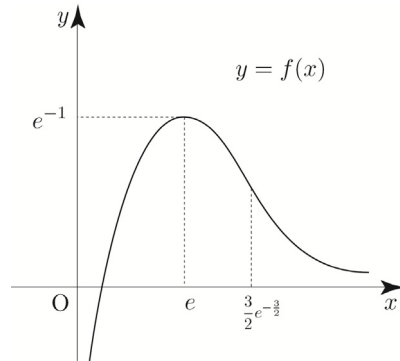
Semi 이계도함수 $f''(x) = 2\ln x - 3$

$$\text{변곡점은 } \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}} \right)$$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \times \frac{1}{x} \right) = -\infty \times \infty = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선은 y 축과 x 축이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



Tip 요즘은 (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)와 같이 점근선을 문제에서 직접 제시해주는 추세이지만

지수함수 > 다항함수 > 로그함수 순으로 크기를 결정하면 극한값을 손쉽게 계산할 수 있다.

ex1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

ex2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2x} = 0$

(7) $f(x) = (\ln x)^2$

① 진수조건에 의하여 함수 $f(x)$ 의 정의역은 양의 실수이다.

② 대칭성과 주기성은 없다.

③ $f(1)=0$ 이므로 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

ㄹ. 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 개수는 2이다.

$$f''(x) = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{\{x - (3 + \sqrt{2})\}\{x - (3 - \sqrt{2})\}}{(x-3)^2} \quad (x < 3)$$

이므로 $f''(3 - \sqrt{2}) = 0$ 이고, $x = 3 - \sqrt{2}$ 에서 $f''(x)$ 의 부호가 변하므로 변곡점 $(3 - \sqrt{2}, f(3 - \sqrt{2}))$ 를 갖는다.

곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 개수는 1이다.

따라서 ㄹ은 거짓이다.

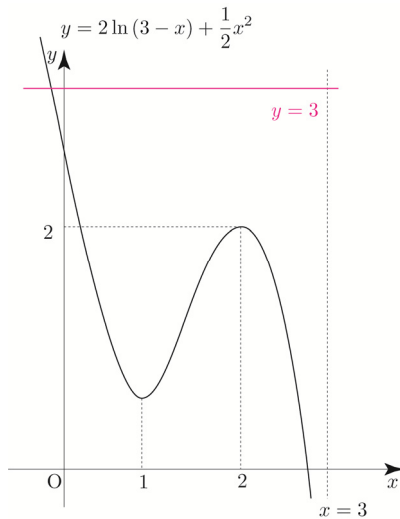
Tip 정의역이 $x < 3$ 이므로 점 $(3 + \sqrt{2}, f(3 + \sqrt{2}))$ 은 변곡점이 될 수 없다.

ㄱ. 곡선 $y = f(x)$ 가 열린구간 $(-\infty, k)$ 에서 아래로 볼록하도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $3 - \sqrt{2}$ 이다.

Semi 이계도함수

$f''(x) = \{x - (3 + \sqrt{2})\}\{x - (3 - \sqrt{2})\} \quad (x < 3)$
 이므로 열린구간 $(-\infty, 3 - \sqrt{2})$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 열린구간 $(-\infty, 3 - \sqrt{2})$ 에서 아래로 볼록하다.
 따라서 ㄱ은 참이다.

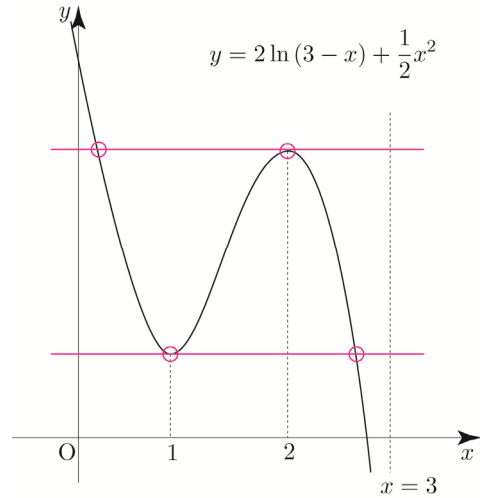
ㄴ. 방정식 $f(x) = 3$ 은 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



$f(2) = 2$ 이므로 두 그래프 $y = f(x)$, $y = 3$ 의 교점은 오직 하나 존재한다.

따라서 ㄴ은 거짓이다.

ㄷ. 방정식 $f(x) = f(a)$ 가 서로 다른 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 개수는 2이다.



위 그림처럼 조건을 만족시키는 실수 a 의 개수는 4이다.
 따라서 ㄷ은 거짓이다.

ㅇ. $\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{|f(x)| - |f(b)|}{x-b} \neq \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{|f(x)| - |f(b)|}{x-b}$ 를 만족시키는 실수 b 는 오직 하나 존재한다.

ㅇ은 “함수 $|f(x)|$ 는 오직 한 점에서만 미분가능하지 않다.”와 동치이다.

Tip 바로 이해하기 어렵다면 치환을 활용해보자.

$g(x) = |f(x)|$ 라 하면

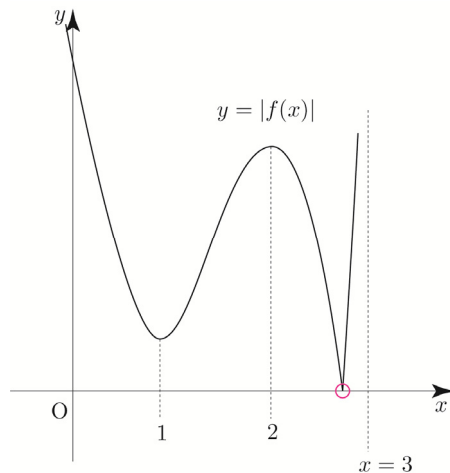
$$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{|f(x)| - |f(b)|}{x-b} \neq \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{|f(x)| - |f(b)|}{x-b}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{g(x) - g(b)}{x-b} \neq \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x-b}$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x = b$ 에서 미분가능하지 않다.

$$f(1) = 2\ln 2 + \frac{1}{2} = \ln 4 + \frac{1}{2} > 0 \text{이므로}$$

함수 $|f(x)|$ 는 오직 한 점에서 미분가능하지 않다.
 따라서 ㅇ은 참이다.



스. $x_1 < 3 - \sqrt{2} < x_2 < 3$ 를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2) < 0$ 이다.

$$f''(x) = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{\{x - (3 + \sqrt{2})\}\{x - (3 - \sqrt{2})\}}{(x-3)^2} \quad (x < 3)$$

$x = 3 - \sqrt{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 변하므로 스은 참이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅅ, ㅈ

039

달힌구간 $[0, 4]$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+3}$$

$$f'(x) = -(x^2 - 2x - 3)e^{-x+3} = -(x+1)(x-3)e^{-x+3}$$

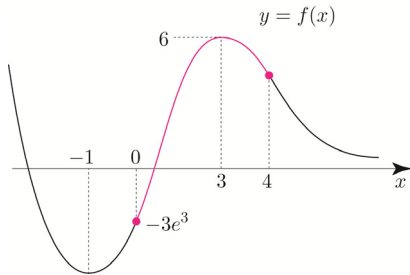
Semi 도함수 $f'(x) = -(x+1)(x-3)$

$$f'(-1) = 0, f'(3) = 0 \Rightarrow f(-1) = -2e^4, f(3) = 6$$

$\Rightarrow x = -1$ 에서 극소, $x = 3$ 에서 극대

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



달힌구간 $[0, 4]$ 에서 $f(x)$ 는

$x = 3$ 에서 최댓값 $f(3) = 6 = M$ 을 갖고,

$x = 0$ 에서 최솟값 $f(0) = -3e^3 = m$ 을 갖는다.

따라서 $M \times m = 6 \times (-3e^3) = -18e^3$ 이다.

답 ④

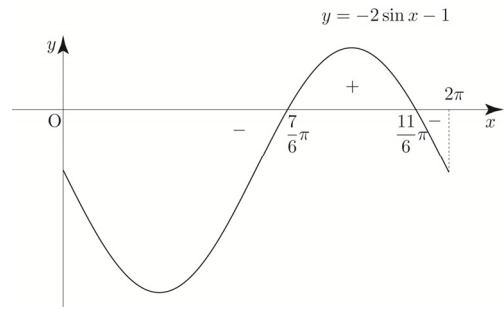
040

달힌구간 $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(2 + \sin x) - \cos x \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-2\sin x - 1}{(2 + \sin x)^2}$$

Semi 도함수 $f'(x) = -2\sin x - 1$



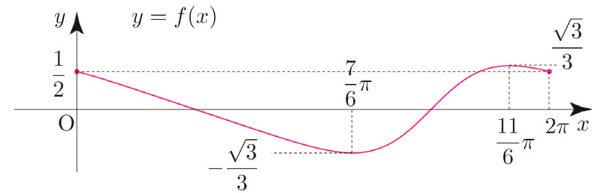
$$f'\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 0, f'\left(\frac{11}{6}\pi\right) = 0$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi$ 에서 극소, $x = \frac{11}{6}\pi$ 에서 극대

$$f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}$$

이를 바탕으로 $f(x)$ 는 그리면 다음과 같다.



달힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 $f(x)$ 는

$x = \frac{7}{6}\pi = a$ 에서 최솟값 $f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = m$ 을 갖고,

$x = \frac{11}{6}\pi = b$ 에서 최댓값 $f\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = M$ 을 갖는다.

$$\text{따라서 } \frac{b}{a} + M + m = \frac{\frac{11}{6}\pi}{\frac{7}{6}\pi} = \frac{11}{7} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{11}{7} \text{이다.}$$

답 ①

Tip 수2에서 $f'(x)$ 의 넓이는 $f(x)$ 의 함숫값의 차이와 같다고 배웠다.

(규토 라이트 N제 문제편 수2 p293 참고)

이때 Semi 도함수 $f'(x) = -2\sin x - 1$ 에 대하여

$$\int_0^{\frac{7}{6}\pi} |-2\sin x - 1| dx > \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} |-2\sin x - 1| dx$$

이므로 위에서 구한 $y = f(x)$ 의 그래프처럼

$$f(0) - f\left(\frac{7}{6}\pi\right) < f\left(\frac{11}{6}\pi\right) - f\left(\frac{7}{6}\pi\right) \text{와 같이}$$

나올 수 없는 것 아닌가 하는 의문이 들 수 있다.

이는 원래 도함수가 아니라 Semi 도함수를 이용하여 $f'(x)$ 의 넓이를 판단했기 때문이다.

즉, $f'(x) = \frac{-2\sin x - 1}{(2 + \sin x)^2}$ 의 넓이를 조사해서 판단해야 한다.

이와 비슷하게 조심해야 하는 point로는 이계도함수를 구할 때, Semi 도함수를 미분하여 구하는 것이 아니라 원래의 도함수를 미분하여 구해야 한다는 것이 있다.

Semi 도함수는 도함수의 부호변화를 손쉽게 관찰하기 위해 도입한 하나의 도구일 뿐이지 원래의 도함수가 아님을 기억하자!

041

$$f(x) = -\frac{\ln \sqrt{x}}{x}, \quad g(x) = kxe^{-x+2}$$

정의역이 $\{x \mid x > 0\}$ 인 함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 의 최솟값

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(kxe^{-x+2})$$

$kxe^{-x+2} = t$ 라고 치환하자.

$$g(x) = kxe^{-x+2}$$

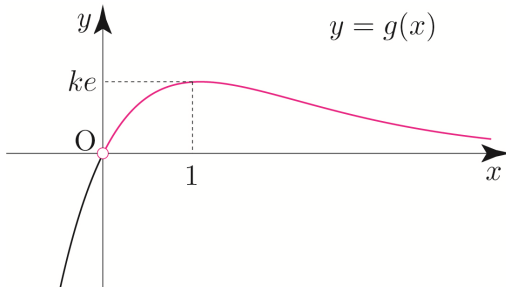
$$g'(x) = ke^{-x+2} - kxe^{-x+2} = k(1-x)e^{-x+2}$$

Semi 도함수 $g'(x) = 1-x$

$$g'(1) = 0, \quad g(1) = ke \Rightarrow x = 1 \text{에서 극대}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

이를 바탕으로 $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



$x > 0$ 에서 $t = g(x)$ 의 범위를 구하면 $0 < t \leq ke$

$$f(x) = -\frac{\ln \sqrt{x}}{x} = -\frac{\ln x}{2x}$$

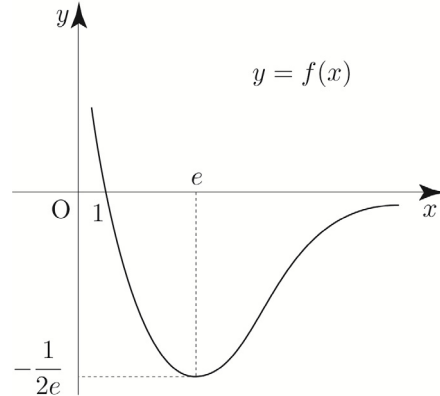
$$f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1 + \ln x}{x^2} \right)$$

Semi 도함수 $f'(x) = -1 + \ln x$

$$f'(e) = 0, \quad f(e) = -\frac{1}{2e} \Rightarrow x = e \text{에서 극소}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



$0 < t \leq ke$ 에서 $f(t)$ 의 최솟값이 $-\frac{1}{2e}$ 이 되도록 하려면

$$e \leq ke \Rightarrow 1 \leq k$$

따라서 양의 실수 k 의 최솟값은 1이다.

답 1

Tip

극솟값과 극댓값을 물어보았을 때는 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수의 부호변화를 관찰해야 한다.

하지만 단순히 최솟값과 최댓값을 물어보았을 때는 합성함수 미분법을 사용하여 합성함수의 그래프를 그린 후 판단하는 것보다는 치환을 활용하여 판단하는 것이 좋다.

치환을 이용하여 합성함수의 최솟값과 최댓값을 구하는 문제는 라이트 N제 수1 지수함수와 로그함수, 삼각함수의 그래프 단원에서 이미 충분히 학습하였다.

042

$$f(x) = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{x}{4}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x \sin x + \cos x \cos x}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} + \frac{1}{4}$$

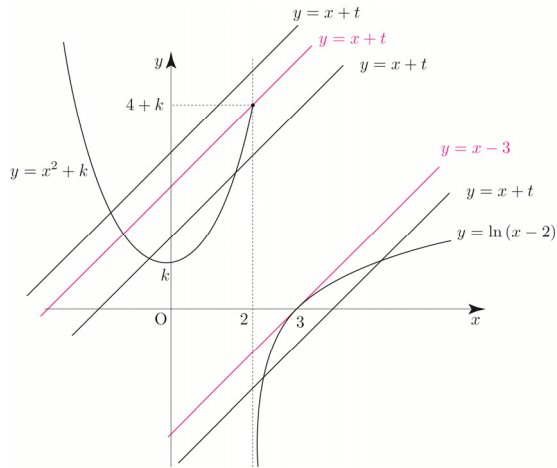
$$= \frac{2\cos^2 x - 1}{2} + \frac{1}{4} = \cos^2 x - \frac{1}{4}$$

$$= \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)$$

085

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + k & (x \leq 2) \\ \ln(x-2) & (x > 2) \end{cases}$$

직선 $y = x + t$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$



이런 문제들은 특수한 지점부터 확인해보는 것이 좋다.

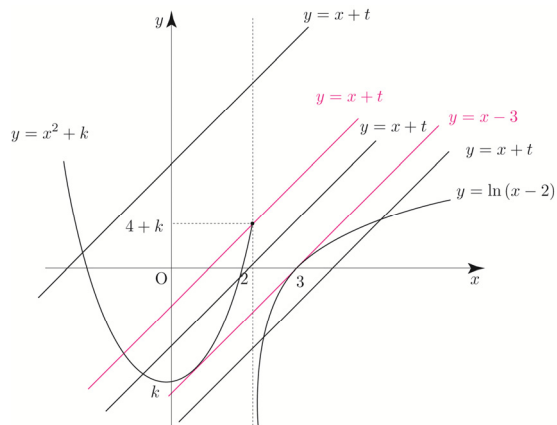
$h(x) = \ln(x-2)$ 라 하면 $h'(x) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow h'(3) = 1$
 이므로 $(3, 0)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = x - 3$ 이다.

직선 $y = x + t$ 가 점 $(2, 4+k)$ 를 지날 때를 살펴보자.
 $4+k = 2+t \Rightarrow t = k+2$

$\lim_{t \rightarrow (k+2)^-} g(t) = 2, g(k+2) = 2$ 이고,
 $t > k+2$ 일 때, $g(t) = 1$ 이므로
 $g(t)$ 는 $t = k+2$ 에서 불연속이다.

$g(t)$ 가 $t = a$ 에서 불연속인 a 의 값이 한 개이므로
 $t < k+2$ 에서 $g(t)$ 는 연속이어야 한다.

즉, $t < k+2$ 일 때, $g(t) = 2$ 가 되려면 다음 그림과 같이
 $y = x^2 + k$ 가 $y = x - 3$ 와 접해야 한다.



$$x^2 + k = x - 3 \Rightarrow x^2 - x + k + 3 = 0$$

$$\text{판별식 } D = 0 \Rightarrow 1 - 4k - 12 = 0 \Rightarrow k = -\frac{11}{4}$$

따라서 $k = -\frac{11}{4}$ 이다.

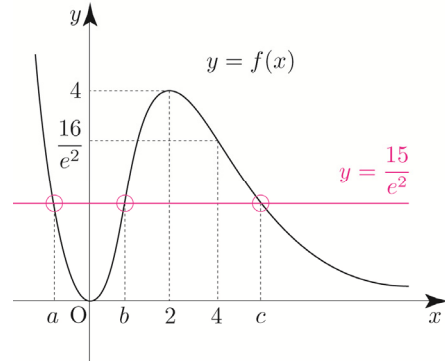
답 ④

086

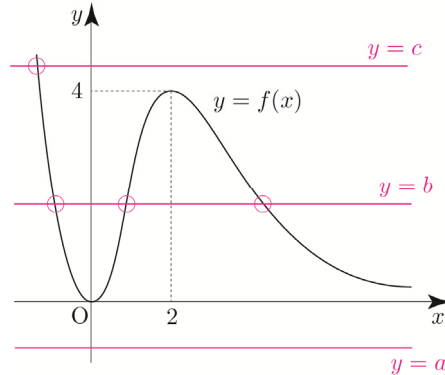
$$f(x) = x^2 e^{-x+2}$$

$$f(4) = 16e^{-2} = \frac{16}{e^2}$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{15}{e^2}$ 가 만나는 세 점의
 x 좌표를 각각 a, b, c 라 하면 $a < 0, 0 < b < 2, 4 < c$ 이다.



곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = a$ 는 만나지 않는다.
 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = b$ 는 서로 다른 세 점에서 만난다.
 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = c$ 는 한 점에서 만난다.



따라서 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{15}{e^2}$ 의
 교점의 개수는 4이다.

답 ③

Tip <왜 하필 $y = \frac{15}{e^2}$ 일까?>

c 가 4보다 큰지 작은지 같은지를 알아야 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = c$ 가 만나는 점의 개수를 파악할 수 있기 때문이다.

즉, $f(4) = 16e^{-2} = \frac{16}{e^2}$ 이므로 $4 < c$ 인 것을 알려주기 위함이다.

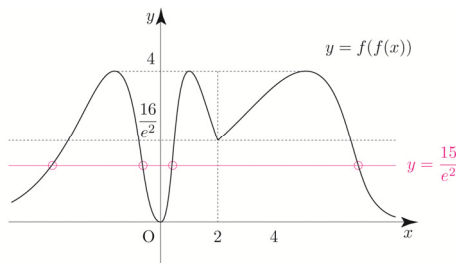
이번에는 **Guide step**에서 배운 합성함수의 그래프 그리기를 이용하여 풀어보자.

$f(x)$ 의 증감을 기초로 $y = f(f(x))$ 의 그래프를 그려보자.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 0$ 과 $x = 2$ 를 경계로 $x < 0$, $x > 2$ 에서 감소하고 $0 < x < 2$ 에서 증가한다.

$f(x) = t$ 라 하면 x 가 $-\infty \rightarrow 0$ 일 때, t 는 $\infty \rightarrow 0$ 이므로 함수 $y = f(t)$ 에서 $t > 0$ 의 범위의 그래프를 좌우 반전시킨 후 복사하여 정의역 $x < 0$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다. x 가 $0 \rightarrow 2$ 일 때, t 는 $0 \rightarrow 4$ 이므로 함수 $y = f(t)$ 에서 $0 < t < 4$ 의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $0 < x < 2$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다. 이때 $f(4) = \frac{16}{e^2}$ 이다.

x 가 $2 \rightarrow \infty$ 일 때, t 는 $4 \rightarrow 0$ 이므로 함수 $y = f(t)$ 에서 $0 < t < 4$ 의 범위의 그래프를 좌우 반전시킨 후 복사하여 정의역 $x > 2$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.



Tip $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 점근선은 $y = 0$ 이다.

즉, t 는 $4 \rightarrow 0$ 에서 0은 상수가 아니라 0으로 가까이 가는 상태이다.

헛갈리는 경우에는 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = 0$ 인 것을 바탕으로 함수 $f(f(x))$ 의 점근선이 $y = 0$ 임을 직접 구해도 된다.

따라서 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{15}{e^2}$ 의 교점의 개수는 4이다.

087

$t > 0$

점 P(t , $\ln t$)에서의 접선은

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \ln t = \frac{1}{t}x - 1 + \ln t$$

이므로 $r(t) = t(1 - \ln t)$

점 Q($2t$, $\ln 2t$)에서의 접선은

$$y = \frac{1}{2t}(x - 2t) + \ln 2t = \frac{1}{2t}x - 1 + \ln 2t$$

이므로 $s(t) = 2t(1 - \ln 2t)$

$$f(t) = r(t) - s(t) = t(1 - \ln t) - 2t(1 - \ln 2t)$$

$$= t(1 - \ln t - 2 + 2\ln 2t)$$

$$= t\left(\ln \frac{4}{e} + \ln t\right)$$

$$f'(t) = \left(\ln \frac{4}{e} + \ln t\right) + 1 = \ln 4t$$

$$\text{따라서 } t = \frac{1}{4} \text{에서 극솟값 } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\ln \frac{4}{e} + \ln \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

이다.

답 ③

088

$$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{k}{x} (k > 1)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, g'(x) = -\frac{k}{x^2}$$

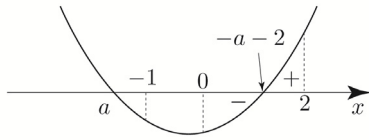
$$P\left(2, \frac{1}{2}\right), Q\left(2, \frac{k}{2}\right)$$

점 P에서의 접선의 방정식은

$$l : y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1$$

점 Q에서의 접선의 방정식은

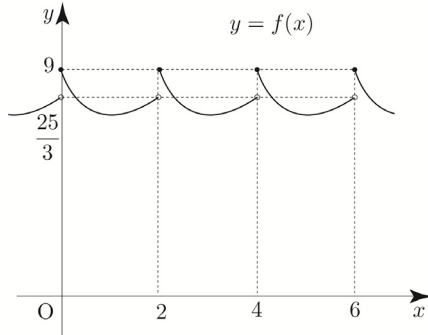
$$m : y = -\frac{k}{4}(x - 2) + \frac{k}{2} = -\frac{k}{4}x + k$$



$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{x+1} \quad (0 \leq x < 2) \text{ 이므로}$$

$$f(0) = 9, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{25}{3}$$

이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



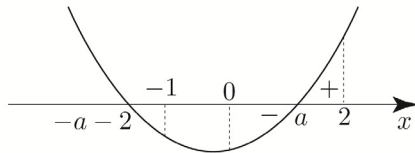
$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

② $a > -a-2$ 일 때

$$a > -a-2 \Rightarrow a > -1$$

구간 $(0, 2)$ 에서 극솟값을 가지려면

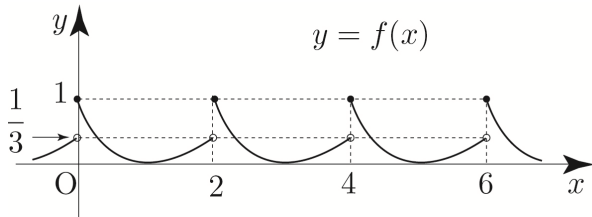
$$0 < a < 2 \Rightarrow a = 1 \quad (\because a \text{ 는 정수})$$



$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} \quad (0 \leq x < 2) \text{ 이므로}$$

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{3}$$

이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

①, ②에 의하여 조건을 만족하는 정수 a 의 값은 -3 or 1 따라서 모든 정수 a 의 값의 곱은 $(-3) \times 1 = -3$ 이다.

답 ①

Tip <극대의 정의>

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

$f(x) \leq f(a)$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대가 된다고 하고, 그 때의 함수값 $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다.

극대의 정의를 살펴보면 $f(x)$ 가 연속이거나 미분가능해야 한다는 전제 조건이 없다.

즉, 함수값만 존재한다면 극대가 존재할 수 있다.

(규토 라이트 N제 수학2 도함수의 활용

Guide step 개념 파악하기-(6) 참고)

091

$$f(x) = ae^{3x} + be^x$$

$$f'(x) = 3ae^{3x} + be^x$$

$$f''(x) = 9ae^{3x} + be^x$$

(가) $x_1 < \ln \frac{2}{3} < x_2$ 를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2 에

대하여 $f''(x_1)f''(x_2) < 0$ 이다.

$x = \ln \frac{2}{3}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 변하므로

$f(x)$ 는 변곡점 $(\ln \frac{2}{3}, f(\ln \frac{2}{3}))$ 을 갖는다.

$$f''(\ln \frac{2}{3}) = 0$$

$$9a \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + b \times \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \frac{8a+2b}{3} = 0 \Rightarrow b = -4a$$

$a > 0$ 이므로 $b < 0$

(나) 구간 $[k, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k 의 최솟값을 m 이라 할 때,

$$f(2m) = -\frac{80}{9} \text{ 이다.}$$

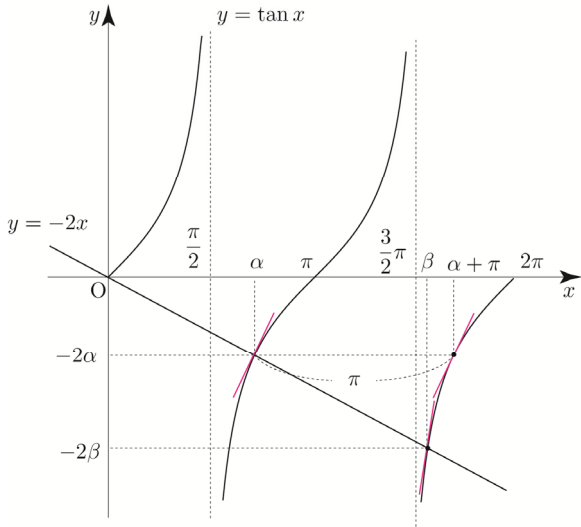
구간 $[k, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 역함수가 존재하려면 구간 $[k, \infty)$ 에서 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

$$f'(x) = 3ae^{3x} + be^x = ae^x(3e^{2x} - 4)$$

$$\text{Semi 도함수 } f'(x) = 3e^{2x} - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

$x = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 변하므로



$x = \beta$ 에서의 접선의 기울기가 $x = \alpha + \pi$ 에서의 접선의 기울기보다 크다.

즉, $g'(\alpha + \pi) < g'(\beta)$

따라서 \sphericalangle 은 참이다.

$$\square. \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} < \sec^2 \alpha$$

\sphericalangle 에서 $g(x) = \tan x$ 라 하였고 이를 미분하면

$$g'(x) = \sec^2 x \text{ 이므로 } \sec^2 \alpha = g'(\alpha)$$

즉, 우변을 함수 $g(x)$ 에서 $x = \alpha$ 에서의 접선의 기울기로 해석할 수 있다.

이때 우변이 기울기를 나타내는 식이므로

좌변도 기울기의 관점에서 생각해보면 아래와 같다.

(참고로 라이트 N제 수 2 해설편 p318 077번 tip에서 학습한 바 있다.)

$$\frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} = \frac{-2\alpha - (-2\beta)}{\alpha + \pi - \beta} = \frac{\tan(\alpha + \pi) - \tan \beta}{\alpha + \pi - \beta}$$

즉, 좌변은 점 $(\alpha + \pi, \tan(\alpha + \pi))$ 와 점 $(\beta, \tan \beta)$

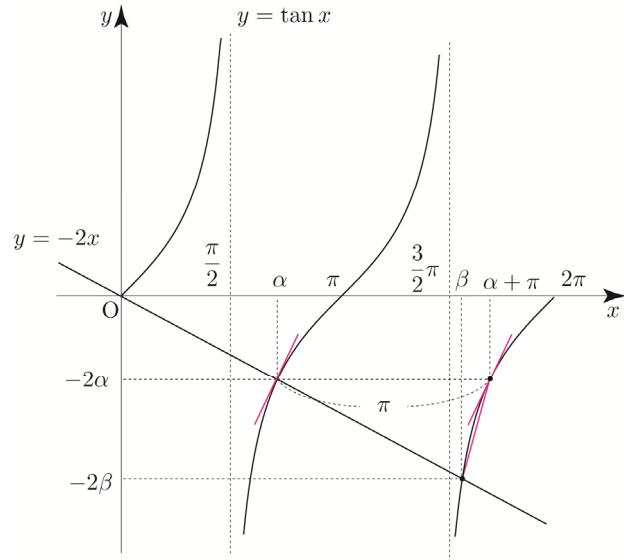
사이의 평균변화율로 해석할 수 있다.

$\tan x$ 는 주기가 π 이므로 $g'(\alpha) = g'(\alpha + \pi)$ 이고,

$\tan x$ 는 열린구간 $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ 에서 위로 볼록이므로

$$\frac{\tan(\alpha + \pi) - \tan \beta}{\alpha + \pi - \beta} > g'(\alpha + \pi)$$

$$\Rightarrow \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} > \sec^2 \alpha$$



따라서 \sphericalangle 은 거짓이다.

답 ③

100

2 이상의 자연수 n

$$f(x) = e^{x+1} \{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

$f(x)$ 가 역함수를 가지려면 증가 또는 감소함수이어야 하므로

$$f'(x) \geq 0 \text{ or } f'(x) \leq 0$$

$$f'(x) = e^{x+1} \{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + e^{x+1}(2x + n - 2) + a$$

$$= e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a$$

이므로 모든 x 에 대하여

$$e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a \geq 0 \text{ or } e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a \leq 0$$

가 성립해야 한다.

이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a\} = \infty$ 이므로

모든 실수 x 에 대하여 $e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a \leq 0$ 일 수 없다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a \geq 0$ 가

성립해야 한다.

$$e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a \geq 0 \Rightarrow a \geq e^{x+1}(-x^2 - nx - 1)$$

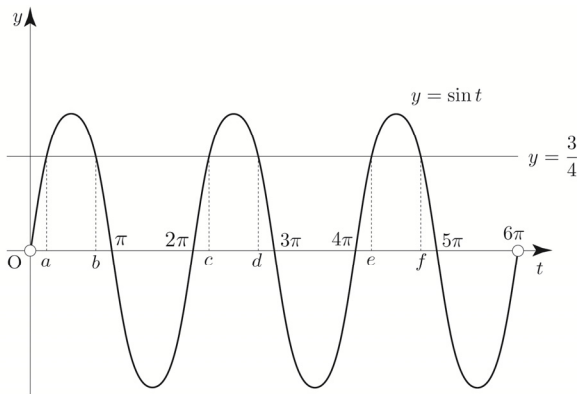
$$h(x) = e^{x+1}(-x^2 - nx - 1) \text{ 라 하면}$$

$$h'(x) = e^{x+1}(-x^2 - nx - 1) + e^{x+1}(-2x - n)$$

$$= -e^{x+1}(x^2 + (n+2)x + n + 1)$$

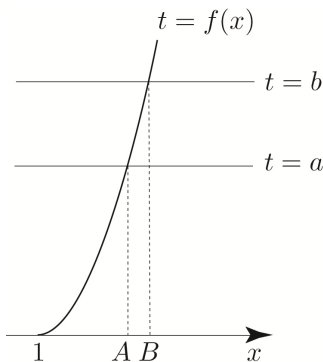
$$= -(x+n+1)(x+1)e^{x+1}$$

a, b, c, d, e, f ($a < b < c < d < e < f$)라 하자.



곡선 $t = f(x)$ 와 직선 $t = a$ 가 만나는 점의 x 좌표를 A 라 하면 다음과 같다.

곡선 $t = f(x)$ 와 직선 $t = b$ 가 만나는 점의 x 좌표를 B 라 하면 다음과 같다.



$h(t) = \frac{3}{4} - \sin t$ 라 하면

$$x \rightarrow A^- \Rightarrow t \rightarrow a^- \Rightarrow \sin t \rightarrow \frac{3}{4}^- \Rightarrow h\left(\frac{3}{4}^-\right) > 0$$

$$x \rightarrow A^+ \Rightarrow t \rightarrow a^+ \Rightarrow \sin t \rightarrow \frac{3}{4}^+ \Rightarrow h\left(\frac{3}{4}^+\right) < 0$$

$x = A$ 의 좌우에서 $\frac{3}{4} - \sin(6\pi(x-1)^2)$ 의 부호가 $-$ 로 변하므로 $g(x)$ 는 $x = A$ 에서 극대이다.

같은 방법으로

$$x \rightarrow B^- \Rightarrow t \rightarrow b^- \Rightarrow \sin t \rightarrow \frac{3}{4}^+ \Rightarrow h\left(\frac{3}{4}^+\right) < 0$$

$$x \rightarrow B^+ \Rightarrow t \rightarrow b^+ \Rightarrow \sin t \rightarrow \frac{3}{4}^- \Rightarrow h\left(\frac{3}{4}^-\right) > 0$$

$x = B$ 의 좌우에서 $\frac{3}{4} - \sin(6\pi(x-1)^2)$ 의 부호가 $-$ 로 변하므로 $g(x)$ 는 $x = B$ 에서 극소이다.

이때 더 조사할 필요없이 $t = d, t = f$ 인 경우

$t = b$ 와 구조가 동일하므로 $f(D) = d, f(F) = f$ 라 하면

$g(x)$ 는 $x = D, x = F$ 에서 극소인 것이 자명하다.

즉, $1 < x < 2$ 에서 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수는 3이다.

③ $0 < x < 1$ 일 때

함수 $f(x) = 6\pi(x-1)^2$ 의 그래프는 $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(2-x)$ 가 성립한다.

모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + \cos f(x) = f(2-x) + \cos f(2-x)$$

$$\Rightarrow g(x) = g(2-x)$$

이므로 함수 $g(x) = 3f(x) + 4\cos f(x)$ 의 그래프도 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

즉, $1 < x < 2$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수가 3이므로 대칭성에 의해서 $0 < x < 1$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수도 3이다.

따라서 $0 < x < 2$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수는 $1 + 3 + 3 = 7$ 이다.

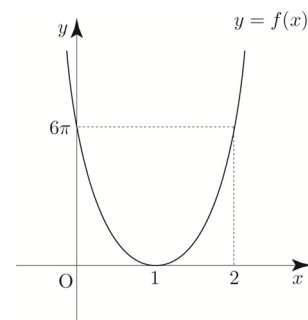
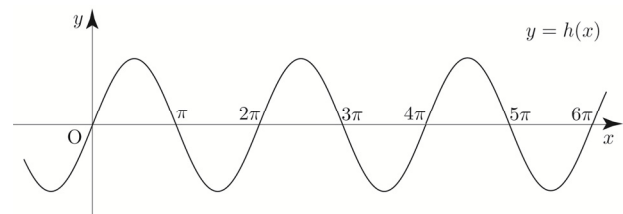
답 ②

이번에는 Guide step에서 배운 합성함수의 그래프 그리기를 이용하여 풀어보자.

$y = \sin(6\pi(x-1)^2)$ 에서 $h(x) = \sin x$ 라 하면

$y = \sin(6\pi(x-1)^2)$ 는 $y = h(f(x))$ 와 같다.

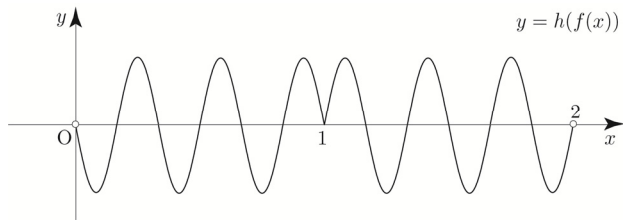
$f(x), h(x)$ 의 증감을 기초로 $y = h(f(x))$ 의 그래프를 그려보자.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=1$ 을 경계로 $x < 1$ 에서 감소하고 $x > 1$ 에서 증가한다.

$f(x)=t$ 라 하면 x 가 $1 \rightarrow 2$ 일 때, t 는 $0 \rightarrow 6\pi$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 에서 $0 < t < 6\pi$ 의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $x < 0$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.

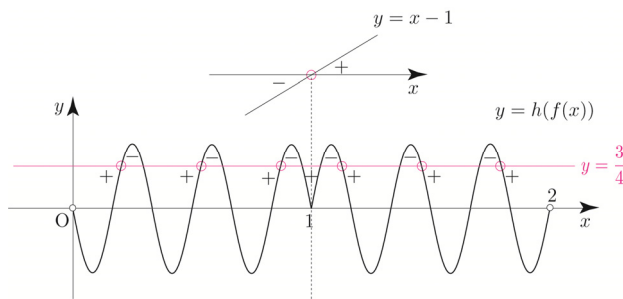
앞서 해설에서 언급했듯이 함수 $g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$ 의 그래프는 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 대칭성을 이용하여 정의역 $x > 0$ 에 해당하는 그래프를 먼저 그려주면 된다.



$$\begin{aligned} \text{Semi 도함수 } g'(x) &= (x-1)\left\{\frac{3}{4}-\sin f(x)\right\} \\ &= (x-1)\left\{\frac{3}{4}-h(f(x))\right\} \end{aligned}$$

빠기함수 Technique을 적용시켜

$\frac{3}{4}-h(f(x))$ 의 부호를 판단해보자.



$x=1$ 의 좌우에서 $x-1$ 의 부호가 $- \rightarrow +$ 로 바뀌고,
 $x=1$ 의 좌우에서 $\frac{3}{4}-h(f(x))$ 의 부호가 모두 $+$ 이다.
 $x=1$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 $- \rightarrow +$ 로 변하므로 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.

$1 < x < 2$ 에서 $x-1 > 0$ 이므로 $x=a$ ($1 < a < 2$)의 좌우에서 $\frac{3}{4}-h(f(x))$ 의 부호가 $- \rightarrow +$ 로 변하는 a 의 개수는 3이다.

$1 < x < 2$ 에서 $x-1 < 0$ 이므로 $x=b$ ($0 < b < 1$)의 좌우에서

$\frac{3}{4}-h(f(x))$ 의 부호가 $+ \rightarrow -$ 로 변하는 b 의 개수는 3이다.

따라서 $0 < x < 2$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수는 $1+3+3=7$ 이다.

103

n 은 자연수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx}{x^n+1} & (x \neq -1) \\ -2 & (x = -1) \end{cases}$$

$$x \neq -1 \text{ 일 때 } f'(x) = \frac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$$

ㄱ. $n=3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 에서 증가한다.

$$x < -1 \text{ 에서 } f'(x) = \frac{3-6x^3}{(x^3+1)^2} > 0 \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 에서 증가한다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이 되도록 하는 n 에 대하여 방정식 $f(x)=2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{nx}{x^n+1} = -2$$

$$\text{만약 } n \text{ 이 홀수이면 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^n+1) = 0, \lim_{x \rightarrow -1} nx = -n$$

이므로 극한값이 존재하지 않는다.

즉, n 은 짝수이어야 한다.

$$n \text{ 이 짝수이면 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{nx}{x^n+1} = -\frac{n}{2} = -2 \Rightarrow n=4$$

$$f(x) = \frac{4x}{x^4+1}$$

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 원점대칭 (기함수)

$$f(0) = 0$$

$x > 0$ 인 부분을 그리고 원점 대칭시켜 $x < 0$ 인 부분을 그려주면 된다.

$$f'(x) = \frac{4-12x^4}{(x^4+1)^2} = \frac{4(1-3x^4)}{(x^4+1)^2}$$

$$\text{Semi 도함수 } f'(x) = 1-3x^4$$

108

$$f(x) = kx^2e^{-x} \quad (k > 0)$$

$$f'(x) = 2kxe^{-x} - kx^2e^{-x} = kx(2-x)e^{-x}$$

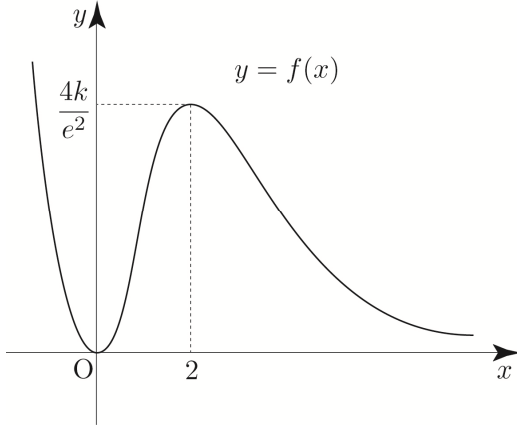
Semi 도함수 $f'(x) = x(2-x)$

$$f'(0) = f'(2) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = \frac{4k}{e^2}$$

$\Rightarrow x=0$ 에서 극소, $x=2$ 에서 극대

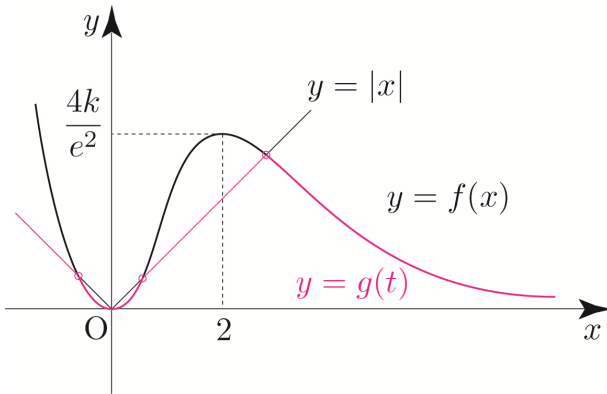
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 했으므로 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리가 같은 틀을 경계로 판단해 보자. 즉, $y=x, y=-x$ 를 틀로 판단해보자.

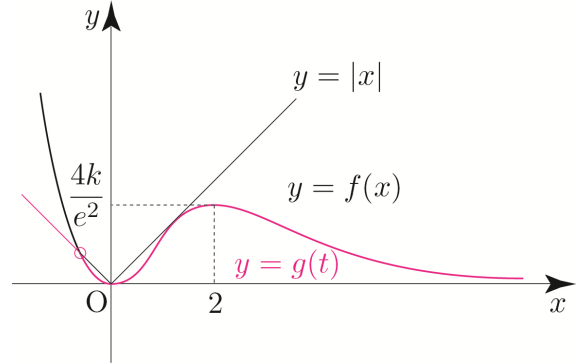
이때, 함숫값이 아니라 거리가 $g(t)$ 이므로 $y=|x|$ 와 $y=|f(x)|$ 의 그래프 중 아래의 그래프를 $y=g(t)$ 의 그래프로 선택하면 된다.
($f(x) \geq 0$ 이므로 $y=|f(x)|=f(x)$)



만약 $y=g(t)$ 의 그래프가 위와 같다면 함수 $g(t)$ 는 세 점에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

양수 k 에 상관없이 $t < 0$ 에서 하나의 접점이

생기므로 미분가능하지 않은 한 점이 무조건 생긴다. 즉, 조건을 만족시키려면 $t > 0$ 에서 미분가능해야 하므로 $x > 0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나지 않거나 접하면 된다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 접하는 접점의 x 좌표를 a ($a > 0$)라 하면

$$f(a) = a \Rightarrow ka^2e^{-a} = a \Rightarrow ke^{-a} = \frac{1}{a}$$

$$f'(a) = 1 \Rightarrow ka(2-a)e^{-a} = 1$$

$$\text{위 식을 연립하면 } 2-a=1 \Rightarrow a=1$$

$$\text{이므로 } ke^{-1} = 1 \Rightarrow k=e$$

따라서 k 의 값의 범위를 구하면 $0 < k \leq e$ 이므로 k 의 최댓값은 e 이다.

답 ⑤

109

$$a > 0, \quad b, \quad c$$

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$$

(가) $f(x)$ 는 $x = -\sqrt{3}$ 과 $x = \sqrt{3}$ 에서 극값을 갖는다.
 $\Rightarrow f'(-\sqrt{3}) = f'(\sqrt{3}) = 0$

$f'(x) = (ax^2 + bx + c)e^x = \{ax^2 + (2a+b)x + b+c\}e^x$ 이므로 이차방정식 $ax^2 + (2a+b)x + b+c = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 $x = -\sqrt{3}$ or $x = \sqrt{3}$ 이어야 한다.

근과 계수의 관계를 사용하면

$$-\frac{2a+b}{a} = 0, \quad \frac{b+c}{a} = -3$$

위 두 식을 연립하면 $b = -2a, c = -a$ 이므로

$p(x) = (x-1)|h(x)|$ 라 하면

$x < x_1$ 이면 $j(x) < a$ 이므로 $h(x) = f(j(x)) < 0$

$x \geq x_1$ 이면 $j(x) \geq a$ 이므로 $h(x) = f(j(x)) \geq 0$

이므로

$$p(x) = \begin{cases} -(x-1)h(x) & (x < x_1) \\ (x-1)h(x) & (x \geq x_1) \end{cases}$$

$$p'(x) = \begin{cases} -h(x) - (x-1)h'(x) & (x < x_1) \\ h(x) + (x-1)h'(x) & (x > x_1) \end{cases}$$

(가) 조건에 의하여 함수 $p(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로 $x = x_1$ 에서도 미분가능해야 한다.

$x = x_1$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 하므로

$$-h(x_1) - (x_1-1)h'(x_1) = h(x_1) + (x_1-1)h'(x_1)$$

$$\Rightarrow h(x_1) + (x_1-1)h'(x_1) = 0$$

$$h(x_1) = f(j(x_1)) = f(a) = 0 \text{이므로}$$

$$(x_1-1)h'(x_1) = 0$$

이때, $h'(x) = j'(x)f'(j(x)) = \frac{1}{g'(j(x))} \times f'(j(x))$ 이므로

$$h'(x_1) = \frac{1}{g'(a)} \times f'(a) > 0 \quad (\because g'(a) > 0, f'(a) > 0)$$

$$\text{즉, } (x_1-1)h'(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$j(x_1) = a \Rightarrow j(1) = a \text{이므로}$$

$$g(a) = 1 \Rightarrow a^3 + a + 1 = 1 \Rightarrow a(a^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\therefore f(x) = x(x-b)^2$$

$x = x_2$ 에서도 미분가능해야 하므로 $x = x_1$ 와 같은 논리로

$$h(x_2) + (x_2-1)h'(x_2) = 0 \text{가 성립해야 한다.}$$

$$h(x_2) = f(j(x_2)) = f(b) = 0 \text{이므로}$$

$$(x_2-1)h'(x_2) = 0 \text{이고}$$

$$h'(x_2) = \frac{1}{g'(b)} \times f'(b) = 0 \quad (\because g'(b) > 0, f'(b) = 0)$$

이므로 $(x_2-1)h'(x_2) = 0$ 를 만족시킨다.

즉, 함수 $p(x)$ 는 $x = x_2$ 에서 미분가능하다.

(나) $h'(3) = 2$

$$h'(3) = \frac{1}{g'(j(3))} \times f'(j(3))$$

$$g(x) = x^3 + x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow j(3) = 1$$

$$g'(x) = 3x^2 + 1, f'(x) = (x-b)^2 + 2x(x-b) \text{이므로}$$

$$h'(3) = \frac{1}{g'(1)} \times f'(1) = \frac{(1-b)^2 + 2(1-b)}{4} = 2$$

$$\Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0 \Rightarrow (b-5)(b+1) = 0$$

$$\Rightarrow b = 5 \quad (\because b > a)$$

$$\therefore f(x) = x(x-5)^2$$

따라서 $f(8) = 8 \times 9 = 72$ 이다.

답 72

Tip (가) 조건만으로는 b 를 구할 수 없으니
(나) 조건을 준 것이다.

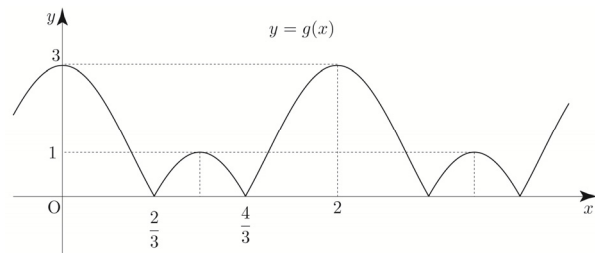
역함수 미분법, 합성함수 미분법, 절댓값 함수의 미분가능성을 복합적으로 물어보는 문제였다. 지금까지의 기출문제들에서 모두 다루었던 내용이지만 복합적으로 얽혀있어 막상 수능장에서 깔끔하게 풀기에는 나름 만만치 않은 문제였다.

풀이 길이로 보면 30번인 것 같지만 사실 2021학년도 수능 28번에 출제되었다.

백지에 깔끔하게 다시 풀어보자!

114

$$f(x) = x^3 + ax, g(x) = |2\cos\pi x + 1|$$



$$h(x) = f(g(x))$$

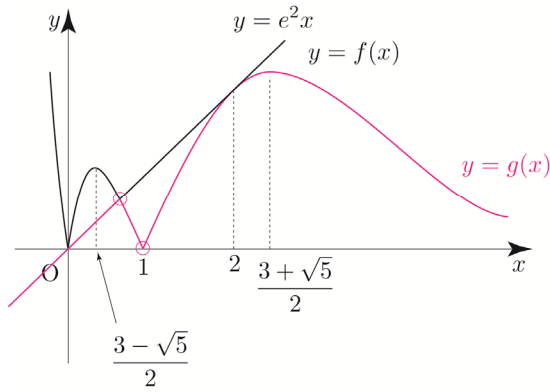
$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$g(x)$ 는 $g(x) = 0$ 을 만족시키는 x 값에서 미분가능하지 않다.

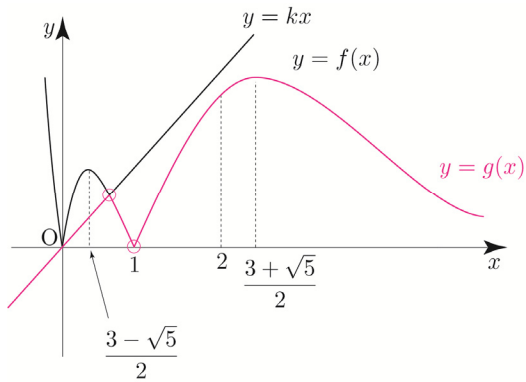
즉, $h(x)$ 의 미분가능여부를 조사할 때, $g(x) = 0$ 을

만족시키는 x 값에서만 미분가능여부를 조사하면 된다.

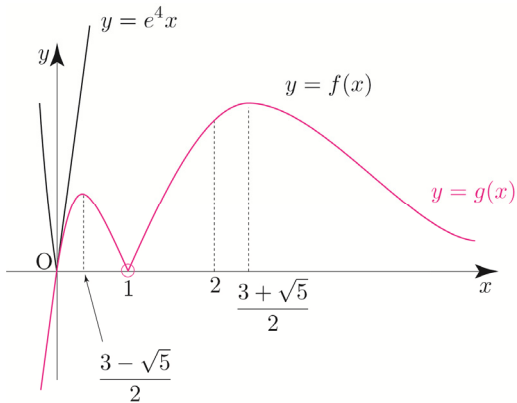
방정식 $g(x) = 0$ 의 실근을 $x = p$ 라 하면



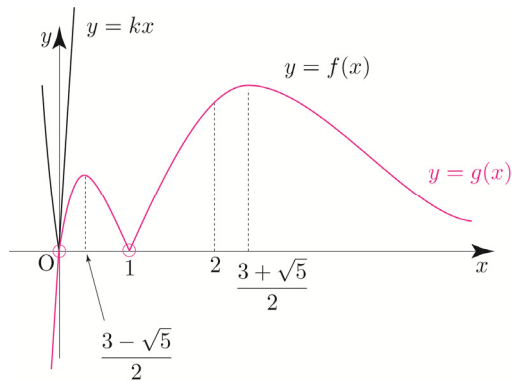
$e^2 \leq k < e^4$ 일 때, $h(k) = 2$



$k = e^4$ 일 때, $h(k) = 1$



$k > e^4$ 일 때, $h(k) = 2$
(실수하는 포인트!!)



$h(k) = 2$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는
 $e^2 \leq k < e^4$ or $k > e^4$ 이다.
따라서 ㄷ은 거짓이다.

답 ②

123

$a > 0, 0 < b < 1$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & (x \leq 0) \\ \frac{\ln(x+b)}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

① $x \leq 0$ 일 때, $f(x) = -x(x-a)$

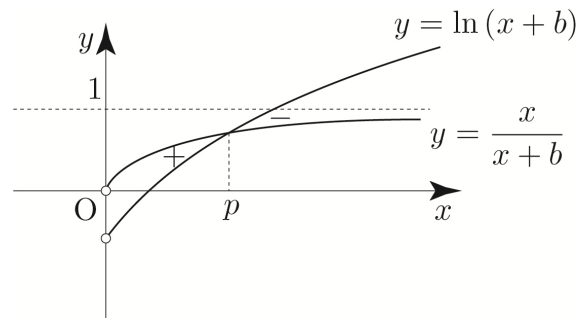
② $x > 0$ 일 때, $f(x) = \frac{\ln(x+b)}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x+b} - \ln(x+b)}{x^2}$$

Semi 도함수 $f'(x) = \frac{x}{x+b} - \ln(x+b)$

두 함수 $y = \frac{x}{x+b}$, $y = \ln(x+b)$ 의 그래프를 이용하여

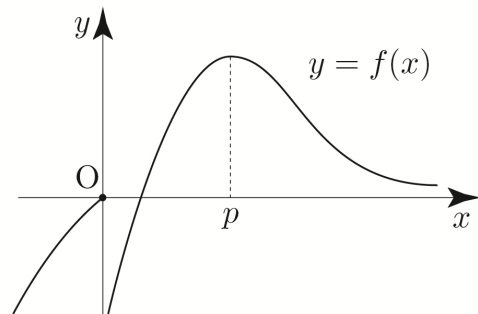
빼기함수 Technique으로 도함수의 부호를 판단해보자.



$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ($\because 0 < b < 1 \Rightarrow \ln b < 0$)

이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면 다음과 같다.

양수 m 에 대하여 직선 $y = mx$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가
만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$



$$\Rightarrow -\frac{7}{2} - a = 0 \Rightarrow a = -\frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } g'\left(k - \frac{1}{2}\right) &= 2a\left(k - \frac{1}{2}\right) + b = (2ak + b) - a \\ &= \frac{5}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) \quad (\because \ominus, a = -\frac{7}{2}) \\ &= \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

이다.

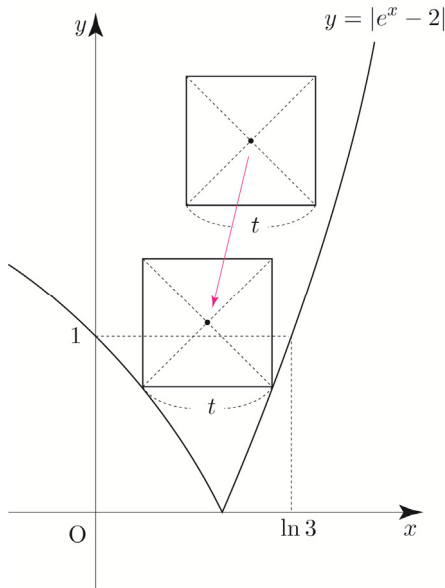
답 6

125

$g(x) = |e^x - 2|$ 라 하자.

함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 좌표는 $(0, 1), (\ln 3, 1)$ 이다.

값을 잡기 위해서 $0 < t \leq \ln 3$ 인 경우를 가정해보자.

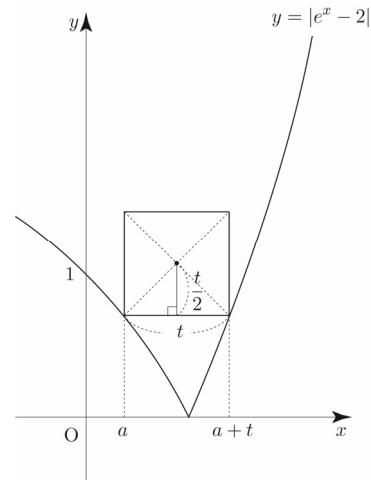


정사각형 A 의 두 대각선의 교점의 y 좌표의 최솟값이 $f(t)$ 이므로 $f(t)$ 는 위 그림과 같이 정사각형 A 의 꼭짓점이 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 만날 때 정해진다.

$0 < t \leq \ln 3$ 이면 정사각형 A 와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 두 점에서 만나고 $t > \ln 3$ 이면 한 점에서 만나므로 t 의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

Tip $f'(\ln 2) + f'(\ln 5)$ 의 값을 구하는 것에서 $f'(t)$ 가 구간에 따라 달라지는 함수가 될 것이라는 힌트를 얻을 수 있었다.

① $0 < t \leq \ln 3$ 일 때



정사각형과 $y = g(x)$ 의 두 교점의 x 좌표를 각각 a 와 $a+t$ 라 하면 두 교점의 좌표는 $(a, 2 - e^a), (a+t, e^{a+t} - 2)$

Tip 모르면 자연스럽게 미지수를 도입한다.

<참고 문항>

2023 규토 라이트 N제 수1 문제편 p105 42번

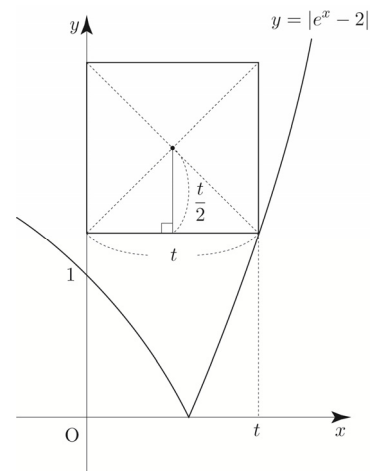
2023 규토 라이트 N제 수2 문제편 p319 76번

두 교점의 y 좌표가 같으므로 $e^a = \frac{4}{e^t + 1}$ 이고.

$$f(t) = 2 - e^a + \frac{t}{2}$$

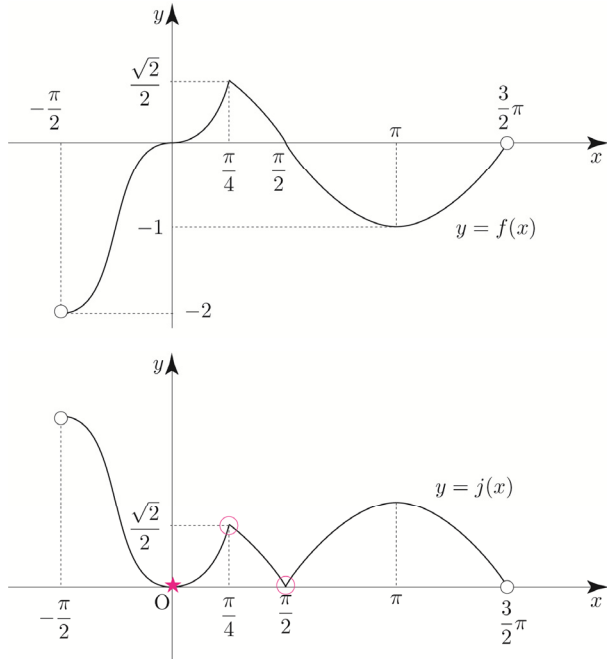
$$\therefore f(t) = 2 - \frac{4}{e^t + 1} + \frac{t}{2}$$

② $t > \ln 3$ 일 때



조건을 만족시키는 k 의 개수는 3이므로 $g(t) = 3$

③ $t = 0$ 일 때



과연 $x=0$ 에서 $\sqrt{j(x)}$ 가 미분가능할까?
 얼핏 보면 $x=0$ 에서 smooth 하니까 미분가능한 것처럼 보인다.

$$\{\sqrt{j(x)}\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{j(x)}} \text{에서}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} j(x) = 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ 이므로 $\frac{0}{0}$ 꼴이다.

즉, 그래프로 판단할 수 없고 직접 식으로 계산하여 미분가능여부를 판단해야 한다.

$$k(x) = \sqrt{j(x)} = \sqrt{|2\sin^3 x|} = \sqrt{2} |\sin x| \sqrt{|\sin x|} \text{라 하자.}$$

$x=0$ 에서 미분계수의 정의를 이용하면

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \sin x \sqrt{\sin x}}{x} = 0$$

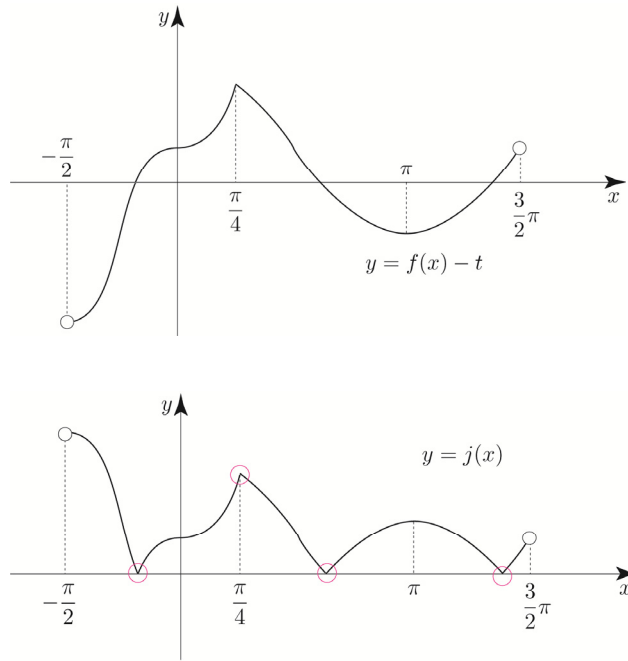
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{2} \sin x \sqrt{-\sin x}}{x} = 0$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = 0 \text{이므로}$$

$x=0$ 에서 미분가능하다.

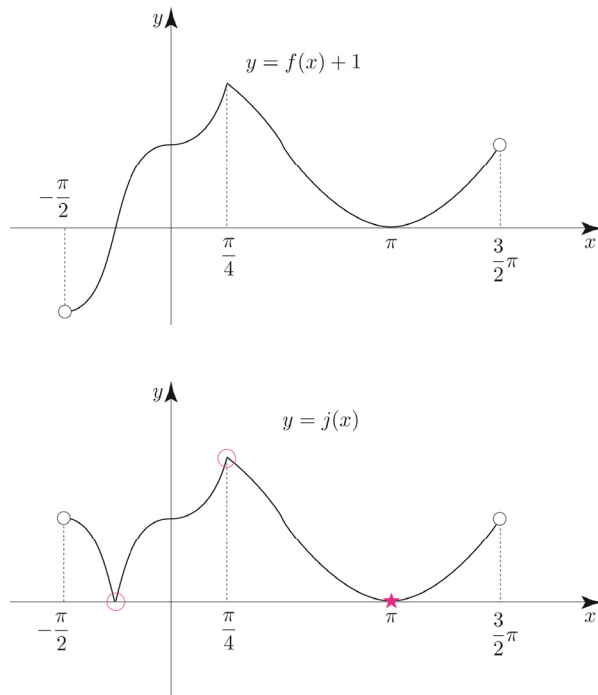
조건을 만족시키는 k 의 개수는 2이므로 $g(0) = 2$

④ $-1 < t < 0$ 일 때



조건을 만족시키는 k 의 개수는 4이므로 $g(t) = 4$

⑤ $t = -1$ 일 때



$$\{\sqrt{j(x)}\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{j(x)}} \text{에서}$$

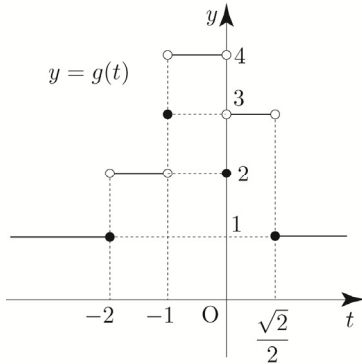
$\lim_{x \rightarrow \pi} j(x) = 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow \pi} f'(x) = 0$ 이므로 $\frac{0}{0}$ 꼴이다.

즉, 그래프로 판단할 수 없고 직접 식으로 계산하여 미분가능여부를 판단해야 한다.

(③ $t = 0$ 일 때에서 다른 것과 같은 논리이다.)

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq -2) \\ 2 & (-2 < t < -1) \\ 3 & (t = -1) \\ 4 & (-1 < t < 0) \\ 2 & (t = 0) \\ 3 & \left(0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 1 & \left(t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

이를 바탕으로 $g(t)$ 를 그리면 다음과 같다.



합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$

함수 $(h \circ g)(t) = h(g(t))$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 하므로 $t = -2, t = -1, t = 0, t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 연속이어야 한다.

(i) $t = -2$ 에서 연속

$$\lim_{t \rightarrow -2^-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow -2^+} h(g(t)) = h(g(-2))$$

$$\Rightarrow h(1) = h(2)$$

(ii) $t = -1$ 에서 연속

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} h(g(t)) = h(g(-1))$$

$$\Rightarrow h(2) = h(4) = h(3)$$

(iii) $t = 0$ 에서 연속

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} h(g(t)) = h(g(0))$$

$$\Rightarrow h(4) = h(3) = h(2)$$

(iv) $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 연속

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}^-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}^+} h(g(t)) = h\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow h(3) = h(1)$$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$h(1) = h(2) = h(3) = h(4)$$

사차함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고

$$h(1) = h(2) = h(3) = h(4) = p \text{라 하면}$$

식세우기 Technique에 의하여

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + p$$

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = a, g(0) = 2 = b, g(-1) = 3 = c \text{이므로}$$

$$a = 1, b = 2, c = 3$$

따라서

$$h(a+5) - h(b+3) + c = h(6) - h(5) + 3$$

$$= (120 + p) - (24 + p) + 3$$

$$= 99$$

이다.

답 ④

Tip1 <그뎌 그랬지>

2019학년도 고3 6월 평가원 21번에 출제되었던 문항인데 이때 정답률이 23%였으니 5지선다임을 고려 고려했을 때, 사실상 실전에서는 거의 다 찍었다고 보는게 맞다.

보통 문제와 달리 함수 $|f(x) - t|$ 의 미분가능성을 물어보지 않고 독특하게 $\sqrt{|f(x) - t|}$ 의 미분가능성을 물어보았다.

눈여겨 봐야 할 부분은 아래와 같다.

③ $t = 0$ 일 때 $x = 0$ 에서의 미분가능성

⑤ $t = -1$ 일 때 $x = \pi$ 에서의 미분가능성

눈대중으로 판단하는 것이 아니라 직접 미분계수의 정의를 이용하여 미분가능성을 판단하도록 하여 smooth하니까 (첨점이 아니니까) 당연히 미분가능할 것이라는

관성적인 접근에 익숙한 학생들의 허를 찔렀던 문항이었다.

Tip2 <역함수의 미분가능성>

smooth하더라도 미분가능하지 않는 경우는 역함수의 미분가능성에서도 찾을 수 있다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 그의 역함수 $g(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 미분가능할까?

함수 $f(x) = x^3 + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{이 성립한다.}$$

$f(0) = 1 \Rightarrow g(1) = 0$ 이고, $f'(0) = 0$ 이므로

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{0}$$

$\Rightarrow g'(1)$ 이 존재 \times

따라서 역함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하지 않다.

즉, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하더라도 $f'(a) = 0$ 이고, $f(a) = b$ 라면 역함수 $g(x)$ 는 $x = b$ 에서 미분가능하지 않다.

$f(x)$ 의 접선의 기울기가 0인 것을 바탕으로 역함수의 미분가능성을 판단하는 문제는 아직 수능에 출제되지 않았기에 이번 기회를 통해 기억해 두도록 하자.

역함수의 미분가능성을 묻는 고난도 문제는 규토 고득점 N제에서 자세히 다루기로 하자.

045

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$F(0) = 0, \quad F'(x) = f(x)$$

$$\{f(x)\}^2 = f(x)f(x) = F'(x)f(x) \text{ 이므로}$$

$$\int_0^2 \{f(x)\}^2 dx + \int_0^2 F(x)f'(x) dx = 12$$

$$\Rightarrow \int_0^2 F'(x)f(x) dx + \int_0^2 F(x)f'(x) dx = 12$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \{F'(x)f(x) + F(x)f'(x)\} dx = 12$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \{F(x)f(x)\}' dx = 12$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{F(x)f(x)\}' dx &= [F(x)f(x)]_0^2 \\ &= F(2)f(2) - F(0)f(0) \\ &= F(2)f(2) \quad (\because F(0)=0) \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\therefore F(2)f(2) = 12 \quad \dots \textcircled{\ominus}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 xf'(x) dx &= [xf(x)]_0^2 - \int_0^2 f(x) dx \\ &= 2f(2) - F(2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\therefore 2f(2) - F(2) = 5 \quad \dots \textcircled{\omin�}$$

①, ②에 의하여

$$2f(2) - F(2) = 5 \Rightarrow \frac{24}{F(2)} - F(2) = 5$$

$$\Rightarrow 24 - \{F(2)\}^2 = 5F(2)$$

$$\Rightarrow \{F(2)\}^2 + 5F(2) - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (F(2) + 8)(F(2) - 3) = 0$$

$$\Rightarrow F(2) = 3 \quad (\because F(2) > 0)$$

$$\therefore F(2) = 3$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \int_0^2 \{F(x)\}^2 f(x) dx &= \left[\frac{\{F(x)\}^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{\{F(2)\}^3}{3} - \frac{\{F(0)\}^3}{3} \\ &= \frac{27}{3} - 0 = 9 \end{aligned}$$

이다.

답 9

Tip 적분은 미분의 역연산임을 이용하면 굳이 치환적분을 하지 않아도 바로 적분가능하다.

$\int f(x) dx$ 를 어떻게 설정해야 미분하여 $f(x)$ 가 될까? 라는 사고가 핵심이다.

아래 식들은 잘 나오니 기억해 두자.

- ① $\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$
 $\int \{f(x) + xf'(x)\} dx = xf(x) + C$
- ② $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
 $\int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx = f(x)g(x) + C$
- ③ $\{\ln|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$
- ④ $\{f(x)^2\}' = 2f(x)f'(x)$
 $\int 2f(x)f'(x) dx = \{f(x)\}^2 + C$
- ⑤ $\{f(x)^3\}' = 3\{f(x)\}^2 f'(x)$
 $\int 3\{f(x)\}^2 f'(x) dx = \{f(x)\}^3 + C$
- ⑥ $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$
 $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$
- ⑦ $\left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$
 $\int \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} dx = \frac{f(x)}{x} + C$

↳에 의하여 $g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right) = 2S$ 이고,

$S < \frac{1}{2} \Rightarrow 2S < 1$ 이므로 $g(a) \geq 1$ 을 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.
따라서 ㄷ은 거짓이다.

답 ②

Tip $g'(x) = f(x)f(1-x)$
 $g'(1-x) = f(1-x)f(x)$
 즉, $g'(x) = g'(1-x)$ 가 성립하므로
 $y = f(x)f(1-x)$ 의 그래프는 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여
 대칭인 것이 자명하다.

079

$0 \leq a \leq 8$

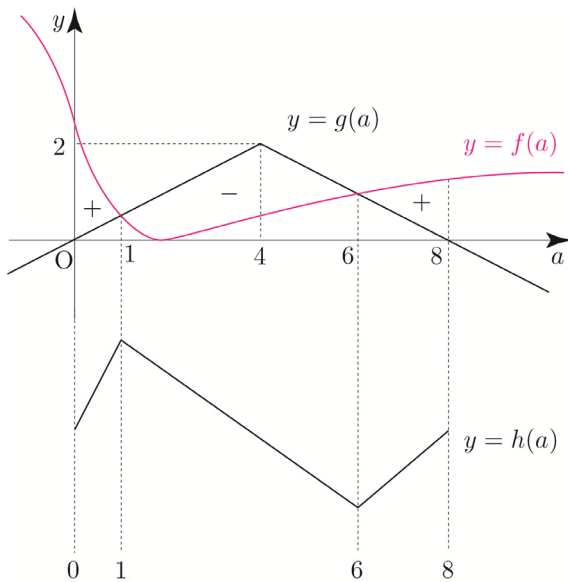
$h(a) = \int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$ 라 하자.

(New 함수 Technique)

$$h(a) = F(a) - F(0) + G(8) - G(a)$$

$$h'(a) = f(a) - g(a)$$

두 함수 $y = f(a)$, $y = g(a)$ 의 그래프를 이용하여
 빼기함수 Technique으로 $h'(a)$ 의 부호를 처리해 보자.



$h(a)$ 는 $x = 6$ 에서 극소를 갖는다.

$$h(0) = \int_0^8 g(x)dx = 8$$

$$h(6) = \int_0^6 f(x)dx + \int_6^8 g(x)dx$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4} \right) dx + 1$$

$$= \left[\frac{5}{2}x - 5\ln|x^2+4| \right]_0^6 + 1$$

$$= 15 - 5\ln 40 + 5\ln 4 + 1$$

$$= 16 - 5\ln 10$$

$$10 = 5\ln e^2 < 5\ln 10 \text{이므로 } h(6) < h(0)$$

따라서 최솟값은 $h(6) = 16 - 5\ln 10$ 이다.

답 ④

이번에는 a 의 범위에 따라 case분류하여 $h(a)$ 를 직접
 구해보자.

① $0 \leq a \leq 4$ 일 때

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4} \right) dx + \int_a^4 \frac{x}{2} dx + \int_4^8 \frac{-x+8}{2} dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x - 5\ln|x^2+4| \right]_0^a + \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_a^4 + \left[-\frac{1}{4}x^2 + 4x \right]_4^8$$

$$= \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln 4 + 4 - \frac{1}{4}a^2 + 4$$

$$h(a) = \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln 4 + 4 - \frac{1}{4}a^2 + 4 \text{라 하면}$$

$$h'(a) = \frac{5}{2} - \frac{10a}{a^2+4} - \frac{a}{2} = \frac{-(a-1)(a^2-4a+20)}{2(a^2+4)}$$

$h(a)$ 는 $a = 1$ 에서 극대이고,

$$h(0) = 8, \quad h(1) = \frac{41}{4} - 5\ln 5 + 5\ln 4, \quad h(4) = 14 - 5\ln 5$$

$$\begin{aligned} \int_1^8 xf'(x)dx &= [xf(x)]_1^8 - \int_1^8 f(x)dx \\ &= 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x)dx \\ &= 63 - \int_1^8 f(x)dx \quad \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

이므로 $\int_1^8 f(x)dx$ 의 값만 구하면 된다.

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &= \frac{5}{4} \text{와 } g(2x)=2f(x) \ (x \geq 1) \text{를 바탕으로} \\ \int_1^8 f(x)dx &\text{의 값을 구해보자.} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 g(2x)dx = 2 \int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{2}$$

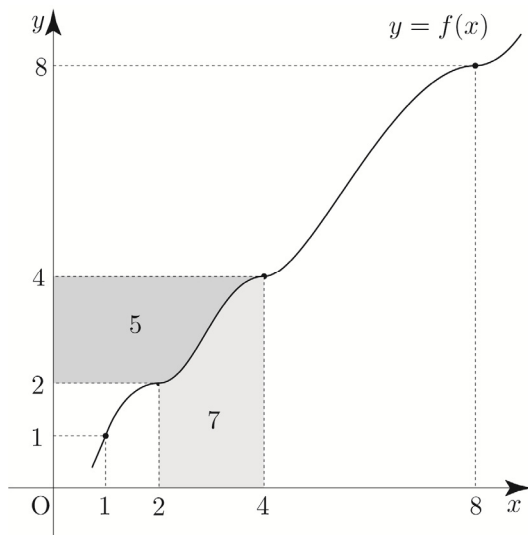
$$2x = t \text{라 하면 } 2 = \frac{dt}{dx}$$

$x = 1$ 일 때, $t = 2$, $x = 2$ 일 때, $t = 4$

$$\int_1^2 g(2x)dx = \frac{1}{2} \int_2^4 g(t)dt = \frac{5}{2} \Rightarrow \int_2^4 g(x)dx = 5$$

2023 규토 라이트 N제 수2 정적분의 활용 Guide step에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프로 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프를 해석하는 방법을 학습하였다.

이를 이용하여 $\int_2^4 f(x)dx$ 의 값을 구해보자.



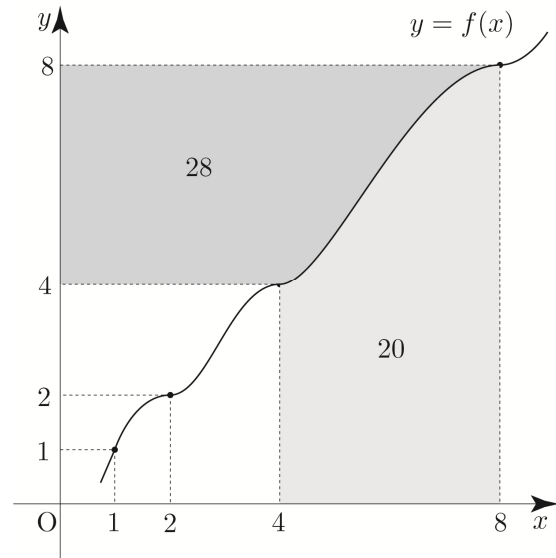
$$\int_2^4 f(x)dx = 16 - \left(4 + \int_2^4 g(x)dx\right) = 16 - 9 = 7$$

$$\int_2^4 g(2x)dx = 2 \int_2^4 f(x)dx = 14$$

$$2x = t \text{라 하면 } 2 = \frac{dt}{dx}$$

$x = 2$ 일 때, $t = 4$, $x = 4$ 일 때, $t = 8$

$$\int_2^4 g(2x)dx = \frac{1}{2} \int_4^8 g(t)dt = 14 \Rightarrow \int_4^8 g(x)dx = 28$$



$$\int_4^8 f(x)dx = 64 - \left(16 + \int_4^8 g(x)dx\right) = 64 - 44 = 20$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^8 f(x)dx &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx \\ &= \frac{5}{4} + 7 + 20 = \frac{113}{4} \end{aligned}$$

㉠에 의해서

$$\int_1^8 xf'(x)dx = 63 - \int_1^8 f(x)dx = 63 - \frac{113}{4} = \frac{139}{4} \text{이다.}$$

따라서 $p+q=143$ 이다.

답 143

105

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)} dt$

$$f(0)=0, \quad f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$$

$f'(x) \geq 0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소하지 않는다.

$$\sqrt{4-2f(x)} \text{에서 } 4-2f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq 2$$