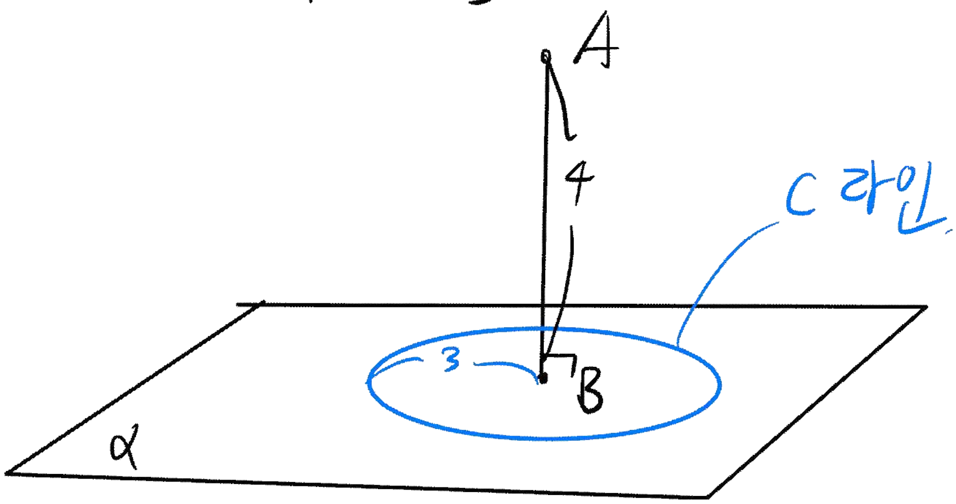
오늘의 주제는**정사영**입니다.
기하를 가르치는 강사 100이면 100 강조해서 가르치는 주제죠. 근데 정답률은 제일 낮습니다.
*궤변아닌가요?*제일 강조해서 가르치고 열심히 공부하는데 정답률이 낮다는게?
궤변 맞습니다. 근데 이유가 있는 궤변이죠. 강조해서 가르치면 뭐합니까? 제대로 쓰지를 못하는데
오늘 알려드릴 내용 숙지하고 연습하시면 정사영을 보는 눈이 달라질겁니다. (저는 그랬어요ㅎㅎ)
일단 시작하기 전에 정사영을 왜 어려워 할까요? 그 이유는"**도형을 여러개 줘서** "입니다.
여러분은 정육면체 딸랑 하나주고 정사영을 구하라는 문제를 풀어보신적 있으신가요?
있다면 그건 교과서일겁니다. 수능은 달라요. 여러 도형을 섞어서 주죠. 물론 그렇다고 정사면체 정육면체 정팔면체
이렇게 막 섞진 않구요"**구**"랑 섞습니다. 구를 쓰는 이유는 간단해요.
1. 길이는 일정한데 방향은 천방지축이고
2. 그리기 어렵고
3. 상상하기 어렵기 때문입니다.
아주 당연한 이유인데 여러분은 배울때
음~ 정사영은 빛을 쏘면 생기는 그림자야~ 음~ 점을 밑변에 내리면 돼~ 이렇게 두루뭉술하게 배웠죠..
그래서 여러분은 이런 발문을 보면 살짝 당황합니다.*"정사영의 최대&최소를 구하여라"*
음? 정사영은 이면각 구하고 원상에 코사인 곱해주는 문제 아닌가? 하는 순간 말리는 거죠.
오늘 알려드릴 내용은 구를 포함한 정사영 문제의 필수 태도와 그에 필요한 기술"**라인따기** "입니다.
1) 종이에다가 구를 그리지마라
--> 우리가 그려야 할건**구의 중심**입니다. 위에 써놨지만 구는 중심기준길이가 일정하고 방향이 다양합니다. 종이에 삐뚤빼뚤하게 구 그리는 것보다진하게 중심 하나 찍는게 더 효율적입니다. 결국 봐야할건 중심에서 떨어진 거리죠.
2) 단면화하라
---> 공간도형은 결국 이면각을 구하는게 목적입니다.
문제에 입체도형만 그려져 있어도 물어보는건 특정 평면에 정사영했을때 입니다.
우린 "그" 특정 평면위주로 눈에 보이게끔 "단면화" 해줍니다. 그 평면은 밑면일수도 있고, 공중에 떠있는 평면일수도, 아직 존재하지 않는 평면일수도 있습니다.상관없습니다. 정사영 문제의 80퍼센트는 단면화를 얼마나 제대로 하느냐에 달려있거든요. 이 부분은 여러분이 연습해야하는 부분입니다.
3)**라인을 따라**
---> 오늘 제가 알려드릴 기술입니다. 서론이 길었죠ㅎㅎ 이름은 거창한데 사실 자취를 그리는 겁니다.
~~네? 근데 왜 영어로 말하냐고요? 물대포보단 하이드로캐논이 쎄보이자나요..~~
정확히 설명하자면, 특정 평면 위에, 혹은 특정 평면을 만들기 위한 동점의 자취를 구하는 겁니다. 말이 어렵죠?
이럴땐 예시를 들죠
.

평면 α위에 $\overline{AC}$는 5가 되도록 하는 점 C가 있다.

조건, $\overline{AB} = 4$ $\overline{AB} \perp \alpha$



정말 별거 없죠? 우리가 초6때 배우던 그대로 입니다. 단지 방정식만 안썼죠.
근데 이게 기하 30번에 나옵니다. 멀리 갈 필요도 없이 작년 수능 30번에 나왔더라구요.

30. 좌표공간에 중심이 $C(2, \sqrt{5}, 5)$이고 점 $P(0, 0, 1)$을 지나는 구

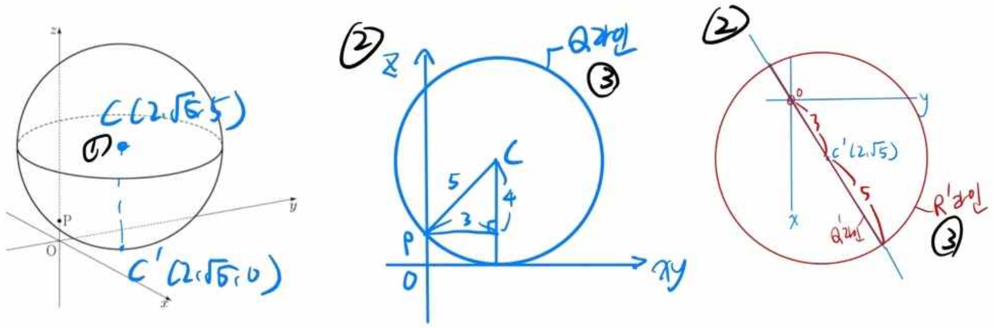
$$S : (x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.
삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

→ 단면화 - 원

→ 정사영 & 최대 나왔죠?

→ 단면화 ㄱㄱ



① 중심찍고
② 단면화하고 → 끝
③ 라인그렸다

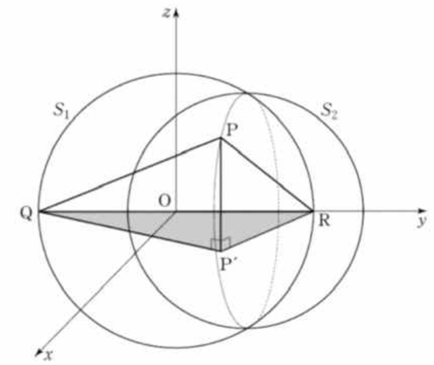
이 다음 부터는 삼수선정의다. (또 또 또 또 이면각 구하기다..)
이후과정은 다음 칼럼인 "삼수선 정의"에서 이어서 다루겠다.

참 별거 없지 않나요? 이 이후에 그림 하나만 더 그리면 문제가 풀립니다. 정답률 8퍼센트짜리 문제가
단면화하고 라인만 땄다고 원 2개랑 삼수선 정의 한번만 하면 풀립니다.
물론 "적절한 단면화"가 힘들순 있습니다. 수많은 연습 끝에 적절함을 체화하는 거죠.
근데 여러분, 미적은 이것보다 훨씬 많고 어려운 내용을 피땀 흘리면서 연습해요..
개념이 쉬운거랑 문제가 쉬운거랑은 별개죠. 꿀빨고 싶으면 자세를 제대로 잡으세요. 쉽기만 한건 공부가 아닙니다.
그래도 좋은 소식은 단면화만 연습하고 라인따는건 연습안해도 된다는 겁니다. 식세우는게 아니라 초딩도 하거든요.

연습합시다. 그리고 노력합시다. 깨닫고 나면 쉽습니다.
이제 늘 그렇듯 관련 기출로 마무리 하겠습니다 ㅎㅎ 단면화 연습하기 좋은 문제들이니까 한번 시도해 보세요~

1

두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$을 각각 S_1, S_2라 하자. 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하고, 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 P'이라 하자. 구 S_1과 y축이 만나는 점을 각각 Q,R라 할 때, 사면체 $\mathrm{PQP'R}$의 부피의 최댓값을 구하시오.

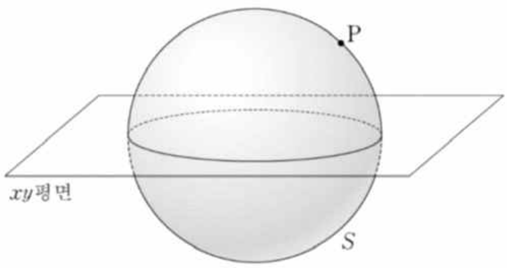


2

정답 | 정답은 **84** 입니다

좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$ 과 점 $\mathrm{P}(0,5,5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

(가) 원 C는 점 P 를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
(나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



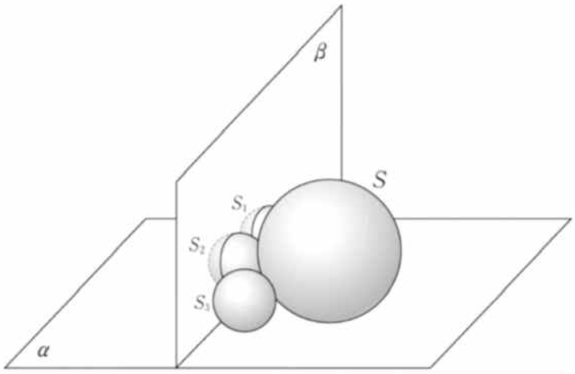
정답 | 정답은 **9** 입니다

③

그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 $S,\ S_1,\ S_2,\ S_3$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S 의 반지름의 길이는 3 이고, $S_1,\ S_2,\ S_3$ 의 반지름의 길이는 1 이다.
(나) $S_1,\ S_2,\ S_3$ 은 모두 S 에 접한다.
(다) S_1 은 S_2 와 접하고, S_2 는 S_3 과 접한다.

$S_1,\ S_2,\ S_3$ 의 중심을 각각 $\mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_2,\ \mathrm{O}_3$ 이라 하자. 두 점 $\mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_2$ 를 지나고 평면 α 에 수직인 평면을 β, 두 점 $\mathrm{O}_2,\ \mathrm{O}_3$ 을 지나고 평면 α 에 수직인 평면이 S_3 과 만나서 생기는 단면을 D 라 하자. 단면 D 의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



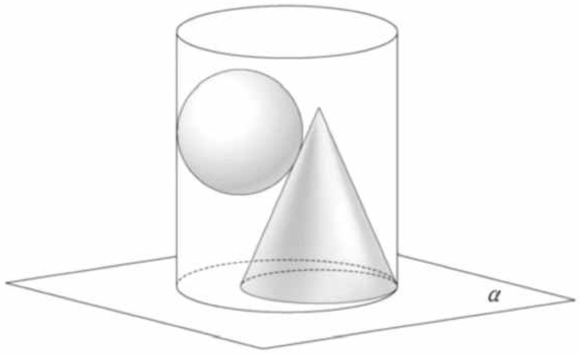
정답	정답은 **11** 입니다

4

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7 인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5 이고 높이가 12 인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α 와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A 라 하자. 중심이 B 이고 반지름의 길이가 4 인 구 S 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S 는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
(나) 두 점 A, B 의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A', B' 일 때, $\angle \mathrm{A}'\mathrm{OB}' = 180^\circ$ 이다.

직선 AB 와 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta = p$ 이다. $100p$ 의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A' 은 일치한다.)



정답 정답은 **32** 입니다