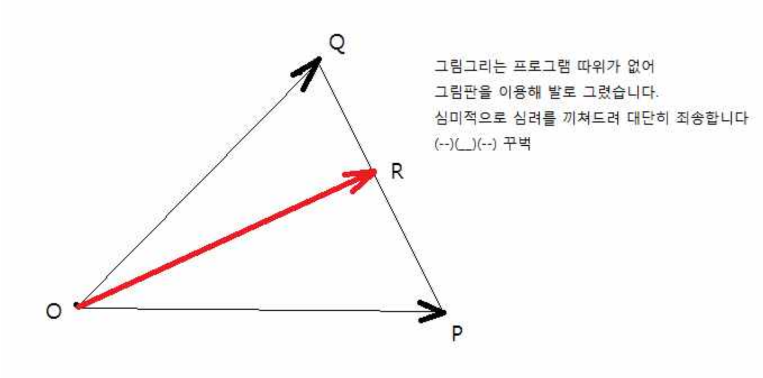
1번 해설

문제를 보고 느낀 점 : 진짜 이건 너무 당연한건데 왜 시발 증명을 못하겠지?? 어떻게 하는 거지?? 도대체 뭘 원하는 거지???......쩝 GG

두 가지 테크닉이 필요합니다.

❶ 점 P가 선분 AB 위를 움직인다면 $\overrightarrow{OP} = t\,\overrightarrow{OA} + (1-t)\,\overrightarrow{OB}$ $\quad (0 \le t \le 1)$
❷ x가 폐구간 $[a, b]$ 내부의 값이라면 $(x-a)(x-b) \le 0$



이에 착안하여 해 봅시다.

$\vec{r} = (1-t)\vec{p} + t\vec{q}$ 가 성립하고.

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \vec{a} \bullet \vec{r} \\ &= \vec{a} \bullet \{(1-t)\vec{p} + t\vec{q}\} \\ &= (1-t)\vec{a} \bullet \vec{p} + t\,\vec{a} \bullet \vec{q} \\ &= (1-t)f(\vec{p}) + f(\vec{q}) \end{aligned}$$

$$f(\vec{r}) - f(\vec{p}) = t\{f(\vec{q}) - f(\vec{p})\}$$

$$f(\vec{r}) - f(\vec{q}) = (1-t)\{f(\vec{p}) - f(\vec{q})\}$$

$$\begin{aligned} \therefore &\{f(\vec{r}) - f(\vec{p})\}\{f(\vec{r}) - f(\vec{q})\} \\ &= t(t-1)\{f(\vec{q}) - f(\vec{p})\}^2 \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

$0 \le t \le 1$ 에서 $t(t-1) \le 0$ 이므로 ①의 우변 역시 음수입니다.
이는 앞의 ❷번에 만족하므로 $f(\vec{r})$ 은 폐구간 $[f(\vec{p}), f(\vec{q})]$ 의 값을 취합니다.

2번 해설

문제를 보고 느낀점 : 쉬운 문제입니다. 머리 푸는겸

$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+.....+a_n\sin nx$ 이므로 이를 미분하면

$f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+....+na_n\cos nx$

$\therefore f'(0)=a_1+2a_2+....+na_n$

이렇게 나오죠. 따라서

$|a_1+2a_2+....+na_n| = f'(0)$

$=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|$

$=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(0)}{\sin x}\right|\left|\frac{\sin x}{x}\right|$

$=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\le 1$

※ 제가 이거 평균값의 정리로 푼 줄 알았는데 확인과정에서 오류가 있는 바람에 그냥 문제집에 나와있는 해설 올립니다.

3번 해설

$a < x < b$ 인 고정된 x에 대하여

$$\lambda = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}$$

$$\lambda(x-b) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\therefore f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \lambda(x-a)(x-b)$$

이고, 새로운 보조함수를 만들면

$h(t) = f(t) - \left\{ f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + \lambda(t-a)(t-b) \right\}$ 에서

$h(a) = h(x) = h(b)$ 가 됩니다.

구간 [a,x],[x,b] 에 각각 평균값정리를 적용하면 적당한 실수 α, β가 $a < \alpha < x < \beta < b$ 을 만족하고, $h'(\alpha) = h'(b) = 0$을 만족하죠.

$h'(t)$는 구간 $\alpha \le t \le \beta$에서 미분가능하고 연속이므로 다시 한 번 평균값의 정리를 적용하면 적당한 실수 ξ가 α와 β 사이에 존재하여 $h''(\xi) = 0$을 만족하고요.

$$h'(t) = f'(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \lambda\{(t-a)+(t-b)\}$$

$$h''(t) = f''(t) - 2\lambda$$

$$\therefore h''(\xi) = f''(\xi) - 2\lambda = 0 \qquad \therefore \lambda = \frac{1}{2}f''(\xi)$$

후아 타이핑 힘들군요. 이제 이 값을 맨 위 식에 넣으면 해결이 되죠.

처음 문제 봤을 때 평균값의 정리 쓰는거인거 알고 했는데도 결국 못 풀었습니다.
풀이 보면은 진짜 좀 깡패죠 -_-

4번 해설

4번은 전 손도 못 댄지라 그냥 닥치고 해설만 올립니다.

$G(t) = \{f(x)\}^2 - 2\int_0^t f(x)\,dx$ $(0 \le x \le 1)$ 이라고 하면

$G(0) = f(0) - 2 \cdot 0 = 0$ 이고

$G'(t) = 2f(t)f'(t) - 2f(t)$

$= 2f(t)\{f'(t) - 1\} \ge 0$

이다. $G(0) = 0$, $G'(t) \ge 0$에서

$G(t) \ge 0$, $f(t)G(t) \ge 0$ 이다.

$(\because f(0) = 0 , f'(t) \ge 1)$

$F(t) = \int_0^t \{f(x)\}^3\,dx - \left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^2$

$0 \le t \le 1$ 이라 하면, $F(0) = 0$ 이고

$F'(t) = \{f(t)\}^3 - 2f(t)\int_0^t f(x)dx$

$= f(t)[\{f(t)\}^2 - 2\int_0^t f(x)dx]$

$= f(t)G(t) \ge 0$

따라서 $F(t) \ge F(0) = 0$ 이므로

$\int_0^t \{f(x)\}^3\,dx \ge (\int_0^t f(x)\,dx)^2$, $0 \le t \le 1$

t=1 일 때 원래의 부등식을 만족한다.

아오 힘들군요. GG요