'94 본고사 대비 기출문제 시리즈 2°

頂上解說

연·고대 수학

편저자 · 홍범준

학력/진단/평가

머리말

근래에 들어서 여러 학생이나 일선 선생님들 사이에 '94학년도 입시부터 시행되는 새 대학 입시 제도에 대한 불안과 걱정의 소리가 높다. 특히, 변별력을 높이는 데 목적이 있는 대학별 고사의 경우에는 그 정도가 더욱 심하다.

대학별 고사의 여러 과목 중에서도 수학의 경우에는 수험생들 사이의 득점 편차가 가장 큰 과목으로 알려져 있다. 따라서 학생들은 수학 시험 준비에 골몰하지 않을 수 없다. 그러나 그 경향이나 실체를 접한 적이 없기 때문에 공부에 상당히 애를 먹고 있는 것이 현실이다.

이에 필자는 나름대로 과거에 시행된 본고사의 경향에 대한 철저한 분석이 있어야만 앞으로 부활되는 대학별 고사에 대비할 수 있지 않을까 생각하여, 기출 문제 분석 작업에 돌입했다. 그 결과 기출 문제의 난이도가 상당히 높으면서, 매 문제마다 담고 있는 내용이 수학적으로 깊이가 있어 그 어느 하나 소홀히 할 것이 없음을 깨달았다. 그리고 부활되는 대학별 고사에서도 수학만큼은 그 경향이나 골격이 과거와 별로 차이가 없을 것이라는 확신을 갖게 되었고 자연스레 과거의 문제들을 여러 학생들에게 알리고 싶어졌다.

그러나 기출 문제와 엉성하게 꾸민 답만 가지고는 결코 도움이 될 수 없겠기에 상세한 해설과 모범해답을 실은 본 시리즈를 기획하기에 이르렀다. 책을 지음에 있어서는 단순한 참고 자료를 펴내는 것이 아니라 엄선된 문제와 친절한 해설로 구성된 최상의 문제 해설서를 펴내는 마음 가짐으로 필자의 온 정성을 기울였다. 따라서, 이 책을 접하는 학생들도 대강 대강 훑지 말고, 꼼꼼히 여러 번 거듭해서 공부하기를 바란다. 그리고 그러한 노력의 결과로 입시에 성공한다면 필자로서는 더할 나위 없는 기쁨이겠다.

끝으로 이 책을 만드는 전 과정에서 수고해 준 학력/진단/평가 편집부의 조영옥씨, 조상기씨, 수학/스터디/그룹의 문준영 선생, 그리고 책의 산파역을 맡아주신 지학사의 이수랑 이사님께 진심으로 감사드린다.

1992, 겨울의 문턱에서

홍 범 준

목　　　차

●일●러●두●기●

■ 이 책의 구성과 특징

- 기출 문제를 해당 학년도별로 문제와 해설을 함께 실었다.
- 문제는 맞춤법 정도만 손질하고 원문 그대로 싣고, 문제의 첫머리에 실제의 수험 시간을 명시하였다.
- 다음은 각 문항의 해설과 풀이에 실린 내용을 설명한 것이다.

[배점] 연・고대 입시에서는 수험 당시에는 문항별 배점이 주어지지 않고, 채점하는 과정에서 배점이 정해진다. 본서에서는 비교적 정확한 배점을 입수하여 명시하였다. 그러나 일부는 자료를 구하지 못하여 필자가 배점을 추정한 것도 있음을 밝혀 둔다.

[출제분야] 일반수학>삼각함수>sine법칙, 제2cosine법칙

교과명 단원 소항목

과 같이 모든 문제의 출제분야를 3단계로 구분하였다.

[문제분석] 문제 해결의 원리와 접근 방식을 친절히 해설하였다.

[난이도] 모든 문제의 난이도는 9단계로 구분하여 표시하였다.

[모범해답] 만점을 획득할 수 있는 가장 모범적인 답안을 작성하였다. 그리고 그 옆에는 채점 기준을 명시하여 학생들이 푼 답안을 스스로 채점할 수 있게 하였다. 물론 이 채점 기준은 필자가 정한 것이므로 실제의 채점 기준과는 다소 다를 수 있다.

연구 여러 가지 [별해]와 함께, 수준있는 참고 내용을 실었다.

■ 이 책의 이용 방법

- 고1, 고2 학생 ⇨ p. 5～p. 8에 실려 있는 단원별 분류표를 참고하여 학교 진도에 해당하는 문제를 풀어 본다.
- 고3 학생과 재수생 ⇨ 매 학년도 단위로 실제 시험을 치르는 기분으로 풀고, 채점을 하여, 수 Ⅰ, 수 Ⅱ의 해설과 풀이 말미에 있는 [합격포인트]를 참고하여 자신의 실력을 진단해 본다.
- 본서는 단지 참고 자료용으로 만들어진 것이 아니다. 엄선된 문제와 상세한 해설로 구성된 문제 해설서이므로 반드시 두번, 세번 거듭해서 공부해야 한다.

단원별 분류표

연세대

연세대 입시요강에 따르면 일반수학 과정을 포함하여 문과 학생이 치르는 시험을 수학Ⅰ, 이과 학생이 치르는 시험을 수학Ⅱ라 하고 있다. 따라서 본서에서도 시험의 명칭을 문과·이과라 하지 않고, 수학Ⅰ과 수학Ⅱ라고 하여 문제를 수록했다.

다음 표는 본서에 수록된 모든 문제를 단원별로 분류한 것이다.

《약어 일람》

공 : 수학Ⅰ과 수학Ⅱ 시험에 공통으로 출제된 문제
문 : 수학Ⅰ 시험에 출제된 문제
이 : 수학Ⅱ 시험에 출제된 문제
* : 두 개 단원 이상의 내용이 융합되어 출제된 문제

■ 일반수학

학년도 / 단원	'80	'79	'78	'77	'76
Ⅰ. 집합과 명제	이7*		공1-(c)	문4	문4
Ⅱ. 수와 식		문1*	공1-(b)		문2*
Ⅲ. 방정식과 부등식		문4*	문3*		문1*, 문3
Ⅳ. 도형의 방정식	문7*, 이6*		문5		
Ⅴ. 함수		문1*, 문2*, 이1	공1-(a)*		이1*
Ⅵ. 지수함수와 로그함수	공2*	문2*	문3*, 이4*	문1, 이1	문2*, 이1*
Ⅶ. 삼각함수	공2*				문1*

■ '80학년도 7번 문제는 중학교 과정의 평면기하와 일반수학의 집합과 명제에서 출제되었다.

■ 수학 I

학년도 / 단원	'80	'79	'78	'77	'76
Ⅰ. 행렬					
Ⅱ. 수열	4	4*, 6*	4*	2*	
Ⅲ. 극한			1－(a)*, 4*	2*	5
Ⅳ. 미분	1, 5*	3	2*	3*	1*
Ⅴ. 적분	5*, 6	5	2*	3*	2*
Ⅵ. 확률 · 통계	3	6*	6	5	6

■ 수학 II

학년도 / 단원	'80	'79	'78	'77	'76
Ⅰ. 방정식과 부등식					
Ⅱ. 행렬과 일차변환					
Ⅲ. 수열	4	5*, 6*		2*, 3*	
Ⅳ. 삼각함수			5*	3*	
Ⅴ. 복소수		4	3*	3*	
Ⅵ. 타원과 쌍곡선	문7*	3		7	4
Ⅶ. 공간도형과 공간좌표				문6	
Ⅷ. 벡터	6*		3*		3
Ⅸ. 극한		2*	1－(a)*, 4*, 5*	2*, 4*	2
Ⅹ. 미분	1, 5*	2*	2*, 4*, 5*	4*	5
Ⅺ. 적분	5*	5*	2*	5	6
Ⅻ. 확률 · 통계	3	6*	6	6	7

※ 문6, 문7*로 표시된 문제는 출제 당시의 교과 과정으로는 문과 범위였으나 현재의 교과 과정으로는 수학 II 과정에 속하는 것임.

고려대

고려대 입시요강에 따르면 일반수학 과정을 포함하여 문과 학생이 치르는 시험을 수학Ⅰ, 이과 학생이 치르는 시험을 수학Ⅱ라 하고 있다. 따라서 본서에서도 시험의 명칭을 문과·이과라 하지 않고, 수학Ⅰ과 수학Ⅱ라고 하여 문제를 수록했다.

다음 표는 본서에 수록된 모든 문제를 단원별로 분류한 것이다.

《약어 일람》

공 : 수학Ⅰ과 수학Ⅱ 시험에 공통으로 출제된 문제
문 : 수학Ⅰ 시험에 출제된 문제
이 : 수학Ⅱ 시험에 출제된 문제
* : 두 개 단원 이상의 내용이 융합되어 출제된 문제

■ 일반수학

학년도 / 단원	'80	'79	'78	'77	'76
Ⅰ. 집합과 명제			문1*, 이1*		문1-(1), 이1-(1)
Ⅱ. 수와 식	공6*	문4*	이2	문1-(2)*	문2*, 이2*
Ⅲ. 방정식과 부등식	공1		문1*		문2*
Ⅳ. 도형의 방정식	문3		이3	문1-(3),(4), 이1-(3)	문1-(3), 이1-(4)
Ⅴ. 함수		문1, 문2(=이1)		문1-(1)*	문3*, 문2*
Ⅵ. 지수함수와 로그함수		문4*, 이7*	문2*	문2, 이2	문1-(2)
Ⅶ. 삼각함수	문2	문3, 이2*			

수학 I

단원 \ 학년도	'80	'79	'78	'77	'76
I. 행렬					
II. 수열	4	6*	2*, 3*		
III. 극한		6*		3	3*
IV. 미분	6*	7*	1*, 4	4*	4*
V. 적분	6*	7*		4*	4*
VI. 확률 · 통계	5	5	3*	1—(1)*	1—(4)

수학 II

단원 \ 학년도	'80	'79	'78	'77	'76
I. 방정식과 부등식			1*		2*
II. 행렬과 일차변환					
III. 수열	4	4*		3*	
IV. 삼각함수	2	2*		1—(1)	1—(3)
V. 복소수			4*	문1—(2)*	2*
VI. 타원과 쌍곡선					
VII. 공간도형과 공간좌표				문1—(5), 1—(5)	문1—(5), 1—(5)
VIII. 벡터	3	6	1*	1—(4)	2*, 3*
IX. 극한		4*		3*	3*
X. 미분	6*	5, 7*	1*	4*	1—(2)
XI. 적분	6*	7*	4*	4*	4
XII. 확률 · 통계	5	3		1—(2)	

※ 문1—(2)*, 문1—(5)로 표시된 문제는 출제 당시의 교과 과정으로는 문과 범위였으나 현재의 교과 과정으로는 수학 II 과정에 속하는 것임.

연세대학교 '94학년도 입시요강

■ 평가요소별 반영 비율 (%)

계열 \ 평가요소		내신성적	수학능력시험	대학별 고사	면접, 교직적성 및 인성검사	실기고사
일반계	인문 · 자연계열	40	30	30		
	예 · 체능계	40	10			50
사범대	인문 · 자연계열	40	20	30	10	
	예 · 체능계	40	30		10	20

※ 자연계열은 외국어(영어)영역에 가중치를 부여한다. 반영 비율은 추후 발표함.

■ 대학별 고사 내용

계열 \ 구분		고사과목 필수	고사과목 선택	비고
인문계	문과대(어문계열)	국어(논술 포함), 영어	제2외국어, 한문 중 택1	제2외국어 …중국어, 독일어, 불어 수학 Ⅰ은 일반수학 포함
	상경대, 법과대		수학, 제2외국어 중 택 1	
	교육과학대 (교육학과)		국사, 제2외국어, 수학 Ⅰ 중 택 1	
	상기 계열을 제외한 인문계열		국사, 제2외국어, 수학 Ⅰ, 한문 중 택 1	
자연계	이과대, 공과대	국어(논술 포함), 수학 Ⅱ	물리, 화학 중 택1	수학 Ⅱ는 일반수학 포함
	상기 계열을 제외한 인문계열		물리, 화학, 생물, 지구과학 중 택 1	

고려대학교 '94학년도 입시요강

■ 평가요소별 반영 비율 (%)

계열 \ 평가요소		내신성적	수학능력시험	대학별 고사	면접, 교직적성 및 인성검사	실기고사
일반계	인문·자연계열	40	20	40		
	예·체능계	40	30			30
사범대	인문·자연계열	40	20	30	10	
	예·체능계	40	30		10	20

※ 자연계열은 외국어(영어)영역에 가중치를 부여한다. 반영 비율은 추후 발표함.

■ 대학별 고사 내용

계열 \ 구분		고사과목		비 고
		필수	선택	
인문계	서울캠퍼스	국어(논술형), 영어	수학Ⅰ, 제2외국어, 한문 중 택1	제2외국어 …독일어, 불어, 중국어, 서반아어, 일어 수학Ⅰ은 일반수학 포함
	서창캠퍼스		수학Ⅰ, 제2외국어, 한문, 정치경제, 국사 중 택 1	
자연계		국어(논술형), 수학Ⅱ	물리, 화학, 생물, 지구과학 중 택 1	수학Ⅱ는 일반수학 포함

'80 연세대 수학 I $\left(\,^{100점}/_{60분}\right)$

1. (a) 모든 실수의 집합 R의 두 부분집합을 X, Y라 하자. X, Y를 각각 정의역과 공역으로 갖는 함수 $f(x)$의 x에 관한 도함수 $f'(x)$를 정의하라. (10점)

(b) 함수 $f(x)=|x-2|$의 도함수 $f'(x)$를 구하고, $f'(x)$의 치역과 그래프를 각각 집합 기호를 써서 표시하라. (10점)

2. 방정식 $\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}=1$을 만족하는 $\sin x$의 값을 구하라.

단, $0<x<\frac{\pi}{2}$이다. (10점)

3. 5개의 같은 공을 서로 다른 상자 A, B, C에 임의로 넣는 실험에서 꼭 한 개의 빈 상자가 생기는 경우를 성공이라 하자. (13점)

(a) 이 실험이 성공할 확률을 구하라.

(b) 이 실험을 여러 번 독립적으로 반복할 때 n번째 실험에서 처음으로 성공할 확률을 구하라.

4. 정수 N은 5진법으로 표시하였을 때 $2n+2$자리수로서 윗 자리로부터 $n+1$개의 1이 나열되고, 다음 자리부터 n개의 3이 나열되고, 끝자리에 4가 놓이는 수이다. N이 어떤 정수의 제곱임을 증명하라. (15점)

참고 $209=1\times5^3+3\times5^2+1\times5^1+4\times5^0$이므로, 5진법에 의하면, 정수 209는 $1314_{(5)}$로 표시되는 4자리 수이다.

5. (a) 반지름이 20cm, 높이가 5cm인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 반지름이 매초 2mm씩 감소하고, 높이가 매초 5mm씩 증가하면, 체적이 최대가 되는 시간은 몇 초 후가 되겠는가? (8점)

(b) 방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β일 때, 정적분

$$\mathrm{I}=3\int_{\beta}^{\alpha}(x^2-2x-1)dx$$

의 값을 구하라. 단, $\alpha<\beta$이다. (7점)

6. 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수를 $f(x)$라 하자. $f(x)$의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$와 부정적분 $\mathrm{F}(x)$ 사이의 관계식을 쓰고 증명하라. (15점)

7*. 집합 $\mathrm{S}=\{(x, y)\mid \mathrm{A}x^2+y^2+2\mathrm{B}x-2y+1=0\}$은 실수 A, B에 주어진 조건에 따라 좌표평면 위에서 여러 가지 종류의 도형을 나타낸다. 가능한 모든 경우를 엄밀하게 분석하고, 각 경우에 대해서 S가 나타내는 도형의 이름을 쓰라. (12점)

A, B에 주어진 조건	A=0, B=0						
S가 나타내는 도형	하나의 직선						

7* : 출제 당시의 교과 과정으로는 문과 범위였으나 현재의 교과 과정으로는 이과 범위(수학Ⅱ 과정)이다.

'80 연세대 수학 II (100점/60분)

1. (a) 모든 실수의 집합 R의 두 부분집합을 X, Y라 하자. X, Y를 각각 정의역과 공역으로 갖는 함수 $f(x)$의 x에 관한 도함수 $f'(x)$를 정의하라. (10점)

(b) 함수 $f(x)=|x-2|$의 도함수 $f'(x)$를 구하고, $f'(x)$의 치역과 그래프를 각각 집합 기호를 써서 표시하라. (10점)

2. 방정식 $\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}=1$을 만족하는 $\sin x$의 값을 구하라.

단, $0<x<\frac{\pi}{2}$이다. (10점)

3. 5개의 같은 공을 서로 다른 상자 A, B, C에 임의로 넣는 실험에서 꼭 한 개의 빈 상자가 생기는 경우를 성공이라 하자. (13점)

(a) 이 실험이 성공할 확률을 구하라.

(b) 이 실험을 여러 번 독립적으로 반복할 때 n번째 실험에서 처음으로 성공할 확률을 구하라.

4. 정수 N은 5진법으로 표시하였을 때 $2n+2$자리수로서 윗 자리로부터 $n+1$개의 1이 나열되고, 다음 자리부터 n개의 3이 나열되고, 끝자리에 4가 놓이는 수이다. N이 어떤 정수의 제곱임을 증명하라. (15점)

참고 $209=1\times5^3+3\times5^2+1\times5^1+4\times5^0$이므로, 5진법에 의하면, 정수 209는 $1314_{(5)}$로 표시되는 4자리 수이다.

5. (a) 방정식 $e^y+\log_e\cos x=1$에서 $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$을 구하라. (8점)

(b) 부정적분 $\mathrm{I}=\displaystyle\int\frac{x^3-x-2}{x^3-x^2+x-1}dx$를 구하라. (7점)

6. 복소평면 위에 원점과 다른 두 점 $\mathrm{P}(a+ib)$, $\mathrm{Q}(c+id)$가 있다. 점 P를 지나고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 직교하는 직선 l의 방정식과, 원점 O에서 l에 이르는 거리 d를 구하라. (15점)

7. $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AC}}$가 될 필요충분조건이 $\angle\mathrm{C}>\angle\mathrm{B}$임을 증명하라. (12점)

'80 연세대 수학 I 해설과 풀이

1. (a) 모든 실수의 집합 R의 두 부분집합을 X, Y라 하자. X, Y를 각각 정의역과 공역으로 갖는 함수 $f(x)$의 x에 관한 도함수 $f'(x)$를 정의하라.

(b) 함수 $f(x)=|x-2|$의 도함수 $f'(x)$를 구하고, $f'(x)$의 치역과 그래프를 각각 집합 기호를 써서 표시하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I, II 공통>미분>도함수의 정의, 도함수의 계산

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
				(b)		(a)		

[문제분석] 도함수는 함수의 일종이므로, 정의역과 공역 그리고 대응관계를 지정해야 도함수가 임의적으로 정의된다. 이 때, 도함수의 정의역은 미분가능한 점들의 모임임을 명심해야 한다.

모범해답 (a) $a\in X$일 때 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 하고, 이 극한값을 $f'(a)$로 나타낸다.

집합 X의 원 중에서 미분가능한 점 전체의 집합을 D라 할 때, D의 원소 x에 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$를 대응시키는 관계를 도함수라 한다. 즉,

⇦ 이것만 쓰면 5점

$$f'(x) : D \to R$$

$$x \to f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

(b) (i) $x\neq 2$일 때 ; $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|x-2+h|-|x-2|}{h}$

⇦ (i), (ii)로 나누어 풀지 않으면 −2점

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x-2+h)^2-(x-2)^2}{h\{|x-2+h|+|x-2|\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x-2)+h}{|x-2+h|+|x-2|}=\frac{x-2}{|x-2|}$$

$x>2$일 때 $f'(x)=1$, $x<2$일 때 $f'(x)=-1$

⇦ 여기까지가 5점

(ii) $x=2$일 때 ; $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-0}{h}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{|h|}{h}$

$$h>0 : \lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=1,\quad h<0 : \lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=-1$$

$\therefore$ $f'(2)$는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $f'(x)$의 치역은 $\{-1, 1\}$이고,

그래프는 $\{(x, 1)|x>2\}\cup\{(x, -1)|x<2\}$이다. ……답

2. 방정식 $\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}=1$을 만족하는 $\sin x$의 값을 구하라.

단, $0<x<\frac{\pi}{2}$이다.

[배　　점] 10점

[출제분야] 일반수학>지수 · 로그>log의 성질, log방정식
일반수학>삼각함수>삼각방정식

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] log에 관한 문제는 항상 밑을 통일시켜서 문제를 해결한다.

지수 · log의 대원칙 ⇨ 밑을 통일

이 때, 사용하는 공식은 다음과 같다.

$$c>0,\ c\neq1\text{일 때,}\quad \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

모범해답 준 식의 log의 밑을 10으로 통일하면

$$\frac{\log\cos x}{\log\sin x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\log\sin x-\log\cos x}{\log\cos x}=1$$

$$\therefore\ 2\cdot\frac{\log\cos x}{\log\sin x}+\frac{\log\sin x}{\log\cos x}=3$$

$\frac{\log\cos x}{\log\sin x}=t$라 하면 $2t+\frac{1}{t}=3$

$$\therefore\ 2t^2-3t+1=0$$

$$\therefore\ t=1 \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$

⇦ 여기까지가 4점

(i) $t=1$일 때 $\log\cos x=\log\sin x$

$\therefore\ \cos x=\sin x$　　$\therefore\ \tan x=1$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

⇦ 여기까지가 7점

(ii) $t=\frac{1}{2}$일 때 $\log\sin x=2\log\cos x$

$$\therefore\ \sin x=\cos^2 x=1-\sin^2 x$$

$$\therefore\ \sin^2 x+\sin x-1=0$$

$$\therefore\ \sin x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin x<1$이므로 $\sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

⇦ $\sin x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$도 답으로 하면 −2점

(i), (ii)에서 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ……답

3. 5개의 같은 공을 서로 다른 상자 A, B, C에 임의로 넣는 실험에서 꼭 한 개의 빈 상자가 생기는 경우를 성공이라 하자.

(a) 이 실험이 성공할 확률을 구하라.

(b) 이 실험을 여러 번 독립적으로 반복할 때 n번째 실험에서 처음으로 성공할 확률을 구하라.

[배　　점] 13점(8점+5점)

[출제분야] 수 I, II 공통>확률 · 통계>독립시행의 확률, 확률의 곱셈정리

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(b)				(a)			

[문제분석] A상자가 빈 상태에서 B, C상자에 적어도 하나의 공이 들어갈 확률을 계산한 다음, 3을 곱하여 계산($\because$ B나 C가 빌 경우도 마찬가지이므로)하면 된다.

모범해답 (a) 어떤 공이 A, B, C상자에 들어갈 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이므로,

A가 비고, B에 k개, C에 5−k개가 들어갈 확률은

$$_5C_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}=\frac{1}{3^5}\cdot {_5C_k}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

⇦ 여기까지가 4점

$\therefore$ 구하는 확률을 p라 하면,

$$p=3\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{3^5}\cdot {_5C_k}=\frac{1}{3^4}\cdot(5+10+10+5)=\frac{10}{27}\quad\cdots\cdots\text{답}$$

(b) 구하는 확률은 $n-1$번째까지는 성공하지 않고 n번째에 비로소 성공할 확률이다. 그런데, 매번의 실험은 독립이므로 확률의 곱셈정리에서 구하는 확률은 다음과 같다.

⇦ (a)에서 틀렸어도 풀이 형태가 맞으면 5점

$$\left(1-\frac{10}{27}\right)^{n-1}\cdot\frac{10}{27}=\frac{10}{27}\cdot\left(\frac{17}{27}\right)^{n-1}\quad\cdots\cdots\text{답}$$

연구 **1°** [별해] (a) 다섯 개의 공이 A에는 들어가지 않고 B, C에만 들어갈 확률은 $\frac{2^5}{3^5}$이다. 여기서 B에만 5개가 모두 들어가거나 C에만 모두 들어가는 경우를 제외한 확률은 $\frac{2^5-2}{3^5}$이다. 그런데, B나 C가 비는 경우도 마찬가지이므로 구하는 확률은

$$3\times\frac{2^5-2}{3^5}=\frac{10}{27}$$

2° 만일 문제에서 공의 개수가 m개라면, 어느 한 상자에 공이 들어갈 확률은 $\frac{1}{3}$이고 나머지 두 개의 상자에 각각 k개, $m-k$개가 들어갈 확률은

$$_mC_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m-k}=\frac{1}{3^m}\cdot {_mC_k}\ (k=1,2,\cdots,\ m-1)$$

$\therefore$ 구하는 확률은 $\mathrm{P}=3\cdot\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{3^m}\cdot {_mC_k}=\frac{1}{3^{m-1}}(2^m-2)\quad\left(\because\ \sum_{k=1}^{m-1}{_mC_k}=\sum_{k=0}^{m}{_mC_k}-{_mC_0}-{_mC_m}\right)$

4. 정수 N은 5진법으로 표시하였을 때 $2n+2$자리수로서 윗 자리로부터 $n+1$개의 1이 나열되고, 다음 자리부터 n개의 3이 나열되고, 끝자리에 4가 놓이는 수이다. N이 어떤 정수의 제곱임을 증명하라.

(참고) $209=1\times5^3+3\times5^2+1\times5^1+4\times5^0$이므로, 5진법에 의하면, 정수 209는 $1314_{(5)}$로 표시되는 4자리 수이다.

[배 점] 15점

[출제분야] 수Ⅰ, Ⅱ 공통>수열>등비수열의 합

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 5진법을 10진법으로 바꾸는 다음 요령과 등비수열의 합의 공식을 익히고 있는 학생이면 누구나 쉽게 풀 수 있다.

$$abc_{(5)}=a\times5^2+b\times5^1+c\times5^0$$

모범해답 $N=\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n+1\text{개}}\underbrace{33\cdots\cdots3}_{n\text{개}}4_{(5)}$

$$=5^{2n+1}+5^{2n}+\cdots+5^{n+1}+3(5^n+5^{n-1}+\cdots+5^1)+4$$

⇦ 지수가 틀리면 −3점

$$=5^{n+1}\times\frac{5^{n+1}-1}{5-1}+3\times\frac{5(5^n-1)}{5-1}+4$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(5^{n+1})^2+2\cdot5^{n+1}+1\right\}$$

$$=\left(\frac{5^{n+1}+1}{2}\right)^2$$

⇦ 여기까지가 10점

홀수의 거듭제곱은 홀수이므로 5^{n+1}은 홀수이다.

$\therefore$ $5^{n+1}+1$은 짝수

$\therefore$ N은 정수 $\dfrac{5^{n+1}+1}{2}$의 제곱이다.

연구 홀수의 거듭제곱이 홀수임을 증명해 보자.

(증명) 홀수 $m=2a+1$ (a는 정수)에 대하여 m^n(n은 자연수)을 계산하면,

$$m^n=(2a+1)^n={}_nC_0(2a)^n+{}_nC_1(2a)^{n-1}+{}_nC_2(2a)^{n-2}+\cdots+{}_nC_{n-1}(2a)+{}_nC_n$$

밑줄 친 부분은 각 항이 2를 인수로 가지므로 2의 배수이고 ${}_nC_n=1$이므로 m^n은 (2의 배수)+1꼴이다.

따라서 (홀수)^{n}은 홀수이다. (증명 끝)

그러나 직관적으로 너무나 자명한 '(홀수)^n=홀수'와 같은 내용을 엄밀히 증명하는 것은 매우 어리석은 짓이다.

어떤 문제에서건 문제가 서술을 요구하는 만큼만 논리적으로 서술해야 좋은 답안이 됨을 명심할 것! 비약도 금물이지만 지나치게 횡설수설하는 것도 마이너스이다.

5. (a) 반지름이 20cm, 높이가 5cm인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 반지름이 매초 2mm씩 감소하고, 높이가 매초 5mm씩 증가하면, 체적이 최대가 되는 시간은 몇 초 후가 되겠는가?

(b) 방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β일 때, 정적분

$$\mathrm{I}=3\int_{\beta}^{\alpha}(x^2-2x-1)dx$$

의 값을 구하라. 단, $\alpha<\beta$이다.

[배 점] 15점(8점+7점)

[출제분야] 수 I >미분>최대 · 최소의 응용
수 I >적분>정적분의 계산

[난 이 도]

기본	표준	어려움
	(b) (a)	

[문제분석] (a) 원기둥의 반지름이 매초 2mm씩 감소하므로 t초 후의 반지름은 $200-2t$(mm)이다. 또, 높이가 매초 5mm씩 증가하므로 t초 후의 높이는 $50+5t$(mm)이다. 이를 이용하면 체적은 시각 t의 함수로 표시된다. 미분법을 이용하면 이 함수식이 최대가 되는 시각을 구할 수 있다.

(b) $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, $\beta \iff x^2-2x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\therefore \int_{\alpha}^{\beta}(x^2-2x-1)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \qquad \cdots\cdots(*)$$

이 때 두 근의 차 $\beta-\alpha$는 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$에서 근과 계수와의 관계를 이용하면 된다.

그러나 주관식의 경우 공식 (*)를 이용한 풀이는 환영할 만한 것이 못된다. 따라서 연구에 제시된 공식 (*)의 증명법을 이용한 방법이나 모범해답의 방법으로 푸는 것이 좋다.

모범해답 (a) 단위를 mm로 통일하면 t초 후의 반지름은 $200-2t$, 높이는 $50+5t$이다.

그런데 $t\geqq0$, $200-2t>0$, $50+5t\geqq0$에서 $0\leqq t<100$

⇦ 제한변역을 구하지 않았으면 −2점

t초 후의 체적을 V라 하면

$$\mathrm{V}=\pi(200-2t)^2\cdot(50+5t)$$

$$=20\pi(t-100)^2\cdot(t+10) \quad (0\leqq t<100)$$

$$\therefore \frac{dv}{dt}=20\pi\{2(t-100)(t+10)+(t-100)^2\}$$

$$=20\pi(t-100)(3t-80)$$

$0\leqq t<100$의 범위에서 증감표를 작성하면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{80}{3}$	$\cdots$	(100)
$\frac{dv}{dt}$		+	0	−	
V		↗	최대	↘	

⇦ 증감을 조사하지 않으면 −2점

$\therefore\ t=\frac{80}{3}$에서 V는 최대이다.

답 $\frac{80}{3}$초 후

(b) $\mathrm{I}=3\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-x\right]_\alpha^\beta=(\beta^3-\alpha^3)-3(\beta^2-\alpha^2)-3(\beta-\alpha)$

$=(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-3(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)-3(\beta-\alpha)$

$=(\beta-\alpha)[\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-3(\alpha+\beta)-3]$

한편, α, β는 $x^2-2x-1=0$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

또, $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=8$에서 $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$ ($\because\ \beta>\alpha$)

⇦ 여기서 $\pm2\sqrt{2}$로 쓰면 −2점

$\therefore\ \mathrm{I}=2\sqrt{2}\{2^2-(-1)-3\cdot2-3\}=-8\sqrt{2}$ ……답

연구 *1°* [별해] (b) $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$$x^2-2x-1=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

$$\therefore\ \mathrm{I}=3\int_\alpha^\beta(x^2-2x-1)dx=3\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$

$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$

$$=(\beta^3-\alpha^3)-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+3\alpha\beta(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

한편 $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$이므로 $\mathrm{I}=-\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^3=-8\sqrt{2}$ ……답

2° $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^n(x-\beta)dx=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}(\beta-\alpha)^{n+2}$

(증명) $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^n(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^n\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}dx$

$$=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^{n+1}+(\alpha-\beta)(x-\alpha)^n\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{n+2}(x-\alpha)^{n+2}+\frac{1}{n+1}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^{n+1}\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{1}{n+2}(\beta-\alpha)^{n+2}+\frac{1}{n+1}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^{n+1}$$

$$=\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)(\beta-\alpha)^{n+2}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}(\beta-\alpha)^{n+2}$$ (증명 끝)

※ 이 공식에 $n=1$을 대입하면

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

을 얻는다.

6. 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수를 $f(x)$라 하자. $f(x)$의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$와 부정적분 $F(x)$ 사이의 관계식을 쓰고 증명하라.

[배 점] 15점

[출제분야] 수 I >적분>정적분과 부정적분 사이의 관계

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] $f(x)$의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$와 부정적분 $F(x)$ 사이의 관계

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx=F(b)-F(a)}$$

의 증명의 골자는

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \boldsymbol{f(t)dt=f(x)} \quad \cdots\cdots(*)$$

에 있다.

(*)에서 $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$

$\therefore$ $x=a$이면 $\int_a^a f(t)dt=0$이므로 $0=F(a)+C$ $\therefore$ $C=-F(a)$

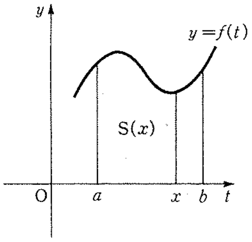
$\therefore$ $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$ $\therefore$ $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

와 같이 증명한다. 즉, (*)를 출발점으로 하면 매우 쉬운 문제가 됨을 알 수 있다. 그러나 (*)자체를 증명하지 않으면 이 문제의 의도를 벗어나는 것이 된다. (*)의 증명은 모든 교과서에 언급이 되어 있음에도 불구하고 거의 모든 학생들이 그 증명을 익히고 있지 않음은 본고사의 성질을 잘 파악하지 못하는 데서 기인한 것이라 판단된다. 교과서 내의 모든 증명을 익히는 것이 무엇보다 중요함을 명심할 것!

$\boxed{\text{모범해답}}$ (i) 관계식 ; $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ ⇦ 이것만 쓰면 6점

(ii) 정적분의 정의를 면적함수에 의해서 행하기로 한다.

함수 $y=f(t)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 직선 $t=a$, $t=x(a \leqq x \leqq b)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(x)$라 하면,



$$S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라 하면

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

㉠ $\Delta x>0$일 때 ; ΔS는 구간 $[x, x+\Delta x]$에서 곡선 $y=f(t)$와 t축

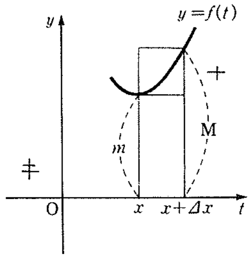
사이에 있는 부분의 면적이다.

$[x, x+\Delta x]$에서 $f(t)$의 최대값을 M, 최소값을 m이라 하면

$m\cdot\Delta x \leqq \Delta S \leqq M\cdot\Delta x$ ……①

㉡ $\Delta x<0$일 때 ; 마찬가지로 하면

$M\cdot\Delta x \leqq \Delta S \leqq m\cdot\Delta x$ ……②



①, ②의 어느 경우에나 부등식의 양변을 Δx로 나누면

$$m \leqq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqq M \qquad \cdots\cdots③$$

$\Delta x \to 0$이면 $m \to f(x)$, $M \to f(x)$이므로 ③에서 $\Delta x \to 0$일 때의 극한값을 취하면

$$f(x) \leqq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} \leqq f(x) \qquad \therefore\ \frac{dS}{dx}=f(x)$$

⇦ 여기까지의 과정을 생략하면 −8점

따라서 $S(x)$는 $f(x)$의 부정적분이다.

$$\therefore\ S(x)=F(x)+C \qquad \therefore\ \int_a^x f(t)dt=F(x)+C$$

여기서 $x=a$라 하면 $\int_a^a f(t)dt=0$이므로 $F(a)+C=0$

$$\therefore\ C=-F(a) \qquad \therefore\ \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

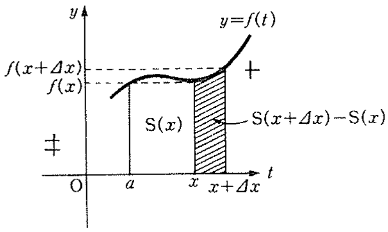
여기서 $x=b$라 하면 $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ (증명 끝)

연구 [별해] $S'(x)=f(x)$가 됨을 다음과 같이 증명할 수도 있다.

$S(x)=\int_a^x f(t)dt$라 하면

$$S(x+\Delta x)-S(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Delta x\cdot f(x+k\Delta x)\ (0<k<1)$$



인 k가 적어도 하나 존재한다. 따라서

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x+k\Delta x)=f(x)$$

$$\therefore\ S'(x)=f(x)$$

따라서 $S(x)$는 $f(x)$의 부정적분이다.

※ 이 별해와 같이 풀면 실은 곤란한 점이 발생한다. 왜냐하면

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

를 이용해야 하는데, 이것의 증명은

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

를 이용하기 때문이다. 이것은 결국 순환논법에 빠진 것으로 볼 수 있다. 따라서 모범해답과 같이 증명하는 것이 좋다.

7. 집합 $S=\{(x,\ y)\,|\,Ax^2+y^2+2Bx-2y+1=0\}$은 실수 A, B에 주어진 조건에 따라 좌표평면 위에서 여러 가지 종류의 도형을 나타낸다. 가능한 모든 경우를 엄밀하게 분석하고, 각 경우에 대해서 S가 나타내는 도형의 이름을 쓰라.

A, B에 주어진 조건	A=0, B=0						
S가 나타내는 도형	하나의 직선						

[배　　점] 12점

[출제분야] 일반수학>도형의 방정식>직선, 포물선, 원
수 Ⅱ >도형의 방정식>타원, 쌍곡선

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 현 교과 과정에서 타원, 쌍곡선은 이과 문제이다. 이차곡선의 방정식의 특징을 제대로 이해하고 있어야 해결할 수 있다.

모범해답 $Ax^2+y^2+2Bx-2y+1=0$에서 $Ax^2+2Bx+(y-1)^2=0$

(Case 1) A=0일 때 ; $2Bx=-(y-1)^2$

(i) B=0이면, $(y-1)^2=0$에서 $y=1$인 직선

(ii) $B\neq0$이면, $2Bx=-(y-1)^2$인 포물선

(Case 2) $A\neq0$, B=0일 때 ; $Ax^2+(y-1)^2=0$

(i) A>0이면 점(0, 1)

(ii) A<0이면 $y-1=\pm\sqrt{-A}\,x$ ∴ 즉, 직선 $y=\pm\sqrt{-A}\,x+1$

(Case 3) $A\neq0$, $B\neq0$일 때 ; 주어진 방정식에서

$$A\left(x+\frac{B}{A}\right)^2+(y-1)^2=\frac{B^2}{A}$$

(i) A=1이면 원　　(ii) $0<A\neq1$이면 타원

(iii) A<0이면 쌍곡선

A, B에 주어진 조건	A=0, B=0	A=0, $B\neq0$	A>0, B=0	A<0, B=0	$0<A\neq1$ $B\neq0$	A=1, $B\neq0$	A<0, $B\neq0$
S가 나타내는 도형	하나의 직선	포물선	하나의 점	두 직선	타원	원	쌍곡선

⇐ A>0이면 $Ax^2\geq0$
$(y-1)^2\geq0$
∴ $Ax^2+(y-1)^2=0$
$\Leftrightarrow Ax^2=(y-1)^2=0$
∴ $x=0,\ y=1$
∴ 점 (0, 1)

합격포인트 *7*번은 수Ⅱ 과정이므로 제외하고, *1*의 (b)와 *2*, *3*, *4*, *5*를 풀어서 55점 정도면 합격 가능하다. 수학이 주 득점원인 학생은 *1*의 (a)나 *6*번에서 다소의 점수를 얻어서 63점 정도면 성공.

'80 연세대 수학 Ⅱ 해설과 풀이

1~4. 수학 Ⅰ의 1~4와 같다.

---

5. (a) 방정식 $e^{y}+\log_{e}\cos x=1$에서 $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$을 구하라.

(b) 부정적분 $\mathrm{I}=\displaystyle\int\frac{x^3-x-2}{x^3-x^2+x-1}dx$를 구하라.

[배　　점] 15점(8점+7점)

[출제분야] 수Ⅱ>미분>초월함수의 미분, 음함수의 미분법

수Ⅱ>적분>부정적분의 계산

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(a)	(b)	

[문제분석] (a)는 초월함수의 미분법과 음함수의 미분법을 묻는 초보적인 것이다.

(b)는 분모와 분자의 차수가 같으므로 우선,

$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ (A의 차수≧B의 차수) ⇨ A를 B로 나누어 몫 Q와 나머지 R을 구하여

⇨ $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{BQ+R}}{\mathrm{B}}=\mathrm{Q}+\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}}$로 고친다.

의 요령에 따라 분자의 차수를 낮추면

$$\frac{x^3-x-2}{x^3-x^2+x-1}=1+\frac{x^2-2x-1}{x^3-x^2+x-1}=1+\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$$

여기서

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+1}$$

로 두고 이 등식이 항등식이 될 A, B, C의 값을 구해서 적분해야 한다. 약간의 계산력이 요구되는 문제라 할 수 있다.

모범해답 (a) $e^{y}+\log_{e}\cos x=1$의 양변을 x에 관해서 미분하면

$$e^{y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{-\sin x}{\cos x}=0$$

$$\therefore\ e^{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\tan x$$

$e^{y}>0$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}\cdot\tan x$ ……답

⇐ 여기까지가 2점
$e^{y}>0$임을 언급하지 않으면 −1점

이것의 양변을 다시 x에 관해서 미분하면

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-e^{-y}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\tan x+e^{-y}\cdot\sec^2 x$$

$$=-e^{-y}(e^{-y}\tan x)\tan x+e^{-y}\cdot\sec^2 x$$

$$=-e^{-2y}\tan^2 x+e^{-y}\sec^2 x \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ 주어진 식에서 $e^y=1-\log_e\cos x$ 이므로, 이것을 대입하여 답으로 써도 좋지만 식이 복잡해진다. 준 식이 음함수 형식이므로 구태여 고칠 필요는 없다.

(b) $\dfrac{x^3-x-2}{x^3-x^2+x-1}=1+\dfrac{x^2-2x-1}{x^3-x^2+x-1}=1+\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+1}$$

로 두고 양변에 $(x-1)(x^2+1)$을 곱하면,

$$x^2-2x-1=\mathrm{A}(x^2+1)+(\mathrm{B}x+\mathrm{C})(x-1)$$

이것이 항등식이 될 조건은 양변에서 x^2항, x항, 상수항의 계수가 같아야 하므로,

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=1,\quad \mathrm{C}-\mathrm{B}=-2,\quad \mathrm{A}-\mathrm{C}=-1$$

이것을 연립하여 풀면

$$\mathrm{A}=-1,\quad \mathrm{B}=2,\quad \mathrm{C}=0$$

$$\therefore\ \frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\therefore\ \mathrm{I}=\int\frac{x^3-x-2}{x^3-x^2+x-1}dx$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=x-\ln|x-1|+\ln(x^2+1)+\mathrm{C}$$

⇦ 절대값으로 표시하지 않으면 −2점

$$=x+\ln\frac{(x^2+1)}{|x-1|}+\mathrm{C}\quad (\text{단, C는 적분상수})\quad \cdots\cdots \text{답}$$

연구 [별해] (b)의 후반부 과정 $\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+\mathrm{C}$에서

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+\mathrm{C}$$

를 이용하였다.

그런데, 위와 모양이 비슷한 다음 예의 경우에는 어떻게 풀까?

예 $\mathrm{I}=\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx$를 구하여라.

(해설) $\mathrm{I}=\underbrace{\int\frac{3x}{x^2+1}dx}_{\mathrm{A}}+\underbrace{\int\frac{1}{x^2+1}dx}_{\mathrm{B}}$

A부분은 계수만 조절하면 위 공식을 적용할 수 있다. B부분이 문제인데, $x=\tan\theta$로 치환하여 풀면

$$\mathrm{B}=\int\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int 1\,d\theta$$

$$=\theta+\mathrm{C}$$

그러나, 문제의 문자로 답을 써야 하므로, $x=\tan\theta$에서 $\theta=\tan^{-1}x$와 같이 $\tan^{-1}$가 등장한다. 따라서 이런 형태는 교과 과정에서 피하는 경향이 있다.

6. 복소평면 위에 원점과 다른 두 점 P$(a+ib)$, Q$(c+id)$가 있다. 점 P를 지나고 벡터 $\overline{\text{PQ}}$와 직교하는 직선 l의 방정식과, 원점 O에서 l에 이르는 거리 d를 구하라.

[배　　점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ＞벡터＞벡터의 성분과 내적
일반수학＞도형의 방정식＞점과 직선 사이의 거리, 자취문제

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 직선 l의 방정식을 구하기 위해서는 자취 문제를 푸는 다음 순서에 따라야 한다.

(i) 구하는 자취 위의 점을 (x, y)로 둔다.
(ii) 주어진 조건을 써서 x, y 사이의 관계식을 구한다.
(iii) 변역에 주의한다.

이 문제에서는 과정 (ii)에서 사용할 조건으로 벡터 $\overrightarrow{\text{PQ}}$와 직선 l의 직교조건이 있다.

벡터의 직교 ⇨ 내적이 0

의 요령에 따라, l 위의 점을 X$(x+iy)$라 하면

$$\overrightarrow{\text{PQ}}\cdot\overrightarrow{\text{PX}}=0$$

이것을 써서 x, y 사이의 관계식을 구하면 된다. 문제 후반부의 점과 직선 사이의 거리는 다음 공식을 이용한다.

점(x_0, y_0)에서 직선 $ax+by+c=0$까지의 거리

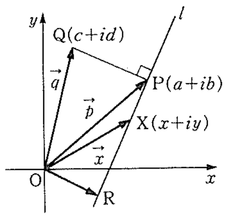
$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

모범해답 직선 l 위의 임의의 점을 X, $\overrightarrow{\text{OX}}=\vec{x}$, $\overrightarrow{\text{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\text{OQ}}=\vec{q}$라 하면

$$\overrightarrow{\text{PX}}=\overrightarrow{\text{OX}}-\overrightarrow{\text{OP}}=\vec{x}-\vec{p}$$

는 $\overrightarrow{\text{PQ}}=\vec{q}-\vec{p}$와 직교하므로

$$(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0 \quad \cdots\cdots(*)$$



그런데,

$$\vec{q}-\vec{p}=(c,\ d)-(a,\ b)=(c-a,\ d-b)$$

이고 $\vec{x}=(x, y)$라 할 때,

$$\vec{x}-\vec{p}=(x,\ y)-(a,\ b)=(x-a,\ y-b)$$

이므로 (*)에서

$$(c-a,\ d-b)\cdot(x-a,\ y-b)=0$$

$$\therefore\ (c-a)(x-a)+(d-b)(y-b)=0$$

$$\therefore\ (c-a)x+(d-b)y+a^2+b^2-ac-bd=0 \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ 여기까지가 10점

따라서, 원점 $(0, 0)$에서 직선 l까지의 거리 d는

$$d=\frac{|a^2+b^2-ac-bd|}{\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

7. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}>\overline{AC}$가 될 필요충분조건이 $\angle C>\angle B$임을 증명하라.

[배 점] 12점

[출제분야] 중학>평면기하>공리체계

일반수학>집합과 명제>필요충분조건

[난 이 도]

기본	표준	어려움

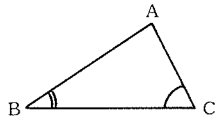
[문제분석] 필요충분조건임을 보이려면 다음 두 가지 내용을 증명해야 한다.

(i) $\overline{AB}>\overline{AC}$이 될 필요조건이 $\angle C>\angle B$

$\Leftrightarrow$ $\overline{AB}>\overline{AC} \Rightarrow \angle C>\angle B$

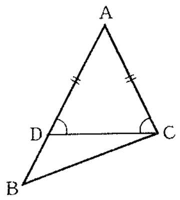
(ii) $\overline{AB}>\overline{AC}$이 될 충분조건이 $\angle C>\angle B$

$\Leftrightarrow$ $\angle C>\angle B \Rightarrow \overline{AB}>\overline{AC}$



이 내용과 함께 중학교 과정의 평면기하의 공리체계에 익숙해야 풀 수 있다. 그리고 충분조건임을 증명하는 과정에서는 필요조건에서 얻은 결과와 함께 귀류법에 착안해야 논리적인 답안 작성이 가능하다.

모범해답 (i) 필요조건 ; $\overline{AB}>\overline{AC}$이면 변 AB 위에 $\overline{AD}=\overline{AC}$인 점 D를 잡을 수 있다.



이 때, $\triangle ACD$는 이등변삼각형이므로

$\angle ADC=\angle ACD$

한편,

$\angle ADC=\angle DCB+\angle B$

$$\begin{aligned}\therefore\ \angle C&=\angle ACD+\angle DCB\\&=\angle ADC+\angle DCB\\&=(\angle DCB+\angle B)+\angle DCB\\&=2\angle DCB+\angle B\end{aligned}$$

$\therefore$ $\angle DCB>0$에서 $\angle C>\angle B$ ⇦ 여기까지가 10점

(ii) 충분조건 ; (i)의 결과를 거듭 사용하면,

$\overline{AB}>\overline{AC}$이면 $\angle C>\angle B$ ……①

$\overline{AB}<\overline{AC}$이면 $\angle C<\angle B$ ……②

을 얻는다.

한편, $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이 되므로 $\angle C=\angle B$

즉, $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle C=\angle B$ ……③

$\angle C>\angle B$일 때, $\overline{AB}\leqq\overline{AC}$라 가정하자. 그러면 ②, ③에서 $\angle C\leqq\angle B$를 얻는다. 이것은 조건 $\angle C>\angle B$에 모순이다.

$\therefore$ $\angle C>\angle B$이면 $\overline{AB}>\overline{AC}$

(i), (ii)에서 $\overline{AB}>\overline{AC}$가 될 필요충분조건은 $\angle C>\angle B$이다. (증명 끝)

합격포인트 *1*의 (a)와 *7*번의 충분조건의 증명을 제외한 나머지 문제를 거의 모두 풀어야 한다. 최소한 68점은 획득해야 합격 가능하다. 수학이 주 득점원인 학생은 *1*의 (a)나 *7*번의 전반부에서 점수를 얻어서 78점 정도면 성공.

'80 고려대 수학 I $\left(\text{100점}/\text{60분}\right)$

1. 다음을 풀이하여라. (20점)

(1) $X+Y=A$일 때, X^2+Y^2과 $\frac{A^2}{2}$과의 대소를 판정하여라.

(2) $x+y+z+u=a$일 때, $x^2+y^2+z^2+u^2$과 $\frac{a^2}{4}$과의 대소를 판정하여라.

2. $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$일 때, (15점)

(1) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$의 값의 범위를 구하여라.

(2) 함수 $y=7-4\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$의 최대값, 최소값을 구하고, 또 이 때의 θ의 값을 각각 구하여라.

3. 점 $A(2, 1)$을 지나는 직선이 포물선 $y^2=x$와 원점 O 이외의 두 점 P, Q에서 만나고, $\angle POQ$가 직각일 때, 직선 PQ의 방정식을 구하여라. (15점)

4. 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=40,\quad a_{n+1}-a_n=an+b\ (n=1,\ 2,\cdots)$$

일 때 (단, a는 양의 정수, b는 정수) (15점)

(1) a_n을 a, b, n으로 표시하여라.

(2) $a_5>0$, $a_6<0$되게 하는 a, b의 값을 구하여라.

(3) 위의 (2)에서 구한 a, b에 대하여 $a_n<0$인 모든 a_n의 합을 구하여라.

5. 세 번 중에 한 번의 비율로 모자를 잃어버리는 버릇이 있는 사람이 차례로 A, B, C의 세 집을 방문하고 돌아왔을 때, (15점)

(1) 모자를 잃어버리지 않고 돌아왔을 확률을 구하여라.

(2) 모자를 잃어버리고 돌아왔을 때, 그 모자를 C의 집에서 잃어버렸을 확률을 구하여라.

6. $f(x)=2x^3+ax^2+bx\ (a>0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 3)$을 지나고, $f(x)$가 극대가 되게 하는 x의 값과 극소가 되게 하는 x의 값의 차가 $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$일 때, (20점)

(1) a, b의 값을 구하여라.

(2) 위의 (1)에서 얻은 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

'80 고려대 수학 Ⅱ ($^{100점}/_{60분}$)

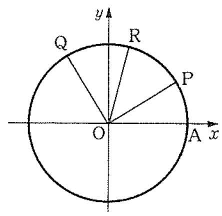
1. 다음을 풀이하여라. (20점)

(1) $X+Y=A$일 때, X^2+Y^2과 $\frac{A^2}{2}$과의 대소를 판정하여라.

(2) $x+y+z+u=a$일 때, $x^2+y^2+z^2+u^2$과 $\frac{a^2}{4}$과의 대소를 판정하여라.

2. $y=2\cos x-3\sin x$의 값을 최대로 하는 x에 대하여 $\tan x$의 값을 구하여라.
(15점)

3. 단위원 $x^2+y^2=1$과 x축과의 교점을 A라 하고, 점 P, Q를 $\angle AOP=\alpha$, $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$되게 잡을 때 (15점)



(1) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$의 성분을 α를 써서 나타내어라.

(2) 단위원 위의 임의의 점을 R이라 하고, $\angle POR=\beta$라 할 때, $\overrightarrow{OR}$을 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$로 나타내어라.

(3) 위의 (1), (2)를 이용하여, 사인, 코사인에 대한 덧셈정리를 각각 증명하여라.

4. 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=40,\quad a_{n+1}-a_n=an+b\ (n=1,\ 2,\cdots)$$

일 때 (단, a는 양의 정수, b는 정수) (15점)

(1) a_n을 a, b, n으로 표시하여라.

(2) $a_5>0$, $a_6<0$되게 하는 a, b의 값을 구하여라.

(3) 위의 (2)에서 구한 a, b에 대하여 $a_n<0$인 모든 a_n의 합을 구하여라.

5. 세 번 중에 한 번의 비율로 모자를 잃어버리는 버릇이 있는 사람이 차례로 A, B, C 의 세 집을 방문하고 돌아왔을 때, (15점)

(1) 모자를 잃어버리지 않고 돌아왔을 확률을 구하여라.

(2) 모자를 잃어버리고 돌아왔을 때, 그 모자를 C의 집에서 잃어버렸을 확률을 구하여라.

6. 곡선 $y=a\log x-1$ (단, $a>0$)에 대하여 다음 물음에 답하여라. (20점)

(1) 원점에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 이 곡선과 (1)에서 얻은 접선과 x축으로 둘러싸인 부분의 면적 S를 구하여라.

(3) 위의 S가 최소가 되게 하는 a의 값을 구하여라.

'80고려대 수학 I 해설과 풀이

1. 다음을 풀이하여라.

(1) $X+Y=A$일 때, X^2+Y^2과 $\dfrac{A^2}{2}$과의 대소를 판정하여라.

(2) $x+y+z+u=a$일 때, $x^2+y^2+z^2+u^2$과 $\dfrac{a^2}{4}$과의 대소를 판정하여라.

[배 점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 일반수학>방정식과 부등식>대소의 판정, 절대부등식

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(1)	(2)	

[문제분석] 대소를 비교하는 문제로서

두 수 A, B의 대소 ⇨ 일단, A−B의 부호를 조사한다.

의 요령을 알아야 한다. 하지만 답안 작성시에 등호의 포함 여부와 등호가 될 때의 조건을 명시하지 않으면 감점 당하기 쉽다.

그리고 (1), (2)번으로 주어진 문제는 서로 연관성이 있을 경우가 많음을 명심하라.

모범해답 (1) $X^2+Y^2-\dfrac{A^2}{2}=X^2+Y^2-\dfrac{1}{2}(X+Y)^2$

$$=\frac{1}{2}(X^2-2XY+Y^2)$$

$$=\frac{1}{2}(X-Y)^2\geqq 0$$

$\therefore\ X^2+Y^2\geqq\dfrac{A^2}{2}$ (단, 등호는 $X=Y$일 때 성립) ……답

⇦ 등호를 붙이지 않으면 −3점, 등호가 성립하는 경우를 명시하지 않으면 −2점

(2) $x+y=p,\ z+u=q$ …(*)라 하면, (1)로 부터

$x^2+y^2\geqq\dfrac{p^2}{2}$ ……① $\qquad z^2+u^2\geqq\dfrac{q^2}{2}$ ……②

①+② ; $x^2+y^2+z^2+u^2\geqq\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q^2}{2}$

한편, $p+q=a$이므로 (1)로 부터 $p^2+q^2\geqq\dfrac{a^2}{2}$ ……③

$\therefore\ x^2+y^2+z^2+u^2\geqq\dfrac{a^2}{4}$

⇦ 등호를 붙이지 않으면 −3점

①, ②, ③이 모두 등호가 성립할 때를 구하면 $x=y,\ z=u,\ p=q$

이것과 (*)에서, $x=y=z=u=\dfrac{a}{4}$일 때 등호가 성립함을 알 수 있다.

⇦ 등호가 성립하는 경우를 명시하지 않으면 −2점

연구 $1°$ [별해] (1) Cauchy-Schwarz 부등식과 문제의 조건에서

$$(X^2+Y^2)(1^2+1^2) \geqq (X+Y)^2 = A^2$$

$$\therefore\ X^2+Y^2 \geqq \frac{A^2}{2}$$

(2) Cauchy-Schwarz 부등식과 문제의 조건에서

$$(x^2+y^2+z^2+u^2)(1^2+1^2+1^2+1^2) \geqq (x+y+z+u)^2 = a^2$$

$$\therefore\ x^2+y^2+z^2+u^2 \geqq \frac{a^2}{4}$$

단, 등호는 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=\frac{u}{1}$일 때 즉, $x=y=z=u=\frac{a}{4}$일 때 성립한다.

$2°$ [별해] 이 문제를 일반화하면 다음과 같다.

Cauchy-Schwarz 부등식에서

$$(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)(\underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2}_{n\text{항}}) \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$$

$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$로 두면, $x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2 \geqq \frac{a^2}{n}$

단, 등호는 $\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{1}=\cdots=\frac{x_n}{1}$일 때 성립하므로 등호가 성립할 조건은 $x_1+x_2+\cdots+x_n \geqq \frac{a}{n}$이다.

---

2. $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$일 때,

(1) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$의 값의 범위를 구하여라.

(2) 함수 $y=7-4\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$의 최대값, 최소값을 구하고, 또 이 때의 θ의 값을 각각 구하여라.

[배　　점] 15점(5점+10점)

[출제분야] 일반수학>삼각함수>삼각함수의 최대 · 최소

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
(1)		(2)						

[문제분석] (1)은 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$로 고쳐서 계산하면 너무나 쉬운 문제이다.

(2) **sin, cos**에 관한 2차식의 최대·최소 ⇨ 하나의 함수로 통일해 본다.

에 따라 함수를 통일한 다음, 치환하면 2차 함수의 최대·최소 문제가 된다. 이 때,

치환 ⇨ 변역에 주의

를 명심할 것!

모범해답 (1) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

그런데, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$에서 $0\leqq\sin\theta\leqq1$이므로

$$-1\leqq\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\leqq0 \qquad \cdots\cdots \text{답}$$

(2) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$이므로 주어진 함수식에서

$$y=7-4\cos^2\theta+4\sin\theta$$
$$=7-4(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta=4\sin^2\theta+4\sin\theta+3$$

$\sin\theta=t$로 두면 $0\leqq t\leqq1$이고 $y=4t^2+4t+3=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+2$

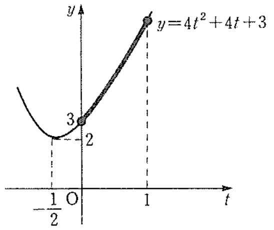
⇦ t의 범위를 밝히지 않으면 −2점

오른편 그림에서 y의 최대·최소를 조사하면,

$t=0$일 때 최소값 3,

$t=1$일 때 최대값 11

그런데 $t=0$일 때 $\theta=0$, $t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로



$$\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{2}\text{일 때 최대값 } 11\\ \theta=0\text{일 때 최소값 } 3\end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ θ의 값을 제대로 구하지 못하면 −2점

연구 [별해] (1) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2}\leqq\theta+\frac{\pi}{2}\leqq\pi$ $\quad\therefore\ -1\leqq\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\leqq0$ ……답

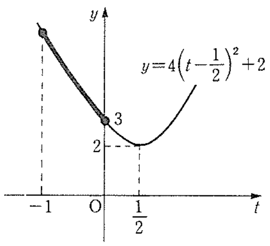
(2) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=t$로 두면 $-1\leqq t\leqq0$이고 주어진 함수식은

$$y=7-4(1-t^2)-4t=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2$$

오른편 그림에서 y의 최대·최소를 조사하면,

$t=-1$일 때 최대값은 11,

$t=0$일 때 최소값은 3



그런데 $t=-1$일 때 $\theta+\frac{\pi}{2}=\pi$에서 $\theta=\frac{\pi}{2}$

$t=0$일 때 $\theta+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$에서 $\theta=0$

$$\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{2}\text{일 때 최대값 } 11\\ \theta=0\text{일 때 최소값 } 3\end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{답}$$

3. 점 A(2, 1)을 지나는 직선이 포물선 $y^2=x$와 원점 O 이외의 두 점 P, Q에서 만나고, ∠POQ가 직각일 때, 직선 PQ의 방정식을 구하여라.

[배 점] 15점

[출제분야] 일반수학>도형의 방정식>직선의 방정식

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 점 (a, b)를 지나는 직선 ⇨ $y-b=m(x-a)$

이므로 문제의 직선을 $y-1=m(x-2)$로 둘 수 있다.

주의 $y=mx+k$꼴의 방정식이 y축과 평행한 직선을 나타내지는 못하므로, y축에 평행한 직선이 문제의 뜻에 어긋남을 보이는 것이 필요하다.

또,

두 곡선의 식을 연립한 실근의 쌍 ⇨ 두 곡선의 교점

이므로, 연립방정식 $\begin{cases} y=mx-2m+1 \\ y^2=x \end{cases}$의 해가 두 곡선의 교점 $P(\alpha^2, \alpha)$, $Q(\beta^2, \beta)$이다. 한 편,

$$(\overleftrightarrow{OP}\text{의 기울기})\cdot(\overleftrightarrow{OQ}\text{의 기울기})=-1$$

에서 $\dfrac{\alpha}{\alpha^2}\cdot\dfrac{\beta}{\beta^2}=-1$ $\quad\therefore\ \alpha\beta=-1$

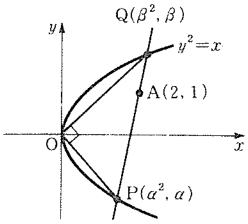
그런데, α, β는 위 연립방정식에서 x를 소거한 $y=my^2-2m+1$의 두 근이다. 여기서 근과 계수와의 관계를 이용하면 원하는 m의 값을 구할 수 있다.

모범해답 직선 PQ가 y축과 평행하면 그 방정식은 $x=2$이다. 이 때, P, Q의 좌표는 $P(2, \sqrt{2})$, $Q(2, -\sqrt{2})$이다. 따라서

$$(\overleftrightarrow{OP}\text{의 기울기})\cdot(\overleftrightarrow{OQ}\text{의 기울기})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

이것은 문제의 조건에 어긋나므로 직선 PQ는 y축과 평행할 수 없다. ⇦ 이것을 밝히지 않으면−2점

따라서 점 A를 지나는 직선의 식을 $y-1=m(x-2)$ ……①로 둘 수 있다.



두 점 P, Q의 좌표를 각각 (α^2, α), (β^2, β)라 하면, $\overleftrightarrow{OP}\perp\overleftrightarrow{OQ}$에서

⇦ P, Q가 직선 위의 점임을 살려서 $(\alpha,\ m(\alpha-2)+1)$, $(\beta,\ m(\beta-2)+1)$로 두면 계산이 복잡해진다.

$$\frac{\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\beta}{\beta^2}=-1 \quad \text{즉, } \alpha\beta=-1 \ \cdots\cdots ②$$

그런데, α, β는 ①과 $y^2=x$에서 x를 소거한 $y-1=m(y^2-2)$ 즉, $my^2-y-2m+1=0$의 두 근이다.

따라서, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=\dfrac{-2m+1}{m}=-1$ ($\because$ ②에서)

$\therefore\ -2m+1=-m \qquad \therefore\ m=1$

$\therefore$ 구하는 직선의 식은 ①에서 $y=x-1$ ……답

연구 *1°* [별해] (2, 1)을 지나 x축에 평행한 직선은 문제의 뜻에 어긋난다.

따라서 구하는 직선의 식을

$$x-2=m(y-1) \qquad \Leftarrow \text{이 때 } m\text{은 기울기가 아니다.}$$

로 둘 수 있다. (이 후는 모범해답과 동일한 방법으로 한다.)

2° [별해] 구하는 직선이 x축에 평행한 직선은 아니므로

$$x=ay+b \qquad \cdots\cdots①$$

로 둘 수 있다.

이것이 (2, 1)을 지나므로 $2=a+b \qquad \cdots\cdots②$

①과 $y^2=x$의 교점 P, Q의 좌표를 $P(\alpha^2, \alpha)$, $Q(\beta^2, \beta)$로 두면, $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{OQ}$에서

$$\frac{\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\beta}{\beta^2}=-1$$

$$\therefore\ \alpha\beta=-1 \qquad \cdots\cdots③$$

그런데, α, β는 ①과 $y^2=x$에서 x를 소거한 $y^2=ay+b$, 즉 $y^2-ay-b=0$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha\beta=-b=-1 \quad (\because\ ③\text{에서})$$

이것과 ②에서 $a=1$, $b=1$

$$\therefore\ ①\text{로 부터 구하는 직선의 식은 } y=x-1 \qquad \cdots\cdots\boxed{답}$$

---

4. 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=40, \quad a_{n+1}-a_n=an+b \ (n=1, 2, \cdots)$$

일 때 (단, a는 양의 정수, b는 정수)

(1) a_n을 a, b, n으로 표시하여라.

(2) $a_5>0$, $a_6<0$되게 하는 a, b의 값을 구하여라.

(3) 위의 (2)에서 구한 a, b에 대하여 $a_n<0$인 모든 a_n의 합을 구하여라.

[배　　점] 15점(5점+5점+5점)

[출제분야] 수 Ⅰ, Ⅱ 공통>수열>수열의 점화식, 수열의 합

[난 이 도]

기본		표준		어려움	
	(1)	(2)	(3)		

[문제분석] (1)은 계차수열의 일반항 $b_n=a_{n+1}-a_n$을 알고 원수열을 구하는 것이므로,

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) \ (\text{단, } n\geq 2)$$

을 이용하면 쉽게 해결된다.

(2)는 b보다 a가 더 까다로운 조건을 가진 것에 착안하여 b를 소거하여 a의 범위

를 구해 본다.

(3)은 $a_n<0$를 만족하는 n을 구하여

$$\sum_{k=m}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{m-1} a_k$$

를 이용하면 된다.

모범해답 (1) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n&=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1}) \\ &=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) \\ &=40+\sum_{k=1}^{n-1}(ak+b) \\ &=40+a\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}+b\cdot(n-1) \end{aligned}$$

이것은 $a_1=40$을 만족하므로, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\frac{an(n-1)}{2}+b(n-1)+40 \qquad \cdots\cdots \text{답}$$

(2) $\begin{cases} a_5=10a+4b+40>0 \\ a_6=15a+5b+40<0 \end{cases}$ 로 부터 $-\frac{5}{2}a-10<b<-3a-8$ ⋯⋯①

$$\therefore\ -\frac{5}{2}a-10<-3a-8 \qquad \therefore\ a<4$$

⇦ 여기까지가 2점

조건에서 a는 양의 정수이므로 $a=1,\ 2,\ 3$

이들 a의 값을 ①에 대입하여 b가 정수가 되는 경우를 택하면 $a=1$일 때 $b=-12$뿐이다.

답 $a=1,\ b=-12$

(3) $a_n=\frac{n(n-1)}{2}-12(n-1)+40=\frac{1}{2}(n^2-25n+104)<0$에서

$$\frac{25-\sqrt{209}}{2}<n<\frac{25+\sqrt{209}}{2}$$

$$\therefore\ 5.2\cdots<n<19.7\cdots$$

⇦ n의 값을 잘못 구한 상태에서 뒷 부분이 옳으면 -2점

n은 정수이므로 $n=6,\ 7,\ 8,\cdots,\ 19$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=6}^{19} a_k&=\sum_{k=1}^{19} a_k-\sum_{k=1}^{5} a_k \\ &=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{19}(k^2-25k+104)-\sum_{k=1}^{5}(k^2-25k+104)\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{19\cdot 20\cdot 39}{6}-25\cdot\frac{19\cdot 20}{2}+104\cdot 19-\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}\right. \\ &\qquad\left.+25\cdot\frac{5\cdot 6}{2}-104\cdot 5\right) \\ &=-252 \qquad \cdots\cdots \text{답} \end{aligned}$$

⇦ 답만 틀린 경우는 -2점

5. 세 번 중에 한 번의 비율로 모자를 잃어버리는 버릇이 있는 사람이 차례로 A, B, C의 세 집을 방문하고 돌아왔을 때,

(1) 모자를 잃어버리지 않고 돌아왔을 확률을 구하여라.

(2) 모자를 잃어버리고 돌아왔을 때, 그 모자를 C의 집에서 잃어버렸을 확률을 구하여라.

[배 점] 15점(5점+10점)

[출제분야] 수 I, II 공통>확률·통계>조건부 확률

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
			(1)		(2)			

[문제분석] 조건부확률에 관한 뜻을 이해하고 $P(A\cap B)$와 $P(A|B)$을 명확히 구분할 수 있어야 한다. 그리고, 실제의 계산에서는

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)},\quad P(A\cap E)=P(E)P(A|E)$$

을 주로 이용한다.

그런데, 이 문제에서는 A, B, C 사이에 순서가 주어져 있으므로 식의 표현이나 계산에 상당히 주의를 기울여야 한다.

A, B, C의 어디에서 모자를 잃어버린 사건을 A, B, C라 하면 $P(A)=\frac{1}{3}$이지만 $P(B)$, $P(C)$는 $\frac{1}{3}$이 아니다. 그 이유는 방문의 순서 때문이다. B에서 모자를 잃어버린다는 것은 A에서 모자를 잃어버리지 않았음을 전제한 것이다.

따라서 $P(B)=P(A^c\cap B)$

여기서 $P(A^c\cap B)$의 계산은 앞서 지적한 공식

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)$$

를 이용한다. 이 때, $P(B|A^c)=\frac{1}{3}$임을 인식할 수 있으면 Very good!

마찬가지로 $P(C)=P(A^c\cap B^c\cap C)$이고 그 계산은

$$\begin{aligned}P(A^c\cap B^c\cap C)&=P(A^c)P(B^c\cap C|A^c)\\&=P(A^c)P(B^c|A^c)P(C|A^c\cap B^c)\end{aligned}$$

$$P(A^c)=\frac{2}{3},\quad P(B^c|A^c)=\frac{2}{3},\quad P(C|A^c\cap B^c)=\frac{1}{3}$$

을 이용한다.

그리고 (2)에서는 $E=A\cup B\cup C$일 때 구하는 확률이 $P(C)$가 아니라 $P(C|E)$임을 인지하는 것이 핵심!!

모범해답 세 집 A, B, C의 어디에서 모자를 잃어버리고 올 사건을 E라 하고, A, B, C집에서 잃어버리고 올 사건을 각각 A, B, C라 하면 문제의 조건에서

$$P(A)=\frac{1}{3},\quad P(B|A^c)=\frac{1}{3},\quad P(C|A^c\cap B^c)=\frac{1}{3}$$

이고, 각 경우에 대한 여사건을 생각하면

$$P(A^c)=\frac{2}{3},\quad P(B^c|A^c)=\frac{2}{3},\quad P(C^c|A^c\cap B^c)=\frac{2}{3}$$

(1) 구하는 확률은 $E=A\cup B\cup C$의 여사건의 확률이므로

$$P(E^c)=P(A^c\cap B^c\cap C^c)=P(A^c)P(B^c\cap C^c|A^c)$$
$$=P(A^c)P(B^c|A^c)P(C^c|A^c\cap B^c)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$ ……답

⇦ 식의 표현이 다소 다르더라도 $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$로 계산하면 4점

(2) 구하는 확률은 $P(C|E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}=\frac{P(C)}{P(E)}$

그런데, $P(E)$는 (1)에서 구한 사건의 여사건의 확률이므로,

$$P(E)=1-P(E^c)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

이고,

$$P(C)=P(A^c\cap B^c\cap C)=P(A^c)P(B^c\cap C|A^c)$$
$$=P(A^c)P(B^c|A^c)P(C|A^c\cap B^c)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

⇦ 이것을 답으로 하면 3점

$\therefore$ 구하는 확률은 $P(C|E)=\dfrac{\frac{4}{27}}{\frac{19}{27}}=\frac{4}{19}$ ……답

연구 *1°* [별해] 세 집 A, B, C의 어디에서 모자를 잃어버릴 확률 $P(E)$를 여사건을 이용하지 않고 구하는 다른 방법을 소개하면 다음과 같다.

$$P(E)=P(A\cup B\cup C)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)\ (\because\ A,\ B,\ C\text{는 서로 배반사건이므로})$$
$$=P(A)+P(A^c\cap B)+P(A^c\cap B^c\cap C)$$
$$=P(A)+P(A^c)\cdot P(B|A^c)+P(A^c)P(B^c|A^c)P(C|A^c\cap B^c)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{19}{27}$$

2° 모자를 잃어버리고 돌아왔을 때, 그 모자를 A, B의 집에서 잃어버렸을 확률을 각각 구해 보자.

풀이 구하는 확률은 $P(A|E)$와 $P(B|E)$이다.

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A)}{P(E)}\qquad P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{P(B)}{P(E)}$$

그런데, $P(E)=1-P(E^c)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$, $P(A)=\frac{1}{3}$

$$P(B)=P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B|A^c)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$\therefore$ 구하는 확률은 $P(A|E)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{27}}=\frac{9}{19}$, $P(B|E)=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{19}{27}}=\frac{6}{19}$ ……답

(검토) $P(A|E)+P(B|E)+P(C|E)=\frac{9}{19}+\frac{6}{19}+\frac{4}{19}=1$이다. 이것은 $P(E|E)=1$임을 의미한다.

6. $f(x)=2x^3+ax^2+bx\,(a>0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 점 (1, 3)을 지나고, $f(x)$가 극대가 되게 하는 x의 값과 극소가 되게 하는 x의 값의 차가 $\frac{\sqrt{10}}{3}$일 때,

(1) a, b의 값을 구하여라.

(2) 위의 (1)에서 얻은 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 일반수학>수와 식>대칭식의 계산
수 I >미분>극대 · 극소
수 I >적분>면적

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
			(1)		(2)			

[문제분석] (1)은 $f(x)$의 극대가 되게 하는 x의 값과 극소가 되게 하는 x의 값의 차를 a, b에 관한 식으로 표현하는 것이 관건이다.

다항함수 $f(x)$가 극대 · 극소가 되는 x의 값 ⇨ $f'(x)=0$의 근

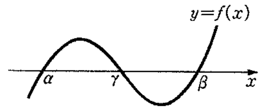
이므로 $f'(x)=6x^2+2ax+b=0$ ……(*)의 두 근을 α, β라 할 때, 그 차는

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

와 근과 계수와의 관계를 이용하면 a, b의 식으로 표현된다.

(2)는 오른 편 그림에서 빗금 친 부분의 면적은

$$S=\int_\alpha^\gamma f(x)dx-\int_\gamma^\beta f(x)dx$$



로 표현됨을 알면 된다. 그러나 적분구간의 끝값이 복잡한 경우에는 그 값을 문자로 두고 계산한 다음, 마지막 과정에서 문자를 수로 바꾸는 것이 좋다.

모범해답 (1) $y=f(x)$가 점 (1, 3)을 지나므로 $f(1)=2+a+b=3$

$\therefore\ a+b=1$ ……①　　⇦ 여기까지가 1점

$f(x)=2x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b=0$

이것의 두 근을 α, β라 하면,

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\left(-\frac{a}{3}\right)^2-4\cdot\left(\frac{b}{6}\right)\ (\because\ \text{근과 계수와의 관계})$$
$$=\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}$$

따라서 문제의 조건에서, $\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}=\frac{10}{9}$

$\therefore\ a^2-6b=10$ ……②　　⇦ 여기까지가 8점

①에서 $b=1-a$

이것을 ②에 대입하면 $a^2-6(1-a)=10$　　$\therefore\ a^2+6a-16=0$

$\therefore (a+8)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-8,\ +2$

그런데, 문제의 조건에서 $a>0$이므로 $a=2$

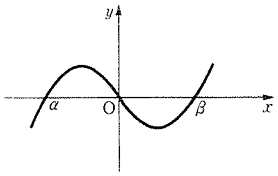
이 때, ①에서 $b=-1$

$\therefore a=2,\ b=-1$ ……답

(2) $f(x)=2x^3+2x^2-x$

$=x(2x^2+2x-1)=0$

로 부터 $x=0,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$



$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\ \beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 로 둘 때, 구하는 면적 S는

$$S=\int_\alpha^0(2x^3+2x^2-x)dx-\int_0^\beta(2x^3+2x^2-x)dx$$ ⇦ 여기까지가 4점

$$=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^0-\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^\beta$$

$$=-\frac{1}{2}(\alpha^4+\beta^4)-\frac{2}{3}(\alpha^3+\beta^3)+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$ ⇦ 여기까지가 7점

그런데 $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$이므로,

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-1)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)=-\frac{5}{2}$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

$$\therefore S=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{7}{2}-\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{11}{12}$$ ……답

연구 [별해] (1) $y=f(x)$가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로, $f(1)=2+a+b=3$에서 $a+b=1$ ……①

$f'(x)=6x^2+2ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+\dfrac{\sqrt{10}}{3}$으로 둘 수 있으므로 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha+\left(\alpha+\frac{\sqrt{10}}{3}\right)=-\frac{a}{3} \quad ……② \qquad \alpha\times\left(\alpha+\frac{\sqrt{10}}{3}\right)=\frac{b}{6} \quad ……③$$

②, ③에서 α를 소거하면 $a^2-10=6b$ ……④

①, ④에서 b를 소거하면 $a^2+6a-16=0$

문제의 조건에서 $a>0$이므로 $a=2$ 이 때, ①에서 $b=-1$

$\therefore a=2,\ b=-1$ ……답

합격포인트 확률・통계에 거부감을 가진 학생들은 **5**번이 어려울 것이다. 또, 계산력이 부족한 학생들은 **4**의 (3)이나 **6**의 (2)에서 어려움을 느낄 것이다. 전체적으로 쉬운 편으로서 60점은 되어야 합격 가능하다. 일부 상위 학과는 65점 이상 되어야 안심! 수학이 주 득점원인 학생은 73점 이상이면 만족!

'80고려대 수학Ⅱ 해설과 풀이

1. 수학Ⅰ의 *1*번과 같다.

---

2. $y=2\cos x-3\sin x$의 값을 최대로 하는 x에 대하여 $\tan x$의 값을 구하여라.

[배　　점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ>삼각함수>삼각함수의 합성

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 삼각함수의 최대 · 최소 문제에서 sine과 cosine에 관한 1차식꼴은 다음과 같이 삼각함수의 합성을 이용한다.

$\boldsymbol{y=a\sin\theta+b\cos\theta}$의 최대 · 최소 ⇨ $\boldsymbol{y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$로 변형

모범해답 $y=2\cos x-3\sin x=\sqrt{13}\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\cdot\cos x-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\cdot\sin x\right)$

$=\sqrt{13}\cos(x+\alpha)\quad\left(\text{단, }\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ ⇦ 여기까지가 5점

$\therefore\ \cos(x+\alpha)=1$일 때 y는 최대이다.

이 때, $x+\alpha=2n\pi$ 　즉, $x=2n\pi-\alpha$ ⇦ 일반해로 적지 않으면 −2점

$\therefore\ \tan x=\tan(2n\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}}=-\dfrac{3}{2}$ ⋯답

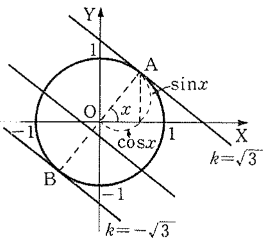
연구 *1°* [별해] $\cos x=\mathrm{X}$, $\sin x=\mathrm{Y}$로 두면, $\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=1$ ⋯⋯①

①을 만족하는 X, Y에 대하여 $2\mathrm{X}-3\mathrm{Y}$의 최대값을 구하면 된다. $2\mathrm{X}-3\mathrm{Y}=k$ ⋯⋯②라 하면 ①, ②가 만나기 위해서는

(원의 중심에서 직선까지의 거리)≦(반지름)

$\therefore\ \dfrac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\leqq 1$에서 $|k|\leqq\sqrt{13}$

$\therefore\ -\sqrt{13}\leqq k\leqq\sqrt{13}$에서 최대값은 $\sqrt{13}$이다.

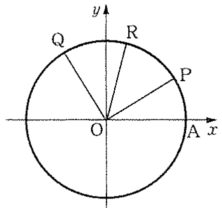


$\begin{cases}\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=1 & \cdots\cdots③\\ 2\mathrm{X}-3\mathrm{Y}=\sqrt{13} & \cdots\cdots④\end{cases}$ ③, ④를 연립하여 풀면, $\mathrm{X}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$, $\mathrm{Y}=-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

$\therefore\ \tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=-\dfrac{3}{2}$ ⋯⋯답

2° [별해] 위 그림에서 k가 최대가 되는 것은 직선이 접할 때임을 알 수 있다. 이 때, $\tan x$는 직선 AB의 기울기이다. 그런데, ②의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$이므로 구하는 $\tan x=-\dfrac{3}{2}$ ⋯⋯답

3. 단위원 $x^2+y^2=1$과 x축과의 교점을 A라 하고, 점 P, Q를 $\angle AOP=\alpha$, $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$되게 잡을 때



(1) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$의 성분을 α를 써서 나타내어라.

(2) 단위원 위의 임의의 점을 R이라 하고, $\angle POR=\beta$라 할 때, $\overrightarrow{OR}$을 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$로 나타내어라.

(3) 위의 (1), (2)를 이용하여, 사인, 코사인에 대한 덧셈정리를 각각 증명하여라.

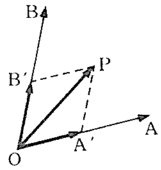
[배　　점] 15점(5점+5점+5점)

[출제분야] 수Ⅱ＞벡터＞벡터의 성분, 벡터의 연산

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(1)	(3) (2)	

[문제분석] (1), (2) 모두 벡터를 1차독립인 두 벡터로 분해하는 문제이다. 오른편 그림에서 $\overrightarrow{OP}$를 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 1차결합으로 표현하는 방법은 다음 순서에 따른다.



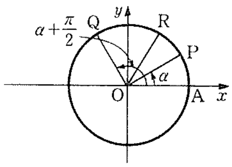
(i) 점 **P**에서 $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$와 평행한 보조선을 작도

(ii) 보조선과 $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$의 교점을 $\mathbf{A}'$, $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$의 교점을 $\mathbf{B}'$이라 하고 $\overrightarrow{\mathbf{OA}'}=x\overrightarrow{\mathbf{OA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OB}'}=y\overrightarrow{\mathbf{OB}}$인 x, y를 구한다.

(iii) 사각형 $\mathbf{OA'PB'}$이 평행사변형이므로 $\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\overrightarrow{\mathbf{OA}'}+\overrightarrow{\mathbf{OB}'}=x\overrightarrow{\mathbf{OA}}+y\overrightarrow{\mathbf{OB}}$

모범해답 (1) $\overrightarrow{OP}=(\overline{OP}\cos\alpha,\ \overline{OP}\sin\alpha)$

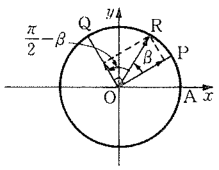
$=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ ……답　　⇦ 이것만 맞으면 2점



$\overrightarrow{OQ}=\left(\overline{OQ}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\ \overline{OQ}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$=(-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ ……답

(2) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$는 직교하므로 $\overrightarrow{OR}$를 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ 방향의 성분으로 분해하면



$\overrightarrow{OR}=(\overline{OR}\cos\beta)\overrightarrow{OP}+\left\{\overline{OR}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right\}\overrightarrow{OQ}$

$=(\cos\beta)\overrightarrow{OP}+(\sin\beta)\overrightarrow{OQ}$ ……답

(3) $\angle AOR=\angle AOP+\angle POR=\alpha+\beta$이므로,

$\overrightarrow{OR}=(\overline{OR}\cos(\alpha+\beta),\ \overline{OR}\sin(\alpha+\beta))$

$=(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$ ……(*)　　⇦ 여기까지가 2점

그런데, (1), (2)에서

$\overrightarrow{OR}=\cos\beta(\cos\alpha,\ \sin\alpha)+\sin\beta(-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

이므로 (*)와 성분을 비교하면,

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$ ……답

4~5. 수학 I 의 4~5번과 같다.

6. 곡선 $y=a\log x-1$ (단, $a>0$)에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 원점에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 이 곡선과 (1)에서 얻은 접선과 x축으로 둘러싸인 부분의 면적 S를 구하여라.

(3) 위의 S가 최소가 되게 하는 a의 값을 구하여라.

[배　　점] 20점(6점+7점+7점)

[출제분야] 수Ⅱ>미분>접선의 방정식, 최대·최소
수Ⅱ>적분>면적

[난 이 도]

기본		표준	어려움
(3)	(1)	(2)	

[문제분석] (1)은 곡선 $y=f(x)$ 밖의 점 $(x_0,\ y_0)$에서 이 곡선에 그은 접선 문제로서 다음 순서에 따른다.

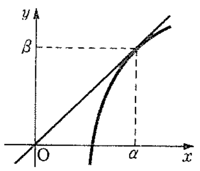
(i) 접점의 좌표를 가정한다. → $(t,\ f(t))$

(ii) $(t,\ f(t))$에서의 접선의 식을 구한다. → $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ ……(*)

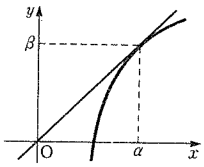
(iii) 여기에 $(x_0,\ y_0)$를 대입하여 t를 구한다.

(iv) 이 값을 (*)에 대입한다.

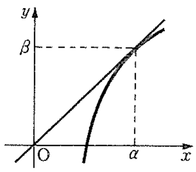
(2)는



꼴의 면적 ⇨



—



에 의하여 계산하는 것이 좋다.

(3)은 해당하는 범위에서 증감표만 작성하면 풀 수 있는 쉬운 문제이다.

모범해답 (1) $y=a\log x-1$에서 $y'=\dfrac{a}{x}$

곡선 $y=a\log x-1$ 위의 점 $(t,\ a\log t-1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(a\log t-1)=\frac{a}{t}(x-t) \quad \cdots\cdots(*)$$

이것이 원점을 지날 조건은 $-(a\log t-1)=\dfrac{a}{t}(-t)$

$$\therefore\ \log t=\frac{a+1}{a}\ (\because\ a>0\text{에서}) \qquad \therefore\ t=e^{\frac{a+1}{a}}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 (*)에서 $y=\dfrac{a}{e^{\frac{a+1}{a}}}x$ ……답

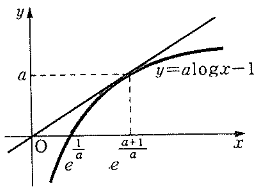
(2) $y=a\log x-1$에서 $\log x=\dfrac{y+1}{a}$ ($\because$ $a>0$에서) $\therefore$ $x=e^{\frac{y+1}{a}}$

$$\therefore \ S=\int_0^a e^{\frac{y+1}{a}}dy-\frac{1}{2}\cdot a\cdot e^{\frac{a+1}{a}}$$

$$=\left[a\cdot e^{\frac{y+1}{a}}\right]_0^a-\frac{1}{2}ae^{\frac{a+1}{a}}$$

$$=\frac{1}{2}ae^{\frac{a+1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{1}{2}(e-2)ae^{\frac{1}{a}}$$ ……답



⇦ 면적 계산식이 옳으면 5점

(3) $S=\dfrac{1}{2}(e-2)ae^{\frac{1}{a}}$을 a에 관하여 미분하면

$$\frac{dS}{da}=\frac{1}{2}(e-2)\left\{e^{\frac{1}{a}}+ae^{\frac{1}{a}}\cdot\left(-\frac{1}{a^2}\right)\right\}=\frac{1}{2}(e-2)\cdot\frac{a-1}{a}\cdot e^{\frac{1}{a}}$$

$\dfrac{dS}{da}=0$으로 두면 $a=1$

$a>0$인 범위에서 증감표를 작성하면

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$\dfrac{dS}{da}$		$-$	0	$+$
S		↗	극소	↘

⇦ 증감을 조사하지 않으면 −2점

증감표에 의하면 $a=1$일 때 S는 최소이다.

답 $a=1$

연구 [별해] (2) 적분변수를 x로 잡아서 면적 S를 구하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot e^{\frac{a+1}{a}}-\int_{e^{\frac{1}{a}}}^{e^{\frac{a+1}{a}}}(a\log x-1)dx=\frac{1}{2}ae^{\frac{a+1}{a}}-\Big[ax\log x-ax-x\Big]_{e^{\frac{1}{a}}}^{e^{\frac{a+1}{a}}}$$

$$=\frac{1}{2}ae^{\frac{a+1}{a}}-\left\{ae^{\frac{a+1}{a}}\cdot\frac{a+1}{a}-(a+1)e^{\frac{a+1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{a}+(a+1)e^{\frac{1}{a}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}ae^{\frac{a+1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{2}(e-2)ae^{\frac{1}{a}}$$ ……답

합격포인트 확률 · 통계에 거부감을 가진 학생들은 **5**번이 어려울 것이다. 또, 계산력이 부족한 학생들은 **4**의 (3)번이 거북할 것이다. **6**의 (2)번도 시간에 쫓기면 놓치기 쉬운 문제이다. 전체적으로 쉬운 편으로서 55점은 되어야 합격 가능하다. 일부 상위 계열은 60점 이상 획득해야 한다. 수학이 주 득점원인 학생은 67점 이상이면 만족!

'79 연세대 수학 I $\left(\frac{100점}{60분}\right)$

1. f는 구간 $0 \leqq x \leqq 1$에서 다음과 같이 정의된 함수이다. (15점)

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{가 유리수일 때}) \\ 1-x & (x\text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

(a) $f(f(x))$를 계산하라.

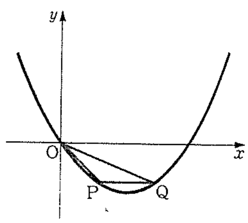
(b) $f(x)+f(1-x)$를 계산하라.

2. 함수 $f(x)=(\log_3 x)^2+a\log_{27}x^2+b$가 $x=\frac{1}{3}$에서 최소값 1을 갖도록 a, b의 값을 정하라. (15점)

3. x축보다 아래 있으면서 x축과 평행인 직선이 $y=x^2-3x$의 그래프와 만나는 점을 P, Q라 하자. (그림 참조) (20점)

(a) 삼각형 OPQ의 면적이 최대가 되는 Q의 좌표를 구하라.

(b) (a)에서 구한 점 Q에서의 곡선의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 구하라.



4. 수열 $\{a_n\}$은 부등식 $|a_{n+2}-a_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|a_{n+1}-a_n|$을 만족한다. (15점)

(a) $m>n$ (m과 n은 자연수)이면

$$a_{m+1}-a_n=\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1}-a_k)$$

임을 증명하라.

(b) $|a_{m+1}-a_n|<2|a_{n+1}-a_n|$ 임을 증명하라.

5. f는 $x \geqq 0$에서 다음과 같이 정의된 함수이다.

$$f(x)=\int_0^x |t-2|\,dt$$

두 직선 $y=0$, $x=4$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 면적을 구하라. (15점)

6. n개의 수의 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에서 동시에 3개의 수를 꺼낼 때, (20점)

(a) 꺼낸 3개의 수가 연속될 확률을 구하라.

(b) 꺼낸 3개의 수 중 두 수만이 연속될 확률을 구하라.

(c) 꺼낸 3개의 수 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률을 구하라.

'79 연세대 수학 II (100점/60분)

1. $0<t<1$인 모든 수 t는 두 수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 $a<ta+(1-t)b<b$를 만족한다. f는 폐구간 $[a, b]$에서 정의되고 $f(ta+(1-t)b)=tf(a)+(1-t)f(b)$인 성질을 만족하는 함수이다.

이 때 f는 $[a, b]$에서 일차함수임을 증명하라. (15점)

2. 다음 (　　)속에 알맞은 기호나 식을 써 넣어라. (15점)

로그함수 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq 1)$에서, x의 증분이 Δx이면 함수의 증분은 $\Delta y=\log_a \dfrac{x+\Delta x}{x}$이다. 이로부터 평균 변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\log_a \dfrac{x+\Delta x}{x}$를 얻는다. 여기서 $\dfrac{\Delta x}{x}$를 z로 바꾸어 놓으면 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\log_a($ (a) $)$가 된다. 또한 $\Delta x\to 0$일 때 $z\to 0$이므로, 양변에 극한 $\Delta x\to 0$을 취하면 도함수 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{z=0}\dfrac{1}{x}($ (b) $)=\dfrac{1}{x}\log_a($ (c) $)$를 얻는다. 그런데, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{d\log_a x}{dx}=\dfrac{1}{x}($ (d) $)$이므로 $e=($ (e) $)$이다.

3. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선이 이 쌍곡선의 점근선과 만나는 점을 Q, R이라고 하면 점 P는 선분 QR의 중점임을 증명하라. (20점)

4. 두 복소수 z_1, z_2의 편각은 각각 α, β이고 $z_1=2+i$이다.

$\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$가 되고 $|z_2|=|z_2-z_1|$이 되도록 z_2를 정하라. (15점)

5. 수열 $\{I_n\}$의 n번째 항이 $I_n=\int x^n e^x dx$일 때, I_n을 I_0를 써서 나타내어라. (15점)

6. n개의 수의 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에서 동시에 3개의 수를 꺼낼 때, (20점)

(a) 꺼낸 3개의 수가 연속될 확률을 구하라.

(b) 꺼낸 3개의 수 중 두 수만이 연속될 확률을 구하라.

(c) 꺼낸 3개의 수 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률을 구하라.

'79 연세대 수학 I 해설과 풀이

1. f는 구간 $0 \leqq x \leqq 1$에서 다음과 같이 정의된 함수이다.

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{가 유리수일 때}) \\ 1-x & (x\text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

(a) $f(f(x))$를 계산하라.

(b) $f(x)+f(1-x)$를 계산하라.

[배　점] 15점(7점+8점)

[출제분야] 일반수학>수와 식>수의 체계
일반수학>함수>함수의 정의, 합성함수

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		(a)(b)						

[문제분석] 정의에 따라 함수값을 구하는 방법을 묻는 문제로서 함수 기호의 사용법과 합성함수의 뜻만 알면 쉽게 풀 수 있다.

x가 취하는 값이 (i) 유리수일 때, (ii) 무리수 일 때에 따라 함수값이 달라지므로 (i), (ii)의 경우로 구분하여 풀어야 한다. 단지, 주의할 점은 『x가 무리수일 때, $f(x)=1-x$ 또한 무리수임』을 증명까지는 않더라도 꼭 언급하고 넘어가야 한다는 것이다.

모범해답 (a) (i) x가 유리수일 때 ; $f(x)=x$이므로, $f(f(x))=f(x)=x$

(ii) x가 무리수일 때 ; $f(x)=1-x$이므로, $f(f(x))=f(1-x)$

그런데, x가 무리수이면 $1-x$도 무리수이고 $0 \leqq x \leqq 1$에서 ⇐ $1-x$가 무리수임을 생략하면 −2점

$0 \leqq 1-x \leqq 1$이므로 $f(1-x)=1-(1-x)=x$ 　　$0 \leqq 1-x \leqq 1$를 생략하면 −2점

$\therefore$ (i), (ii)에서 $x \in [0,\ 1]$인 모든 x에 대하여 $f(f(x))=x$

(b) (i) x가 유리수일 때 ; $f(x)+f(1-x)=x+(1-x)=1$ ⇐ 여기까지가 7점

($\because$ $0 \leqq 1-x \leqq 1$이고, $1-x$는 유리수) ⇐ 생략하면 각 −2점

(ii) x가 무리수일 때 ; $f(x)+f(1-x)=(1-x)+\{1-(1-x)\}=1$

($\because$ $0 \leqq 1-x \leqq 1$이고, $1-x$는 무리수) ⇐ 생략하면 각 −2점

$\therefore$ $x \in [0,\ 1]$인 모든 x에 대하여 $f(x)+f(1-x)=1$

연구 $0 \leqq x \leqq 1$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\text{가 유리수일 때}) \\ 1-x & (x\text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

는 무수히 많은 불연속점을 가지지만(실제로는 $0 \leqq x \leqq 1$인 모든 x에 대하여 불연속으로 이 함수의 그래프는 곡선으로 나타낼 수 없다.) 그 합성함수는 $(f \circ f)(x)=x$로 연속함수가 되는 매우 특이한 함수이다.

2. 함수 $f(x)=(\log_3 x)^2+a\log_{27}x^2+b$가 $x=\frac{1}{3}$에서 최소값 1을 갖도록 a, b의 값을 정하라.

[배 점] 15점

[출제분야] 일반수학>지수 · 로그>지수 · log 계산, log함수
일반수학>함수>2차함수의 최대 · 최소

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		▒						

[문제분석] $\log_3 x$에 대한 2차식을 2차함수로 변형하여 최소값을 구하는 문제로서, log의 기본 성질과 2차함수의 최대 · 최소에 관한 기초 지식만 있으면 쉽게 풀 수 있는 문제이다.

log의 성질 중에

$$\log_{a^m}x^n=\frac{n}{m}\log_a x$$

를 이용하여 (i) 주어진 함수식을 $\log_3 x$의 꼴로 모두 바꾼 후에, (ii) $\log_3 x=t$로 치환하여 푼다. (iii) 단, 이 문제는 정의역의 범위가 주어지지 않았으므로 진수 조건에서 $x>0$로 보아야 한다. 따라서 t는 모든 실수값을 취한다.

모범해답 $f(x)=(\log_3 x)^2+a\log_{27}x^2+b$

$$=(\log_3 x)^2+a\log_{3^3}x^2+b$$

$$=(\log_3 x)^2+\frac{2}{3}a\log_3 x+b$$

⇦ 여기까지가 3점

$\log_3 x=t$라 하면,

$$f(t)=t^2+\frac{2}{3}at+b=\left(t+\frac{a}{3}\right)^2+b-\frac{a^2}{9}\quad(t\in\mathrm{R})$$

$\therefore$ $t=-\frac{a}{3}$일 때, 최소값 $b-\frac{a^2}{9}$을 갖는다.

$x=\frac{1}{3}$일 때 $t=\log_3\frac{1}{3}=-1$이므로 문제의 뜻에 의해,

$$-\frac{a}{3}=-1,\quad b-\frac{a^2}{9}=1$$

$\therefore$ $a=3$, $b=2$ ……답

⇦ t와 x를 혼돈하여 $-\frac{a}{3}=\frac{1}{3}$로 풀면 −5점

연구 [별해] 이 문제를 치환하지 않고 풀면,

$$f(x)=(\log_3 x)^2+\frac{2}{3}a\log_3 x+b=\left(\log_3 x+\frac{a}{3}\right)^2+b-\frac{a^2}{9}$$

따라서, $\log_3 x=-\frac{a}{3}$에서 최소이며, 최소값은 $b-\frac{a^2}{9}$이다.

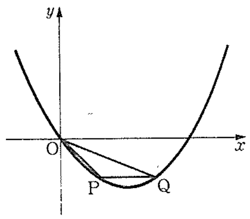
$$\therefore\ \log_3\frac{1}{3}=-\frac{a}{3},\quad b-\frac{a^2}{9}=1$$

$$\therefore\ a=3,\ b=2$$

3. x축보다 아래 있으면서 x축과 평행인 직선이 $y=x^2-3x$의 그래프와 만나는 점을 P, Q라 하자. (그림 참조)

(a) 삼각형 OPQ의 면적이 최대가 되는 Q의 좌표를 구하라.

(b) (a)에서 구한 점 Q에서의 곡선의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 구하라.



[배 점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I >미분>최대·최소에의 응용
수 I >미분>접선의 방정식

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(b)	(a)	

[문제분석] (a)는 미분법을 이용한 최대·최소의 응용 문제이고, (b)는 접선의 방정식에 관한 문제로서 정확한 계산력을 요하는 문제이다.

최대·최소의 응용 문제에 관한 풀이 순서는 대략 다음과 같다.

(i) 최대·최소를 구하는 대상 △**OPQ**의 면적을 잘 표현하는 변수를 선정한다.

(ii) 조건을 써서 최대·최소의 대상을 1변수함수로 표현 ⇨ 3차함수를 얻는다.

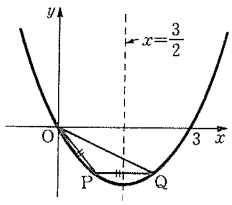
(iii) 변역에 주의 ⇨ 간단한 최대·최소 문제로 변형된다.

(b) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

임을 이용하여 풀면 된다.

모범해답 (a) P, Q의 x좌표를 각각 α, β $\left(0<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta<3\right)$로 두면 P$(\alpha,\ \alpha^2-3\alpha)$, Q$(\beta,\ \beta^2-3\beta)$이다.



$\overline{\text{PQ}}$가 x축에 평행하므로 $\overline{\text{PQ}}$의 중점은 포물선의 대칭축 위에 놓인다. ⇦ 이것을 생략하면 −2점

$\therefore\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore\ \alpha=3-\beta$ $\quad\therefore\ \overline{\text{PQ}}=\beta-\alpha=2\beta-3$

△OPQ의 면적을 S(β)라 하면,

$$\text{S}(\beta)=\frac{1}{2}(2\beta-3)(3\beta-\beta^2)\ \left(\text{단, } \frac{3}{2}<\beta<3\right)$$

⇦ β의 범위를 명시하지 않으면 −2점

$$\therefore\ \frac{d\text{S}}{d\beta}=\frac{1}{2}\{2(3\beta-\beta^2)+(2\beta-3)(3-2\beta)\}$$

$$=-\frac{3}{2}(2\beta^2-6\beta+3)$$

S$'(\beta)=0$에서 $\beta=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ $\quad \dfrac{3}{2}<\beta<3$에서 $\beta=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

증감표를 만들면

β	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	(3)
$S'(\beta)$		$+$	0	$-$	
$S(\beta)$		↗	극대	↘	

⇦ 증감표를 생략하면 −3점

$\therefore$ $S(\beta)$는 $\beta=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$에서 극대이자 최대이다.

이 때, $\beta=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$은 $2\beta^2-6\beta+3=0$를 만족하므로, $\beta^2-3\beta=-\frac{3}{2}$

$\therefore$ Q의 좌표는 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ ……답

(b) $y=x^2-3x$에서 $y'=2x-3$ $\quad\therefore\ y'_{x=\frac{3+\sqrt{3}}{3}}=2\times\frac{3+\sqrt{3}}{2}-3=\sqrt{3}$

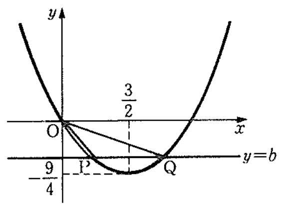
$\therefore$ 구하는 접선의 방정식은 $y+\frac{3}{2}=\sqrt{3}\left(x-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$ …(*)

$y=0$로 두면, $x=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

⇦ 이것을 답으로 하면 −3점

따라서, (*)가 x축과 만나는 점은 $\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ ……답

연구 ***1°*** [별해] (a) 직선 PQ의 방정식을 $y=b\left(-\frac{9}{4}<b<0\right)$라 하면, P, Q의 x좌표는 2차방정식 $x^2-3x=b$ …(*)의 두 실근이다.



이 두 근을 α, β라 하면, $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=9+4b$

$\therefore$ $\overline{PQ}=|\beta-\alpha|=\sqrt{9+4b}$

따라서 $\triangle OPQ=-\frac{1}{2}\sqrt{9+4b}\cdot b\ \left(-\frac{9}{4}<b<0\right)$이 최대가 되는 것은 이것을 제곱한 $S(b)=(\triangle OPQ)^2=\left(-\frac{1}{2}\sqrt{9+4b}\cdot b\right)^2=\frac{1}{4}(9+4b)b^2$이 최대일 때와 같다.

$\therefore$ $\frac{dS}{db}=\frac{9}{2}b+3b^2=\frac{3}{2}b(3+2b)$

β	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	(3)
$S'(\beta)$		$+$	0	$-$	
$S(\beta)$		↗	극대	↘	

증감표에 의해 $b=-\frac{3}{2}$일 때 $S(b)$는 극대이자 최대이다.

$\therefore$ 이 값을 (*)에 대입하여 정리하면

$2x^2-6x+3=0$

$\therefore$ $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ 그런데, Q의 x좌표는 $\frac{3}{2}$보다 크므로 $Q\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ \frac{-3}{2}\right)$ ……답

2° [별해] (a) 직선 PQ의 방정식을 $y=b\left(-\frac{9}{4}<b<0\right)$로 두면 P, Q의 x좌표는 2차방정식 $x^2-3x=b$의 두 실근이므로 $x=\frac{3\pm\sqrt{9+4b}}{2}$에서

$\overline{PQ}=\frac{3+\sqrt{9+4b}}{2}-\frac{3-\sqrt{9+4b}}{2}=\sqrt{9+4b}$ (이후의 풀이는 연구 *1°*와 같다.)

4. 수열 $\{a_n\}$은 부등식 $|a_{n+2}-a_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|a_{n+1}-a_n|$을 만족한다.

(a) $m>n$ (m과 n은 자연수)이면

$$a_{m+1}-a_n=\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1}-a_k)$$

임을 증명하라.

(b) $|a_{m+1}-a_n|<2|a_{n+1}-a_n|$ 임을 증명하라.

[배　　점] 15점(5점+10점)

[출제분야] 일반수학>방정식과 부등식>절대부등식
수 I >수열>$\sum$의 정의, 등비수열의 응용

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(a)				(b)			

[문제분석] (a)의 경우,

등식 A=B의 증명 ⇨ 복잡한 편에서 간단한 편으로!

에 따라 복잡한 형태인 우변의 $\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1}-a_k)$를 변형하여 간단한 형태인 좌변의 $a_{m+1}-a_n$으로 유도하는 것이 좋다.

(b)의 경우는 $\sum$로 표현된 $m-n+1$개의 항에 대하여 다음 절대값이 있는 절대부등식을 이용해야 하므로 다소 까다로울 것이다.

a, b가 실수일 때, $|a+b| \leqq |a|+|b|$

$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$ (단, 문자는 실수)

위 부등식을 다른 각도에서 관찰해 보면,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n}|a_i|$$

따라서 $\sum$와 $|\cdot|$을 교환했을 때, $|\sum| \leqq \sum|\cdot|$인 관계에 있다고 기억하면 다소 통속적이긴 해도 실용성은 있을 것이다.

모범해답 (a) $\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)+\cdots+(a_{m+1}-a_m)$

$=a_{m+1}-a_n$ (증명 끝)

(b) $|a_{m+1}-a_n|=\left|\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1}-a_k)\right|$ ($\because$ (a)에서)

$\leqq \sum_{k=n}^{m}|a_{k+1}-a_k|$ ⇦ 여기까지가 2점

$=|a_{n+1}-a_n|+|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{m+1}-a_m|$

그런데, 문제의 조건

$$|a_{n+2}-a_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|a_{n+1}-a_n|$$

로 부터

$$|a_{n+3}-a_{n+2}| \leqq \frac{1}{2}|a_{n+2}-a_{n+1}| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n+1}-a_n|$$

$$|a_{n+4}-a_{n+3}| \leqq \frac{1}{2}|a_{n+3}-a_{n+2}| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^3|a_{n+1}-a_n|$$

$$\vdots$$

$$|a_{m+1}-a_m| \leqq \cdots \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}|a_{n+1}-a_n|$$

$\Leftarrow |a_{m+1}-a_m| = |a_{n+(m-n+1)}-a_{n+(m-n)}|$ 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}$, 지수가 틀리면 −3점

$$\therefore\ |a_{m+1}-a_m| \leqq |a_{n+1}-a_n| + \frac{1}{2}|a_{n+1}-a_n| + \left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n+1}-a_n| + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}|a_{n+1}-a_n|$$

$$= \left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right\}|a_{n+1}-a_n|$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1-\frac{1}{2}}|a_{n+1}-a_n|$$

$$= 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}\right\}|a_{n+1}-a_n|$$

$$\leqq 2|a_{n+1}-a_n|$$

$$\therefore\ |a_{m+1}-a_m| \leqq 2|a_{n+1}-a_n| \qquad \text{(증명 끝)}$$

연구 이 문제는 다음 2가지 이유에서 입시 문제로는 다소 완성되지 못한 것 같은 느낌을 갖게 한다.
첫째, 주어진 수열의 각 항이 모두 같은 수로 되어 있다면(즉, $a_{n+1}=a_n$) 조건식

$$|a_{n+2}-a_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|a_{n+1}-a_n|$$

은 성립하지만 (b)의 부등식은 성립하지 않게 된다.

따라서 (b)의 물음은

『$|a_{m+1}-a_m| \leqq 2|a_{n+1}-a_n|$ 임을 증명하라』

와 같이 등호 '='까지도 포함되어야 한다.

둘째, (b)의 m, n 사이에도 $m>n$인 관계가 있어야 하므로 조건

『$m>n$ (m, n은 자연수)이면』

은 (a)번 앞에 놓여서 (b)까지도 그 조건 아래에서 풀도록 해야 타당할 것이다.

5. f는 $x \geqq 0$에서 다음과 같이 정의된 함수이다.

$$f(x)=\int_0^x |t-2|\,dt$$

두 직선 $y=0$, $x=4$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 면적을 구하라.

[배 점] 15점

[출제분야] 수 I > 적분 > 정적분으로 표시된 함수, 면적

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 먼저, 정적분으로 표시된 함수(x의 함수임에 유의)를 정확히 구해야 한다.

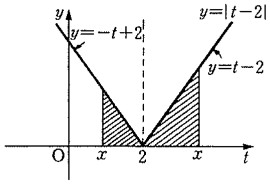
(i) $0 \leqq x < 2$일 때 ; 피적분함수는 $0 \leqq t \leqq x$에서

$$y=-t+2$$

(ii) $2 \leqq x$일 때 ; 피적분함수는

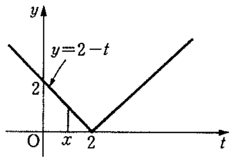
$$\begin{cases} 0 \leqq t < 2\text{에서} & y=-t+2 \\ 2 \leqq t \leqq x\text{에서} & y=t-2 \end{cases}$$

따라서 $x=2$를 기준으로 구간을 나누어서 풀어야 한다.



모범해답 (i) $0 \leqq x < 2$일 때 ;

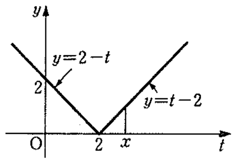
$$f(x)=\int_0^x (2-t)dt=\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$=-\frac{x^2}{2}+2x$$



(ii) $x \geqq 2$일 때 ;

$$f(x)=\int_0^2 (2-t)dt+\int_2^x (2-t)dt$$
$$=\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_0^2+\left[\frac{t^2}{2}-2t\right]_2^x$$
$$=-\frac{x^2}{2}-2x+4$$

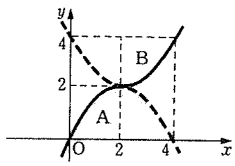
⇦ 여기까지가 5점



(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+2x & (0 \leqq x < 2) \\ -\dfrac{x^2}{2}-2x+4 & (x \geqq 2) \end{cases}$

⇦ $f(x)$의 함수식을 정확히 구하면 8점

따라서 구하는 면적을 S라 하면 오른편 그림에서,



$$S=\int_0^2\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)dx+\int_2^4\left(\frac{x^2}{2}-2x+4\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{6}+x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{6}-x^2+4x\right]_2^4=8$$ ……답

⇦ 면적의 계산식을 옳게 세우면 12점

연구 [별해] 위의 그림에서, A부분과 B부분의 면적이 같으므로 구하는 면적은 두 부등식 $2 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq 4$이 만드는 직사각형의 면적과 같다. $\therefore$ S$=2\times4=8$ ……답

6. n개의 수의 집합 $\{1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n\}$에서 동시에 3개의 수를 꺼낼 때,

(a) 꺼낸 3개의 수가 연속될 확률을 구하라.

(b) 꺼낸 3개의 수 중 두 수만이 연속될 확률을 구하라.

(c) 꺼낸 3개의 수 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률을 구하라.

[배　　점] 20점(7점+7점+6점)

[출제분야] 수 I, II 공통>확률·통계>경우의 수, 확률의 정의, 여사건의 확률
수 I, II 공통>수열>$\sum$의 계산

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(c)		(a)		(b)			

[문제분석] (a)에서는 연속한 세 정수를 일일이 열거하는 방법이 최선이다.
(b)에서는 세 수를 $x,\ y,\ z(x<y<z)$라 하고,
(i) $x,\ y$가 이웃하는 수일 때
(ii) $y,\ z$가 이웃하는 수일 때
의 두 가지 경우로 나누어 푸는 것이 좋다.
(c)에서는 (c)가 ((a) 또는 (b))의 여사건임을 인지하면 쉽게 해결된다.

모범해답 집합 $\{1,\ 2,\ 3, \cdots, n\}$에서 3개의 수를 꺼내는 경우의 수는

$$_{n}\mathrm{C}_{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

⇦ 여기까지가 2점

(a) 3개의 수가 연속이 되는 방법을 열거하면

$$(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 5), \cdots, (n-2,\ n-1,\ n)$$

⇦ 방법을 일일이 열거하지 않으면 −2점

따라서 3개의 수가 연속일 경우의 수는

$$n-2(\text{가지})$$

⇦ 여기까지가 5점

∴ 구하는 확률을 P_1이라 하면,

$$\mathrm{P}_1=\frac{n-2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\frac{6}{n(n-1)} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

(b) 꺼낸 3개의 수를 $x,\ y,\ z(x<y<z)$라 하자.

⇦ 문제가 3개의 수의 조합에 관한 것이므로 대·소를 지정할 수 있다. 순열은 임의로 대·소를 지정해서는 안된다.

(i) $x,\ y$만 연속인 경우 ; $(k,\ k+1,\ z)$꼴로서 z는 $z=k+3,\ k+4, \cdots, n$의 값을 취할 수 있다.

$$\therefore\ n-(k+3)+1=n-k-2(\text{가지})$$

$k=1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n-3$의 모든 경우에 대하여 각 경우의 수를 합하면

$$\sum_{k=1}^{n-3}(n-k-2)=\sum_{k=1}^{n-3}(n-2)-\sum_{k=1}^{n-3}k$$

$$=(n-2)(n-3)-\frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

$$=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

(ii) y, z만 연속인 경우 ; 위와 마찬가지로 하면 그 경우의 수는

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

∴ 구하는 확률을 P_2라 하면, (i), (ii)에 의해

$$P_2=\frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}\times 2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\frac{6(n-3)}{n(n-1)} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

(c) 꺼낸 3개의 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는 ((a) 또는 (b))의 여사건이므로,

(구하는 확률)$=1-(P_2+P_3)$

$$=1-\left\{\frac{6}{n(n-1)}+\frac{6(n-3)}{n(n-1)}\right\}$$

$$=\frac{n^2-7n+12}{n(n-1)}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ 여사건임을 언급하지 않고 풀면 −2점

⇦ 여기까지가 4점

연구 [별해] (b) (i) 연속한 두 수가 (1, 2)일 때 ;

나머지 한 수는 4, 5, ⋯, n에서 택해야 하므로, $n-3$(가지)

(ii) 연속한 두 수가 $(n-1, n)$일 때 ;

나머지 한 수는 1, 2, ⋯, $n-2$에서 택해야 하므로, $n-3$(가지)

(iii) 연속한 두 수가 (2, 3), (3, 4), ⋯, $(n-2, n-1)$일 때 ;

이들 $n-3$가지 경우에 대하여 나머지 한 수를 택하는 방법이 각각 $n-4$가지이므로 $(n-3)(n-4)$(가지)

이상에서 두 수만이 연속되는 모든 경우의 수는

$$2\times(n-3)+(n-3)(n-4)=(n-3)(n-2) \text{ (가지)}$$

$$\therefore \text{(구하는 확률)}=\frac{(n-3)(n-2)}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\frac{6(n-3)}{n(n-1)} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

합격포인트 ***1, 2, 4***의 (a)번과 ***5, 6***의 (a)번은 반드시 풀어야 한다. 계산력이 우수한 학생은 ***3, 4***번 중의 어느 하나를, 확률·통계에 자신이 있는 학생은 ***6***번을 풀어서 총점이 60점 정도면 합격권. 수학이 주 득점원이 학생은 6문제 중에서 5문제 정도 풀어서 총점이 70점 정도면 성공!

'79연세대 수학Ⅱ 해설과 풀이

1. $0<t<1$인 모든 수 t는 두 수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 $a<ta+(1-t)b<b$를 만족한다. f는 폐구간 $[a,\ b]$에서 정의되고 $f(ta+(1-t)b)=tf(a)+(1-t)f(b)$인 성질을 만족하는 함수이다.

이 때 f는 $[a,\ b]$에서 일차함수임을 증명하라.

[배　　점] 15점

[출제분야] 일반수학>함수>함수식의 계산, 1차함수

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 얼핏 어렵게 보이겠지만, 다음 예와 비교해 보면 착안점이 의외로 쉽게 떠오를 것이다.

예 모든 실수 t에 대하여 $f(2t+1)=3t-4$일 때, f는 1차함수임을 보여라.

풀이 $2t+1=x$로 두면, $t=\dfrac{x-1}{2}$

이것을 주어진 함수식에 대입하면,

$$f(x)=3\times\frac{x-1}{2}-4$$
$$=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}$$

$\therefore$ f는 1차함수이다. (증명 끝)

위 예로부터 어떤 idea가 떠오를 것이다. 즉,

$$f(\underbrace{ta+(1-t)b})=tf(a)+(1-t)f(b)$$

↓

x로 둔다. → t를 x로 표현 → 이것을 함수식에 다시 대입

의 과정을 거치면 자연스레 증명이 된다.

모범해답 $ta+(1-t)b=x$로 두면, $0<t<1$일 때 $a<x<b$

또, $a\neq b$, $(a-b)t+b=x$에서 $t=\dfrac{x-b}{a-b}$

이것을 주어진 함수식에 대입하면

$$f(x)=\frac{x-b}{a-b}\cdot f(a)+\left(1-\frac{x-b}{a-b}\right)\cdot f(b)$$
$$=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}\qquad\cdots\cdots(*)$$

그런데, 이 식은 $x=a$, b일 때도 성립한다.

⇦ 이것을 언급하지 않으면 −3점

$\therefore$ f는 구간 $[a,\ b]$에서 1차함수 또는 상수함수이다. (증명 끝)

연구 *1°* 문제에서 $f(a) \neq f(b)$라는 조건이 없다. 따라서 $f(a)=f(b)$인 경우를 생각하면 모범해답의 (*)에서

$$f(x)=0 \cdot x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(b)$$

가 되어 f는 1차함수가 아니라 상수함수가 된다.

따라서 이 문제는 $f(a) \neq f(b)$를 조건으로 주든지 또는 『f는 1차함수 또는 상수함수임을 증명하라』고 물음을 고쳐야 할 것이다.

2° [별해] $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$라 하고, 구간 (a, b)내의 임의의 값 c에 대하여 $\mathrm{C}(c, f(c))$라 하면,

$$c=ta+(1-t)b \quad (0<t<1)$$

인 t가 존재한다.

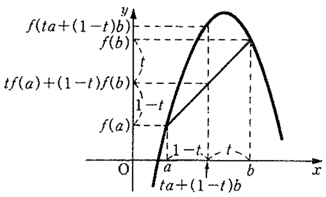
이 때, 문제의 조건으로부터 $f(c)=tf(a)+(1-t)f(b)$

$$\begin{aligned}(\text{직선 AC의 기울기})&=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\\&=\frac{tf(a)+(1-t)f(b)-f(a)}{ta+(1-t)b-a}\\&=\frac{(1-t)(f(b)-f(a))}{(1-t)(b-a)}\\&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(\text{직선 AC의 기울기})\end{aligned}$$

따라서 세 점 A, C, B는 일직선 상에 있다. 즉, 함수 f의 그래프는 선분 AB이다.

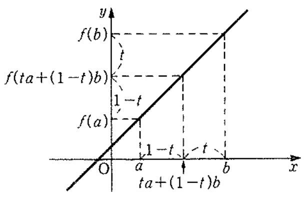
$\therefore$ f는 구간 $[a, b]$에서 1차함수 또는 상수함수이다. (증명 끝)

3° 위로 볼록한 함수의 그래프



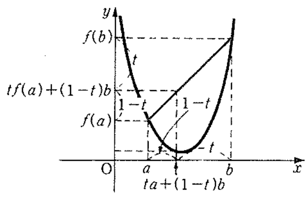
위로 볼록 ⇨ $f(ta+(1-t)b)>tf(a)+(1-t)f(b)$

직선



직선 ⇨ $f(ta+(1-t)b)=tf(a)+(1-t)f(b)$

아래로 볼록한 함수의 그래프



아래로 볼록 ⇨ $f(ta+(1-t)b)<tf(a)+(1-t)f(b)$

2. 다음 (　　)속에 알맞은 기호나 식을 써 넣어라.

로그함수 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq 1)$에서, x의 증분이 Δx이면 함수의 증분은 $\Delta y=\log_a \dfrac{x+\Delta x}{x}$이다. 이로부터 평균 변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\log_a \dfrac{x+\Delta x}{x}$를 얻는다. 여기서 $\dfrac{\Delta x}{x}$를 z로 바꾸어 놓으면 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\log_a($ (a) $)$가 된다. 또한 $\Delta x\to 0$일 때 $z\to 0$이므로, 양변에 극한 $\Delta x\to 0$을 취하면 도함수 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{x}($ (b) $)=\dfrac{1}{x}\log_a($ (c) $)$를 얻는다. 그런데, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{d\log_a x}{dx}=\dfrac{1}{x}($ (d) $)$이므로 $e=($ (e) $)$이다.

[배　　점] 15점(각3점)

[출제분야] 수Ⅱ>극한>초월함수의 극한(e의 정의)
수Ⅱ>미분>도함수의 정의, log함수의 도함수

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] e의 정의$(e=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}})$와 log함수의 도함수를 구하는 과정을 묻는 문제이다. 생각나는 대로 괄호를 채우지 말고, 뒤의 괄호에 넣을 내용까지도 고려하여 답안을 작성해야 한다.

모범해답 $f(x)=\log_a x$라 하면

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x\\&=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{1}{\Delta x}\log_a\frac{x+\Delta x}{x}\\&=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\qquad\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

$\dfrac{\Delta x}{x}=Z$로 두면 $\dfrac{1}{\Delta x}=\dfrac{1}{xZ}$

따라서 (*)에서,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{1}{xZ}\log_a(1+Z)\\&=\frac{1}{x}\log_a\boxed{(1+Z)^{\frac{1}{Z}}}\qquad\cdots\cdots(a)\end{aligned}$$

$\Delta x\to 0$일 때 $Z\to 0$이므로 양변에 극한 $\Delta x\to 0$를 취하면

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{x}\boxed{\log_a(1+Z)^{\frac{1}{Z}}}\qquad\cdots\cdots(b)$$

⇐ (b)에 $\log_a e$를 넣고 (c)에 e를 넣으면 다음

$$=\frac{1}{x}\log_a \boxed{\lim_{z\to 0}(1+Z)^{\frac{1}{Z}}} \quad \cdots\cdots(c)$$

그런데

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\boxed{\log_a e} \quad \cdots\cdots(d)$$

이므로

$$e=\boxed{\lim_{z\to 0}(1+Z)^{\frac{1}{Z}}} \quad \cdots\cdots(e)$$

답 (a) $(1+Z)^{\frac{1}{Z}}$ (b) $\log_a(1+Z)^{\frac{1}{Z}}$ (c) $\lim_{z\to 0}(1+Z)^{\frac{1}{Z}}$

(d) $\log_a e$ $\left(\text{또는 } \frac{1}{\log a}\right)$ (e) $\lim_{z\to 0}(1+Z)^{\frac{1}{Z}}$

( )를 채울 마땅한 내용이 없다. 그래도 (b), (c)를 위와 같이 답하면 각 2점

연구 *1°* 고교 과정에서는

$$e=\lim_{z\to 0}(1+Z)^{\frac{1}{Z}}$$

를 정의로 익힌 다음에, 이를 바탕으로 $y=\log_a x$의 도함수

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e$$

를 공부한다. 그런데 문제의 (d), (e)에서는 이 순서를 바꾸어 놓아 증명의 논리적 전개를 어렵게 하였다. 이 문제의 후반부를 다음과 같이 구성하여야 옳을 것이다.

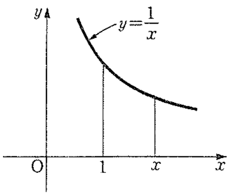
『…그런데 $e=$((d))이므로, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x}$((e))이다.』

2° 대학 과정에서 다루는 $\log_e x$의 정의를 활용하면 주어진 문제의 구성이 옳다고도 할 수 있다. Serge Lang이 지은 「Calculus」의 142～143쪽에 $\log x$에 관한 정의를 다음과 같이 하고 있다.

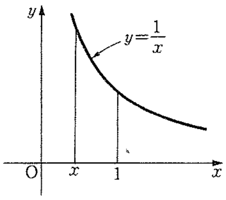
"We define a function $\log x$ to be the area under the curve $\frac{1}{x}$ between 1 and x if $x\geqq 1$, and the negative of the area of the curve $\frac{1}{x}$ between 1 and x if $0<x<1$. In particular, $\log 1=0$"

즉, $x>1$일 때는 오른편 (그림 *1°*)의 빗금 친 면적으로 $\log x$를 정의하고 $0<x<1$일 때는 오른편 (그림 *2°*)의 빗금 친 면적값에 마이너스(−)를 붙인 것을 $\log x$로 정의하고 있다.
($\log 1$은 $\log 1=0$로 정의한다.)

(그림 *1°*)



(그림 *2°*)



이 정의로 부터 $\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{x}$을 유도할 수 있고, 더 나아가 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$도 정의가 아니라 하나의 정리로 유도된다. 이런 관점에서 보면 주어진 문제의 구성이 꼭 틀렸다(?)고 볼 수는 없다.

3. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선이 이 쌍곡선의 점근선과 만나는 점을 Q, R이라고 하면 점 P는 선분 QR의 중점임을 증명하라.

[배 점] 20점

[출제분야] 수Ⅱ>타원과 쌍곡선>쌍곡선의 점근선, 쌍곡선의 접선

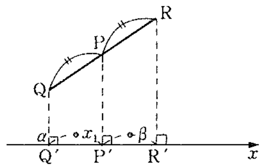
[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] (i) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선 ⇨ $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

(ii) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선 ⇨ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ ⇨ $y=\pm\frac{b}{a}x$

(i), (ii)의 두 가지 기본 내용을 이용하여 쌍곡선이 가지는 기하학적 특징 중의 하나를 증명하는 문제이다. 그런데 『점 P가 선분 QR의 중점임을 증명하라』고 하면 많은 학생들이 $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{PR}}$를 보이려고 의도하는 경향이 있다. 이렇게 하면 계산이 복잡하다.



오른편 그림에서

$$\overline{\mathrm{QP}}:\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{Q'P'}}:\overline{\mathrm{P'R'}}$$

이므로 $\overline{\mathrm{Q'P'}}=\overline{\mathrm{P'R'}}$를 보이는 것이 현명한 태도이다. 즉, P′이 Q′R′의 중점임을 보여야 하므로 P′, Q′, R′의 x좌표를 각각 $\alpha,\ x_1,\ \beta$라 할 때, $x_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$임을 보인다. 그리고 증명 과정 중에서 2차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하면 계산의 번거러움을 피할 수 있다.

모범해답 점근선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$에서

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad \cdots\cdots①$$

쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots②$$

⇦ ①, ②의 식을 제대로 구하면 3점

$$\therefore\ y=\frac{b^2(x_1x-a^2)}{a^2y_1}$$

이것을 ①에 대입하면,

$$\frac{b^4(x_1x-a^2)^2}{a^4{y_1}^2}=\frac{b^2x^2}{a^2}$$

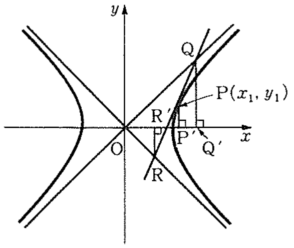
$$\therefore\ (b^2{x_1}^2-a^2{y_1}^2)x^2-2a^2b^2x_1x+a^4b^2=0$$

이 방정식의 두 근 $\alpha,\ \beta$는 Q, R의 x좌표이고,

$$\alpha+\beta=\frac{2a^2b^2x_1}{b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2} \quad \cdots\cdots ③$$

⇦ 여기까지가 10점

그런데 $P(x_1, y_1)$은 쌍곡선 위의 점이므로



$$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$$

$$\therefore\ b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2=a^2b^2 \quad \cdots\cdots ④$$

③, ④에 의해

$$\alpha+\beta=\frac{2a^2b^2x_1}{a^2b^2}=2x_1$$

⇦ 여기까지가 14점

이다. 따라서 P, Q, R에서 x축에 내린 수선의 발을 P′, Q′, R′이라 하면 P′는 선분 Q′R′의 중점이다. 그런데, $\overline{QP}:\overline{PR}=\overline{Q'P'}:\overline{P'R'}$이므로 P는 선분 QR의 중점이다. (증명 끝)

⇦ P′이 $\overline{Q'R'}$의 중점임을 언급하면 3점, 비가 같음을 언급하지 않으면 −3점

연구 [별해] 쌍곡선 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

$$\therefore\ y=\frac{x_1xb^2-a^2b^2}{y_1a^2} \quad \cdots\cdots ①$$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$ $\cdots\cdots$②

①, ②를 연립하면,

$$\frac{x_1xb^2-a^2b^2}{y_1a^2}=\pm\frac{b}{a}x$$

$$\therefore\ (bx_1\mp ay_1)x=a^2b$$

$$\therefore\ x=\frac{a^2b}{bx_1\mp ay_1}$$

$\therefore$ Q, R의 x좌표는 $\frac{a^2b}{bx_1+ay_1}$, $\frac{a^2b}{bx_1-ay_1}$이다.

그런데 $P(x_1, y_1)$은 쌍곡선 위의 점이므로,

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$$

$$\therefore\ b_1{}^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2=a^2b^2 \quad \cdots\cdots ③$$

따라서 Q와 R의 x좌표의 합을 간단히 하면,

$$\frac{a^2b}{x_1b-y_1a}+\frac{a^2b}{x_1b+y_1a}=\frac{a^2b(2x_1b)}{x_1{}^2b^2-y_1{}^2a^2}$$

$$=\frac{2x_1a^2b^2}{a^2b^2} \quad (\because ③에\ 의해)$$

$$=2x_1 \quad \cdots\cdots ④$$

즉, P, Q, R에서 x축에 내린 수선의 발을 P′, Q′, R′이라 하면 P′는 선분 Q′R′의 중점이다. 그런데, $\overline{QP}:\overline{PR}=\overline{Q'P'}:\overline{P'R'}$이므로 P는 선분 QR의 중점이다. (증명 끝)

4. 두 복소수 z_1, z_2의 편각은 각각 α, β이고 $z_1=2+i$이다.

$\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$가 되고 $|z_2|=|z_2-z_1|$이 되도록 z_2를 정하라.

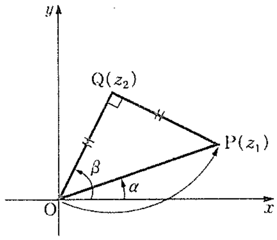
[배　　점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ > 복소수 > 복소수의 편각과 절대값, 복소수의 극형식

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
				■				

[문제분석] $\begin{cases} |z_2| \text{ ; 원점에서 } z_2\text{까지의 거리} \\ |z_2-z_1| \text{ ; } z_1\text{에서 } z_2\text{까지의 거리} \end{cases}$



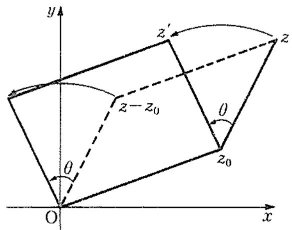
이므로

$$|z_2|=|z_2-z_1| \Rightarrow \overline{OQ}=\overline{PQ}$$

또, $\beta-\alpha=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle POQ=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\triangle$OPQ는 직각이등변삼각형이다.

$\therefore$ **Q(z_2)를 중심으로 원점 O를 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전이동한 점이 P(z_2)이다.**



이제, 다음 내용을 이용하면 z_2를 구할 수 있는 방정식이 얻어진다.

점 z를 점 z_0를 중심으로 각 θ만큼 회전한 점 z'

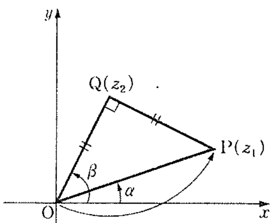
$$\Rightarrow z'=(z-z_0)(\cos\theta+i\sin\theta)+z_0$$

모범해답 복소평면 위에서 z_1, z_2를 나타내는 점을 각각 P, Q라 하면,

$|z_2|=|z_2-z_1|$에서 $\overline{OQ}=\overline{PQ}$

또, $\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$에서 $\angle POQ=\frac{\pi}{4}$이므로

$\triangle$OPQ는 직각이등변삼각형이다. …(*)



⇦ 여기까지가 5점

따라서 Q(z_2)를 중심으로 원점 O를 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전이동한 점이 P(z_1)이다.

⇦ 이것을 언급하지 않고 풀면 −3점

$$\therefore\ z_1=(0-z_2)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)+z_2$$
$$=-z_2i+z_2$$
$$=(1-i)z_2$$
$$\therefore\ z_2=\frac{z_1}{1-i}=\frac{2+i}{1-i}$$
$$=\frac{(2+i)(1+i)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

……답

연구 **1°** [별해] $z_1=2+i$에서 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$

$$\tan\beta=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\cdot 1}=3$$

따라서 $z_2=x+iy$ (x, y는 실수)라 두면 $\tan\beta=\frac{y}{x}=3$에서 $y=3x$ ······①

한편, $|z_2|=|z_2-z_1|$에서

$$x^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2$$

$$\therefore\ 4x+2y=5 \quad \cdots\cdots②$$

①, ②를 연립하여 풀면, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$

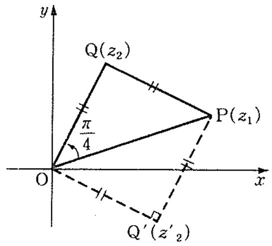
$$\therefore\ z_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

2° [별해] (모범해답에서 (*) 이후의 부분을 달리한 것이다.)

$$\overline{OP}=\sqrt{2}\,\overline{OQ}\ (\Leftrightarrow\ \overline{OP}^2=2\overline{OQ}^2)$$

따라서 $z_2=x+iy$ (x, y는 실수)로 두면

$$2(x^2+y^2)=5 \quad \cdots\cdots①$$



또, $\overline{OQ}=\overline{PQ}$에서

$$x^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2$$

$$\therefore\ 4x+2y=5 \quad \cdots\cdots②$$

①, ②를 연립하여 풀면,

$$x+iy=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \text{ 또는 } \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

이 중에서 y좌표가 큰 것이 z_2이므로, $z_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

3° [별해] (모범해답에서 (*) 이후의 부분을 달리한 것이다.)

$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{PQ}$에서 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

따라서 $z_2=x+iy$ (x, y는 실수)로 두면

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=(x,\ y)\cdot(x-2,\ y-1)$$

$$=x(x-2)+y(y-1)=0 \quad \cdots\cdots①$$

또, $\overline{OQ}=\overline{PQ}$에서

$$x^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2$$

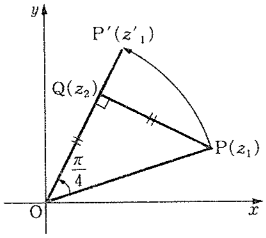
$$\therefore\ 4x+2y=5 \quad \cdots\cdots②$$

(이후는 연구 **2°**와 같다.)

4° [별해] (모범해답에서 (*) 이후의 부분을 달리한 것이다.)

$$\overline{OQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OP}$$

원점을 중심으로 점 $P(z_1)$을 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전이동한 점을 $P'(z_1')$ 이라 하면



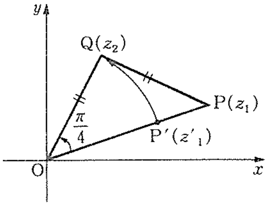
$$z_1'=z_1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=(2+i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+3i)$$

그런데, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OP'}$이므로

$$z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+3i)\right\}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$ ……답

5° [별해] (모범해답에서 (*) 이후의 부분을 달리한 것이다.)

$$|z_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}|z_1|$$



원점을 닮음의 중심으로 하여 $P(z_1)$을 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배한 점을 $P'(z_1')$ 이라 하면

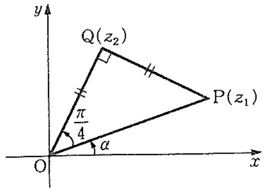
$$z_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(2+i)$$

이 점 $P'(z_1')$을 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전이동한 것이 $Q(z_2)$이므로

$$z_2=z_1'\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(2+i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$ ……답

6° [별해] (모범해답에서 (*) 이후의 부분을 달리한 것이다.)

$$\begin{cases} |z_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}|z_1|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ \arg(z_2)=\alpha+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$



이므로,

$$z_2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left\{\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

그런데, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로

$$z_2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+i\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$ ……답

5. 수열 $\{\mathrm{I}_n\}$의 n번째 항이 $\mathrm{I}_n=\int x^n e^x dx$일 때, I_n을 I_0를 써서 나타내어라.

[배 점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ>적분>부분적분법
수Ⅱ>수열>점화식

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 별 생각없이 부분적분법을 n번 계속하면 I_0에 도달할 수 있다.

$$\mathrm{I}_n=\int x^n e^x dx$$
$$=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$$
$$=x^n e^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)\int x^{n-2}e^x dx$$
$$=x^n e^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)x^{n-2}e^x-n(n-1)(n-2)\int x^{n-3}e^x dx$$
$$\vdots$$
$$=x^n e^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)x^{n-2}e^x-\cdots+(-1)^n n!\int e^x dx$$
$$=e^x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k {}_n\mathrm{P}_k x^{n-k}+(-1)^n n!\mathrm{I}_0$$

이것은 I_n의 식을 추정한 것이다. 따라서 이 추정이 모든 자연수 n에 대하여 옳은가를 증명해야 하는데, 이 증명이 다소 귀찮을 것이다. 따라서 모범해답과 같이 하는 것이 착상은 어렵지만 답안 작성에는 더 나을 것이다.

모범해답 $\mathrm{I}_n=\int x^n(e^x)'dx$

$$=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$$
$$=x^n e^x-n\mathrm{I}_{n-1}$$
$$\therefore\ \mathrm{I}_n+n\mathrm{I}_{n-1}=x^n e^x$$

⇐ 여기까지가 3점

$$\therefore\ \frac{\mathrm{I}_n}{n!(-1)^n}-\frac{\mathrm{I}_{n-1}}{(n-1)!(-1)^{n-1}}=\frac{x^n e^x}{n!(-1)^n}$$

따라서, $a_n=\dfrac{\mathrm{I}_n}{n!(-1)^n}$로 두면

$$a_n-a_{n-1}=\frac{x^n e^x}{n!(-1)^n}$$
$$\therefore\ a_n=a_0+(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\ (n\geqq 1)$$
$$=a_0+\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=\mathrm{I}_0+e^x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!(-1)^{k+1}}$$

$$\therefore\ \mathrm{I}_n=(-1)^n n!\,\mathrm{I}_0+e^x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!\,x^{k+1}(-1)^n}{(k+1)!\,(-1)^{k+1}}$$

$$=(-1)^n n!\,\mathrm{I}_0+e^x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}{}_n\mathrm{P}_{n-k-1}\,x^{k+1}\quad\cdots\cdots(*)$$

⇦ (*)를 답으로 써도 됨.

$$=(-1)^n n!\,\mathrm{I}_0+e^x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k\,x^{n-k}\quad\cdots\cdots\text{답}$$

⇦ (*)의 $\sum$부분을 전개하여 역순으로 합한 것이다.

연구 *1°* 추정만 하려 한다면 다음과 같은 방법도 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n&=x^ne^x-n\int x^{n-1}e^x dx\\&=x^ne^x-n\mathrm{I}_{n-1}\\&=x^ne^x-n\left\{x^{n-1}e^x-(n-1)\mathrm{I}_{n-2}\right\}\\&=x^ne^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)\mathrm{I}_{n-2}\\&=x^ne^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)\{x^{n-2}e^x-(n-2)\mathrm{I}_{n-3}\}\\&=x^ne^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)x^{n-2}e^x-n(n-1)(n-2)\mathrm{I}_{n-3}\\&\quad\vdots\\&=x^ne^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)x^{n-2}e^x-\cdots+(-1)^n n!\,\mathrm{I}_0\\&=e^x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{P}_k\,x^{n-k}+(-1)^n n!\,\mathrm{I}_0\end{aligned}$$

이것은 [문제분석]과 내용상 거의 같지만, 점화식 $\mathrm{I}_n=x^ne^x-n\mathrm{I}_{n-1}$에서 n대신 $n-1$을 대입하여 얻은 $\mathrm{I}_{n-1}=x^{n-1}e^x-(n-1)\mathrm{I}_{n-2}\cdots$ 등을 거듭 이용한 것이 다른 점이다.

2° 문제에서 I_n을 n번째 항이라고 지정하였으므로, I_0은 0번째(?) 항이 된다. 그러나 보통, 항의 순서는 첫번째 항부터 언급하므로 다소 이상한 표현이 되어 버린다.

따라서 문제의 서두를 『수열 $\{\mathrm{I}_n\}$을 $\mathrm{I}_n=\int x^ne^x dx\ (n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$로 정의할 때,…』와 같이 표현하는 편이 더 나을 것이다.

6. 수학 Ⅰ의 *6*번과 같다.

합격포인트 *2, 3, 4*번과 *6*의 (a)번을 풀어서 55점 정도면 무난하다. 수학이 주 득점원인 학생은 *1, 5, 6*번 중에서 어느 하나를 완벽히 풀어서 총점이 65점 정도면 성공!

'79 고려대 수학 I (120점/70분)

1. 항등적으로는 0이 아닌 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 등식 $f(x+y)=f(x)f(y)$를 만족할 때 (15점)

(1) $f(0)$의 값을 구하여라.

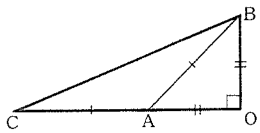
(2) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$임을 증명하여라.

2. x에 관한 이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 a의 값의 범위를 구하여라. (20점)

3. 오른편 그림에서 $\angle AOB=\angle R$, $\overline{OA}=\overline{OB}=1$, $\overline{AC}=\overline{AB}$ 일 때 (15점)

(1) BC의 길이를 구하여라.

(2) $\sin 22.5°$, $\sin\frac{5}{8}\pi$의 값을 각각 구하여라.



4. $\log_{10}(10-2x-x^2)=0$ ……①

$\log_{10}y=\frac{1}{2}+\log_{10}(x+4)$ ……②

일 때 (15점)

(1) x, y의 값을 각각 구하여라.

(2) $\sqrt{y-x}$의 값을 구하여라.

5. 두 사건 A, B가 서로 배반일 때, $P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(B)}{1-P(A)}$임을 증명하여라.

(단, $\overline{A}$는 A의 여사건을 나타낸다.) (15점)

6. a, b, c는 $1<a<b<c<9$인 정수이고, 수열 $0.\dot{a}$, $0.0\dot{b}$, $0.00\dot{c}$, … 는 등비수열이다.

이 때 다음 물음에 답하여라. (20점)

(1) a, b, c 사이의 관계식을 구하여라.

(2) a, b, c의 값을 각각 구하여라.

(3) 이 수열의 제4항을 순환소수로 표시하여라.

(4) 이 수열의 합을 구하고, 이것을 순환소수로 표시하여라.

7. 포물선 $y=x^2+2x+3$ 위의 점 $(2, 11)$에서의 접선이 포물선 $y=x^2+4x+a$에 접하도록 a의 값을 정하고, 이 때 이 두 포물선과 이 공통접선으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라. (20점)

'79 고려대 수학Ⅱ ($^{120점}/_{70분}$)

1. x에 관한 이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 a의 값의 범위를 구하여라. (20점)

2. 삼각형 ABC의 각 A, B, C 사이에 A : B : C=2 : 3 : 7의 관계가 있다. 각 A, B, C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 할 때 (15점)

(1) sinC의 값을 구하여라.

(2) $a : b : c$의 값을 구하여라.

3. 두 사건 A, B가 서로 배반일 때, $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(B)}{1-P(A)}$ 임을 증명하여라.

(단, $\overline{A}$는 A의 여사건을 나타낸다.) (15점)

4. a, b, c는 $1<a<b<c<9$인 정수이고, 수열 $0.\dot{a}$, $0.0\dot{b}$, $0.00\dot{c}$, $\cdots$ 는 등비수열이다. 이 때 다음 물음에 답하여라. (20점)

(1) a, b, c 사이의 관계식을 구하여라.

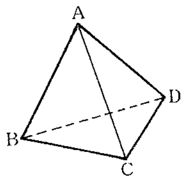
(2) a, b, c의 값을 각각 구하여라.

(3) 이 수열의 제4항을 순환소수로 표시하여라.

(4) 이 수열의 합을 구하고, 이것을 순환소수로 표시하여라.

5. $f(0)=0$이고 $f'(x)$가 증가함수이면, $x>0$일 때 $\dfrac{f(x)}{x}$가 증가함수임을 증명하여라. 여기서 어떤 함수 $g(x)$가 증가함수란 $x_1<x_2$이면 $g(x_1)<g(x_2)$임을 뜻한다. (15점)

6. 한 변의 길이가 a인 정사면체 ABCD의 꼭지점 A, B에서 면 BCD, 면 ACD에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′라 하고, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$라 할 때 (20점)



(1) 벡터 $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$를 각각 $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$로 나타내어라.

(2) 벡터 $\overrightarrow{AA'}$와 $\overrightarrow{BB'}$의 내적을 구하여라.

7. 함수 $f(x)=1-e^{-ax}$ $(a>0)$에서 (20점)

(1) $f'(x)$를 구하여라.

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$와 y축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

'79 고려대 수학 I 해설과 풀이

1. 항등적으로는 0이 아닌 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 등식 $f(x+y)=f(x)f(y)$를 만족할 때

(1) $f(0)$의 값을 구하여라.

(2) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$임을 증명하여라.

[배　　점] 15점(7점+8점)

[출제분야] 일반수학>함수>함수방정식에 의해 정의된 함수의 성질

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
				(1)	(2)			

[문제분석] 쉬워 보이면서도 까다로운 문제. "항등적으로는 0이 아닌 함수 $f(x)$"는 "$f(a)\neq 0$인 어떤 a가 존재한다"라는 뜻이다. 따라서, "항등적으로는 0이 아닌 함수 $f(x)$"라는 말을 "모든 a에 대해 $f(a)\neq 0$"는 뜻으로 받아들여 풀면 거의 점수를 얻을 수 없다.

즉 (1)의 풀이를

$$『f(1)=f(1+0)=f(1)\cdot f(0) \quad \therefore\ f(0)=1』$$

과 같이 해서는 절대 안된다. 왜냐하면, $f(0)=0$일 수도 있기 때문이다.

모범해답 (1) 문제의 조건에 따라 $f(a)\neq 0$인 실수 a가 존재한다.

이 a에 대하여,

$$f(a+0)=f(a)\cdot f(0)$$

$$\therefore\ f(a)=f(a)\cdot f(0)$$

$f(a)\neq 0$이므로 양변을 $f(a)$로 나누면 $f(0)=1$ ……답

> "$f(1)=f(1+0)$
> $=f(1)\cdot f(0)$
> $\therefore f(0)=1$"
> 과 같이 풀면 기껏해야 1, 2점

(2) 위의 a와 임의의 실수 x에 대하여

$$f(a)=f(x+(a-x))$$

$$=f(x)f(a-x)\neq 0$$

이므로 $f(x)\neq 0$임을 알 수 있다.

> ⇦ 여기까지가 4점

한편,

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

$$=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2\geq 0$$

그런데, 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이므로 $f\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0$

$$\therefore\ f(x)>0 \quad \text{(증명 끝)}$$

연구 $1°$ [수Ⅱ 과정] 위의 문제와 같은 조건을 가진 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 a^x 꼴이다.

(증명) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{f(h)-1\}}{h}$$

(1)에서 $f(0)=1$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\{f(h)-f(0)\}}{h}$$

$f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$가 존재하므로 이 값을 k라 하면,

$$f'(x)=kf(x)$$

$$\therefore\ \frac{f'(x)}{f(x)}=k\ (\because\ (2)\text{에서 } f(x)\neq0 \text{ 임을 알았다.})$$

양변을 x에 관하여 적분하면, $\ln|f(x)|=kx+c$

$$\therefore\ f(x)=e^{kx+c}$$

이 식의 양변에 $x=0$를 대입하면 $f(0)=e^c$

그런데 $f(0)=1$이므로 $1=e^c$

$$\therefore\ f(x)=e^{kx}$$

$e^k=a$로 두면, $a>0$이고 $f(x)=a^x$ (증명 끝)

$2°$ 위의 문제의 풀이를

『문제의 뜻에 맞는 함수 $f(x)$는 $f(x)=a^x$ $(a>0)$이므로,

(1) $f(0)=a^0=1$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $a^x>0$이므로 $f(x)>0$』

와 같이 풀면 다음 두 가지 이유에서 거의 점수를 얻을 수 없다.

① 문제에 '미분가능'의 조건이 없다.

② '미분가능'이라는 조건이 있다 해도 **연구** $1°$와 같은 증명을 답안지에 작성해야 하기 때문이다.

2. x에 관한 이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 a의 값의 범위를 구하여라.

[배　　점] 20점

[출제분야] 일반수학>함수>2차방정식의 근의 분리

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 2차방정식의 근의 분리에 관한 전형적인 문제이다. 그 풀이 과정을 소개하면 다음과 같다.

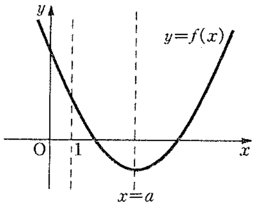
(i) 문제의 뜻에 맞게 그래프를 그린다.

(ii) 판별식 D를 조사한다.

(iii) 대칭축의 위치를 조사한다.

(iv) 경계값을 조사한다.

모범해답 주어진 방정식의 두 근이 모두 1보다 크기 위해서는 포물선 $f(x)=x^2-2ax+a+2$의 그래프가 오른편과 같이 직선 $x=1$의 오른쪽에서 x축과 서로 다른 두 점에서 만나거나 접해야 한다.



따라서 다음 세 가지 조건을 모두 만족해야 한다.

(i) $\frac{D}{4}=a^2-(a+2)\geq 0$

이것을 풀면, $a\geq 2$ 또는 $a\leq -1$ ……①

(ii) 대칭축 : $x=a>1$ ……②

(iii) $f(1)=1-2a+a+2=3-a>0$

$\therefore a<3$ ……③

①, ②, ③의 공통 범위를 구하면

$2\leq a<3$ ……답

⇐ (i)에서 $\frac{D}{4}>0$로 풀면 −3점

(i), (ii), (iii)의 어느 하나를 빠뜨리면 −5점

⇐ 답만 틀리면 −2점

연구 1° [별해] 2차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a+2$이고, 문제의 조건에서 $\alpha>1$, $\beta>1$이므로

(i) $\frac{D}{4}=a^2-(a+2)\geq 0$에서 $a\geq 2$ 또는 $a\leq -1$ ……①

(ii) $(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=2a-2>0$

$\therefore a>1$ ……②

(iii) $(\alpha-1)\cdot(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=a+2-2a+1=3-a>0$

$\therefore a<3$ ……③

①, ②, ③를 동시에 만족하는 a의 범위를 구하면 $2\leq a<3$ ……답

2° [별해] 2차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$ …(*)가 $x>1$에서 두 실근을 갖는다.

$\Longleftrightarrow$ $x^2+2=a(2x-1)$가 $x>1$에서 두 실근을 갖는다.

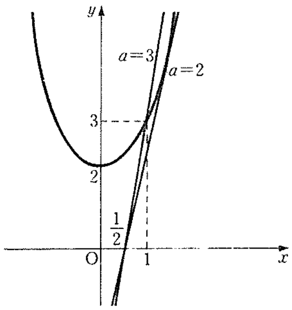
$\Longleftrightarrow$ $y=x^2+2$와 $y=a(2x-1)$ ……①이 $x>1$에서 접하거나 서로 다른 두 점에서 만난다.

두 그래프가 접하는 것은 (*)에서

$$D/4=a^2-(a+2)=0$$

일 때다.

$$\therefore\ a=2,\ -1$$



(i) $a=2$일 때 :

$$(*)\cdots\ x^2-4x+4=0$$

$$\therefore\ x=2\ (\text{중근})$$

따라서 $a=2$는 문제의 뜻에 합당하다.

(ii) $a=-1$일 때 :

$$(*)\cdots\ x^2+2x+1=0$$

$$\therefore\ x=-1\ (\text{중근})$$

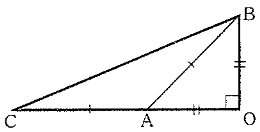
이것은 문제의 뜻에 어긋난다.

따라서 오른편 그림의 접선은 ①에서 $a=2$일 때다.

또, 직선이 (1, 3)을 지날 때 기울기를 구하여 ①과 비교하면 $6=2a$ $\therefore\ a=3$

따라서 위의 그림에서 $2\leqq a<3$ ……답

3. 오른편 그림에서 $\angle AOB = \angle R$, $\overline{OA}=\overline{OB}=1$, $\overline{AC}=\overline{AB}$ 일 때



(1) BC의 길이를 구하여라.

(2) $\sin 22.5°$, $\sin\frac{5}{8}\pi$의 값을 각각 구하여라.

[배　　점] 15점(5점+10점)

[출제분야] 일반수학>삼각함수>삼각함수의 정의 · 성질

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(1)	(2)	

[문제분석] 도형을 이용해서 sin22.5°의 값을 구하는 과정을 문제로 엮었다. (2)에서 분모를 유리화하는 과정에서 계산에 주의해야 한다. 그리고 이 문제처럼 (1), (2)로 주지 않더라도 sin22.5°의 값을 구할 수 있도록 전 과정을 알아 두어야 한다.

모범해답 (1) $\overline{AC}=\overline{AB}=\sqrt{2}$ $\overline{OA}=\sqrt{2}$

이므로 $\overline{OC}=\sqrt{2}+1$

직각삼각형 OBC에서 피타고라스정리를 쓰면

$$\overline{BC}=\sqrt{(\overline{OC})^2+(\overline{OB})^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+1^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

(2) $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로 $\angle ABC=\angle BCA$

그런데, $\angle OAB=\angle ABC+\angle BCA$이므로 $\angle OAB=2\angle BCA$

⇦ 이것을 언급하지 않으면 −3점

$$\therefore \angle BCA=\frac{1}{2}\angle OAB=22.5°$$

$$\therefore \sin 22.5°=\frac{\overline{BO}}{\overline{BC}}=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}}$$
$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ 여기까지가 5점

한편, $\sin\frac{5}{8}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$

⇦ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

$$=\cos\frac{\pi}{8}=\cos 22.5°$$

⇦ $\frac{\pi}{8}\rightarrow 22.5°$

$$=\frac{\overline{CO}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$
$$=(\sqrt{2}+1)\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

4. $\log_{10}(10-2x-x^2)=0$ ……①

$\log_{10}y=\frac{1}{2}+\log_{10}(x+4)$ ……②

일 때

(1) x, y의 값을 각각 구하여라.

(2) $\sqrt{y-x}$의 값을 구하여라.

[배 점] 15점(10점+5점)

[출제분야] 일반수학>지수 · 로그>log방정식

일반수학>수와 식>이중근호의 변형

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
(2)		(1)						

[문제분석] (1) ①에서 x값을 구하여 ②에 대입하면 쉽게 해결된다. 그리고

log문제 ⇨ 밑조건, 진수조건에 주의

를 명심해야 한다.

(2) 이중근호의 변형에 관한 다음의 초보적인 내용만 알면 된다.

$a>b>0$일 때, $\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ (복호동순)

모범해답 (1) ①에서 $10-2x-x^2=1$ ……(*)

$\therefore\ x^2+2x-9=0$

이것을 풀면,

$x=-1\pm\sqrt{10}$ ……③

②에서

$$\begin{aligned}\log_{10}y&=\log_{10}\sqrt{10}+\log_{10}(x+4)\\&=\log_{10}\sqrt{10}(x+4)\end{aligned}$$

$\therefore\ y=\sqrt{10}(x+4)$ ……④

⇦ 여기까지가 5점

그런데 진수조건에서

$10-2x-x^2>0,\ x+4>0$

⇦ 이것을 빠뜨리면 −5점

그런데 $x=-1\pm\sqrt{10}$은 (*)… $10-2x-x^2=1$의 두 근이므로 $10-2x-x^2>0$를 만족한다.

따라서 $x>-4$를 만족하는 것을 고르면 $x=-1+\sqrt{10}$

이 때 ④에서 $y=10+3\sqrt{10}$

답 $x=-1+\sqrt{10}$, $y=10+3\sqrt{10}$

(2) $$\begin{aligned}\sqrt{y-x}&=\sqrt{10+3\sqrt{10}-(-1+\sqrt{10})}\\&=\sqrt{11+2\sqrt{10}}\\&=1+\sqrt{10}\end{aligned}$$ ……답

5. 두 사건 A, B가 서로 배반일 때, $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(B)}{1-P(A)}$ 임을 증명하여라.

(단, $\overline{A}$는 A의 여사건을 나타낸다.)

[배 점] 15점

[출제분야] 수 I, II 공통>확률 · 통계>조건부확률

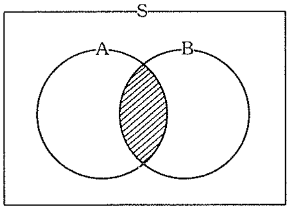
[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, $\mathbf{P(B|A)}$ 또는 $\mathbf{P_A(B)}$로 나타낸다.

그런데 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어난다는 것은 사건 A가 일어났을 때 사건 A∩B가 일어난다는 것과 같으므로 $P_A(B)$는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{P_A(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$
$$=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}} \quad (S : 표본공간)$$
$$=\frac{\mathbf{P(A\cap B)}}{\mathbf{P(A)}}$$



이 문제는 조건부확률에 관한 위의 계산법만 알면 쉽게 해결할 수 있다.

모범해답 $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}$ ······(*) ⇦ 여기까지가 5점

그런데, A, B가 배반이므로

$$A\cap B=\phi$$
$$\therefore\ \overline{A}\cap B=B-A$$
$$=B-(A\cap B)$$
$$=B-\phi$$
$$=B$$

⇦ 여기까지가 10점

$$\therefore\ P(\overline{A}\cap B)=P(B) \quad \cdots\cdots①$$

그리고

$$P(\overline{A})=1-P(A) \quad \cdots\cdots②$$

①, ②를 (*)에 대입하면,

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(B)}{1-P(A)} \quad (증명\ 끝)$$

---

6. a, b, c는 $1<a<b<c<9$인 정수이고, 수열 $0.\dot{a}$, $0.0\dot{b}$, $0.00\dot{c}$, $\cdots$ 는 등비수열이다.
이 때 다음 물음에 답하여라.

(1) a, b, c 사이의 관계식을 구하여라.

(2) a, b, c의 값을 각각 구하여라.

(3) 이 수열의 제4항을 순환소수로 표시하여라.

(4) 이 수열의 합을 구하고, 이것을 순환소수로 표시하여라.

[배　　점] 20점(5점+5점+5점+5점)

[출제분야] 수 I, II 공통>수열>등비수열
수 I, II 공통>극한>무한등비급수

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
(1)(4)	(3)			(2)				

[문제분석] 중학 과정에서 다루는 순환소수→분수, 분수→순환소수의 전환요령을 기초로 알고 있어야 한다.

$$0.\dot{a}=\frac{a}{9} \qquad 0.a\dot{b}=\frac{ab-a}{90} \qquad 0.ab\dot{c}\dot{d}=\frac{abcd-ab}{9900}$$

(1)에서는 세 수가 등차수열이나 등비수열을 이룰 때 쓰는 다음 등식을 이용한다.

a, x, b가 등차수열 $\Longleftrightarrow 2x=a+b$

a, x, b가 등비수열 $\Longleftrightarrow x^2=ab$

(2)는, $b^2=ac\ (1<a<b<c<9)$를 만족하는 정수해를 찾는 문제가 되므로 b를 기준으로

$$b=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

의 각 경우로 나누어 따져 보는 것이 최선!

(3)은 주어진 수열의 공비를 찾아내어

등비수열의 일반항 $a_n=ar^{n-1}$

을 이용한다.

(4)는 무한등비급수에 관한 다음 기초만 알면 쉽게 해결된다.

무한등비급수 $S=a+ar+ar^2+\cdots$ ⇒ $|r|<1$일 때 수렴하고,

그 값은 $S=\dfrac{a}{1-r}$

모범해답 (1) $0.\dot{a}=\dfrac{a}{9}$, $0.0\dot{b}=\dfrac{b}{90}$, $0.00\dot{c}=\dfrac{c}{900}$

$\therefore\ \dfrac{a}{9}, \dfrac{b}{90}, \dfrac{c}{900}$가 등비수열을 이루기 위해서는

$$\frac{\dfrac{b}{90}}{\dfrac{a}{9}}=\frac{\dfrac{c}{900}}{\dfrac{b}{90}}$$

⇐ a, x, b가 등비수열 ⇔ $x^2=ab$ 를 써도 되지만 여기서는 등비수열의 정의를 이용하였다. 즉 a, x, b가 등비수열 ⇔ $\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{b}$

$$\therefore \frac{b}{10a}=\frac{c}{10b}$$

$$\therefore b^2=ac$$ ……답

(2) b는 $1<a<b<c<9$인 정수이므로 $b=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$의 각 값을 취할 수 있다.

$b^2=ac$에서

(i) $b=3$일 때 ; $ac=9$
(ii) $b=4$일 때 ; $ac=16$
(iii) $b=5$일 때 ; $ac=25$
(iv) $b=6$일 때 ; $ac=36$
(v) $b=7$일 때 ; $ac=49$

⇦ (i)~(v)을 생략하면 -3점

이 중에서 $1<a<b<c<9$를 만족하는 정수 $a,\ b,\ c$를 찾으면

$$a=2,\ b=4,\ c=8$$ ……답

(3) (2)에 의해 주어진 수열은

$$\frac{2}{9},\ \frac{4}{90},\ \frac{8}{900},\ \cdots$$

즉, 첫째항이 $\frac{2}{9}$이고 공비가 $\frac{2}{10}\left(=\frac{1}{5}\right)$인 등비수열이므로 구하는 제4항을 a_4라 하면,

$$a_4=\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

⇦ $a_4=\frac{8}{900}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2$ 으로 계산해도 된다.

$$=\frac{16}{9000}$$

$$=\frac{17-1}{9000}$$

$$=0.001\dot{7}$$ ……답

⇦ 분수로 답하면 -1점

(4) 첫째항이 $\frac{2}{9}$이고 공비가 $\frac{1}{5}\left(-1<\frac{1}{5}<1\right)$인 무한등비급수이므로, 구하는 합은 수렴한다. 구하는 합을 S라 하면,

⇦ $-1<\frac{1}{5}<1$을 생략하면 -2점

$$S=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{5}{18}$$

$$=\frac{25}{90}$$

이것을 순환소수로 나타내면

$$S=\frac{27-2}{90}$$

$$=0.2\dot{7}$$ ……답

⇦ 분수로 답하면 -1점

7. 포물선 $y=x^2+2x+3$ 위의 점 $(2,\ 11)$에서의 접선이 포물선 $y=x^2+4x+a$에 접하도록 a의 값을 정하고, 이 때 이 두 포물선과 이 공통접선으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

[배　　점] 20점

[출제분야] 수 I >미분>접선의 방정식
수 I >적분>면적

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 형식은 한 문제로 되어 있지만 내용상으로는 세 단계로 구분할 수 있다.

STEP 1. $y=x^2+2x+3$ 위의 점 $(2,\ 11)$에서의 접선을 구한다.
STEP 2. $y=x^2+4x+a$에 접하도록 a의 값을 정한다.
STEP 3. 두 포물선과 공통접선으로 둘러싸인 도형의 면적을 구한다.

각 단계마다 여러 가지 방법이 있겠지만 가장 무난한 것을 소개하면 다음과 같다.

STEP 1. 곡선 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 위의 점 $(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{y_1})$에서의 접선 ⇨ $\boldsymbol{y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)}$
STEP 2. 포물선과 직선이 접한다. ⇨ 연립하여 $\mathbf{D=0}$
STEP 3. 면적을 구하는 대상 함수의 함수식이 달라짐에 따라 구간을 나누어서 면적을 구한다.

모범해답 $y=x^2+2x+3$ ……①에서

$$y'=2x+2 \qquad \therefore\ y'_{x=2}=6$$

따라서 ① 위의 점 $(2,\ 11)$에서의 접선의 방정식은

$$y-11=6(x-2)$$

$$\therefore\ y=6x-1 \qquad \cdots\cdots ②$$

⇦ 여기까지가 5점

이것이 포물선 $y=x^2+4x+a$ ……③에 접하기 위해서는 2차방정식 $x^2+4x+a=6x-1$이 중근을 가져야 한다.

$$\therefore\ x^2-2x+a+1=0\text{의 판별식 } D/4=1-(a+1)=0$$

$$\therefore\ a=0 \qquad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ 여기까지가 8점

이 때, ③…… $y=x^2+4x$

따라서 ②, ③의 접점의 x좌표는

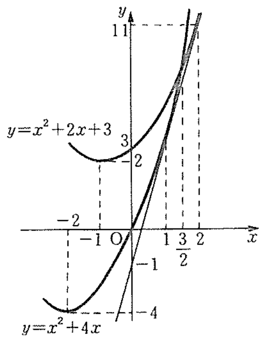
$x^2+4x=6x-1$에서

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore\ x=1$

한편, ①, ③의 교점의 x좌표는

$x^2+2x+3=x^2+4x$에서 $x=\dfrac{3}{2}$

따라서, 구하는 면적을 S라 하면 오른편 그림에서



$$S=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\{(x^2+4x)-(6x-1)\}dx$$

$$+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\{(x^2+2x+3)-(6x-1)\}dx$$ ⇐ 여기까지가 15점

$$=\int_{1}^{\frac{3}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}(x-2)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{1}^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$$ ……답

연구 *1°* [별해] $y=x^2+2x+3$ 위의 점 (2, 11)에서의 접선을 구하는 방법이 한두가지뿐인 것은 아니다. 가령 접선의 식을 $y-11=m(x-2)$로 두고 포물선의 식과 연립하여 D=0를 쓸 수도 있고 또, 2차곡선 위의 점에서의 접선 공식을 사용하여

$$\frac{11+y}{2}=2x+2\times\frac{2+x}{2}+3$$

⇐ 2차곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선
⇒ $x^2\to x_1x,\ y^2\to y_1y$
$x\to\frac{x_1+x}{2},\ y\to\frac{y_1+y}{2}$
상수는 그대로 둔다.

에서 $y=6x-1$와 같이 간단히 구할 수도 있다.

그러나 실전에서는 모범해답과 같이 하는 것이 식의 논리적 서술면이나 계산의 양에서 가장 나은 방법일 것이다.

2° [별해] 처음에 주어진 포물선 $y=x^2+2x+3$을 직선 $y=6x$를 따라 평행이동하면 계속 $y=6x-1$에 접할 것은 자명하다. ……(*)

$$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2 \quad \cdots\cdots①$$

$$y=x^2+4x+a=(x+2)^2+a-4 \quad \cdots\cdots②$$

①을 ②로 옮기려면 x축, y축의 양의 방향으로 각각 -1, $a-6$만큼 평행이동해야 한다.

$\therefore\ a-6=6\cdot(-1) \qquad \therefore\ a=0$ ⇐ $(-1,\ a-6)$을 $y=6x$에 대입

또, ①과 직선이 접하는 곳이 $x=2$에서 이므로

②와 직선이 접하는 곳은 $x=1$이 된다. ⇐ x축 방향으로 -1만큼 평행이동했으므로

그러나 이런 식의 논리로 문제를 해결하는 것은 (*)가 필요충분한 내용인지 설혹, 그렇다 하더라도 증명을 해야 할 대상은 아닌지 등등의 어려움때문에 결코 바람직한 것은 못된다.

합격포인트 *1*번을 제외하면 까다로운 문제는 없다. 시간의 제약으로 마지막 문제를 놓칠 가능성이 많다. 법학계열은 95점 이상 획득해야 합격 가능하고 그 외의 계열도 85~90점은 되어야 합격권. 수학이 주 득점원인 학생은 모든 문제를 풀어서 감점을 당하더라도 100점은 넘어야 만족!

'79 고려대 수학Ⅱ 해설과 풀이

1. 수학Ⅰ의 **2**번과 같다.

---

2. 삼각형 ABC의 각 A, B, C 사이에 A : B : C=2 : 3 : 7의 관계가 있다. 각 A, B, C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 할 때

(1) sinC의 값을 구하여라.

(2) $a : b : c$의 값을 구하여라.

[배　　점] 15점(8점+7점)

[출제분야] 일반수학>삼각함수>sine법칙
수Ⅱ>삼각함수>덧셈정리

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(1)	(2)						

[문제분석] (1) A : B : C=2 : 3 : 7과 A+B+C=180°에서 C=105°를 쉽게 얻을 수 있다.

$$\mathbf{105^\circ=45^\circ+60^\circ}$$

에 착안하면 sin105°는 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\frac{1}{6}\cos\beta+\cos\alpha\frac{1}{6}\sin\beta$$

를 써서 쉽게 해결할 수 있다.

(2) 각의 비 A : B : C를 주고 변의 비 $a : b : c$를 물었으므로 sine법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad (\text{R : 외접원의 반지름})$$

에서 얻은

$$a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$$

를 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

모범해답 (1) $A=2k$, $B=3k$, $C=7k$로 두면 $A+B+C=12k=180^\circ$ 에서 $k=15^\circ$　$\therefore C=7\times15^\circ=105^\circ$

$$\therefore \sin C=\sin105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)$$
$$=\sin45^\circ\cos60^\circ+\cos45^\circ\sin60^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ $C=180^\circ\times\frac{7}{12}=105^\circ$ 와 같이 풀어도 된다.
C=105°를 구하면 3점

(2) sine법칙에서　$a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$

그런데, $A=2k=30^\circ$, $B=3k=45^\circ$이므로

$$a : b : c=\sin30^\circ : \sin45^\circ : \sin C$$
$$=\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\sqrt{2} : 2 : 1+\sqrt{3} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ $2 : 2\sqrt{2} : \sqrt{2}+\sqrt{6}$ 과 같이 답하면 −1점

3～4. 수학Ⅰ의 5～6번과 같다.

5. $f(0)=0$이고 $f'(x)$가 증가함수이면, $x>0$일 때 $\dfrac{f(x)}{x}$가 증가함수임을 증명하여라.

여기서 어떤 함수 $g(x)$가 증가함수란 $x_1<x_2$이면 $g(x_1)<g(x_2)$임을 뜻한다.

[배　　점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ＞미분＞도함수의 응용, 평균값의 정리

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 이 문제를 대하는 거의 대부분의 학생들은 다음과 같이 풀게 마련이다.

(증명) $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x>0)$로 두면

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

그런데,

$$h(x)=xf'(x)-f(x)\ (x\geqq 0)$$

로 두면

$$h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)$$
$$=xf''(x)\geqq 0$$

$(\because f'(x)$는 증가함수이므로 $f''(x)\geqq 0)$

$\therefore h(x)$는 증가함수이다.

그런데

$$h(0)=0\cdot f'(0)-f(0)=0$$

이므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$

$\therefore x>0$일 때 $g'(x)>0$

$\therefore g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x>0)$는 증가함수이다. (증명 끝)

(왼편의 증명에서 틀린 점)

⇦ $f'(x)$가 미분가능하다는 조건이 없으므로 $f''(x)$를 생각할 수 없다.

⇦ $h'(x)\geqq 0$이라 해서 $h(x)$가 증가함수인 것은 아니다.
(반례 ; 상수함수)
따라서 $h(0)=0$이라 해도 $x>0$에서 $h(x)>0$라는 주장은 무리!

위의 증명의 틀린 점 중에서 두 번째 것은 대학 과정의 내용을 쓰면 해결할 수도 있지만 첫 번째 것은 극복할 수 없다. 착상이 매우 힘들겠지만 모범해답과 같이 평균값의 정리를 이용해야 풀 수 있다.

평균값의 정리

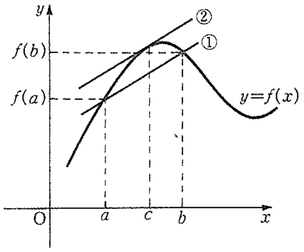
함수 $f(x)$가

(i) 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고

(ii) 개구간 (a, b)에서 미분가능일 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 개구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



①의 기울기 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

②의 기울기 $f'(c)$

①∥②에서 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

모범해답 $f'(x)$가 존재하므로 구간 $[0,\ x]$에서 함수 $y=f(x)$에 대하여 평균값의 정리를 적용하면

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\ (0<c<x)$$

를 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다.

$$\therefore\ f(x)=xf'(c) \qquad \cdots\cdots ①\ (\because\ f(0)=0\text{에서})$$

그런데 $f'(x)$는 증가함수이므로 $0<c<x$에서 $f'(c)<f'(x)$

$$\therefore\ x>0\text{이면 } xf'(c)<xf'(x)$$

이것과 ①에서 $f(x)<xf'(x)$

$$\therefore\ xf'(x)-f(x)>0 \quad \cdots\cdots ②$$

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$로 두면 $x>0$일 때

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0\ (\because\ ②\text{에서})$$

$\therefore\ x>0$에서 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$는 증가함수이다. (증명 끝)

← 문제에 주어진 증가함수의 정의를 이용

연구 [별해] $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}\ (x>0)$로 두면

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

구간 $[x_1,\ x_2]\ (0<x_1<x_2)$에서 $y=g(x)$에 대하여 평균값의 정리를 적용하면

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=g'(c)\ (0<x_1<c<x_2) \qquad \cdots\cdots(*)$$

를 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다.

그런데,

$$g'(c)=\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}$$

$$=\frac{f'(c)-\dfrac{f(c)}{c}}{c} \qquad \cdots\cdots ①$$

한편, 평균값의 정리에서

$$\frac{f(c)}{c}=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(k)\ (0<k<c)$$

을 만족하는 k가 적어도 하나 존재하므로 ①에서

$$g'(c)=\frac{f'(c)-f'(k)}{c}\ (0<k<c)$$

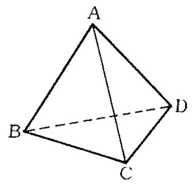
$$\therefore\ g'(c)>0\ (\because\ f'(x)\text{가 증가함수이므로 } 0<k<c\text{에서 } f'(k)<f'(c))$$

$$\therefore\ (*)\text{에서 } \frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}>0\ (0<x_1<x_2)$$

$$\therefore\ g(x_2)-g(x_1)>0$$

즉, $0<x_1<x_2$일 때 $g(x_1)<g(x_2)$이므로, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$는 $x>0$에서 증가함수이다. (증명 끝)

6. 한 변의 길이가 a인 정사면체 ABCD의 꼭지점 A, B 에서 면 BCD, 면 ACD에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′라 하고, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$라 할 때
(1) 벡터 $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$를 각각 $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$로 나타내어라.
(2) 벡터 $\overrightarrow{AA'}$와 $\overrightarrow{BB'}$의 내적을 구하여라.

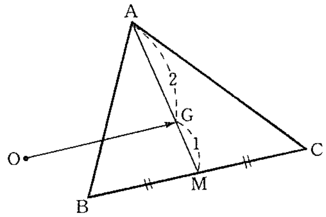


[배 점] 20점(10점+10점)
[출제분야] 수Ⅱ > 벡터 > 위치벡터, 내적
[난 이 도]

기본	표준	어려움
(2)	(1)	

[문제분석] △ABC에서 무게중심을 G라 하면

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA})$$
$$=\frac{1}{3}\left(2\times\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\overrightarrow{OA}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$



이것을 이용하면 (1)은 쉽게 해결된다.
(2)는 다음 내적의 정의로 쉽게 해결할 수 있다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \ (\theta\text{는 } \vec{a}\text{와 } \vec{b}\text{가 이루는 각})$$

모범해답 (1) 정사면체의 한 꼭지점에서 마주 보는 면에 내린 수선의 발은 그 면의 무게중심이다.

⇦ 이것을 생략하면 −2점

∴ A′은 정삼각형 BCD의 무게중심이고

$$\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AA'}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$ ……답

⇦ 여기까지가 5점

또, B′은 정삼각형 ACD의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$$

⇦ 여기까지가 7점

$$=\frac{1}{3}\{(-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\}$$
$$=\frac{1}{3}\{-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$
$$=\frac{-3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$ ……답

(2) $$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\frac{1}{3}(-3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$
$$=\frac{1}{9}\{\vec{b}+(\vec{c}+\vec{d})\}\cdot(-3\vec{b}+(\vec{c}+\vec{d})\}$$

$$=\frac{1}{9}\{-3\vec{b}\cdot\vec{b}+(\vec{c}+\vec{d})(\vec{c}+\vec{d})-2\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{d})\}$$

$$=\frac{1}{9}(-3\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{d}\cdot\vec{d}+2\vec{c}\cdot\vec{d}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{d})$$

⇦ 여기까지가 5점

그런데,

$$\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{d}=a^2$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=a^2\cos60^\circ=\frac{a^2}{2}$$

⇦ 이것을 생략하면 −3점

이므로

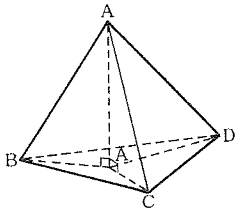
$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{9}(-3a^2+a^2+a^2+a^2-a^2-a^2)$$

$$=-\frac{2}{9}a^2 \quad \cdots\cdots \text{답}$$

연구 (1)의 풀이에서 이용한 성질

'정사면체의 한 꼭지점에서 마주 보는 면에 내린 수선의 발은 그 면의 무게중심이다.'
을 증명해 보자.

(증명) 오른편 그림과 같은 정사면체에서 꼭지점 A에서 마주 보는 면에 내린 수선의 발을 A′이라 하면



$$AA'\perp(\text{B, C, D를 포함하는 평면 }\alpha)$$

에서

$$AA'\perp A'B,\ AA'\perp A'C,\ AA'\perp A'D \quad \cdots\cdots①$$

한편, 정사면체이므로

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD} \quad \cdots\cdots②$$

또, △AA′B, △AA′C, △AA′D가 변 AA′을 공통변으로 가진다. ……③

①, ②, ③에서

△AA′B≡△AA′C≡△AA′D (RHS합동)

$\therefore\ \overline{A'B}=\overline{A'C}=\overline{A'D}$

∴ A′은 △BCD의 외심이다.

그런데 △BCD는 정삼각형이고 정삼각형의 외심은 무게중심과 일치하므로 A′은 △BCD의 무게중심이다. (증명 끝)

7. 함수 $f(x)=1-e^{-ax}$ $(a>0)$에서

(1) $f'(x)$를 구하여라.

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$와 y축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

[배　　점] 20점(5점+15점)

[출제분야] 일반수학>지수・로그>지수・log의 계산
수Ⅱ>미분>초월함수의 미분
수Ⅱ>적분>면적

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
(1)					(2)			

[문제분석] (1)은 도함수 공식만 적용하면 되는 단순한 문제이다.
(2)는

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$로 둘러싸인 면적

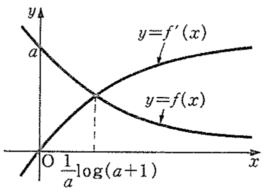
$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

임을 이용하는 문제로 논리는 단순하지만 계산이 문제!

마무리 계산 과정에서 $A^{\log_a B}=B^{\log_a A}$를 이용하느냐 못하느냐가 3점 정도의 비중을 차지한다.

모범해답 (1) $f(x)=1-e^{-ax}$에서 $f'(x)=ae^{-ax}$ ……답

(2) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$의 교점의 x좌표를 구하면



$$1-e^{-ax}=ae^{-ax}$$

에서 $(a+1)e^{-ax}=1$

그런데, $a>0$이므로 $e^{-ax}=\dfrac{1}{a+1}$

$$\therefore\ -ax=\log\frac{1}{a+1} \qquad \therefore\ x=\frac{1}{a}\log(a+1)$$

⇦ 여기까지가 5점

위의 그림에서

$$(\text{구하는 면적})=\int_0^{\frac{1}{a}\log(a+1)}\{ae^{-ax}-(1-e^{-ax})\}dx$$

⇦ 여기까지가 10점

$$=\left[-e^{-ax}-x-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{\frac{1}{a}\log(a+1)}$$

$$=\left\{-e^{-\log(a+1)}-\frac{1}{a}\log(a+1)-\frac{1}{a}e^{-\log(a+1)}\right\}-\left(-1-\frac{1}{a}\right)$$

⇦ 여기까지가 12점

$$=\left\{-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a}\log(a+1)-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a+1}\right\}+\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

⇦ $A^{\log_a B}=B^{\log_a A}$을 이용했다. 여기까지가 14점

$$=1-\frac{1}{a}\log(a+1)$$ ……답

합격포인트 5번과 7의 (2)번을 제외한 모든 문제를 풀어서 총점이 75점 이상이면 무난한 편이다. 수학이 주 득점원인 학생은 7의 (2)번을 풀고 감점도 덜 당하여 95점 정도 획득하면 성공!

'78 연세대 수학 I (150점/60분)

1. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 답을 써 넣어라. (60점)

(a) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$의 불연속점은 $\boxed{ⓐ}$, 치역은 $\boxed{ⓑ}$, 집합 기호로 표시된 그래프는 $\boxed{ⓒ}$이다. $g(x)=\sin x$일 때, 함수 $f(g(x))=\boxed{ⓓ}$이므로 이 함수의 정의역은 $\boxed{ⓔ}$이다.

함수 $h(x)=2^x$의 역함수는 $\boxed{ⓕ}$이며, $h(x)$의 그래프를 좌표평면 위에서 x축과 y축의 양의 방향으로 각각 2, 5단위만큼 평행이동시킨 도형은 함수 $\boxed{ⓖ}$의 그래프이다.

(b) 다항식 $x^4+2x^3-x^2+2x-2$를 계수가 유리수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{ⓗ}$, 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{ⓘ}$, 계수가 복소수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{ⓙ}$이다. (힌트 : $-x^2$항을 $-2x^2+x^2$으로 변형하라.)

(c) 집합 $X=\{a, b, c\}$의 부분집합들의 모임 T가 다음의 두 성질을 만족할 때, T를 X의 위상이라고 부르자.

(i) $X\in T$, $\phi\in T$

(ii) $A\in T$, $B\in T$이면, $A\cup B\in T$이고 $A\cap B\in T$

$T_1=\{X, \phi, \{a\}\}$는 (i), (ii)를 만족하므로 X의 위상이다. 그러나,

$T_2=\{X, \phi, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$는 $\boxed{ⓚ}$이기 때문에 X의 위상이 아니다.

$T_3=\{X, \{a\}, \{a, b\}\}$도 $\boxed{ⓛ}$이기 때문에 X의 위상이 아니고,

$T_4=\{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$도 $\boxed{ⓜ}$이므로 X의 위상이 될 수 없다.

X의 위상 가운데서 부분집합의 개수가 가장 적은 위상은 $\boxed{ⓝ}$이고, 가장 많은 위상은 $\boxed{ⓞ}$이다.

2. 다음 조건을 만족하는 곡선 C의 방정식이 $y=f(x)$일 때, 함수 $f(x)$를 구하고, C의 개형을 그려라. (20점)

(a) C 위에 놓인 임의의 점 $(k, f(k))$에서 C에 접하는 접선의 기울기는 $3k^2+2ak+b$이다. $(a>0)$

(b) 점 $(0, f(0))$에서 C에 접하는 접선과 곡선 C에 의하여 둘러싸인 도형의 면적은 $\dfrac{1}{12}$이다.

(c) $f(x)$는 $x=-1$에서 극값 3을 갖는다.

3. (a) $3(l^2+m^2+n^2)$과 $(l+m+n)^2$의 대소 관계를 구하라. (7점)

(b) 변수 x, y, z가 $x>0$, $y>0$, $z>0$, $xyz=1000$을 만족할 때, (a)의 결과를 이용하여 $(\log x-1)^2+(\log y-2)^2+(\log z-3)^2$이 최소가 되는 x, y, z의 값을 구하라. (단, log는 상용로그이다.) (8점)

4. 0이 아닌 실수 p, q에 대하여,

$$a_n=pa_{n-1}-qa_{n-2}\ (n\geqq 3),\ a_1=p,\ a_2=p^2-2q$$

로 정의된 수열을 $\{a_n\}$이라 하고, $x^2-px+q=0$의 두 근을 α, β라 하자. (20점)

(a) $a_n=\alpha^n+\beta^n$이 성립함을 수학적 귀납법을 써서 증명하라.

(b) $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$일 때, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$의 합을 p, q로 표시하라.

5. $A=\{(x,\ y)\,|\,|(k+1)x+ky|\leqq 1\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,|kx+(k-1)y|\leqq 1\}$일 때, $A\cap B$의 개형을 좌표평면 위에 도시하고, $A\cap B$의 면적이 실수 k의 값에 관계없이 일정함을 보여라. (15점)

6. 10개의 문자로 구성된 단어 STATISTICS에 관하여 다음 물음에 답하라.(20점)

(a) 이 단어의 모든 문자를 아무렇게나 일렬로 배열할 때, 세 모음이 이웃하게 배열될 확률을 구하라.

(b) 표본공간 {S, T, A, I, C}의 각 문자에 주어진 확률은, 위의 단어에 나타난 그 문자의 개수에 비례한다고 하자. 각 문자의 개수를 확률변수로 취했을 때, 이 확률변수의 확률분포와 표준편차를 구하라.

'78 연세대 수학 II ($\frac{150\text{점}}{60\text{분}}$)

1. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 답을 써 넣어라. (60점)

(a) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$의 불연속점은 $\boxed{ⓐ}$, 치역은 $\boxed{ⓑ}$, 집합 기호로 표시된 그래프는 $\boxed{ⓒ}$이다. $g(x)=\sin x$일 때, 함수 $f(g(x))=\boxed{ⓓ}$이므로 이 함수의 정의역은 $\boxed{ⓔ}$이다.

함수 $h(x)=2^x$의 역함수는 $\boxed{ⓕ}$이며, $h(x)$의 그래프를 좌표평면 위에서 x축과 y축의 양의 방향으로 각각 2, 5단위만큼 평행이동시킨 도형은 함수 $\boxed{ⓖ}$의 그래프이다.

(b) 다항식 $x^4+2x^3-x^2+2x-2$를 계수가 유리수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{ⓗ}$, 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{ⓘ}$, 계수가 복소수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{ⓙ}$이다. (힌트 : $-x^2$항을 $-2x^2+x^2$으로 변형하라.)

(c) 집합 $X=\{a, b, c\}$의 부분집합들의 모임 T가 다음의 두 성질을 만족할 때, T를 X의 위상이라고 부르자.

(i) $X\in T$, $\phi\in T$

(ii) $A\in T$, $B\in T$이면, $A\cup B\in T$이고 $A\cap B\in T$

$T_1=\{X, \phi, \{a\}\}$는 (i), (ii)를 만족하므로 X의 위상이다. 그러나,

$T_2=\{X, \phi, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$는 $\boxed{ⓚ}$이기 때문에 X의 위상이 아니다.

$T_3=\{X, \{a\}, \{a, b\}\}$도 $\boxed{ⓛ}$이기 때문에 X의 위상이 아니고,

$T_4=\{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$도 $\boxed{ⓜ}$이므로 X의 위상이 될 수 없다.

X의 위상 가운데서 부분집합의 개수가 가장 적은 위상은 $\boxed{ⓝ}$이고, 가장 많은 위상은 $\boxed{ⓞ}$이다.

2. 구간 $0\leqq x\leqq a$에서 정의된 함수 $f(x)$가 이 구간에서 양의 2계도함수를 갖는다고 하자.

곡선 $y=f(x)$ 위에 놓인 점 $P(k, f(k))$에서 이 곡선에 접하는 접선을 l이라 할 때, 이 곡선과 세 직선 : l, $x=0$ 및 $x=a$에 의하여 둘러싸인 도형의 개형을 도시하고, 이 도형의 면적을 최소되게 하는 k의 값을 구하라. (20점)

3. 복소평면 위에 4점 : $A(2i)$, $B(0)$, $C(1+i)$, $D(-1+i)$가 놓여 있을 때, 다음 조건을 만족하는 점 $P(x+iy)$의 자취를 구하라. (15점)

$$\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP})=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CP})$$

4. (a) 부등식 $\log_{\frac{1}{4}}(6x+2)\leqq\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\frac{1}{2}$을 풀어라. (10점)

(b) 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 미분계수의 정의를 써서 다음의 극한값을 구하라. (10점)

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n f(a)-a^n f(x)}{x^n-a^n}\ (n : \text{양의 정수})$$

5. 구간 $x\geqq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{-x}\cdot\sin x$를 극대 또는 극소가 되게 하는 x의 값을 $x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots$ $(x_1<x_2<x_3<\cdots)$이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|$의 합을 구하라.

(15점)

6. 10개의 문자로 구성된 단어 STATISTICS에 관하여 다음 물음에 답하라.(20점)

(a) 이 단어의 모든 문자를 아무렇게나 일렬로 배열할 때, 세 모음이 이웃하게 배열될 확률을 구하라.

(b) 표본공간 {S, T, A, I, C}의 각 문자에 주어진 확률은, 위의 단어에 나타난 그 문자의 개수에 비례한다고 하자. 각 문자의 개수를 확률변수로 취했을 때, 이 확률변수의 확률분포와 표준편차를 구하라.

'78연세대 수학 I 해설과 풀이

1-(a) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$의 불연속점은 $\boxed{\quad ⓐ \quad}$, 치역은 $\boxed{\quad ⓑ \quad}$, 집합 기호로 표시된 그래프는 $\boxed{\quad ⓒ \quad}$이다. $g(x)=\sin x$일 때, 함수 $f(g(x))=\boxed{\quad ⓓ \quad}$이므로 이 함수의 정의역은 $\boxed{\quad ⓔ \quad}$이다.

함수 $h(x)=2^x$의 역함수는 $\boxed{\quad ⓕ \quad}$이며, $h(x)$의 그래프를 좌표평면 위에서 x축과 y축의 양의 방향으로 각각 2, 5단위만큼 평행이동시킨 도형은 함수 $\boxed{\quad ⓖ \quad}$의 그래프이다.

[배　　점] 28점(각4점)

[출제분야] 일반수학>함수>함수의 여러 가지 정의, 합성함수, 역함수, 변환
수 I, II 공통>극한>함수의 연속성

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] ⓐ 함수의 연속·불연속은 보통 정의역 내에서만 따진다는 것을 인정해야 정답을 낼 수 있다. 즉, 정의역이 $\{x|1-x^2>0\}$임을 고려하여 불연속점을 답해야 한다.

ⓑ 정의역 $\{x|-1<x<1\}$에서 x^2이 취할 수 있는 값의 범위를 구하는 것이 출발점.

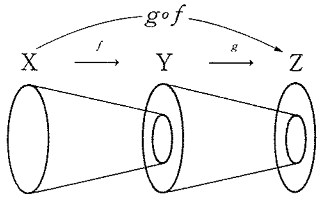
ⓒ 집합 X에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 집합

$$\mathbf{G}=\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f(x)})|\boldsymbol{x}\in \mathbf{X}\}$$

을 함수 $\boldsymbol{y=f(x)}$의 그래프라 정의한다.

ⓔ

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$



$g(f(x))$의 정의역은 $\boldsymbol{f(x)}$가 정의되고 또, $\boldsymbol{f(x)}$가 $\boldsymbol{g}$의 정의역에 들게 정해야 할 것이다.

※ 정의역이란 함수가 의미를 가질 수 있는 최대 범위 내에서 임의로 정의하면 되는 것이기 때문에 정의역을 묻는 것은 다소 모호한 물음이 된다. 그러나 출제자의 의도에 맞추어서 $g(f(x))$를 정의할 수 있는 최대 범위를 답하는 것이 수험생의 바른 태도라 하겠다.

ⓕ 함수 $y=f(x)$의 역함수를 구하는 단계

(STEP 1) : 주어진 함수가 일대일 대응인가를 확인한다.

(STEP 2) : $y=f(x)$를 x에 관하여 풀어 $\boldsymbol{x=g(y)}$꼴로 고친다.

(STEP 3) : $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$를 바꾸어 $y=g(x)$로 한다. (이 $g(x)$가 곧 $f^{-1}(x)$이다.)

이 때, f^{-1}의 정의역 ⇔ f의 치역

임을 명심하여, 필요할 때 f^{-1}의 정의역을 구할 수 있어야 한다.

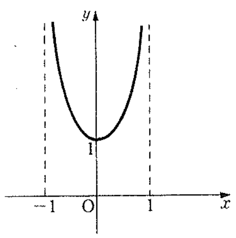
ⓖ 변환 F : $R^2 \to R^2$, $(x, y) \to (x+m, x+n)$

은 x축의 양의 방향으로 m만큼 y축의 양의 방향으로 n만큼 평행이동하는 변환이다. 곡선 $y=f(x)$는 이 변환 F에 의하여

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{F}} y-n=f(x-m)$$

로 옮겨진다.

모범해답 ⓐ 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$의 정의역은 (분모)$\neq 0$, (근호 안)$\geqq 0$로 부터 $1-x^2>0$ $\quad \therefore\ -1<x<1$



이 범위에서 $y=1-x^2$은 양의 값을 취하는 연속함수이므로 $y=\sqrt{1-x^2}$도 연속함수이다.

또, 구간 $(-1, 1)$에서 $y=\sqrt{1-x^2}$은 $y\neq 0$인 연속함수이므로

$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$도 연속이다. $\quad \therefore$ 불연속점은 없다. ……답

ⓑ $-1<x<1 \iff 0<1-x^2\leqq 1 \iff 0<\sqrt{1-x^2}\leqq 1$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\geqq 1 \qquad \therefore$ 구하는 치역은 $\{y|y\geqq 1\}$ ……답

ⓒ 그래프의 정의에 따라 $y=f(x)$의 그래프를 구하면

$$\left\{\left(x, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\middle| -1<x<1\right\} \quad \text{……답}$$

$$\left(\text{또는, } \left\{(x, y)\middle| y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1\right\}\right)$$

ⓓ $f(g(x))=f(\sin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}=\dfrac{1}{|\cos x|}=|\sec x|$

답 $|\sec x|$

ⓔ $\sin x$가 f의 정의역 $-1<x<1$를 만족해야 하므로

$-1<\sin x<1$에서 $\sin x\neq \pm 1 \qquad \therefore\ x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)

답 $\left\{x\middle| x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2},\ n\text{은 정수}\right\}$

ⓕ $y=2^x$을 x에 관하여 풀면 $x=\log_2 y$

따라서 구하는 역함수는 $y=\log_2 x$

답 $h^{-1}(x)=\log_2 x$

ⓖ $y=2^x$를 x축과 y축의 양의 방향으로 각각 2, 5만큼 평행이동한 도형은 $x\to x-2$, $y\to y-5$를 대입해야 하므로 $y-5=2^{x-2}$

$\therefore\ y=2^{x-2}+5$ ……답

단답형은 중간 과정은 무시되고 답이 맞으면 4점, 틀리면 0점으로 채점된다.

⇐ '$x=\pm 1$', '$x\leqq -1$', '$x\geqq 1$'와 같이 답하면 채점 기준에 따라 만점을 줄 수도 있다.

⇐ 치역은 집합이므로 '$y\geqq 1$'과 같이 답하면 0점

⇐ $\sec x$로 답하면 0점

⇐ $\left\{x\middle| x\neq \pm\dfrac{\pi}{2},\ \pm\dfrac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$로 답해도 된다.

⇐ $y=\log_2 x$라 답해도 된다.

1-(b) 다항식 $x^4+2x^3-x^2+2x-2$를 계수가 유리수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{\text{ⓗ}}$, 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{\text{ⓘ}}$, 계수가 복소수인 범위 내에서 인수분해하면 $\boxed{\text{ⓙ}}$이다. (힌트 : $-x^2$항을 $-2x^2+x^2$으로 변형하라.)

[배　　점] 12점(각4점)

[출제분야] 일반수학>수와 식>인수분해

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] ⓗ 주어진 힌트 : $-x^2 \to -2x^2+x^2$을 충분히 활용하면 공통인수를 발견할 수 있다.

ⓘ, ⓙ $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$의 실계수 범위, 복소계수 범위 인수분해는

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}\text{의 근이 } \boldsymbol{x=\alpha,\ \beta} \Rightarrow \boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

를 이용한다.

일반적으로, 다항식 $f(x)$가

$$\boldsymbol{f(\alpha)}\text{를 만족하면} \Rightarrow \boldsymbol{f(x)=(x-\alpha)g(x)}\ \ (g(x) : \text{다항식})$$

과 같이 인수분해된다 (인수정리)

모범해답 ⓗ $x^4+2x^3-x^2+2x-2$

$=x^4+2x^3-2x^2+x^2+2x-2$

$=x^2(x^2+2x-2)+(x^2+2x-2)$

$=(x^2+1)(x^2+2x-2)$ ……답

ⓘ $x^2+2x-2=0$의 두 근을 구하면 $x=-1\pm\sqrt{3}$이므로

$x^2+2x-2=\{x-(-1+\sqrt{3})\}\{x-(-1-\sqrt{3})\}$

$=(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

$\therefore\ x^4+2x^3-x^2+2x-2$

$=(x^2+1)(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$ ……답

ⓙ $x^2+1=0$의 두 근이

$$x=\pm i$$

이므로

$$x^2+1=(x+i)(x-i)$$

$\therefore\ x^4+2x^3-x^2+2x-2$

$=(x+i)(x-i)(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$ ……답

⇦ ⓗ를 틀리게 풀어서 ⓘ, ⓙ가 계속 틀린 학생은 각 -1점

연구 ⓗ에서 유리계수 범위 인수분해를

$$x^4+2x^3-x^2+2x-2=(x^2+1)(x^2+2x-2)$$

와 같이 하였다. 그러나 $f(x)=x^2+1$나 $g(x)=x^2+2x-2$이 유리계수 범위 내에서 더이상 인수분해가 되지 않음을 보이지 않았다.

필요하다면, $f(x)=x^2+1=0$, $g(x)=x^2+2x-2=0$이 유리근을 갖지 않음을 보임으로써 유리계수 범위 인수분해가 완료되었음을 보일 수 있다.

1-(c) 집합 $X=\{a, b, c\}$의 부분집합들의 모임 T가 다음의 두 성질을 만족할 때, T를 X의 위상이라고 부르자.

(i) $X \in T$, $\phi \in T$

(ii) $A \in T$, $B \in T$이면, $A \cup B \in T$이고 $A \cap B \in T$

$T_1=\{X, \phi, \{a\}\}$는 (i), (ii)를 만족하므로 X의 위상이다. 그러나,

$T_2=\{X, \phi, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$는 [ⓚ]이기 때문에 X의 위상이 아니다.

$T_3=\{X, \{a\}, \{a, b\}\}$도 [ⓛ]이기 때문에 X의 위상이 아니고,

$T_4=\{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$도 [ⓜ]이므로 X의 위상이 될 수 없다.

X의 위상 가운데서 부분집합의 개수가 가장 적은 위상은 [ⓝ]이고, 가장 많은 위상은 [ⓞ]이다.

[배 점] 20점(각4점)

[출제분야] 일반수학>집합과 명제>부분집합

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
				▒				

[문제분석] 대학 과정의 Topology(위상수학)에서 나오는 위상의 정의를 고교 과정의 범위에서 다루어 본 문제이다. 이렇게 교과 과정에서 다루지 않는 용어가 등장하는 문제를 다룰 때에는

첫째, 새로운 용어는 반드시 문제 글에 그 정의가 내려지기 마련이고

둘째, 그 정의는 교과 과정 내에서 이해할 수 있는 수준의 것

이라는 믿음을 가지고 당황하지 않도록 해야 한다.

모범해답 ⓚ 집합 T_2의 두 원소 $\{a, c\}$와 $\{b, c\}$의 교집합은

$$\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\}$$

이는 T_2의 원소가 아니다. 따라서 성질 (ii)를 만족하지 않는다.

답 $\{a, c\} \in T_2$, $\{b, c\} \in T_2$이지만 $\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\} \notin T_2$

ⓛ 집합 T_3의 원소 중에는 공집합 ϕ가 없기 때문에 성질 (i)을 만족하지 않는다.

답 $\phi \notin T_3$

ⓜ 집합 T_4의 두 원소 $\{a\}$와 $\{b\}$의 합집합은 $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$

이는 T_4의 원소가 아니다. 따라서 성질 (ii)를 만족하지 않는다.

답 $\{a\} \in T_4$, $\{b\} \in T_4$이지만 $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin T_4$

ⓝ X의 위상은 조건 (i)을 만족해야 하기 때문에 최소한 X와 ϕ는 원소로 가져야 한다. 그런데 집합 $\{X, \phi\}$는 마침 조건 (ii)를 만족하므로 X의 위상이다.

답 $\{X, \phi\}$

ⓞ X의 부분집합을 모두 모은 집합은

$\{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$이다. 그런데 이 집합은 마침 조건 (i)과 (ii)를 만족하므로 X의 위상이다.

답 $\{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$

T_1이 위상임을 말하려면 문제의 조건 (i), (ii)를 모두 만족함을 보여야만 한다. 그러나 T_2, T_3, T_4가 위상이 아님을 말하려면 (i), (ii) 중에서 어느 한 조건을 만족하지 않음을 보여줌으로써 충분하다.

⇦ 원소의 개수가 가장 적은 위상은 언제나 $\{X, \phi\}$이고 원소의 개수가 가장 많은 위상은 언제나

$P(X)=\{S | S \subset X\}$

2. 다음 조건을 만족하는 곡선 C의 방정식이 $y=f(x)$일 때, 함수 $f(x)$를 구하고, C의 개형을 그려라.

(i) C 위에 놓인 임의의 점 $(k, f(k))$에서 C에 접하는 접선의 기울기는 $3k^2+2ak+b$이다. $(a>0)$

(ii) 점 $(0, f(0))$에서 C에 접하는 접선과 곡선 C에 의하여 둘러싸인 도형의 면적은 $\frac{1}{12}$이다.

(iii) $f(x)$는 $x=-1$에서 극값 3을 갖는다.

[배 점] 20점

[출제분야] 수 I >미분>미분계수의 뜻, 접선의 방정식, 극대 · 극소
수 I >적분>면적

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 문제에 주어진 세 조건 각각에 대하여 그 대책을 세워 보자.

(i) 임의의 점 $(k, f(k))$에서 접선의 기울기가 $3k^2+2ak+b$ (k가 임의의 실수)

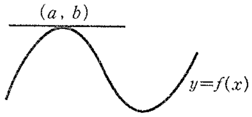
⇔ 임의의 점 $(x, f(x))$에서 접선의 기울기가 $3x^2+2ax+b$

⇨ $f'(x)=3x^2+2ax+b$

(ii) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선 ⇨ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
을 이용하여 접선의 방정식을 구한 다음 $y=f(x)$와 접선의 식을 연립하여 교점을 구함이 급선무! (∵ 교점이 적분구간을 이룬다.)

(iii) $y=f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.

⇨ $f'(a)=0$, $f(a)=b$



모범해답 (i)에서 임의의 k에 대하여 $f'(k)=3k^2+2ak+b$

$\therefore\ f'(x)=3x^2+2ax+b\ (a>0)$

$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (c는 상수) ……①

⇦ 여기까지가 5점

한편, 점 $(0, f(0))$에서 C에 접하는 접선의 방정식은

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

여기에 $f(0)=c$, $f'(0)=b$를 대입하면 $y=bx+c$ ……②

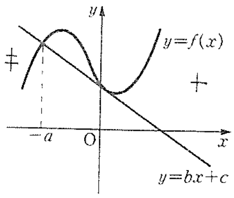
①, ②를 연립하면 $x^3+ax^2+bx+c=bx+c$

$\therefore\ x^3+ax^2=0 \qquad \therefore\ x=0$(중근), $x=-a$

조건 (ii)와 오른편 그림에서

$$\int_{-a}^{0}\{(x^3+ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx$$

$$=\int_{-a}^{0}(x^3+ax^2)dx$$



⇦ 교점의 x좌표 $x=0$ (중근), $x=-a(<0)$을 활용하여 그래프를 그린 것이다.

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3\right]_{-a}^{0}$$

$$=-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{3}a^4=\frac{1}{12}a^4=\frac{1}{12}$$

$\therefore\ a>0$에서 $a=1$ ……③

⇐ 여기까지가 10점

조건 (iii)에서 $f(-1)=3,\ f'(-1)=0$

$$\therefore \begin{cases} f(-1)=-1+a-b+c=3 & \cdots\cdots④ \\ f'(-1)=3-2a+b=0 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

③, ④, ⑤에서 $a=1, b=-1, c=2$

따라서 구하는 함수는 $f(x)=x^3+x^2-x+2$ ……답

⇐ 여기까지가 15점

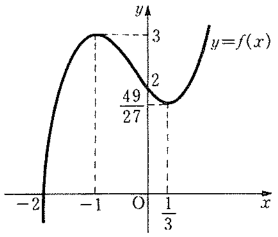
$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$이므로 증감표를 작성하면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극대값 $f(-1)=3$,

극소값 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{49}{27}$

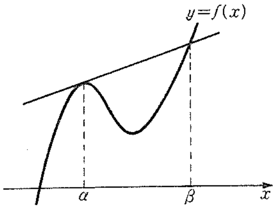
이 증감표에 따라 $C: y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른편과 같다.



⇐ 극값이나 절편 등을 생략하면 각 −1점

……답

연구 **1°** 오른편 그림과 같이 3차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$와 $x=\alpha$에서 접하는 직선이 $x=\beta$에서 이 곡선과 다시 만날 때, 곡선과 직선이 만나서 이루는 넓이는 $\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$이고, 또 α, β 사이에는 $\beta=-2\alpha-\frac{b}{a}$인 관계가 성립한다. 각자 유도해 보도록!



이 두 공식을 활용하면 모범해답에서 ①이후의 풀이를 쉽게 할 수 있을 것이다. 그러나 실전에서 이와 같이 푸는 것은 좋지 않다. 왜냐하면 채점자가 그런 내용을 공식의 범위라고 인정하지 않기 때문이다.

2° 모범해답은 조건 (i), (ii), (iii)을 순서대로 활용했지만, 순서를 바꾸어 적용해도 무방하다. 가령, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ……①에 조건 (iii)을 먼저 적용하면

$$f(-1)=-1+a-b+c=3,\quad f'(1)=3-2a+b=0$$

제2식에서 $b=2a-3$

이것을 제1식에 대입하면 $c=a+1$

$$\therefore\ ①에서\quad f(x)=x^3+ax^2+(2a-3)x+a+1$$

여기에 조건 (ii)를 적용하여 풀면 된다.

3. (a) $3(l^2+m^2+n^2)$과 $(l+m+n)^2$의 대소 관계를 구하라.

(b) 변수 x, y, z가 $x>0,\ y>0,\ z>0,\ xyz=1000$을 만족할 때, (a)의 결과를 이용하여 $(\log x-1)^2+(\log y-2)^2+(\log z-3)^2$이 최소가 되는 x, y, z의 값을 구하라. (단, log는 상용로그이다.)

[배 점] 15점(7점+8점)

[출제분야] 일반수학>방정식과 부등식>절대부등식
일반수학>지수·로그>log의 계산, 최대·최소

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(a)	(b)	

[문제분석] (a)는 두 수 A, B의 대·소 관계 ⇨ 일단은 A−B를 고려해 본다.
이 때, 그 결과에 등호가 포함되면 등호가 성립하는 경우를 밝혀 주어야 한다.
(b)는 문제의 지시에 따라 (a)를 이용하여 풀어야만 한다.

모범해답 (a) $3(l^2+m^2+n^2)-(l+m+n)^2$

$=2l^2+2m^2+2n^2-2(lm+mn+nl)$

$=(l-m)^2+(m-n)^2+(n-l)^2\geq 0$ ……①

$\therefore\ 3(l^2+m^2+n^2)\geq(l+m+n)^2$

등호가 성립하는 것은 ①에서 $l-m=m-n=n-l=0$일 때다.

답 $3(l^2+m^2+n^2)\geq(l+m+n)^2$ (단, 등호는 $l=m=n$일 때 성립)

(b) $3\{(\log x-1)^2+(\log y-2)^2+(\log z-3)^2\}$

$\geq\{(\log x-1)+(\log y-2)+(\log z-3)\}^2$ ($\because$ ①에서)

$=(\log xyz-6)^2=(\log 1000-6)^2=(3-6)^2=9$

$\therefore\ (\log x-1)^2+(\log y-2)^2+(\log z-3)^2\geq 3$

등호가 성립하는 것은 $\log x-1=\log y-2=\log z-3$일 때다.

이 등식의 값을 k로 두면

$\log x=k+1,\ \log y=k+2,\ \log z=k+3$

그런데, $xyz=1000$에서 $\log x+\log y+\log z=3$

$\therefore\ (k+1)+(k+2)+(k+3)=3 \quad \therefore\ k=-1$

$\therefore\ \log x=0,\ \log y=1,\ \log z=2 \quad \therefore\ x=1, y=10, z=100$ ……답

⇦ 등호를 빠뜨리면 −4점

⇦ 등호가 성립하는 경우를 명시하지 않으면 −2점

⇦ 여기까지가 3점

⇦ 여기까지가 5점

연구 이 문제와 같이 (a), (b)로 주어지지 않고, (b)만 주어지는 경우에는 어떻게 풀 것인가?

$(\ )^2+(\ )^2+(\ )^2$꼴의 최대·최소 ⇨ Cauchy−Schwarz부등식에 착안

의 요령에 따르면 다음 부등식을 얻는다.

$$\{(\log x-1)^2+(\log y-2)^2+(\log z-3)^2\}(1^2+1^2+1^2)$$
$$\geq\{1\cdot(\log x-1)+1\cdot(\log y-2)+1\cdot(\log z-3)\}^2$$

(단, 등호는 $\log x-1=\log y-2=\log z-3$일 때 성립한다.)

이후의 풀이는 모범해답과 같다.

4. 0이 아닌 실수 p, q에 대하여,

$$a_n=pa_{n-1}-qa_{n-2}\ (n\geq 3),\ a_1=p,\ a_2=p^2-2q$$

로 정의된 수열을 $\{a_n\}$이라 하고, $x^2-px+q=0$의 두 근을 α, β라 하자.

(a) $a_n=\alpha^n+\beta^n$이 성립함을 수학적 귀납법을 써서 증명하라.

(b) $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$일 때, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$의 합을 p, q로 표시하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I >수열>수학적 귀납법

수 I >극한>무한급수

[난 이 도]

기본		표준		어려움	
(b)				(a)	

[문제분석] (a)는 수학적 귀납법의 여러 형태 중의 하나를 묻고 있다. 수학적 귀납법의 기초는 다음 삼단논법이다.

삼단논법 : (A, A ⇒ B) ⇒B

[수학적 귀납법 1형식]

조건 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이려면,

(i) '$p(1)$이 성립한다.'

(ii) 모든 자연수 k에 대하여

'$p(k)$가 성립하면 $p(k+1)$이 성립한다.'

의 두 가지를 보여야 한다. 그러면 아래와 같이, 삼단논법의 반복에 의하여 조건 $p(n)$이 n이 자연수로서 무한히 커지더라도 여전히 성립함을 보장받는다.

$$\left.\begin{array}{l}p(1)\\p(1)\Rightarrow p(2)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}p(2)\\p(2)\Rightarrow p(3)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}p(3)\\p(3)\Rightarrow p(4)\end{array}\right\}\Rightarrow\cdots$$

이렇게 수학적 귀납법은 마치 도미노 게임처럼 연쇄적으로 일어난다. 그러나, 수학적 귀납법은 위 형식 외에도 다른 여러 형식이 있다. 그 중 몇개를 소개하면 다음과 같다.

[수학적 귀납법 2형식]

조건 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이려면,

(i) '$p(1)$, $p(2)$가 성립한다.'

(ii) 모든 자연수 k에 대하여

'$p(k)$, $p(k+1)$이 성립하면 $p(k+2)$가 성립한다.'

의 두 가지를 보이면 된다. 그러면 다음 연쇄반응에 의하여 조건 $p(n)$은 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 확인할 수 있다.

$$\left.\begin{array}{l}p(1)\\p(2)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}p(3)\\p(2)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}p(4)\\p(3)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}p(5)\\p(4)\end{array}\right\}\Rightarrow\cdots$$

주어진 문제는 바로 이 2형식을 사용해야 해결된다. 왜냐하면 주어진 점화식이 삼항점화식이기 때문이다.

[수학적 귀납법 3형식]

조건 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이려면,

(i) '$p(1)$이 성립한다.'

(ii) 모든 자연수 k에 대하여

'$p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $\cdots$, $p(k)$가 성립하면 $p(k+1)$이 성립한다.'

의 두 가지를 보이면 된다. 그러면 다음 연쇄반응에 의하여 조건 $p(n)$은 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 확인할 수 있다.

$$p(1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p(2) \\ p(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p(3) \\ p(2) \\ p(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p(4) \\ p(3) \\ p(2) \\ p(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots$$

(b)는 무한등비급수에 관한 다음 공식만 알면 된다.

무한등비급수 $S=a+ar+ar^2+\cdots$

⇨ $|r|<1$이면 수렴하고 그 값은 $S=\dfrac{a}{1-r}$

모범해답 (a) (i) α, β는 $x^2-px+q=0$의 두 근이므로 $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$

$$\therefore \begin{cases} a_1=p=\alpha+\beta \\ a_2=p^2-2q=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2 \end{cases}$$

$\therefore$ $a_n=\alpha^n+\beta^n$은 $n=1$, $n=2$일 때 성립한다.

⇦ 여기까지가 3점

(ii) $n=k$, $k+1$(k는 자연수)일 때 $a_n=\alpha^n+\beta^n$이 성립한다고 하면,

$$a_k=\alpha^k+\beta^k, \quad a_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ a_{k+2}&=pa_{k+1}-qa_k=p(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-q(\alpha^k+\beta^k) \\ &=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k) \\ &=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2} \end{aligned}$$

$\therefore$ $a_n=\alpha^n+\beta^n$은 $n=k+2$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $a_n=\alpha^n+\beta^n$은 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 알 수 있다. (증명 끝)

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha^k+\beta^k)$

⇦ 이 과정을 생략하면 -3점, 수렴조건 $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$을 빠뜨려도 -3점

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k+\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k \quad (\because\ |\alpha|<1,\ |\beta|<1\text{이므로})$$

$$=\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\beta}=\frac{\alpha(1-\beta)+\beta(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

$$=\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{p-2q}{1-p+q}$$ ……답

⇦ (a)를 풀지 못했어도 (b)를 제대로 풀면 만점을 준다.

5. $A=\{(x, y) \mid |(k+1)x+ky| \leqq 1\}$, $B=\{(x, y) \mid |kx+(k-1)y| \leqq 1\}$일 때, $A \cap B$의 개형을 좌표평면 위에 도시하고, $A \cap B$의 면적이 실수 k의 값에 관계없이 일정함을 보여라.

[배 점] 15점

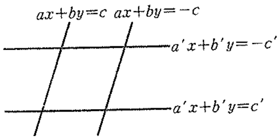
[출제분야] 일반수학>도형의 방정식>부등식의 영역, 직선 사이의 위치 관계, 자취

[난 이 도]

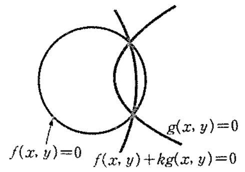
기본			표준			어려움		

[문제분석] k의 값이 미정이므로 $A \cap B$의 개형도 확정되어 있지 않다. 따라서 개형을 그리라는 요구에 당황하기 쉽다. 그러나 다음 *1°*, *2°*의 내용에 착안하면 그렇게 어려운 것도 아니다.

1° (i) 두 부등식 $|ax+by| \leqq c$, $|a'x+b'y| \leqq c'$으로 나타나는 영역 ⇨ 평행사변형의 둘레와 내부 $\left(\text{물론, } \dfrac{a'}{a} \neq \dfrac{b'}{b}\right)$



(ii) 만나는 두 도형 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$에 대하여 도형 $f(x, y)+kg(x, y)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$의 교점을 지난다.



따라서 집합 A를 정의하는 식에서 경계의 일부를 검토해 보면,

$$(k+1)x+ky=1 \Leftrightarrow k(x+y)+x-1=0$$

∴ k의 값에 관계없이 $x+y=0$, $x-1=0$를 만족하는 점 $(1, -1)$을 지난다.

다음 요령을 기억해 두면 편리할 것이다.

1문자의 미정계수를 포함한 도형 ⇨ 정점 지나는 도형

2° $A \cap B$의 개형을 정확히 그리기 위해서는 평행사변형의 꼭지점을 찾아야 한다. 이 때 꼭지점 중에서 일부가 $(\alpha(k), \beta(k))$로 표현될 것이다.

(∵ 직선들이 미정계수로 k를 가지고 있으므로)

이 때, 매개변수 k를 소거하여 이 꼭지점이 존재하는 도형을 찾아주어야 한다.

그리고 이 문제를 마무리하려면 중학교에서 배움직한 다음 내용을 이용해야 한다.

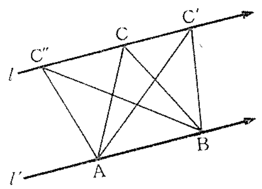
평행한 두 직선 l, l'과

l 위의 점 C, C′, C″ …

l' 위의 점 A, B

에 대하여

$$\triangle ABC = \triangle ABC' = \triangle ABC''$$



이렇게 어떤 학문이든 간에 기초를 많이 이해하고 활용하는 것이 필요하다.

모범해답 집합 $A\cap B$의 원소는 다음 두 부등식을 만족해야 한다.

$$\begin{cases} -1\leqq(k+1)x+ky\leqq 1 \\ -1\leqq kx+(k-1)y\leqq 1 \end{cases}$$

따라서 $A\cap B$는 2쌍의 평행한 직선

$$(k+1)x+ky=-1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$(k+1)x+ky=1 \quad \cdots\cdots ②$$

과

$$kx+(k-1)y=-1 \quad \cdots\cdots ③$$
$$kx+(k-1)y=1 \quad \cdots\cdots ④$$

로 둘러싸인 평행사변의 둘레와 내부이다.

$$① \Leftrightarrow k(x+y)+x+1=0$$
$$③ \Leftrightarrow k(x+y)-y+1=0$$

$\therefore$ ①, ③은 k에 관계없이 $P(-1, 1)$을 지난다.

⇐ ①∥②, ③∥④이므로 ①, ③의 교점, ②, ④의 교점을 구하였다.

$$② \Leftrightarrow k(x+y)+x-1=0$$
$$④ \Leftrightarrow k(x+y)-y-1=0$$

$\therefore$ ②, ④는 k에 관계없이 $R(1, -1)$을 지난다.

①, ④를 연립하여 풀면 $x=2k-1,\ y=-2k-1$

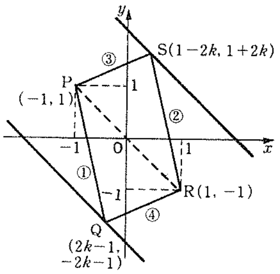
(①, ④의 교점은 $Q(2k-1, -2k-1)$)

여기서 k를 소거하면 $x+y=-2$

$\therefore$ ①, ④의 교점 $Q(2k-1, -2k-1)$은 항상 $x+y=-2$ 위에 있다.

⇐ ①−④ : $x+y=-2$ 에서 ①, ④의 교점은 $x+y=-2$ 위에 있음을 쉽게 구할 수 있다. 그러나 이를 이해하는 학생은 많지 않을 것이기 때문에 왼편과 같이 풀었다.

이상에서 얻은 내용을 종합하여 $A\cap B$의 개형을 도시하면 오른편과 같다.



그런데 Q는 직선 $PR(\Leftrightarrow y=-x)$에 평행인 직선 $y=-x-2$ 위를 움직이므로 Q에서 직선 PR에 이르는 거리는 k에 관계없이 늘 일정하다.

$\therefore$ $\triangle PQR$의 면적은 k에 관계없이 일정하다.

따라서 ($A\cap B$의 면적)$=2(\triangle PQR)$에서 $A\cap B$의 면적도 k에 관계없이 일정하다. (증명 끝)

연구 [별해] $A\cap B$의 면적을 실제로 구해 보면, $Q(2k-1, -2k-1)$에서 직선 $PR(\Leftrightarrow x+y=0)$에 이르는 거리가

$$\frac{|(2k-1)+(-2k-1)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

이고, $\overline{PR}=2\sqrt{2}$이므로

$$(A\cap B\text{의 면적})=2(\triangle PQR)$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)=4$$

즉, $A\cap B$의 면적은 k의 값에 관계없이 일정한 값 4를 가진다.

6. 10개의 문자로 구성된 단어 STATISTICS에 관하여 다음 물음에 답하라.

(a) 이 단어의 모든 문자를 아무렇게나 일렬로 배열할 때, 세 모음이 이웃하게 배열될 확률을 구하라.

(b) 표본공간 {S, T, A, I, C}의 각 문자에 주어진 확률은, 위의 단어에 나타난 그 문자의 개수에 비례한다고 하자. 각 문자의 개수를 확률변수로 취했을 때, 이 확률변수의 확률분포와 표준편차를 구하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I, II 공통>확률 · 통계>경우의 수, 확률의 정의, 확률분포, 표준편차

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		(a)			(b)			

[문제분석] (a)에서는 10개의 문자를 모두 다른 것으로 보아 푸는 것이 좋다. 즉, 10개의 문자를

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ \boxed{I_1,\ I_2,\ A,}\ C$$

로 보아

이를 일렬로 배열하는 경우의 수는 10!

모음 A, I_1, I_2가 이웃하는 경우의 수는 $8!\times3!$

임을 이용하면 된다.

(b)에서는

(i) 확률변수의 대상을 정확히 인지한다. ⇦ 여기서는 각 문자의 개수이다.

(ii) 확률변수가 취할 수 있는 값을 구한다. ⇦ 여기서는 X=1, 2, 3

(iii) 확률변수의 각 값에 대하여 대응하는 확률을 구한다. ⇦ $\begin{cases} P(X=1)=P(A \text{ 또는 } C)=\frac{2}{10} \\ P(X=2)=P(I)=\frac{2}{10} \\ P(X=3)=P(S \text{ 또는 } T)=\frac{6}{10} \end{cases}$

의 차례에 따라 확률분포를 구하고 이로부터 평균, 표준편차를 구한다.

모범해답 (a) 주어진 10개의 문자를

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ I_1,\ I_2,\ A,\ C$$

로 보면 이를 일렬로 배열하는 경우의 수는 10!이고, 세 모음 A, I_1, I_2가 인접하는 배열의 수는 $8!\times3!$

$$\therefore \text{ 구하는 확률은 } \frac{8!\times3!}{10!}=\frac{1}{15} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ A, I_1, I_2를 묶어서 하나로 보면 총 8문자이므로 이 배열 방법의 수가 8!
A, I_1, I_2의 배열 방법의 수가 3!

(b) 각 문자의 개수는

S…3개　T…3개　A…1개　I…2개　C…1개

따라서 문자의 개수를 확률변수 X로 취하면 X는 1, 2, 3의 값을 취한다. 또, X의 각 값에 대응하는 확률은 나타난 문자의 개수에 비례하므로,

$$P(X=1)=P(A \text{ 또는 } C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=2)=P(I)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=3)=P(S \text{ 또는 } T)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

이상에서 다음 확률분포를 얻는다.

X	1	2	3	계
P(X)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

……답

⇐ 여기까지가 6점

확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하면,

$$m=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$$

$$\sigma^2=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{5}-m^2=\frac{32}{5}-\frac{144}{25}=\frac{16}{25}$$

⇐ $\sigma^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ 을 이용

∴ 구하는 표준편차는 $\sigma=\frac{4}{5}=0.8$ ……답

연구 [별해] (a) 10개의 문자 STATISTICS를 일렬로 배열하는 방법의 수 ; S가 3개, T가 3개, I가 2개 있음을 고려하여 구하면 $\frac{10!}{3!\times3!\times2!}$ (개)

이 중에서 원하는 경우의 수는 I, I, A가 인접하는 경우의 수이므로, 이들 3문자를 한 개로 취급하여 전체를 배열하는 방법의 수에 이들 3문자를 배열하는 방법의 수를 곱하여 구한다.

즉, I, I, A가 인접하는 경우의 수 ; $\frac{8!}{3!\times3!}\times\frac{3!}{2!}$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{8!}{3!\times3!}\times\frac{3!}{2!}}{\frac{10!}{3!\times3!\times2!}}=\frac{8!\times3!}{10!}=\frac{1}{15}$$ ……답

합격포인트 ***1***번에서는 소문항 10개 정도를 맞추어서 40점 정도, ***2***번에서는 부분 점수를 10점 정도, ***3***번에서는 15점을 모두 획득해야 한다. ***4***의 (b)와 ***6***번에서 각 10점씩 얻어 총점이 85점 정도면 무난히 합격한다. 수학이 주 득점원인 학생은 ***1***, ***6***번을 완벽히 풀어 총점이 100점을 넘기면 성공!

'78연세대 수학 II 해설과 풀이

1. 수학 I 의 1번과 같다.

---

2. 구간 $0 \leqq x \leqq a$에서 정의된 함수 $f(x)$가 이 구간에서 양의 2계도함수를 갖는다고 하자.

곡선 $y=f(x)$ 위에 놓인 점 $\mathrm{P}(k,\ f(k))$에서 이 곡선에 접하는 접선을 l이라 할 때, 이 곡선과 세 직선 : l, $x=0$ 및 $x=a$에 의하여 둘러싸인 도형의 개형을 도시하고, 이 도형의 면적을 최소되게 하는 k의 값을 구하라.

[배 점] 20점

[출제분야] 수 II > 미분 > 접선의 방정식, 2계도함수의 성질

수 II > 적분 > 면적

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석]

$$\begin{cases} f''(x)>0\text{인 구간에서} \Rightarrow \text{(위로)오목 } \cup \\ f''(x)<0\text{인 구간에서} \Rightarrow \text{(위로)볼록 } \cap \end{cases}$$

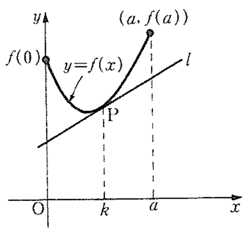
와 곡선 위의 점에서의 접선에 관한 다음 내용을 기초로 하고 있다.

$y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선 $\Rightarrow$ $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

모범해답 $f''(x)>0$로 부터 $y=f(x)$는 구간 $[0,\ a]$에서 아래로 볼록하다. 따라서 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(k, f(k))$에서의 접선

$$l : y-f(k)=f'(k)(x-k)$$

는 곡선 $y=f(x)$의 아래에 놓이므로 구하고자 하는 도형의 개형은 위 그림의 빗금 친 부분과 같다.



⇦ x축의 위치는 무관하다. 개형을 제대로 그리면 7점

이 도형의 면적을 S라 하면

$$\mathrm{S}=\int_0^a \{f(x)-f'(k)(x-k)-f(k)\}dx$$ ⇦ 여기까지가 10점

$$=\int_0^a f(x)dx-\left[f'(k)\left(\frac{x^2}{2}-kx\right)+f(k)x\right]_0^a$$

$$=\int_0^a f(x)dx-f'(k)\left(\frac{a^2}{2}-ak\right)-af(k)$$ ⇦ 여기까지가 13점

$$\frac{d\mathrm{S}}{dk}=-f''(k)\left(\frac{a^2}{2}-ak\right)+af'(k)-af'(k)=af''(k)\left(k-\frac{a}{2}\right)$$ ⇦ k가 변수임에 유의

그런데 $f''(k)>0$이므로 오른편 증감표에서 $k=\frac{a}{2}$일 때 S는 최소임을 알 수 있다.

답 $k=\frac{a}{2}$

k	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	a
$\frac{dS}{dk}$		$-$	0	$+$	
S		↘	극소	↗	

⇐ 증감을 조사하지 않으면 −3점

3. 복소평면 위에 4점 : A$(2i)$, B(0), C$(1+i)$, D$(-1+i)$가 놓여 있을 때, 다음 조건을 만족하는 점 P$(x+iy)$의 자취를 구하라.

$$\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP})=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CP})$$

[배　　점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ>복소수>복소평면

수Ⅱ>벡터>벡터의 성분과 내적

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
			■					

[문제분석] 다음 기초 지식만 있으면 쉽게 풀 수 있다.

(i) 복소평면에서 $x+iy \iff$ 좌표평면에서 (x, y)

(ii) 성분으로 표현된 벡터의 내적 $(a, b)\cdot(x, y)=ax+by$

분배법칙을 써서 조건식을 간단히 한 다음에 내적 계산을 하면 다소 편리하다.

모범해답 조건식에서 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}$

$\therefore\ \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}$ ……(*)

그런데, $\overrightarrow{BP}=(x, y)$

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=(x, y)-(1, 1)=(x-1, y-1)$ ⇐ 여기까지가 5점

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}=(x, y)-(0, 2)=(x, y-2)$

$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BD}=(x, y)-(-1, 1)=(x+1, y-1)$

이므로 (*)에서 $(x-1, y-1)\cdot(x, y)=(x, y-2)\cdot(x+1, y-1)$

$\therefore\ (x-1)x+(y-1)y=x(x+1)+(y-2)(y-1)$ ⇐ 여기까지가 12점

정돈하면 $y=x+1$

따라서 구하는 P의 자취는 복소평면 위의 두 점 E(-1), F(i)를 지나는 직선이다. ……답

연구 구하는 자취를 '점 i를 지나 $\overline{BC}$(또는 $\overline{DA}$)에 평행한 직선' 또는 간단히 '$y=x+1$', '$\{x+yi \mid y=x+1\}$', '$\{x+(x+1)i \mid x\in R\}$' 등으로 답하여도 된다.

4. (a) 부등식 $\log_{\frac{1}{4}}(6x+2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\frac{1}{2}$을 풀어라.

(b) 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 미분계수의 정의를 써서 다음의 극한값을 구하라.

$$\lim_{x \to a}\frac{x^n f(a)-a^n f(x)}{x^n-a^n} \quad (n : \text{양의 정수})$$

[배 점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 일반수학>지수 · 로그>로그부등식
수Ⅱ>극한>부정형의 극한
수Ⅱ>미분>미분계수의 정의

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(a)				(b)			

[문제분석] (a) 지수 · 로그 계산의 대원칙 ⇨ 밑을 통일
에 따라

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x+2)=\log_{(\frac{1}{2})^2}(3x+2)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$$ ⇦ $\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$이용

로 고친 후 log부등식에 관한 다음 내용에 주의하면서 해를 구해야 한다.

$0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$ ⇦ 부등호가 바뀜

$1<a$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow 0<f(x)<g(x)$ ⇦ 부등호 유지

그리고 log문제에서는 언제나

log계산 ⇨ 밑조건, 진수조건에 유의

를 명심할 것!!

(b) 미분계수의 정의 $\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

를 이용하라는 요구를 무시하면 다음과 같이 풀 수도 있다.

풀이 $\mathrm{F}(x)=x^n f(a)-a^n f(x)$, $g(x)=x^n$으로 두면

$$a=0 : (\text{준 식})=\lim_{x \to a}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)}{g(x)-g(a)} \quad (\because \mathrm{F}(a)=0,\ g(a)=a^n)$$

$$=\lim_{x \to a}\frac{\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\frac{\mathrm{F}'(a)}{g'(a)}$$ ⇦ 미분계수의 정의를 이용했다고 볼 수도 있으므로 이 풀이가 완전히 틀렸다고 보는 것은 무리이다.

$$=\frac{[nx^{n-1}f(a)-a^n f'(x)]_{x=a}}{[nx^{n-1}]_{x=a}}$$

$$=\frac{na^{n-1}f(a)-a^n f'(a)}{na^{n-1}}$$

$$=f(a)-\frac{a}{n}f'(a)$$

$a\neq 0$: (준 식)$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n f(0)}{x^n}=f(0)$

이상에서 구하는 극한값은 $f(a)-\dfrac{a}{n}f'(a)$ ……답

(참고) 이 풀이는 로피탈의 정리(고교 교육과정 외)를 이용한 다음 풀이와 본질적으로 같다.

풀이 (i) $a\neq 0$: $x\to a$이면 (분모)$\to 0$, (분자)$\to 0$이므로 로피탈의 정리에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^n f(a)-a^n f(x)}{x^n-a^n}&=\lim_{x\to a}\frac{\{x^n f(a)-a^n f(x)\}'}{(x^n-a^n)'}\\&=\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}f(a)-a^n f'(x)}{nx^{n-1}}\\&=\lim_{x\to a}\frac{na^{n-1}f(a)-a^n f'(a)}{na^{n-1}}\\&=f(a)-\frac{a}{n}f'(a)\end{aligned}$$

(ii) $a=0$: (준 식)$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n f(0)}{x^n}=f(0)$

(i), (ii)에서 구하는 극한값은 $f(a)-\dfrac{a}{n}f'(a)$ ……답

이 풀이 중간 부분에서 미분을 이용한 계산이 등장한다. 따라서 미분계수의 정의를 쓰도록 요구한 문제의 뜻에 어긋난다고 보아야 한다. 따라서 아래 모범해답과 같이 푸는 것이 최선!

그리고 (i) $\boldsymbol{a\neq 0}$, (ii) $\boldsymbol{a=0}$의 2가지로 나누어 풀어야함을 계산 도중에서 느껴야 한다.

모범해답 (a) 진수는 양이어야 하므로 $6x+2>0$, $3-x>0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}<x<3$ ……① ⇦ ①을 빠뜨리면 −3점

$$\log_{\frac{1}{4}}(6x+2)=\log_{(\frac{1}{2})^2}(6x+2)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)$$

이므로, 주어진 부등식은

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\leqq\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\leqq 2\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\leqq\log_{\frac{1}{2}}2(3-x)^2$$

밑이 1보다 작으므로 $6x+2\geqq 2(3-x)^2$ ⇦ 부등호의 방향이 틀리면 −3점

$\therefore\ x^2-9x+8\leqq 0$에서 $1\leqq x\leqq 8$ ……②

①, ②의 공통범위를 구하면 $1\leqq x<3$ ……답

(b) (i) $a\neq 0$일 때 : ⇦ $a\neq 0$, $a=0$의 두 가지로 나누어 풀지 않으면 −3점

$$(\text{준 식})=\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)f(a)-a^n\{f(x)-f(a)\}}{x^n-a^n}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{f(a)-a^n\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x^n-a^n}\right\}\quad\cdots\cdots(*)$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{f(a)-a^n\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1}}\right\}$$

그런데, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$이므로

$$(\text{준 식})=f(a)-a^n\cdot f'(a)\cdot\frac{1}{na^{n-1}}=f(a)-\frac{a}{n}f'(a)$$

⇦ 분모에 a가 등장하므로 $a\neq0$라는 조건 아래에서 풀어야 한다.

(ii) $a=0$일 때 : $(\text{준 식})=\lim_{x\to0}\frac{x^nf(0)}{x^n}=f(0)$

(i), (ii)에서 $(\text{준 식})=f(a)-\frac{a}{n}f'(a)$ ……답

연구 *1°* [별해] 진수는 양이어야 하므로 $6x+2>0$, $3-x>0$

$$\therefore\ -\frac{1}{3}<x<3 \quad\cdots\cdots①$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(6x+2)=\log_{2^{-2}}(6x+2)=-\frac{1}{2}\log_2(6x+2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=\log_{2^{-1}}(3-x)=-\log_2(3-x)$$

이므로, 주어진 부등식은

$$-\frac{1}{2}\log_2(6x+2)\leqq-\log_2(3-x)-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \log_2(6x+2)\geqq2\log_2(3-x)+1$$

$$\therefore\ \log_2(6x+2)\geqq\log_2(3-x)^2+\log_2 2$$

$$\therefore\ \log_2(6x+2)\geqq\log_2 2(3-x)^2$$

밑이 1보다 크므로

$$6x+2\geqq2(3-x)^2$$

$$\therefore\ 3x+1\geqq(3-x)^2$$

$$\therefore\ x^2-9x+8\leqq0\text{에서 } 1\leqq x\leqq8 \quad\cdots\cdots②$$

①, ②의 공통범위를 구하면 $1\leqq x<3$ ……답

2° (b)에서 (*)의 계산을 하면

$$(*)\cdots\cdots\quad \lim_{x\to a}\left\{f(a)-a^n\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,\frac{x-a}{x^n-a^n}\right\}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=(x^n)'_{x=a}=na^{n-1}$$

이므로

$$(\text{준 식})=f(a)-a^n\cdot f'(a)\cdot\frac{1}{na^{n-1}}$$

와 같이 해도 무방한가 하는 것은 논란의 여지가 있다. 왜냐하면 $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=(x^n)'_{x=a}=na^{n-1}$에서 미분을 이용했기 때문이다. 이렇게 미분법을 이용해도 된다면 앞의 [문제분석]과 같은 풀이나 심지어 로피탈의 정리에 의한 풀이도 만점을 주어야 하지 않을까! 여하튼 보는 관점에 따라 채점의 기준이 달라질 수 있으므로 모범해답처럼 하는 것이 최선!

5. 구간 $x \geqq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{-x} \cdot \sin x$를 극대 또는 극소가 되게 하는 x의 값을 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ $(x_1<x_2<x_3<\cdots)$이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|$의 합을 구하라.

[배 점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ>삼각함수>삼각함수의 덧셈정리
수Ⅱ>극한>무한등비급수
수Ⅱ>미분>극대·극소

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능한 함수일 때,

$x=a$에서 극값 가진다. ⇒ $f'(a)=0$

가 성립한다. 그러나 그 역이 성립하는 것은 아님에 유의하면서 답안 작성을 해야 한다.

(i) $f'(a)=0$이고
(ii) $x=a$의 좌·우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 } ⇒ $x=a$에서 극값 가진다.

따라서, (ii)를 언급하지 않고 '$f'(a)=0$이므로 $x=a$에서 극값 가진다.'와 같이 서술하면 매우 곤란하다.

모범해답

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x \\
&= e^{-x}(\cos x-\sin x) \\
&= -\sqrt{2}\,e^{-x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) \\
&= -\sqrt{2}\,e^{-x}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= -\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

$f'(x)=0$으로 두면 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$에서

$$x-\frac{\pi}{4}=n\pi$$

$\therefore$ $x \geqq 0$인 범위에서 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$

⇦ 여기까지가 3점

이 값의 좌·우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로

⇦ 이것 대신에 $f''\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ 임을 보여도 된다. 어느 것도 하지 않으면 −5점

$$x=n\pi+\frac{\pi}{4} \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

에서 $y=f(x)$는 극대 또는 극소가 된다.

$n=0, 1, 2, \cdots$을 대입하여 얻은 x값이 차례로 $x_1, x_2, x_3, \cdots$이므로

$$x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=\pi+\frac{\pi}{4},\ x_3=2\pi+\frac{\pi}{4}, \cdots, x_n=(n-1)\pi+\frac{\pi}{4}, \cdots$$

⇦ 여기까지가 10점, 첨자가 틀리면 −2점

$\therefore\ |f(x_n)|=|e^{-x_n}\sin x_n|$

$$=e^{-(n-1)\pi-\frac{\pi}{4}}\left|\sin\left\{(n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right\}\right|$$

$$=e^{-(n-1)\pi-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-\pi})^{n-1}$$

$0<e^{-\pi}<e^{0}(=1)$이므로 이 무한등비급수는 수렴하고 그 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{\pi}-1)} \quad \cdots\cdots 답$$

⇦ 수렴조건을 빠뜨리면 −3점

6. 수학 Ⅰ의 **6**번과 같다.

합격포인트 *1*번에서는 소문항 10개 정도를 맞추어서 40점 정도, *2*번에서는 부분 점수 10점 정도, *3*번에서는 15점을 모두 획득해야 한다. *4*의 (a)와 *5*, *6*번에서 각 10점씩 얻어 총점이 95점 정도면 무난히 합격한다. 수학이 주 득점원인 학생은 *4*의 (b), *5*, *6*번 중에서 2문제 정도를 완벽히 풀어서 총점이 110점 정도면 성공!

'78 고려대 수학 I (100점/60분)

1. 다음 괄호를 알맞게 채워라. (30점)

(1) 직선 $y=mx+1$이 곡선 $y=x^3$에 접하기 위한 m의 값은 (   )이다.

(2) 부등식 $x \leqq \alpha$는 $x^2-3|x| \leqq 0$이 성립하기 위한 필요조건이고, 부등식 $\beta \leqq x \leqq 0$은 충분조건이라 한다. 이 때 $|\alpha-\beta|$의 최소값은 (   )이다.

(3) α와 β가 2차방정식

$$(x-a)(x-b)-2x=0$$

의 근일 때 a와 b를 근으로 하는 2차방정식은 (   )이다.

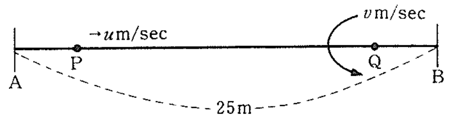
2. $\log x$의 지표는 2이고 $\log x^5$의 가수와 $\log x^{-5}$의 가수는 같다고 한다. 이와 같은 모든 x의 값들의 합을 구하라. (20점)

3. 집합 $S=\{1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 9^2, 10^2\}$이 주어져 있다. (20점)

(1) 다섯 개의 원소로 된 모든 부분집합들의 수 N의 값을 구하라.

(2) 이 N개의 모든 부분집합들에 들어 있는 모든 원소들의 총합을 구하라.

4. 길이가 25m인 선분 AB가 있다. 이 선분 위에 점 P와 점 Q가 있다. (30점)



(i) 점 P는 A점을 출발하여 B점을 향해서 um/sec의 등속운동을 하고

(ii) 점 Q는 같은 시각에 B점을 출발하여

$$v=\frac{3}{4}t^2-3t \text{ (m/sec)}$$

의 속도로 A점을 향해서 움직이다가 도중에서 다시 B점으로 되돌아가는 왕복운동을 한다. (주의 : A점을 기점으로 보고 P점의 운동방향을 양의 방향으로 본다.)

(1) 점 Q가 A점에 가장 가까이 접근할 때까지는 몇 초 걸리는가?

(2) 점 Q가 다시 B점으로 되돌아갈 때까지는 몇 초 걸리는가?

(3) 점 Q가 한 번 왕복운동을 하는 동안에 점 P가 점 Q와 적어도 한 번 겹치게 되는 u의 최소값은 얼마인가?

'78 고려대 수학 Ⅱ (100점/60분)

1. 다음 괄호를 알맞게 채워라. (30점)

(1) 직선 $y=mx+1$이 곡선 $y=x^3$에 접하기 위한 m의 값은 (　　)이다.

(2) 부등식 $x<\alpha$는 $x^3-6x^2+11x-6<0$이 성립하기 위한 필요조건이고, 부등식 $x<\beta$는 충분조건이라 한다. 이 때 $|\alpha-\beta|$의 최소값은 (　　)이다.

(3) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$ 사이에

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=\sqrt{3},\ |\vec{a}+\vec{b}|=1$$

인 관계가 성립한다. 이 때 이 두 벡터의 사잇각(끼인각)은 (　　)이다.

2. 3으로 나누면 나머지가 r이 되는 모든 양의 정수들의 집합을 K_r이라 하고, K_0, K_1, K_2에 속하는 원소를 각각 a, b, c라 하자. (30점)

(1) $a+b$는 K_0, K_1, K_2 중의 어느 것에 속하는가?

(2) bc는 K_0, K_1, K_2 중의 어느 것에 속하는가?

(3) $bm+c$가 K_0에 속하게 되는 양의 정수 m은 K_0, K_1, K_2 중의 어느 것에 속하는가?

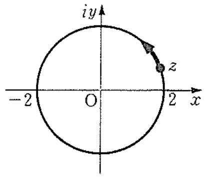
3. $A=\{(x, y) | x^2+y-1 \leqq 0\}$

$B=\{(x, y) | x^2-2x-y+1 \leqq 0\}$

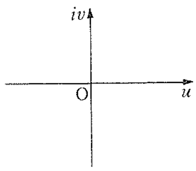
라 할 때, 집합 $A \cap B$의 원소들 중에서 $x+y$의 값을 최대로 하는 점을 찾아라. (20점)

4. 두 복소수평면(Z평면과 W평면) 위의 점 z와 w 사이에 $w=z+\dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$와 같은 관계가 있다고 한다. $(z=x+iy,\ w=u+iv,\ i=\sqrt{-1})$ (20점)

(1) 점 z가 Z평면 위에서 반경이 2인 원주 위를 한 번 돌아갈 때 z에 대응하는 점 w는 W평면 위에서 어떤 도형을 그리는가? u와 v 사이의 관계식을 구해서 그 도형을 아래의 W평면에 그려 넣어라.



(Z평면)



(W평면)

(2) 위에서 그린 도형의 면적을 구하라.

'78고려대 수학 I 해설과 풀이

1. 다음 괄호를 알맞게 채워라.

(1) 직선 $y=mx+1$이 곡선 $y=x^3$에 접하기 위한 m의 값은 (　　)이다.

(2) 부등식 $x \leqq \alpha$는 $x^2-3|x| \leqq 0$이 성립하기 위한 필요조건이고, 부등식 $\beta \leqq x \leqq 0$은 충분조건이라 한다. 이 때 $|\alpha-\beta|$의 최소값은 (　　)이다.

(3) α와 β가 2차방정식

$$(x-a)(x-b)-2x=0$$

의 근일 때 a와 b를 근으로 하는 2차방정식은 (　　)이다.

[배　　점] 30점(10점+10점+10점)

[출제분야] 수 I >미분>접선의 방정식

일반수학>집합과 명제>필요조건, 충분조건

일반수학>방정식과 부등식>부등식의 해법, 2차방정식의 근과 계수와의 관계

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		(3)	(1)	(2)				

[문제분석] (1) 곡선 $y=x^3$ 위의 점 (α, α^3)에서의 접선의 방정식을

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$에서의 접선

$\Rightarrow y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

에 의해 구한 다음, $y=mx+1$과 비교하여 푼다.

(2) 1차적으로 $x^2-3|x| \leqq 0$을 풀 수 있어야 한다.

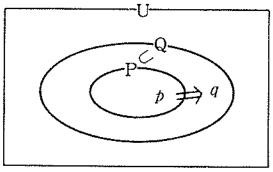
$$x^2-3|x|=|x|^2-3|x|$$
$$=|x|(|x|-3) \leqq 0$$

와 같이 $|x|$의 부등식으로 보고 풀면 계산이 다소 수월하다. 그리고 다음 필요조건과 충분조건의 정의를 활용한다.

명제 $p \rightarrow q$가 참일 때 곧, $p \Rightarrow q$일 때,

p는 q이기 위한 충분조건

q는 p이기 위한 필요조건



(3) α, β를 두 근으로 하는 x의 2차방정식

$\Rightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \; (a \neq 0)$

임을 활용하면

$$(x-a)(x-b)-2x=(x-\alpha)(x-\beta)$$

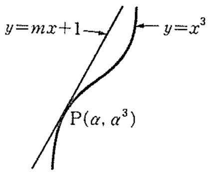
⇦ 우변의 최고차계수를 좌변의 최고차계수 1에 맞춘다.

이어야 한다.

$\therefore \; (x-a)(x-b)=(x-\alpha)(x-\beta)+2x$

$\therefore \; (x-\alpha)(x-\beta)+2x=0$의 두 근은 a, b이다.

모범해답 (1) 접점을 $P(\alpha, \alpha^3)$으로 두면,



P에서의 접선의 식은

$$y-\alpha^3=(x^3)'_{x=\alpha}(x-\alpha)$$

$$\therefore\ y=3\alpha^2(x-\alpha)+\alpha^3$$

$$\therefore\ y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$

> 단답형이라 답이 맞아야만 점수를 받을 수 있겠지만 여기서는 서술형이라 보고 채점 기준을 제시하였다.
>
> ⇦ 여기까지가 5점

이것이 직선 $y=mx+1$과 일치해야 하므로 $3\alpha^2=m,\ -2\alpha^3=1$

$$\therefore\ \alpha=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad m=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

> ⇦ 이것을 답으로 하면 −1점

답 $m=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

(2) $x^2-3|x|\leqq 0 \iff |x|^2-3|x|\leqq 0$

$$\iff |x|(|x|-3)\leqq 0$$

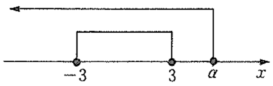
$$\therefore\ 0\leqq|x|\leqq 3$$

$$\therefore\ -3\leqq x\leqq 3 \quad \cdots\cdots(*)$$

> ⇦ 여기까지가 3점

$x\leqq\alpha$는 $-3\leqq x\leqq 3$이 성립하기 위한 필요조건이므로

$$x\leqq\alpha \Leftarrow -3\leqq x\leqq 3$$

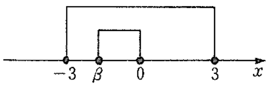


$$\therefore\ 3\leqq\alpha \quad \cdots\cdots①$$

> ⇦ ①이 옳으면 3점

$\beta\leqq x\leqq 0$는 $-3\leqq x\leqq 3$이 성립하기 위한 충분조건이므로

$$\beta\leqq x\leqq 0 \Rightarrow -3\leqq x\leqq 3$$



$$\therefore\ -3\leqq\beta\leqq 0 \quad \cdots\cdots②$$

> ⇦ ②가 옳으면 3점

①, ②에서 $3\leqq\alpha-\beta$

$$\therefore\ |\alpha-\beta|\geqq 3$$

따라서 구하는 최소값은 3 ……답

(3) $(x-a)(x-b)-2x=0$의 두 근이 α, β이므로

$$(x-a)(x-b)-2x=(x-\alpha)(x-\beta)$$

와 같이 인수분해 돼야 한다.

$$\therefore\ (x-a)(x-b)=(x-\alpha)(x-\beta)+2x$$

$\therefore$ a, b를 두 근으로 하는 2차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)+2x=0$$

$$\therefore\ x^2-(\alpha+\beta-2)x+\alpha\beta=0 \quad \cdots\cdots\text{답}$$

> ⇦ '=0'를 빼고 답하면 −5점

연구

1° [별해] (1) $f(x)=x^3$, $g(x)=mx+1$로 두고 접점의 x좌표를 α라 하면,

$$f(\alpha)=g(\alpha),\quad f'(\alpha)=g'(\alpha)$$

$$\therefore\ \alpha^3=m\alpha+1,\quad 3\alpha^2=m$$

이것을 연립하여 풀면

$$\alpha=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad m=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\qquad\cdots\cdots\text{답}$$

2° [별해] (2)에서 (*)를 유도하는 과정까지는 다음과 같이 할 수도 있다.

$x^2-3|x|\leqq 0$에서

(i) $x\geqq 0$; $x^2-3x\leqq 0$ $\quad\therefore\ 0\leqq x\leqq 3$

(ii) $x<0$; $x^2+3x\leqq 0$

$-3\leqq x\leqq 0$와 $x<0$에서 $\quad -3\leqq x<0$

(i), (ii)에서 $\quad -3\leqq x\leqq 3\qquad\cdots\cdots$(*)

3° (2)에서,「$\beta\leqq x\leqq 0\ \Rightarrow\ -3\leqq x\leqq 3$」을「$-3\leqq\beta\leqq 0$」라 푼 과정이 있다.

그러나 $\beta=1$이면 어떤가?

「$1\leqq x\leqq 0\ \Rightarrow\ -3\leqq x\leqq 3$」

이것은 참이지 않은가!

부등식 $\beta\leqq x\leqq 0$을 만족하는 x가 반드시 존재해야 할 이유는 없다. 따라서「$\beta\leqq x\leqq 0\ \Rightarrow\ -3\leqq x\leqq 3$」에서「$-3\leqq\beta$」라 해야 할 것이다. 이렇게 되면 $|\alpha-\beta|$의 최소값은「없다」가 된다. 억지로 문제를 낸 의도에 맞추어서(?) 푼 것이 모범해답이다.

4° [별해] (3) a와 b를 두 근으로 하는 x의 2차방정식은

$$(x-a)(x-b)=0\iff x^2-(a+b)x+ab=0\qquad\cdots\cdots①$$

그런데 문제의 조건에서 $(x-a)(x-b)-2x=0$

즉, $x^2-(a+b+2)x+ab=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수와의 관계를 쓰면

$$\alpha+\beta=a+b+2,\quad \alpha\beta=ab$$

$$\therefore\ a+b=\alpha+\beta-2,\quad ab=\alpha\beta$$

이것을 ①에 대입하면 구하는 2차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta-2)x+\alpha\beta=0\qquad\cdots\cdots\text{답}$$

5° (3)에는 다음 2가지 어색한 점이 있다.

첫째, 구하는 2차방정식이 어떤 것을 문자로 하는 것인지 명시되어 있지 않다. 평범하게 x의 2차방정식이라 생각하면 위와 같이 답하겠지만 구체적 언급이 없으므로

$$t^2-(\alpha+\beta-2)t+\alpha\beta=0$$

와 같이 답해도 무방할 것이다.

둘째, a, b를 두 근으로 하는 2차방정식은

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

이므로, 이것을 답으로 할 수는 없는가 하는 점이다.

물론 문제에서 'α와 β는 2차방정식 $(x-a)(x-b)-2x=0$의 근일 때…'와 같이 α, β에 관한 조건을 준 것으로 미루어 짐작하면 답을 모범해답과 같은 형식으로 쓰라는 것일게다.

그러나 좀더 친절하게

'a와 b를 두 근으로 하는 x의 2차방정식을 α, β를 써서 나타내면 (　　　　)이다.'

로 했더라면 좋았을 것이다.

그러나 수험생의 입장에서는 항상 출제자의 의도를 짐작하여 그 의도에 맞추어 푸는 것이 바람직한 태도라 할 수 있다.

2. $\log x$의 지표는 2이고 $\log x^5$의 가수와 $\log x^{-5}$의 가수는 같다고 한다. 이와 같은 모든 x의 값들의 합을 구하라.

[배　　점] 20점

[출제분야] 일반수학>지수·로그>상용로그의 지표와 가수
수 I >수열>등비수열의 합

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 다음 성질만 활용하면 쉽게 풀 수 있다.

A, B의 상용로그의 가수가 같다. ⇨ $\log A - \log B =$(정수)

위의 성질에 대해 설명하면 다음과 같다.

A, B의 상용로그의 가수가 같다.

$\Longleftrightarrow \log A = a+\alpha,\ \ \log B = b+\alpha$ (a, b는 정수, $0 \leqq \alpha < 1$)

$\Longleftrightarrow \log A - \log B = (a+\alpha)-(b+\alpha) = a-b$; 정수

모범해답 $\log x$의 지표가 2 $\Longleftrightarrow 2 \leqq \log x < 3$ ……① ⇦ 여기까지가 3점

$\log x^5$과 $\log x^{-5}$의 가수가 같다.

$\Longleftrightarrow \log x^5 - \log x^{-5} = 10\log x$가 정수 ……② ⇦ 여기까지가 6점

①에서 $20 \leqq 10\log x < 30$

$\therefore$ ②에서 $10\log x = 20, 21, 22, \cdots, 29$

$\therefore \log x = \frac{20}{10}, \frac{21}{10}, \frac{22}{10}, \cdots, \frac{29}{10}$

$\therefore x = 10^{\frac{20}{10}}, 10^{\frac{21}{10}}, 10^{\frac{22}{10}}, \cdots, 10^{\frac{29}{10}}$ ⇦ 여기까지가 10점

따라서 이들의 합은 첫째항이 10^2이고 공비가 $10^{\frac{1}{10}}$인 등비수열의

제10항까지의 합이므로 $\dfrac{10^2\left\{1-\left(10^{\frac{1}{10}}\right)^{10}\right\}}{1-10^{\frac{1}{10}}} = \dfrac{900}{\sqrt[10]{10}-1}$ ……답

연구 [별해] $\log x$의 가수를 α라 하면 $\log x = 2+\alpha$ $(0 \leqq \alpha < 1)$

가수가 같은 두 상용로그의 차는 정수이어야 하므로

$\log x^5 - \log x^{-5} = 10\log x = 10(2+\alpha) = 20+10\alpha$

에서 10α는 정수 그런데 $0 \leqq \alpha < 1$이므로 $\alpha = 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \cdots, \frac{9}{10}$

$\therefore \log x = 2, 2+\frac{1}{10}, 2+\frac{2}{10}, \cdots, 2+\frac{9}{10}$　　$\therefore x = 10^2, 10^{2+\frac{1}{10}}, 10^{2+\frac{2}{10}}, \cdots, 10^{2+\frac{9}{10}}$

따라서 이들의 합은 $\dfrac{10^2\left\{\left(10^{\frac{1}{10}}\right)^{10}-1\right\}}{10^{\frac{1}{10}}-1} = \dfrac{900}{\sqrt[10]{10}-1}$ ……답

3. 집합 $S=\{1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 9^2, 10^2\}$이 주어져 있다.

(1) 다섯 개의 원소로 된 모든 부분집합들의 수 N의 값을 구하라.

(2) 이 N개의 모든 부분집합들에 들어 있는 모든 원소들의 총합을 구하라.

[배 점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I >확률 · 통계>조합

수 I >수열>여러 가지 수열의 합

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
(1)			(2)					

[문제분석] (1) 일반적으로 다음 성질이 성립한다.

$n(S)=m$일 때, k개의 원소를 가지는 부분집합의 개수 ⇨ ${}_mC_k$

(2) N개의 부분집합들 전체의 입장에서 보면, S의 원소 10개가 균등하게 분포할 것이다. 따라서,

$$\frac{(\text{N개의 부분집합에 있는 원소의 총수})}{10}=(\text{각 원소가 나타나는 빈도수})$$

이 성립한다. 이것을 M이라 하면 $1^2, 2^2, \cdots, 10^2$이 각각 M번씩 등장하므로

$$(1^2+2^2+\cdots+10^2)M$$

이 구하는 합이 된다.

모범해답 (1) 구하는 개수는 10개의 원소 중에서 5개를 뽑는 조합의 수와 같다.

⇦ 이것을 언급하지 않으면 −3점

$$\therefore\ N={}_{10}C_5=\frac{{}_{10}P_5}{5!}$$

⇦ 여기까지가 8점

$$=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=252$$ ……답

(2) N=252개의 부분집합들 각각에 원소가 5개씩 들어 있으므로 이들이 갖는 원소의 총수는

$$252\times5=1260(\text{개})$$

⇦ 여기까지가 3점

이다. 이 1260개의 원소 중에는 S의 원소가 균등하게 분포하고 있으므로 각 원소가

⇦ '균등분포'를 언급하지 않으면 −2점

$$\frac{1260}{10}=126(\text{개})$$

⇦ 여기까지가 6점

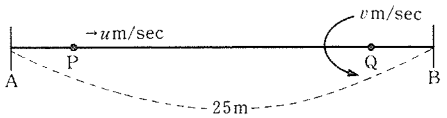
씩 들어 있다. 따라서 구하는 총합은

$$(1^2+2^2+\cdots+10^2)\times126=\frac{10\times11\times21}{6}\times126=48510$$ ……답

연구 [별해] (2) 문제의 부분집합 중에서 S의 원소 $k^2(k=1, 2, \cdots, 10)$을 포함하고 있는 것의 개수는 나머지 9개의 원소 중에서 4개를 뽑는 조합의 수 ${}_9C_4$와 같다.

따라서 구하는 총합은 $\sum_{k=1}^{10}{}_9C_4\cdot k^2=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{10\cdot11\cdot21}{6}=48510$ ……답

4. 길이가 25m인 선분 AB가 있다. 이 선분 위에 점 P와 점 Q가 있다.



(i) 점 P는 A점을 출발하여 B점을 향해서 um/sec의 등속운동을 하고

(ii) 점 Q는 같은 시각에 B점을 출발하여

$$v=\frac{3}{4}t^2-3t \text{ (m/sec)}$$

의 속도로 A점을 향해서 움직이다가 도중에서 다시 B점으로 되돌아가는 왕복운동을 한다. (주의 : A점을 기점으로 보고 P점의 운동방향을 양의 방향으로 본다.)

(1) 점 Q가 A점에 가장 가까이 접근할 때까지는 몇 초 걸리는가?

(2) 점 Q가 다시 B점으로 되돌아갈 때까지는 몇 초 걸리는가?

(3) 점 Q가 한 번 왕복운동을 하는 동안에 점 P가 점 Q와 적어도 한 번 겹치게 되는 u의 최소값은 얼마인가?

[배 점] 30점(10점+10점+10점)

[출제분야] 수 I >미분>속도 · 가속도와 미분

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		(1)	(2)			(3)		

[문제분석] t초 후의 점 P의 위치를 P(t), 속도를 $v(t)$라 하면

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t)=v(t)$$

이로부터,

$$\mathrm{P}(t)=\int v(t)dt=\int_0^t v(t)dt+\mathrm{C}$$

$t=0$를 대입하면 $\mathrm{P}(0)=0+\mathrm{C}$ $\quad\therefore\ \mathrm{C}=\mathrm{P}(0)$

$$\therefore\ \mathbf{P}(t)=\int_0^t v(t)dt+\mathbf{P}(0)$$

모범해답 A를 원점으로 하고, 시각 t일 때 P, Q의 위치를 각각 P(t), Q(t)라 하자. 문제의 조건에서

$$\frac{d}{dt}\mathrm{P}(t)=u\ (\because \text{ 상수}),\quad \frac{d}{dt}\mathrm{Q}(t)=\frac{3}{4}t^2-3t$$

$$\therefore\ \begin{cases}\mathrm{P}(t)=\int u\,dt=ut+\mathrm{C}_1\\ \mathrm{Q}(t)=\int\left(\frac{3}{4}t^2-3t\right)dt=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+\mathrm{C}_2\end{cases}$$

한편, $\mathrm{P}(0)=0$, $\mathrm{Q}(0)=25$이므로 $\mathrm{C}_1=0$, $\mathrm{C}_2=25$

$$\therefore\ \mathrm{P}(t)=ut,\quad \mathrm{Q}(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25$$

⇦ 여기까지가 5점

(1) $t \geqq 0$인 범위에서 $Q(t)$가 $A(0)$에 가장 가까운 때를 구해야 한다.

$$\frac{d}{dt}Q(t)=\frac{3}{4}t^2-3t=\frac{3}{4}t(t-4)$$

이므로 $t \geqq 0$인 범위에서 증감표를 작성하면

t	0	…	4	…
$v=\dfrac{dQ}{dt}$		$-$	0	$+$
$Q(t)$	25	↘	17	↗

⇦ 증감표를 생략하면 −3점

위 증감표에서 Q가 A에 가장 가까운 때는 $t=4$(초) ……답

(2) Q가 다시 돌아가는 것은 $Q(t)=25$일 때다.

$$\therefore\ \frac{1}{4}t^3-\frac{3}{2}t^2+25=25\text{에서}\quad t^2(t-6)=0$$

$t>0$이어야 하므로 $t=6$

따라서 Q가 A에 가장 근접한 때($t=4$)를 기준으로 하면, 되돌아가는 데 걸리는 시간은 $6-4=2$(초) ……답

⇦ 기준 시각을 출발할 당시($t=0$)로 잡으면 $6-0=6$(초)가 구하는 시간이다. 따라서 이것을 답으로 해도 10점을 받을 수 있다.

(3) P, Q가 $0<t<6$에서 적어도 한 번 겹치기 위해서는 두 그래프

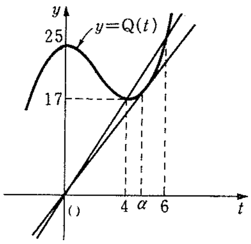
$$\begin{cases} P(t)=ut & \cdots\cdots① \\ Q(t)=\dfrac{1}{4}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+25 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

가 $0<t<6$에서 적어도 한 번 만나야 한다. ①, ②가 접할 때의 u의 값을 $u=\alpha$라 하면,

$$\begin{cases} P(\alpha)=Q(\alpha) \\ P'(\alpha)=Q'(\alpha) \end{cases}$$

에서

$$\begin{cases} u\alpha=\dfrac{1}{4}\alpha^3-\dfrac{3}{2}\alpha^2+25 & \cdots\cdots③ \\ u=\dfrac{3}{4}\alpha^2-3\alpha & \cdots\cdots④ \end{cases}$$



④를 ③에 대입하면 $\dfrac{3}{4}\alpha^3-3\alpha^2=\dfrac{1}{4}\alpha^3-\dfrac{3}{2}\alpha^2+25$

$$\therefore\ \alpha^3-3\alpha^2-50=0 \qquad \therefore\ (\alpha-5)(\alpha^2+2\alpha+10)=0$$

α는 실수이므로 $\alpha^2+2\alpha+10=(\alpha+1)^2+9>0$ $\quad\therefore\ \alpha=5$

이 값은 $0<\alpha<6$을 만족하므로 u가 최소인 경우는 접할 때이다.

⇦ 이것을 빠뜨리면 −3점

$\alpha=5$를 ④에 대입하면 $u=\dfrac{15}{4}$ ……답

연구 [별해] (1) Q가 A에 가장 가까울 때는 운동 방향을 바꿀 때이므로 $v=0$

$$\therefore\ v=\frac{3}{4}t^2-3t=\frac{3}{4}t(t-4)=0\text{에서}\quad t=4 \quad\cdots\cdots답$$

($t=0$는 출발시각이므로 제외한다.)

합격포인트 *4*의 (3)번을 제외한 거의 모든 문제를 풀어야 한다. 약간의 감점을 생각해도 70점은 되어야 합격 가능하다. 수학이 주 득점원인 학생은 *4*의 (3)번을 제외한 모든 문제를 거의 완벽히 풀어서 80점 정도 획득하면 성공.

'78고려대 수학Ⅱ 해설과 풀이

1. 다음 괄호를 알맞게 채워라.

(1) 직선 $y=mx+1$이 곡선 $y=x^3$에 접하기 위한 m의 값은 (　　)이다.

(2) 부등식 $x<\alpha$는 $x^3-6x^2+11x-6<0$이 성립하기 위한 필요조건이고, 부등식 $x<\beta$는 충분조건이라 한다. 이 때 $|\alpha-\beta|$의 최소값은 (　　)이다.

(3) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$ 사이에

$$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=\sqrt{3},\ |\vec{a}+\vec{b}|=1$$

인 관계가 성립한다. 이 때 이 두 벡터의 사잇각(끼인각)은 (　　)이다.

[배　　점] 30점(10점+10점+10점)

[출제분야] 수Ⅱ>미분>접선의 방정식
일반수학>집합과 명제>필요조건·충분조건
수Ⅱ>방정식과 부등식>3차부등식의 해법
수Ⅱ>벡터>벡터의 내적

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(3)	(1) (2)	

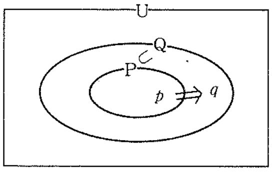
[문제분석] (1) 곡선 $y=x^3$ 위의 점 (α, α^3)에서의 접선의 방정식을

곡선 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 위의 점 $(\boldsymbol{\alpha, f(\alpha)})$에서의 접선
$\Rightarrow \boldsymbol{y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)}$

에 의해 구한 다음, $y=mx+1$과 비교하여 푼다.

(2) 부등식 $x^3-6x^2+11x-6<0$을 푼 다음, 필요조건과 충분조건에 관한 다음 정의를 적용한다.

명제 $p\to q$가 참일 때 곧, $\boldsymbol{p\Rightarrow q}$일 때,
p는 q이기 위한 충분조건
q는 p이기 위한 필요조건



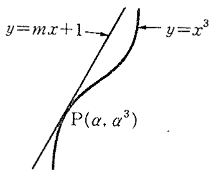
(3) 벡터의 절대값과 사잇각에 대한 문제에서는

벡터의 절대값 문제 $\Rightarrow |\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$를 이용

두 벡터의 사잇각 문제 $\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$을 이용

모범해답 (1) 접점을 $\mathrm{P}(\alpha, \alpha^3)$으로 두면,
P에서의 접선의 식은

$$y-\alpha^3=(x^3)'_{x=\alpha}(x-\alpha)$$
$$\therefore\ y=3\alpha^2(x-\alpha)+\alpha^3$$
$$\therefore\ y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$



단답형이라 답이 맞아야만 점수를 받을 수 있겠지만 여기서는 서술형이라 보고 채점기준을 제시하였다.

⇐ 여기까지가 5점

이것이 직선 $y=mx+1$과 일치해야 하므로 $3\alpha^2=m$, $-2\alpha^3=1$

$$\therefore\ \alpha=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad m=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

⇐ 이것을 답으로 하면 −1점

답 $m=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

(2) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$으로 두면 $f(1)=0$

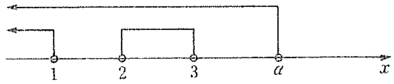
$$\therefore\ x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\therefore\ x^3-6x^2+11x-6<0 \iff x<1 \text{ 또는 } 2<x<3$$

⇐ 여기까지가 3점

$x<\alpha$는 ($x<1$ 또는 $2<x<3$)이 성립하기 위한 필요조건이므로

$$x<\alpha \Longleftarrow x<1 \text{ 또는 } 2<x<3$$

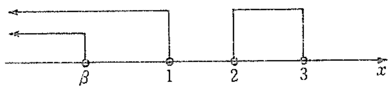


$$\therefore\ \alpha\geqq 3 \qquad \cdots\cdots①$$

⇐ ①이 옳으면 3점

$x<\beta$는 ($x<1$ 또는 $2<x<3$)이 성립하기 위한 충분조건이므로

$$x<\beta \Longrightarrow x<1 \text{ 또는 } 2<x<3$$



$$\therefore\ \beta\leqq 1 \qquad \cdots\cdots②$$

⇐ ②가 옳으면 3점

①, ②에서 $\alpha-\beta\geqq 2$ $\qquad\therefore\ |\alpha-\beta|\geqq 2$

따라서 구하는 최소값은 2 ……답

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$$

⇐ 그림을 그려서 간단히 푸는 방법도 있다. 각자 연구해 보도록!

에서

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(1-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)=\frac{1}{2}(1-4-3)=-3$$

⇐ 여기까지가 5점

따라서 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 사잇각을 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

⇐ 여기까지가 8점

$$\therefore\ \theta=\frac{5\pi}{6}$$ ……답

연구 [별해] (1) $f(x)=x^3$, $g(x)=mx+1$로 두고 접점의 x좌표를 α라 하면,

$$f(\alpha)=g(\alpha),\quad f'(\alpha)=g'(\alpha)$$
$$\therefore\ \alpha^3=m\alpha+1,\quad 3\alpha^2=m$$

이것을 연립하여 풀면 $\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $m=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ ……답

2. 3으로 나누면 나머지가 r이 되는 모든 양의 정수들의 집합을 K_r이라 하고, K_0, K_1, K_2에 속하는 원소를 각각 a, b, c라 하자.

(1) $a+b$는 K_0, K_1, K_2 중의 어느 것에 속하는가?

(2) bc는 K_0, K_1, K_2 중의 어느 것에 속하는가?

(3) $bm+c$가 K_0에 속하게 되는 양의 정수 m은 K_0, K_1, K_2 중의 어느 것에 속하는가?

[배　　점] 30점(10점+10점+10점)

[출제분야] 일반수학>수와 식>수의 체계

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		(1)(2)			(3)			

[문제분석] 정수 **a**를 양의 정수 **b**로 나눌 때, 몫이 **q**, 나머지가 **r**

$$\Rightarrow \boldsymbol{a=bq+r\ (r=0, 1, 2, \cdots, b-1)}$$

을 이용하면

$K_0=\{3p \mid p$는 양의 정수$\}$

$K_1=\{3q+1 \mid q$는 음 아닌 정수$\}$

$K_2=\{3r+2 \mid r$은 음 아닌 정수$\}$

$$\begin{array}{r} q \quad \cdots\ r \\ b\ \overline{)\ a \qquad} \\ \underline{bq \quad} \\ a-bq \end{array}$$

$\therefore$ $a-bq=r$에서 $\boldsymbol{a=bq+r}$

내용보다는 형식에 비중을 둔 문제이다. 형식에 충실히 따르지 않으면 감점을 당하기 쉽다. 특수한 숫자를 가지고 풀거나 하면 전혀 점수를 얻을 수 없다.

모범해답 $a\in K_0$, $b\in K_1$, $c\in K_2$이므로

$$a=3p,\quad b=3q+1,\quad c=3r+2$$

로 둘 수 있다. (단, p는 양의 정수, q, r은 음 아닌 정수)

(1) $a+b=3p+(3q+1)=3(p+q)+1$

여기서 $p+q$는 양의 정수이므로 $a+b\in K_1$ ⇐ $p+q$가 양의 정수임을 언급하지 않으면 −2점

답 K_1

(2) $bc=(3q+1)(3r+2)=3(3qr+2q+r)+2$

여기서 $3qr+2q+r$은 음 아닌 정수이므로 $bc\in K_2$ ⇐ 이것을 언급하지 않으면 −2점

답 K_2

(3) $bm+c=(3q+1)m+(3r+2)=3(qm+r)+m+2\in K_0$

이려면

$$3(qm+r)+m+2=3s\ (s\text{는 양의 정수})$$

를 만족하는 s가 존재해야 한다.

$$\therefore\ m=3(s-qm-r)-2=3(s-qm-r-1)+1$$

m이 양의 정수이므로 $s-qm-r-1$은 음 아닌 정수이다. ⇐ 이것을 언급하지 않으면 −2점

$$\therefore\ m\in K_1$$

답 K_1

연구 $a=3n$, $b=3n+1$, $c=3n+2$와 같이 몫을 똑같이 n으로 두면 곤란하다. 몫이 같다는 보장은 어디에도 없다.

3. $A=\{(x, y)|x^2+y-1\leqq 0\}$

$B=\{(x, y)|x^2-2x-y+1\leqq 0\}$

라 할 때, 집합 $A\cap B$의 원소들 중에서 $x+y$의 값을 최대로 하는 점을 찾아라.

[배 점] 20점

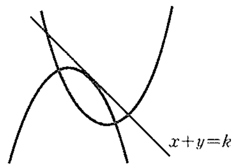
[출제분야] 일반수학>도형의 방정식>부등식의 영역에서의 최대 · 최소

[난 이 도]

기본	표준	어려움

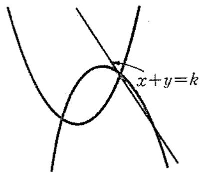
[문제분석]

(그림 $1°$)



(그림 $1°$)의 빗금 친 영역에서 $x+y$가 최대가 되는 경우는 직선 $x+y=k$이 포물선과 접할 때이다.

(그림 $2°$)



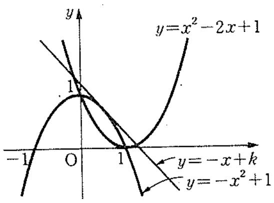
(그림 $2°$)의 빗금 친 영역에서 $x+y$가 최대가 되는 경우는 직선 $x+y=k$가 P를 지날 때이지 포물선과 접할 때가 아님을 명심하자.

부등식의 영역에서의 최대 · 최소문제는 최대 · 최소가 영역 안에서 일어나는지를 반드시 확인하는 것이 좋다.

모범해답 집합 A는 $y\leqq -x^2+1$을 만족하는 점 (x, y)의 집합이고, 집합 B는 $y\geqq x^2-2x+1$을 만족하는 점 (x, y)의 집합이므로 $A\cap B$의 영역은

$$x^2-2x+1\leqq y\leqq -x^2+1$$

을 만족하는 점 (x, y)의 집합이다. 이것을 도시하면 오른편 그림과 같다.



⇦ 그림을 제대로 그리면 5점

$x+y=k$로 두면 $y=-x+k$ ……①

①이 곡선 $y=-x^2+1$ …②과 접하려면 ①, ②에서 y를 소거한 방정식 $-x^2+1=-x+k$가 중근을 가져야 한다.

$\therefore$ $x^2-x+k-1=0$ …③에서 $D=1-4(k-1)=0$ $\quad\therefore$ $k=\dfrac{5}{4}$

⇦ 여기까지가 10점

이 때, ③에서 $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$ $\quad\therefore$ $x=\dfrac{1}{2}$

⇦ 여기까지가 13점

이것은 $0<\dfrac{1}{2}<1$을 만족하므로 접점은 $A\cap B$의 원소이다.

⇦ 이것을 따지지 않으면 -3점

$x=\dfrac{1}{2}$을 ②에대입하면 $y=\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ $x+y$가 최대가 되는 점은 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ ……답

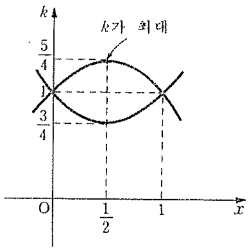
⇦ '$x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{3}{4}$'으로 답하거나 '최대값 $\dfrac{5}{4}$'를 답으로 하면 −2점

연구 *1°* [별해] 집합 A의 정의식에서 $x+y \leqq -x^2+x+1$

집합 B의 정의식에서 $x+y \geqq x^2-x+1$

$x+y=k$로 두면 $x^2-x+1 \leqq k \leqq -x^2+x+1$

이 부등식을 만족하는 점 (x, k)의 존재범위를 도시하면 오른편 그림과 같다.



따라서 k는 $x=\dfrac{1}{2}$일 때, 최대값 $\dfrac{5}{4}$를 갖는다.

이 때, $x+y=k$에서 $y=\dfrac{3}{4}$

따라서 $x+y$가 최대가 되는 점은 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ ……답

2° 모범해답에서는 접점이 최대·최소가 되는 점이지만 연구 *1°*의 풀이에서는 A∩B의 영역을 직접 도시한 것은 아니므로 구하는 점을 그래프 위의 점 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$로 답하면 곤란하다.

3° 풀이 중에서 "직선 ①을 영역 내에서 움직여 보면 점 $(0, 1)$과 $(1, 0)$을 동시에 통과하는 때가 있음을 알 수 있다. 이 때 포물선 $y=-x^2+1$의 직선 $x+y=1$ 위의 볼록한 부분은 모두 영역 내의 점이고, k의 값이 최대가 되는 것은 직선 ①이 이 부분에 접할 때임이 명백하다."을 언급하면 접점이 영역 내의 점임을 식으로 밝히지 않아도 될 것이다.

⇦ 이것은 평균값의 정리와 내용상 같은 것이다.

4° [별해] $x+y=k$로 두면, $y=k-x$ ……①

따라서 A, B의 정의식 $x^2+y-1 \leqq 0$, $x^2-2x-y+1 \leqq 0$에 ①을 대입하면

$$x^2+(k-x)-1 \leqq 0, \quad x^2-2x-(k-x)+1 \leqq 0$$

$$\therefore\ x^2-x+k-1 \leqq 0, \quad x^2-x-k+1 \leqq 0$$

이것을 만족하는 실수 x가 존재해야 하므로

$$\begin{cases} x^2-x+k-1=0 \ \cdots\cdots ②\text{의 판별식 } D_1 \geqq 0 \\ x^2-x-k+1=0 \ \cdots\cdots ③\text{의 판별식 } D_2 \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ D_1=1-4(k-1) \geqq 0, \quad D_2=1-4(k+1) \geqq 0$$

$$\therefore\ k \leqq \frac{5}{4} \text{ 그리고 } k \geqq \frac{3}{4} \qquad \therefore\ \frac{3}{4} \leqq k \leqq \frac{5}{4}$$

따라서 k는 최대값 $\dfrac{5}{4}$를 가진다.

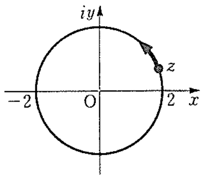
이 때, ②에서 $x^2-x+k-1=x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ ①\text{에서 } y=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

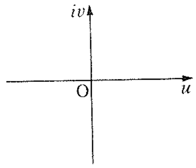
따라서 $x+y$가 최대가 되는 점은 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ ……답

4. 두 복소수평면(Z평면과 W평면) 위의 점 z와 w 사이에 $w=z+\dfrac{1}{z}$ $(z\neq 0)$와 같은 관계가 있다고 한다. ($z=x+iy$, $w=u+iv$, $i=\sqrt{-1}$)

(1) 점 z가 Z평면 위에서 반경이 2인 원주 위를 한 번 돌아갈 때 z에 대응하는 점 w는 W평면 위에서 어떤 도형을 그리는가? u와 v 사이의 관계식을 구해서 그 도형을 아래의 W평면에 그려 넣어라.



(Z평면)



(W평면)

(2) 위에서 그린 도형의 면적을 구하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수Ⅱ>복소수>자취문제

수Ⅱ>적분>면적

[난 이 도]

기본	표준	어려움
	(1)(2)	

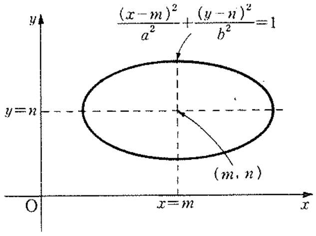
[문제분석] (1) $|z|=2$, $w=z+\dfrac{1}{z}$일 때 w의 자취를 구하는 문제이다.

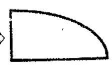
(i) $z=x+iy$, $w=u+iv$, $w=z+\dfrac{1}{z}$에서 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$를 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$의 식으로 표현한다.

(ii) $|z|=2$를 이용하여 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 사이의 관계식을 구한다.

의 순서로 풀면 된다.

(2) 오른편 그림과 같은 타원(또는 원)의 면적을 구할 때에는 구하기 쉬운 $\dfrac{1}{4}$ 타원(또는 원)의 면적을 구하여 이를 4배한다.



의 면적 ⇨  의 4배

모범해답 (1) $z=x+iy$, $|z|=2$에서 $x^2+y^2=4$ ……①

$w=z+\dfrac{1}{z}$, $w=u+iv$에서

$$u+iv=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$=x+iy+\frac{x-iy}{4}\ (\because\ ①에서)=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}yi$$

⇦ 여기까지가 3점

각 문자는 실수 …(*)이므로 복소수 상등의 원리에 의해,

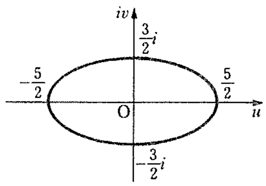
$$u=\frac{5}{4}x,\ v=\frac{3}{4}y$$

$$\therefore\ x=\frac{4}{5}u,\ y=\frac{4}{3}v$$

이것을 ①에 대입하면 $\left(\frac{4}{5}u\right)^2+\left(\frac{4}{3}v\right)^2=4$

$$\therefore\ \frac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1 \qquad \cdots\cdots②$$

이를 W평면에 도시하면 다음과 같다.



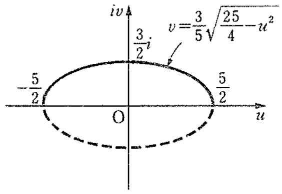
……답

(2) ②에서 $v=\pm\frac{3}{5}\sqrt{\frac{25}{4}-u^2}$

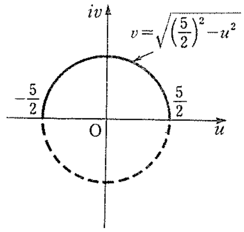
구하는 넓이를 S라 하면

$$S=4\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{3}{5}\sqrt{\frac{25}{4}-u^2}\,du$$

$$=\frac{12}{5}\int_0^{\frac{5}{2}}\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-u^2}\,du \qquad \cdots\cdots(**)$$



그런데, $\int_0^{\frac{5}{2}}\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-u^2}\,du$는 원점을 중심으로 하는 반지름 $\frac{5}{2}$인 원의 면적의 $\frac{1}{4}$을 의미하므로



$$S=\frac{12}{5}\times\left\{\frac{1}{4}\times\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{15}{4}\pi \qquad \cdots\cdots답$$

⇦ 문자가 실수이어야 복소수 상등의 원리를 쓸 수 있다. 문제에 실수조건이 주어지지 않은 것이 약간 흠이다. 여기서는 실수조건이 있다고 보고 풀었다.

⇦ 여기까지가 7점

⇦ 절편을 빠뜨리거나 틀리면 −3점

⇦ 여기까지가 3점

연구 *1°* [별해] (1) $|z|=2$이므로 $z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$라 둘 수 있다.

$$w=z+\frac{1}{z}=2(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=2(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\frac{5}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta$$

$w=u+iv$와 비교하면 $u=\frac{5}{2}\cos\theta$, $v=\frac{3}{2}\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{2}{5}u$, $\sin\theta=\frac{2}{3}v$를 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면,

$$\left(\frac{2}{5}u\right)^2+\left(\frac{2}{3}v\right)^2=1$$

즉, $\dfrac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$ (그림은 모범해답과 같다.)

2° [별해] (2) (모범해답에서(※※)이후의 풀이를 달리한 것이다.)

$u=\frac{5}{2}\sin\theta$라 두면, $u=0$일 때 $\theta=0$, $u=\frac{5}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 그리고 $du=\frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta$이므로

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{5}\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\sin^2\theta}\cdot\frac{5}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$=15\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta \quad \left(\because\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\text{에서 }\cos\theta\geqq0\text{이므로}\right)$$

$$=15\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{15}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15}{4}\pi \qquad \cdots\cdots\text{답}$$

3° (2)에서

「타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$의 넓이는 πab」

라는 공식을 적고 이 공식에 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$을 대입하여 답을 냈다면 만점에 가까운 점수를 얻을 수 있다. 문제에서 적분해서 구하라는 요구가 없고 또, 수학에서 모순없이 답을 이끌어 내었을 때는 원칙적으로 틀렸다고 할 수는 없으므로, 이미 알려진 공식(고교 과정에서 증명할 수 있는 공식)을 이용하는 것도 한 방법이 된다.

합격포인트 문제가 대체로 무난한 수준이다. 모두 손대어야 하고 약간의 감점을 고려해도 70점은 되어야 합격 가능하다. 수학이 주 득점원인 학생은 답안 작성을 치밀하게 하여 80점 정도 획득하면 성공.

'77 연세대 수학 I $\left(\frac{100점}{60분}\right)$

1. 부등식 $x^{\log_{\frac{1}{2}}x} < \frac{1}{8}x^2$을 풀어라. (10점)

2. $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$이 등차수열일 때 (20점)

(a) $2^{a_1},\ 2^{a_2},\ 2^{a_3}, \cdots$ 은 어떤 수열인가?

(b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{a_k}$이라 놓을 때, 수열 $\{S_n\}$이 수렴하도록 등차수열 $\{a_k\}$의 공차의 범위를 정하라.

3. f는 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geqq 0$인 연속함수이다.

$\int_a^x f(t)dt = S(x)$라 놓을 때 (여기서 $a \leqq x \leqq b$) (20점)

(a) x의 증분 $\varDelta x$에 대응하는 $S(x)$의 증분 $\varDelta S$를 구하고, 그림으로 나타내어라.

(b) 도함수의 정의를 써서 $\int_a^x f(t)dt$의 x에 관한 도함수를 구하라.

4*. 조건문($p \to q$)이 논리적으로 참일 때, 대우는 논리적으로 참이지만, 역은 논리적으로 참이 아님을 진리표를 써서 증명하여라. (10점)

5. 신생아의 모집단에서 64명을 임의로 추출하여 체중을 조사한 결과, 평균이 2.8kg이고 표준편차는 0.4kg이었다. (20점)

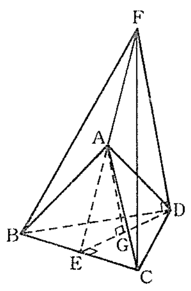
(a) 신뢰도 95%인 모평균의 신뢰 구간을 구하라.

(b) 신뢰도 95%로서 모평균과 표본평균의 차를 0.01kg 이하가 되게 추정하려면, 표본의 크기는 얼마로 하면 되겠는가?

6*. 모서리의 길이가 2인 정4면체 ABCD의 정점 D에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 E라 하고, 또 D에서 면 BCD에 수직인 직선과 직선 EA가 만나는 점을 F라 하자. (20점)

(a) A에서 면 BCD에 내린 수선의 발을 G라 할 때 EG의 길이를 구하라.

(b) $\triangle BCF$의 넓이를 구하라.



4* : 진리표를 이용한 형식논리는 현 교과 과정에서는 제외되었다.

6* : 출제 당시의 교과 과정으로는 문과 범위였으나 현재의 교과 과정으로는 이과 범위(수학 II 과정)이다. 따라서, 문과 학생들은 이 문제를 공부하지 않아도 된다.

'77 연세대 수학 II (100점/60분)

1. 로그부등식

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)(\log_{\frac{1}{3}} x+2)\leqq 3$$

을 풀어라. (10점)

2. a_1, a_2, a_3,…이 등차수열일 때 (20점)

(a) 2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3},… 은 어떤 수열인가?

(b) $S_n=\sum_{k=1}^{n} 2^{a_k}$이라 놓을 때, 수열 $\{S_n\}$이 수렴하도록 등차수열 $\{a_k\}$의 공차의 범위를 정하라.

3. n이 임의의 정수일 때

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

를 증명하라. (15점)

4. 미분계수와 연속의 정의를 써서, 함수 f가 어떤 구간에서 미분가능하면 f는 그 구간에서 연속임을 증명하라. (15점)

5. 정적분을 써서, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

을 구하라. 단, log는 자연 log이다. (10점)

6. 성공할 확률이 p이고, 실패할 확률이 $q=1-p$인 두 가지 결과를 가진 실험을 여러 번 반복 시행한다. (15점)

(a) 1회의 실험에서 성공하면 1, 실패하면 0을 배정한 확률변수 X에 관하여 평균과 표준편차를 구하라.

(b) 실험을 n회 반복하였을 때, n회에 처음으로 성공할 확률을 구하라.

(c) 실험을 n회 반복하여 그 중 r번 성공할 확률을 구하라.

7. 점 (1, 1)과 이 점의 원점에 관한 대칭점을 초점으로 하고, 점 (1, 1)의 y축에 관한 대칭점을 지나는 타원의 방정식과 이심률을 구하라. (15점)

'77 연세대 수학 I 해설과 풀이

1. 부등식 $x^{\log_{\frac{1}{2}}x}<\frac{1}{8}x^2$을 풀어라.

[배　　점] 10점

[출제분야] 일반수학>지수 · 로그>log부등식

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		▒						

[문제분석] 먼저, 양변에 2를 밑으로 하는 log를 잡는다. 물론, 10 또는 $\frac{1}{2}$을 밑으로 하는 log를 잡아도 되나, $\frac{1}{2}$을 밑으로 하는 log를 잡아서 풀어 나갈 경우에는 부등호 방향 처리를 잘못하여 감점되지 않도록 주의해야 한다. 즉,

$$0<a<1\text{일 때,}\quad \log_a f(x)<\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$$

$\boxed{\text{모범해답}}$ $\log_{\frac{1}{2}}x$의 진수는 양이어야 하므로 $x>0$ ……①

⇦ 이것을 빠뜨리면 −3점

이 때, 준 식의 양변은 모두 양수이므로 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 잡으면 $\log_2 x^{\log_{\frac{1}{2}}x}<\log_2\frac{1}{8}x^2$

$$\log_{\frac{1}{2}}x\cdot\log_2 x<\log_2\frac{1}{8}+\log_2 x^2$$

⇦ 공식 $\log_a M^n=n\log_a M$ 을 이용했다.

$$-\log_2 x\cdot\log_2 x<-3+2\log_2 x$$

$$(\log_2 x)^2+2\log_2 x-3>0 \qquad \therefore\ (\log_2 x-1)(\log_2 x+3)>0$$

$$\therefore\ \log_2 x>1,\ \log_2 x<-3 \qquad \therefore\ x>2,\ 0<x<\frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots②$$

①, ②의 공통범위를 구하면 $x>2$ 또는 $0<x<\frac{1}{8}$ ……답

연구 [별해] 진수조건에 의해 $x>0$이고, 준 식의 양변에 $\frac{1}{2}$을 밑으로 하는 로그를 잡으면,

$$\log_{\frac{1}{2}}x^{\log_{\frac{1}{2}}x}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}x^2$$

⇦ 부등호 방향이 바뀜에 주의

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2>3+\log_{\frac{1}{2}}x^2 \qquad \therefore\ \left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2-2\log_{\frac{1}{2}}x-3>0$$

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}x-3\right)\left(\log_{\frac{1}{2}}x+1\right)>0 \qquad \therefore\ \log_{\frac{1}{2}}x<-1 \text{ or } \log_{\frac{1}{2}}x>3$$

$$\therefore\ x>2 \text{ 또는 } 0<x<\frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots\text{답}$$

2. a_1, a_2, a_3,$\cdots$이 등차수열일 때

(a) 2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3},$\cdots$ 은 어떤 수열인가?

(b) $S_n=\sum_{k=1}^{n}2^{a_k}$이라 놓을 때, 수열 $\{S_n\}$이 수렴하도록 등차수열 $\{a_k\}$의 공차의 범위를 정하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I, II 공통>수열>등차수열, 등비수열
수 I, II 공통>극한>수열의 극한, 무한등비급수

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(a)	(b)	

[문제분석] (a)는 등차수열과 등비수열의 정의를 정확히 이해하고 있어야 풀 수 있다.

수열 $\{a_n\}$이 등차수열 $\Longleftrightarrow$ $a_{n+1}-a_n=d$ (d는 상수)

수열 $\{b_n\}$이 등비수열 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r$ (r은 상수)

(b)에서는 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}2^{a_k}$이고 (a)에서 $\{2^{a_k}\}$이 등비수열을 이루므로, 무한등비급수의 수렴조건을 이용해야 한다.

무한등비급수 $S=a+ar+ar^2+\cdots$ $(a\neq0)$ 의 수렴조건 ⇨ $|r|<1$

모범해답 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 공차를 d(: 상수)라 하면,

(a) $a_{n+1}-a_n=d$

한편, 수열 $\{2^{a_n}\}$에서

$$\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=2^{a_{n+1}-a_n}=2^d \text{ (: 일정)}$$

$\therefore$ 수열 $\{2^{a_n}\}$은 첫째항이 2^{a_1}, 공비가 2^d인 등비수열이다.

답 등비수열

(b) 수열 $\{S_n\}$이 수렴한다는 것은 무한급수

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{k=1}^{\infty}2^{a_k}=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}+\cdots \qquad \cdots\cdots(*)$$

의 합이 존재한다는 것과 동치이다. ⇦ 여기까지가 3점

그런데, 수열 $\{2^{a_n}\}$은 공비가 2^d인 등비수열이므로 (*)는 무한등비급수가 된다.

공비가 2^d인 무한등비급수의 합이 존재하려면 $-1<2^d<1$ ⇦ 여기까지가 7점

$\therefore$ $d<0$ ……답

연구 [별해] (a) 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(: 상수)라 하면,

$a_n=a_1+(n-1)d$ (단, n은 자연수)　　$\therefore$ $2^{a_n}=2^{a_1+(n-1)d}=2^{a_1}\cdot(2^d)^{n-1}$

따라서 수열 $\{2^{a_n}\}$은 첫째항 2^{a_1}, 공비 2^d인 등비수열이다.

3. f는 구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geqq 0$인 연속함수이다.

$\int_a^x f(t)dt = \mathrm{S}(x)$라 놓을 때 (여기서 $a \leqq x \leqq b$)

(a) x의 증분 Δx에 대응하는 $\mathrm{S}(x)$의 증분 $\Delta\mathrm{S}$를 구하고, 그림으로 나타내어라.

(b) 도함수의 정의를 써서 $\int_a^x f(t)dt$의 x에 관한 도함수를 구하라.

[배　　점] 20점(5점+15점)

[출제분야] 수 I >미분>도함수의 정의

수 I >적분>정적분의 뜻

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
			(a)			(b)		

[문제분석] 정적분의 기본 원리를 정확히 이해하고 있는가를 묻는 문제로

(a)는 $\Delta\mathrm{S} = \mathrm{S}(x+\Delta x) - \mathrm{S}(x)$와 정적분의 뜻으로 간단히 결과가 도출되지만,

(b)는 다음과 같은 내용을 기본 지식으로 해서 도함수를 구해야 하는 쉽지 않은 문제이다.

(i) 최대 · 최소 정리 : 폐구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$가 연속함수이면 $y=f(x)$는 이 구간에서 최대값과 최소값을 갖는다.

(ii) 부등식과 그 극한 : 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n \leqq x_n \leqq b_n \text{이고, } \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \ (\alpha\text{는 유한확정값})$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

이것은 다음과 같이 이해해도 된다.

모든 자연수 n에 대해, $a_n \leqq x_n \leqq b_n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} x_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

※ **주의** 모든 자연수 n에 대해, $a_n < x_n < b_n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} x_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

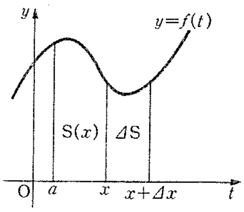
와 같이 lim를 취하면 등호가 생기는 것에 유의할 것!

모범해답 (a) $\Delta\mathrm{S} = \mathrm{S}(x+\Delta x) - \mathrm{S}(x)$

이므로,

$$\Delta\mathrm{S} = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad \cdots\cdots \text{답}$$



(b) $\mathrm{S}(x) = \int_a^x f(t)dt$의 x에 관한 도함수는

$$\mathrm{S}'(x) = \frac{d\mathrm{S}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\mathrm{S}}{\Delta x}$$

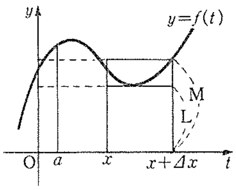
한편, $y=f(t)$는 폐구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 연속함수이므로 이 구간에서 최대값과 최소값이 존재(최대 · 최소 정리)한다. 이 때, 최대값을 M, 최소값을 L이라 하면

⇦ Δx의 범위를 나누지 않으면 −5점

(i) $\Delta x>0$일 때 ;

$$\mathrm{L}\cdot\Delta x \leqq \Delta\mathrm{S} \leqq \mathrm{M}\cdot\Delta x$$

$$\therefore\ \mathrm{L} \leqq \frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta x} \leqq \mathrm{M} \quad \cdots\cdots①$$



(ii) $\Delta x<0$일 때 ;

$$\mathrm{M}\cdot\Delta x \leqq \Delta\mathrm{S} \leqq \mathrm{L}\cdot\Delta x$$

$$\therefore\ \mathrm{L} \leqq \frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta x} \leqq \mathrm{M} \quad \cdots\cdots②$$

①, ②의 어느 경우에나 $\Delta x \to 0$이면 $\mathrm{M}\to f(x)$, $\mathrm{L}\to f(x)$이므로

$$f(x) \leqq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta x} \leqq f(x)$$

$$\therefore\ \mathrm{S}'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta x}=f(x)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad \cdots\cdots 답$$

연구 [별해] (b) $\mathrm{S}(x)=\int_a^x f(t)dt$의 도함수를 수 II 과정의 적분의 평균값의 정리를 써서 구해 보면,

$$\mathrm{S}'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$\left(\because\ \text{(a)에서 } \Delta \mathrm{S}=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\text{이므로}\right)$$

그런데 함수 $y=f(t)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이므로 적분의 평균값의 정리에서

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(t)$$

를 만족하는 t가 개구간 $(x, x+\Delta x)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $\Delta x\to 0$이면 $t\to x$이므로,

$$\mathrm{S}'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(t)=f(x)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad \cdots\cdots 답$$

(참고) 적분의 평균값의 정리 :

함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$$

를 만족하는 c가 개구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

4. 조건문 ($p \to q$)이 논리적으로 참일 때, 대우는 논리적으로 참이지만, 역은 논리적으로 참이 아님을 진리표를 써서 증명하여라.

[배　　점] 10점

[출제분야] 일반수학>집합과 명제(구 교과과정)>진리표, 명제의 역·이·대우

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 개편된 교과 과정에서 제외된 부분인 기호논리학의 기본이 되는 문제이다. 이 문제를 해결할 수 있을 정도로만 기호논리를 간단히 소개하면 다음과 같다.

<명제 p가 참인 것을 T, 거짓인 것을 F로 나타내고 T, F를 명제 p의 진리값이라 한다. 그리고 명제 $p \vee q$(p 또는 q), $p \wedge q$(p 그리고 q), $\sim p$(p가 아니다), 조건문 $p \to q$의 진리값을 다음의 표(진리표라 한다)와 같이 정의한다.>

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim p$	$p \to q$
T	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T

모범해답

			원명제	역			대우		
	p	q	$p \to q$	q	$\to$	p	$\sim q$	$\to$	$\sim p$
①	T	T	T	T	T	T	F	T	F
②	T	F	F	F	T	T	T	F	F
③	F	T	T	T	F	F	F	T	T
④	F	F	T	F	T	F	T	T	T

⇐ $p \to q$가 참일 때만 다루면 되므로 ②는 제외해도 된다.

위 진리표에 의하면 조건으로 이루어진 명제 $p \to q$가 논리적으로 참인 경우는 ①, ③, ④이다. 이 때, 역과 대우가 논리적으로 참인 경우는

역 : ①, ④

대우 : ①, ③, ④

이므로 원명제가 논리적으로 참일 때 대우는 항상 논리적으로 참이지만, 역은 논리적으로 항상 참인 것은 아니다. (증명 끝)

5. 신생아의 모집단에서 64명을 임의로 추출하여 체중을 조사한 결과, 평균이 2.8kg이고 표준편차는 0.4kg이었다.

(a) 신뢰도 95%인 모평균의 신뢰 구간을 구하라.

(b) 신뢰도 95%로서 모평균과 표본평균의 차를 0.01kg 이하가 되게 추정하려면, 표본의 크기는 얼마로 하면 되겠는가?

[배　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I >확률 · 통계>신뢰도, 모평균의 추정

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(a)		(b)					

[문제분석] 모평균의 추정에 관한 평범한 문제로, 다음 내용을 정확히 기억하면 풀 수 있다.

모평균 m, 모표준편차 σ, 표본평균 $\bar{x}$, 표본의 크기 n일 때,

(i) 신뢰도 95%인 모평균의 신뢰구간 ⇨ $\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(ii) 신뢰도 95%인 모평균의 신뢰구간의 길이 ⇨ $2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(iii) 모평균과 표본평균의 차 ⇨ $|m-\bar{x}| \leqq 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

단, 신뢰도 99%일 때는 **1.96→2.58**로 바꾸어서 계산한다.

또, 모표준편차 σ를 알지 못할 때에는 표본표준편차 s로 대용할 수 있음도 알아두어야 한다.

모범해답 (a) 모집단에서 임의 추출된 n개의 표본의 평균을 x, 표본표준편차를 s라 할 때, 신뢰도 95%인 모평균 m의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \bar{x}+1.96\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} \quad \cdots\cdots(*)$$

⇦ 여기까지가 5점

이므로 여기에

$$\bar{x}=2.8,\quad n=64,\quad s=0.4$$

를 대입하면

$$2.8-1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{64}} \leqq m \leqq 2.8+1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore\ 2.7(\text{kg}) \leqq m \leqq 2.9(\text{kg}) \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ 1.96≒2로 보고 계산하였다.

(b) 신뢰도 95%일 때 모평균과 표본평균의 차는 (*)에서,

$$|m-\bar{x}| \leqq 1.96\times\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \therefore\ |m-\bar{x}| \leqq 1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}$$

⇦ 여기까지가 4점

따라서, $|m-\bar{x}| \leqq 0.01$이 되게 하려면 $1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{n}} \leqq 0.01$에서

⇦ 여기까지가 7점

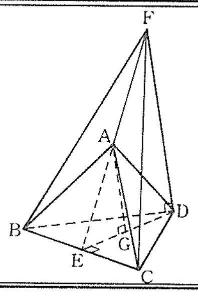
$$n \geqq 6146.56$$

답 6147명 이상

6. 모서리의 길이가 2인 정4면체 ABCD의 정점 D에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 E라 하고, 또 D에서 면 BCD에 수직인 직선과 직선 EA가 만나는 점을 F라 하자.

(a) A에서 면 BCD에 내린 수선의 발을 G라 할 때 EG의 길이를 구하라.

(b) $\triangle$BCF의 넓이를 구하라.



[배 점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 Ⅱ > 공간도형과 공간좌표 > 직선 · 평면의 수직에 관한 정리

[난 이 도]

기본	표준	어려움
	(b) (a)	

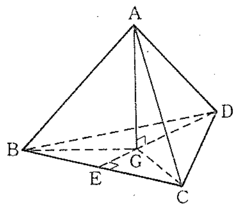
[문제분석] 출제 당시에는 문 · 이과 공통이었으나 현재는 이과 부분(수 Ⅱ 과정)이다.

(a) 정사면체 ABCD의 한 꼭지점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 G라 하면

$$\triangle ABG \equiv \triangle ACG \equiv \triangle ADG$$

이것을 써서 G는 $\triangle$BCD의 무게중심임을 알아내고 다음 성질을 이용한다.

G가 무게중심 ⇨ $\overline{DG} : \overline{GE} = 2 : 1$



(b) (a)에서 G는 무게중심이므로 G는 중선 DE 위에 있다.

$$AG \perp (\text{면 } BCD), \quad FD \perp (\text{면 } BCD)$$

이므로 $AG /\!/ FD$

∴ A, G, D, F는 동일 평면 위에 있다.

∴ 직선 AE와 직선 DF는 교점을 가진다.

(이 문제에서는 이 정도로 자세한 내용을 필요로 하지 않을 것이다.)

또, $AG /\!/ FD$에서 $\triangle AEG \backsim \triangle FED$

따라서 닮음비를 이용하여 $\overline{EF}$를 구한 다음,

$$\triangle BCF = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{EF}$$

에 대입하면 된다.

⇦ E가 선분 BC의 중점이고, $\triangle$ABC가 정삼각형이므로 $AE \perp BC$
∴ $EF \perp BC$

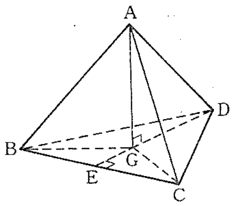
모범해답 (a) $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$, $AG \perp$(면 BCD), AG는 공통변이므로,

$\triangle ABG \equiv \triangle ACG \equiv \triangle ADG$
(RHS합동)

∴ $\overline{BG} = \overline{CG} = \overline{DG}$

∴ G는 $\triangle$BCD의 외심이다.

그런데 $\triangle$BCD는 정삼각형이고 정삼각형의 외심은 무게중심과 일치하므로 G는 $\triangle$BCD의 무게중심이다.



한편 $\triangle BCD$가 정3각형이므로 수선 DE는 중선이다. 따라서 G는 DE 위에 있다.

$$\therefore \overline{DG} : \overline{GE} = 2 : 1$$

⇦ 여기까지가 5점

$\triangle BDE$에서

$$\overline{DE} = \overline{BD}\sin 60° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \cdots\cdots ①$$

이므로

$$\overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots\cdots 답$$

(b) $AG /\!/ FD$이므로 F, A, E, G, D는 동일 평면 위에 있고

⇦ 이것을 빠뜨리면 −3점

$$\triangle AEG \backsim \triangle FED$$

$$\therefore \frac{\overline{ED}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \overline{FE} = 3\overline{ED} = 3\sqrt{3} \quad (\because ①에서)$$

E가 변 BC의 중점이고, $\triangle ABC$는 정3각형이므로 $AE \perp BC$

$$\therefore FE \perp BC$$

$$\therefore \triangle BCF = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{FE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \quad \cdots\cdots 답$$

연구 [별해] (a) 이등변삼각형 BCD에서 $DE \perp BC$ ……①
이므로 E는 BC의 중점이다.

또, $\triangle ABC$도 이등변삼각형이므로 $AE \perp BC$ ……②

①, ②에 의하여 $BC \perp$(평면 ADE)

$$\therefore (평면\ BCD) \perp (평면\ ADE)$$

A에서 평면 BCD, 평면 ADE의 교선 DE에 내린 수선은 평면 BCD에 수직이고, A에서 평면 BCD에 내린 수선은 유일하므로 G는 교선 DE 위에 있다.

이제, $\triangle AED$에서

$$\overline{AD} = 2,\ \overline{AE} = \overline{DE} = \sqrt{3}$$

이므로 $EG = x$라 하면

$$\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EG}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{GD}^2$$

$$\therefore 3 - x^2 = 4 - (\sqrt{3} - x)^2$$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \overline{EG} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots\cdots 답$$

(a)는 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발 G가 선분 DE 상에 있는 점이라는 것을 밝힌 후, $\triangle DEF$에서 피타고라스 정리를 이용하여 EG를 구할 수 있다. G가 DE 상의 점이라는 것을 증명하기 위해 다음 정리들을 이용한다.

(i) 직선 l이 평면 α 위에서 만나는 두 직선 a, b에 수직이면 직선 l은 평면 α에 수직이다.
곧, $l \perp \alpha$이다.

(ii) 직선 l이 평면 α에 수직일 때, l을 포함하는 모든 평면은 평면 α에 수직이 된다.

(iii) 수직인 두 평면 α, β 중의 한 평면 β 위의 한 점 p에서 두 평면의 교선 l에 내린 수선은 다른 한 평면 α에 수직이다.

합격포인트 *4, 6*번은 교과 과정 밖이므로 제외하면 70점 만점이다. *1, 2, 3*의 (a), *5*번을 풀어서 총점이 52점 정도면 합격 가능하다. 수학이 주 득점원인 학생은 *3*의 (b)도 풀어서 60점 정도 획득하면 성공.

'77 연세대 수학 II 해설과 풀이

1. 로그부등식

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)(\log_{\frac{1}{3}} x+2) \leqq 3$$

을 풀어라.

[배　　점] 10점

[출제분야] 일반수학>지수·로그>log부등식

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] $\log_{\frac{1}{3}} x$를 t로 치환하면 t에 관한 2차부등식이 되는 평범한 문제이지만 마지막 과정에서

$$\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \iff a < b \ (\text{단, } a,\ b>0)$$

처럼 부등호 방향이 바뀜에 주의해야 한다.

일반적으로 log부등식에서는 다음 관계가 성립한다.

$a>1$인 경우　$\log_a \mathrm{M} > \log_a \mathrm{N} \iff \mathrm{M} > \mathrm{N}$ ($\mathrm{M}>0$, $\mathrm{N}>0$)

$0<a<1$인 경우　$\log_a \mathrm{M} > \log_a \mathrm{N} \iff \mathrm{M} < \mathrm{N}$ ($\mathrm{M}>0$, $\mathrm{N}>0$)

실수를 미연에 방지하기 위해 $\log_{\frac{1}{3}} x$를 $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$로 고쳐서 푸는 것도 좋다.

모범해답 준 식에서 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$라 두면　$t(t+2) \leqq 3$

$\therefore\ t^2+2t-3 \leqq 0$,　$(t-1)(t+3) \leqq 0$

$\therefore\ -3 \leqq t \leqq 1$,　$-3 \leqq \log_{\frac{1}{3}} x \leqq 1$

$\therefore\ \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \leqq \log_{\frac{1}{3}} x \leqq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$　　$\therefore\ 27 \geqq x \geqq \frac{1}{3}$

⇦ 부등호 방향이 틀리면 −5점

답 $\frac{1}{3} \leqq x \leqq 27$

연구 [별해] $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$이므로 준 식은　　⇦ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$이용

$$(-\log_3 x)(-\log_3 x+2) \leqq 3$$

이 때, $\log_3 x = t$라 두면　$(-t)(-t+2) \leqq 3$

$\therefore\ t^2-2t-3 \leqq 0$　　$\therefore\ (t-3)(t+1) \leqq 0$,　$-1 \leqq t \leqq 3$

$\therefore\ -1 \leqq \log_3 x \leqq 3$　　$\therefore\ \frac{1}{3} \leqq x \leqq 27$　　……답

2. 수학Ⅰ의 2번과 같다.

---

3. n이 임의의 정수일 때

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

를 증명하라.

[배　점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ>삼각함수>삼각함수의 덧셈정리

수Ⅱ>수열>수학적 귀납법

수Ⅱ>복소수>복소수의 극형식

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 복소수에서 가장 중요한 정리인 드 무와브르 정리를 증명하는 문제로 수학적 귀납법을 이용하여야 엄밀한 증명이 된다. $n=1, 2, 3$일 때를 생각하여 유추하는 것은 추정 그 자체일 뿐이지 완전한 증명이 아니므로 상당한 감점을 각오해야 할 것이다.

모든 자연수(또는 정수)에 대하여 조건 **P(n)**이 성립함을 증명

⇨ 수학적 귀납법에 착안

그리고 조건에서 n이 정수이므로 n을 양의 정수, 0, 음의 정수로 나누어 증명해야 한다.

수학적 귀납법으로 조건 P(n)이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이려면,

(i) **$n=1$**일 때 즉, **P(1)**이 성립함을 보인다.

(ii) **$n=k$**일 때 **P(k)**가 성립한다고 가정한 후, 이 가정을 이용하여 **$n=k+1$**일 때 즉, **P($k+1$)**이 성립함을 보인다.

모범해답 (i) n이 양의 정수일 때 ;

ⓘ $n=1$이면

$$(\text{좌변}) = \cos\theta + i\sin\theta,\quad (\text{우변}) = \cos\theta + i\sin\theta$$

이므로 준 식은 성립한다.

ⓘⓘ $n=k$일 때 준 식이 성립한다고 가정하면

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore\ (\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (\cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta) \\ &\qquad + i(\sin\theta\cos k\theta + \cos\theta\sin k\theta) \\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta \end{aligned}$$

⇦ 삼각함수의 덧셈정리

이것은 준 식이 $n=k+1$일 때도 성립함을 뜻한다.

따라서 ⓘ, ⓘⓘ에 의하여 준 식은 모든 양의 정수 n에 대하여 항상 성립한다.

⇦ 여기까지가 5점

(ii) $n=0$일 때 ; $\sin\theta$, $\cos\theta$가 동시에 0이 될 수는 없으므로 $\cos\theta+i\sin\theta\neq 0$ $\therefore$ (좌변)$=(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$, (우변)$=\cos 0+i\sin 0=1$ $\therefore$ 준 식은 성립한다. (iii) n이 음의 정수일 때 ; $n=-m$ (m은 양의 정수)으로 두면, $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$ $=\left(\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)^m$ $=\left\{\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}\right\}^m$ $=(\cos\theta-i\sin\theta)^m$ ($\because$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로) $=\{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^m$ $=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)$ ($\because$ (i)에서) $=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 따라서 n이 음의 정수일 때도 준 식은 성립한다. (i), (ii), (iii)에 의하여 준 식은 모든 정수 n에 대하여 성립한다.	⇐ 이것을 언급하지 않으면 -2점($\because$ 0^0은 정의되어 있지 않다.)

알쏭달쏭?!

1. "다음 조건이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하여라.

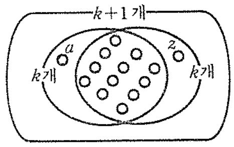
P(n) : n개의 바둑알은 전부 같은 색이다."

(증명) (i) $n=1$일 때 1개의 바둑알은 분명히 같은 색이다.

$\therefore$ P(1)은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 즉, P(k)가 성립한다고 하면 k개의 바둑알은 전부 같은 색이다.

이제 $n=k+1$일 때를 알아 보자. 오른편 그림에서 z를 제외하면 k개이므로 가정에 의해 색이 같고 a를 제외해도 k개이므로 가정에 의해 색이 같다. 빗금 친 부분은 공통이므로 결국, $k+1$개의 바둑알은 전부 같은 색이다.



(i), (ii)에서 모든 바둑알은 전부 같은 색임을 알 수 있다. (증명 끝)

이 증명의 어떤 부분이 잘못되었는지를 적어서 p.220의 응모권과 함께 부쳐 주기 바랍니다.

4. 미분계수와 연속의 정의를 써서, 함수 f가 어떤 구간에서 미분가능하면 f는 그 구간에서 연속임을 증명하라.

[배　　점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ>극한>함수의 연속성
수Ⅱ>미분>미분가능성

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 기본적인 원리의 중요성을 강조하는 문제이다. 먼저,

함수 f가 구간 I에서 미분가능(또는 연속)

$\Longleftrightarrow$ 구간 I의 모든 x값에 대하여 f가 미분가능(또는 연속)

임을 명심해야 한다. 그리고, 다음 정의를 활용하면 쉽게 증명할 수 있다.

$$\text{함수 } f\text{가 } x=a\text{에서 연속} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } f(a)\text{가 정의되고,} \\ \text{(ii) } \lim_{x\to a} f(x)\text{가 존재하고,} \\ \text{(iii) } \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \end{cases}$$

⇦ 장황하게 3가지나 언급되어 있지만 이 전체는 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ (: 유한확정값)와 동치임을 음미해 볼 것!

함수 f가 $x=a$에서 미분가능

$$\Longleftrightarrow f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{가 존재}$$

⇦ 여기서 존재라 함은 유한확정값을 말하는 것이다.

모범해답 함수 f가 어떤 구간 I에서 미분가능하다고 하면, $a\in\mathrm{I}$인 모든 a에 대하여, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ (; 유한확정값)

⇦ 여기까지가 5점

그런데, 위의 식에서 분모의 극한값이 0이므로 극한값 $f'(a)$가 존재하려면 분자의 극한값도 0이어야 한다.

⇦ 이것을 생략하면 −5점

즉, $\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$ $\quad\therefore \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

⇦ 여기까지가 12점

따라서 함수 f는 $x=a$에서 연속이다.

함수 f가 $a\in\mathrm{I}$인 모든 a에 대하여 연속이므로 함수 f는 구간 I에서 연속이다. (증명 끝)

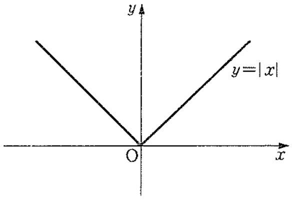
⇦ "모든 a에 대하여"를 생략하면 −3점

연구 주어진 문제의 역은 성립하지 않는다.
(반례) $f(x)=|x|$의 경우를 살펴 보자.

$f(x)=|x|$는 모든 실수값 a에 대하여 $\lim_{x\to a}|x|=|a|$을 만족하므로 연속함수이다.

그러나 $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ ($\because f(0)=0$이므로)

$$f'(0)=\begin{cases}\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1 \\ \lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1\end{cases} \qquad \therefore f'(0)\text{는 존재하지 않는다.}$$



즉, $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분불가능이다.

5. 정적분을 써서, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

을 구하라. 단, log는 자연 log이다.

[배　점] 10점

[출제분야] 수Ⅱ > 적분 > 정적분의 계산, 정적분과 무한급수

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
			▒					

[문제분석] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

↓

$x_k=a+\dfrac{b-a}{n}\cdot k$

↓

$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$

↓

$(\text{좌변})=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$

↑

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_1=\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{b-a}{n}\right)=a$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}b=b$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(a+px)dx$ ⇐ $x_k=\dfrac{k}{n}$ → $\Delta x=\dfrac{1}{n}$ 　 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_1=0,\ \lim_{n\to\infty}x_n=1$

$\displaystyle=\frac{1}{p}\int_0^p f(a+x)dx$ ⇐ $x_k=\dfrac{pk}{n}$ → $\Delta x=\dfrac{p}{n}$ 　 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_1=0,\ \lim_{n\to\infty}x_n=p$

$\displaystyle=\frac{1}{p}\int_a^{a+p} f(x)dx$ ⇐ $x_k=a+\dfrac{pk}{n}$ → $\Delta x=\dfrac{p}{n}$ 　 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_1=a,\ \lim_{n\to\infty}x_n=a+p$

모범해답 $(\text{준 식})=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$ 　 ⇐ 여기까지가 5점

$\displaystyle=\int_0^1\log(1+x)dx$

$\displaystyle=\Big[(1+x)\{\log(1+x)-1\}\Big]_0^1$

$=2\log2-1$ ……답

연구 [별해] $(\text{준 식})=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$\displaystyle=\int_0^2\log x\,dx$

$\displaystyle=\Big[x\log x-x\Big]_1^2$

$=2\log2-1$ ……답

6. 성공할 확률이 p이고, 실패할 확률이 $q=1-p$인 두 가지 결과를 가진 실험을 여러 번 반복 시행한다.

(a) 1회의 실험에서 성공하면 1, 실패하면 0을 배정한 확률변수 X에 관하여 평균과 표준편차를 구하라.

(b) 실험을 n회 반복하였을 때, n회에 처음으로 성공할 확률을 구하라.

(c) 실험을 n회 반복하여 그 중 r번 성공할 확률을 구하라.

[배　점] 15점(5점+5점+5점)

[출제분야] 수Ⅱ > 확률 · 통계 > 평균, 분산, 확률의 곱셈정리, 독립시행의 정리

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(c)	(b)	(a)					

[문제분석] 확률변수 X의 확률분포표를 작성한 다음 평균과 분산에 관한 아래 공식을 적용한다.

(a) $\mathrm{E(X)}=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$,　$\mathrm{V(X)}=\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i-\{\mathrm{E(X)}\}^2$

(b) n회에 처음으로 성공한다는 것은 $\boldsymbol{n-1}$회까지 실패하고 $\boldsymbol{n}$회째 성공한다는 것을 의미한다. 각 시행이 독립이므로 확률의 곱셈정리를 이용하면 쉽게 풀 수 있다.

(c) 다음 독립시행의 정리를 이해하고 있으면 간단히 결과를 얻을 수 있다.

독립시행의 정리

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p, 일어나지 않을 확률이 $q(=1-p)$일 때, 이 시행을 n회 독립적으로 반복하는 시행에서 사건 A가 꼭 $\boldsymbol{r}$번 일어날 확률 P_r은 다음과 같다.

$$\mathbf{P}_r={}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r}\quad (r=0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n)$$

모범해답 (a)

X	0	1	계
P(X=x)	q	p	1

평균 : $\mathrm{E(X)}=0\times q+1\times p=p$

분산 : $\mathrm{V(X)}=(0\times q+1^2\times p)-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq$

$\therefore$ 표준편차 $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V(X)}}=\sqrt{pq}$ ……답

⇐ 여기까지가 2점

(b) $n-1$회까지 실패하는 사건을 A라 하고, n회에 성공하는 사건을 B라 하면,　$\mathrm{P(A)}=q^{n-1}$,　$\mathrm{P(B)}=p$

n회에 처음 성공하는 사건은 A∩B이고, 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}=q^{n-1}p$ ……답

(c) 매회 같은 시행을 계속해서 반복하고, 각 시행의 결과가 서로 독립이므로 독립시행의 정리에 의하여 n회 중에서 꼭 r번 성공할 확률은　${}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r}$ ……답

7. 점 (1, 1)과 이 점의 원점에 관한 대칭점을 초점으로 하고, 점 (1, 1)의 y축에 관한 대칭점을 지나는 타원의 방정식과 이심률을 구하라.

[배　　점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ＞타원과 쌍곡선＞타원의 방정식, 이심률(교과 과정 밖임)

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 일반적으로 다루는 타원은 장축이 x축이나 y축에 평행한 경우이다. 이 문제의 타원은 장축이 $y=x$ 위에 놓이는 경우이므로 다소 거북함을 느낄 것이다. 그러나 다음 타원의 정의만 옳게 이해하고 있으면 그리 어렵지 않게 풀 수 있다.

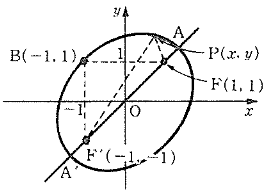
두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 위의 임의의 점을 P라 하면

⇨ $\overline{PF}+\overline{PF'}=$(일정) (⇦ 이 값은 장축의 길이와 같다.)

그리고 이심률(교과 과정 밖임)에 관한 다음 정의를 적용한다.

$$\text{이심률}(e)=\frac{\text{초점 사이의 거리}}{\text{장축의 길이}}$$

모범해답 구하는 타원은 두 점 F(1, 1), F(−1, −1)을 초점으로 하고 B(−1, 1)을 지나므로 타원 위의 임의의 한 점을 P(x, y)라 하면, 타원의 정의에 의하여



$$\overline{PF}+\overline{PF'}=(\text{일정})$$

즉, $\overline{PF}+\overline{PF}'=\overline{BF}+\overline{BF}'=4$

$$\therefore\ \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=4$$ ⇦ 여기까지가 4점

$$\therefore\ \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=4-\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면, $2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=x+y+4$

다시 제곱하여 정리하면,

$$3x^2-2xy+3y^2=8 \quad \cdots\cdots \text{답}$$ ⇦ 여기까지가 8점

이 타원의 장축의 길이는 $\overline{AA}'=4$, 두 초점 사이의 거리는 $\overline{FF}'=2\sqrt{2}$이므로,

$$\text{이심률 } e=\frac{\overline{FF}'}{\overline{AA}'}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

합격포인트 7번의 이심률을 제외하면 쉽게 해결할 수 있는 문제들이다. 결국 감점을 적게 당하는 것이 합격의 관건이고 보면 ***3***, ***4***번의 증명 문제가 당락의 열쇠! 전부 풀어서 다소 감점이 있어도 총점이 70점은 되어야 합격 가능하다. 수학이 주 득점원인 학생은 80점 이상 획득하면 성공.

'77 고려대 수학 I $\left(^{100점}/_{60분}\right)$

1. 괄호 안에 알맞은 답을 써 넣어라. (40점)

(1) 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 집합 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$에로의 함수의 개수는 (ⓐ)이고, 이 중에서 $i \neq j$이면 $f(i) \neq f(j)$인 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 개수는 (ⓑ)이며, 또 $i<j$이면 $f(i)<f(j)$인 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 개수는 (ⓒ)이다.

(2)* $|z+1|+(1-2i)z=15$를 만족하는 z의 값은 (ⓐ)이다. 단, i는 허수단위이고, z는 복소수이다.

(3) 원점을 지나고 기울기가 m인 직선이 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$과 서로 다른 두 점 P_1 및 P_2에서 만날 때, m의 범위는 (ⓐ)이고, 선분 P_1P_2의 길이를 m으로 표시하면 (ⓑ)이다.

(4) $A=\{(x, y)|0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$, $B=\{(x, y)|2x+y>k\}$에서 $A \cap B=\phi$되게 하는 k의 범위는 (ⓐ)이고 $A \cap B=A$되게 하는 k의 범위는 (ⓑ)이다.

(5)* 한 변의 길이가 a인 정4면체 ABCD의 체적은 (ⓐ)이고, 변 AB 위의 점을 P, 변 CD 위의 점을 Q라 할 때 선분 PQ의 최소값은 (ⓑ)이다.

※ 다음 *2, 3, 4*는 반드시 풀이 과정을 보이면서 답을 내라.

2. 부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geqq -1+\log_{\frac{1}{4}}|x-2|$를 풀어라. (20점)

1-(2)* : 입시 당시나 지금이나 교과 과정으로는 수학 II 이다. 문과 범위를 넘어서는 출제가 간혹 있음을 알 수 있다.

1-(5)* : 입시 당시의 교과 과정으로는 수학 I 이었지만 현재의 교과 과정으로는 수학 II 이다. 따라서 문과 학생들은 공부하지 않아도 된다.

3. 한 변의 길이가 2인 정4각형 S_1의 내접원 C_1을 만들고 C_1에 내접하는 정4각형 S_2를 만든다. 또 S_2의 내접원 C_2를 만든다. 이와 같이 계속해서 원과 정4각형을 내접시켜 간다. (20점)

(1) n번째의 정4각형 S_n의 면적과 그 내접원 C_n의 면적의 차를 a_n이라 할 때, a_n을 구하라.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하라.

4. 3차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소가 되고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A\left(3, \frac{5}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은 $3y-9x+22=0$이라고 한다. (20점)

(1) $f(x)$를 구하라.

(2) 점 $A\left(3, \frac{5}{3}\right)$와 곡선 위의 다른 점 B에서의 접선의 기울기도 3이라고 한다. B의 좌표를 구하라.

(3) 선분 AB와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 면적을 구하라.

'77 고려대 수학 Ⅱ (100점/60분)

1. 다음 괄호 안에 알맞은 답을 써 넣어라. (40점)

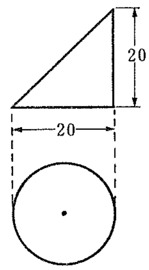
(1) 함수 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$는 ($x=$ ⓐ)일 때 최대값 (ⓑ)을(를) 취하며 ($x=$ ⓒ)일 때 최소값 (ⓓ)을(를) 취한다.

(2) 10개의 제품이 들어 있는 상자가 있다. 이 가운데 2개의 불량품이 들어 있다. 지금 이 중에서 한 개씩 꺼내서 검사하여 불량품이 전부 발견되면 검사가 끝나는 것으로 한다. 꼭 2번째에서 검사가 끝날 확률은 (ⓐ)이고, 꼭 5번째에서 검사가 끝날 확률은 (ⓑ)이다.

(3) $A=\{(x,\ y)\mid 0\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}\}$, $B=\{(x,\ y)\mid 2x+y>k\}$에서 $A\cap B=\phi$되게 하는 k의 범위는 (ⓐ)이고 $A\cap B=A$되게 하는 k의 범위는 (ⓑ)이다.

(4) 벡터 $\vec{a}=(3,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$, $\vec{c}=(1,\ 4)$에 대해서 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ (x, y는 실수)와 같이 표시되게 하는 x, y의 값은 ($x=$ ⓐ , $y=$ ⓑ)이다.

(5) 오른쪽 투영도가 표시하는 입체의 표면적은 (ⓐ) 이고 체적은 (ⓑ)이다.



※ 다음 *2, 3, 4*는 반드시 풀이 과정을 보이면서 답을 내라.

2. 방정식 $(1-\log_{20}x)\log_{10}x=\log_{20}2$를 풀어라. (20점)

3. 그릇 A에는 12%의 식염수 300g, 그릇 B에는 6%의 식염수 300g이 들어 있다. (20점)

(1) A, B로부터 각각 100g씩 취해서 A의 것은 B에, B의 것은 A에 넣으면 A, B의 식염수는 각각 몇 %가 되느냐?

(2) 위와 같은 조작을 n번 거듭한 결과 A의 식염수는 a_n%, B의 식염수는 b_n%가 되었다고 한다.

ⓐ a_n+b_n의 값은 n에 관계없이 일정함을 보이고, 그 값을 구하라.

ⓑ a_n를 a_{n-1}로 표시하여라.

ⓒ $\lim_{n\to\infty} a_n$를 계산하여라.

4. 함수 $f(x)=x^3-2ax^2$가 $0<x<1$에서 극소값을 가질 때, (20점)

(1) a가 취하는 값의 범위를 구하라.

(2) $\int_0^1 |f(x)|dx$를 a의 함수로 표시하여라.

(3) $\int_0^1 |f(x)|dx$의 최소값을 구하라.

'77 고려대 수학 I 해설과 풀이

1－(1) 집합 A＝{1, 2, 3, 4, 5}에서 집합 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$에로의 함수의 개수는 (ⓐ)이고, 이 중에서 $i \neq j$이면 $f(i) \neq f(j)$인 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 개수는 (ⓑ)이며, 또 $i<j$이면 $f(i)<f(j)$인 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 개수는 (ⓒ)이다.

[배　　점] 12점(각4점)

[출제분야] 일반수학＞함수＞함수의 정의
수 I ＞확률 · 통계＞순열, 중복순열, 조합

[난 이 도]

기본	표준	어려움
ⓐ ⓑ	ⓒ	

[문제분석] ⓐ : 함수의 개수, ⓑ : 일대일 함수의 개수, ⓒ : 단조증가함수의 개수를 묻는 문제이다. 집합 A에서 정의된 함수 f는

$$1 \to f(1),\ 2 \to f(2),\ 3 \to f(3),\ 4 \to f(4),\ 5 \to f(5)$$

에서 $f(1), f(2), \cdots, f(5)$의 값이 정해짐에 따라 결정된다.

ⓐ… $f(1), f(2), \cdots, f(5)$가 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{7}$ 중의 어느 값을 취해야 한다.

(중복 가능)

$\therefore$ $f(1)$: 7가지, $f(2)$: 7가지, $\cdots$, $f(5)$: 7가지　$\therefore$ 7^5

ⓑ… ⓐ와는 다르게 $f(1), f(2), \cdots, f(5)$ 중에서 어느 둘도 같은 값을 가질 수 없으므로 $f(1)$: 7가지, $f(2)$: 6가지, $\cdots$, $f(5)$: 3가지　$\therefore$ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

ⓒ… 크기 순으로 배열하는 순열은 조합과 일치한다.

모범해답 $B=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$이라 하자.

ⓐ $f(1), f(2), \cdots, f(5)$가 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{7}$ 중의 어느 값을 취해야 한다.　$\therefore$ $f(1)$: 7가지, $f(2)$: 7가지, $\cdots$, $f(5)$: 7가지

$\therefore$ $7^5=16807$ ……답

⇐ ${}_7\Pi_5$로 계산해도 된다.

ⓑ $f(1), f(2), \cdots, f(5)$ 중에서 어느 둘도 같은 값을 가질 수 없으므로 $f(1)$: 7가지, $f(2)$: 6가지, $\cdots$, $f(5)$: 3가지

$\therefore$ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3=2520$ ……답

⇐ ${}_7P_5$로 계산해도 된다.

ⓒ A의 원소를 크기 순으로 배열해 놓고 B의 원소 중에서 5개를 잡은 다음, 이것을 크기 순으로 A의 원소에 대응시키면 된다.

따라서 그 총수는　${}_7C_5={}_7C_2=\frac{7 \times 6}{2!}=21$ ……답

1−(2) $|z+1|+(1-2i)z=15$를 만족하는 z의 값은 (ⓐ)이다. 단, i는 허수단위이고, z는 복소수이다.

[배 점] 4점

[출제분야] 일반수학>수와 식>복소수 체계
수 II >복소수>복소수의 절대값

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 수 I 에서 다루지 않는 복소수의 절대값의 정의를 알아야 풀 수 있는 문제이다. 이 문제에서 복소수 절대값의 정의만 명기한다면 수 I 에서 취급하는 데 무리가 없을 것이다.

복소수의 절대값

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)에서 $\sqrt{a^2+b^2}$을 z의 절대값이라 하고, $|z|$로 나타낸다. 즉,

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

(이것은 복소평면에서 원점과 P(z) 사이의 거리를 의미한다. 또, 실수에서 정의된 절대값의 확장된 표현이다.)

모범해답 ⓐ $z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)라 하면

$$z+1=a+1+bi$$

$$\therefore\ |z+1|=\sqrt{(a+1)^2+b^2}$$

따라서 준 식에서

$$\sqrt{(a+1)^2+b^2}+(1-2i)(a+bi)=15$$

$$\sqrt{(a+1)^2+b^2}+a+2b+(b-2a)i=15$$

a, b가 실수이므로 $\sqrt{(a+1)^2+b^2}+a+2b$, $b-2a$가 실수이다.

⇦ 주관식 문제라면 이 말을 반드시 언급해야 감점을 막을 수 있다.

따라서 복소수 상등에 의해,

$$\begin{cases}\sqrt{(a+1)^2+b^2}+a+2b=15 & \cdots\cdots①\\ b-2a=0 \qquad \therefore\ b=2a & \cdots\cdots②\end{cases}$$

②를 ①에 대입하면,

$$\sqrt{(a+1)^2+4a^2}=15-5a$$

$15-5a\geqq 0$에서 $a\leqq 3$ ……③

⇦ 무리방정식 $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow B\geqq 0$ 이고 $A=B^2$

이 때, $(a+1)^2+4a^2=(15-5a)^2$

$$5a^2-38a+56=0$$

$\therefore\ (a-2)(5a-28)=0 \qquad \therefore\ a=2,\ \dfrac{28}{5}$

⇦ $a=2$, $\dfrac{28}{5}$을 모두 답으로 하면 2점

$\therefore$ ③에 의해, $a=2$ 이 때, ②에서 $b=4$

$\therefore\ z=2+4i$ ……답

1-(3) 원점을 지나고 기울기가 m인 직선이 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$과 서로 다른 두 점 P_1 및 P_2에서 만날 때, m의 범위는 (ⓐ)이고, 선분 P_1P_2의 길이를 m으로 표시하면 (ⓑ)이다.

[배 점] 8점(각4점)

[출제분야] 일반수학>도형의 방정식>원의 방정식

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		ⓐ	ⓑ					

[문제분석] ⓐ 원과 직선이 두 점에서 만나므로 두 방정식에서 y를 소거하여 나온 x의 2차방정식이 두 실근을 가져야 한다. 즉 $D>0$

이렇게 m의 범위를 구하는 것이 포물선, 타원, 쌍곡선에도 적용되는 일반적인 방법이지만, 원의 경우에는 원의 성질과 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 푸는 것이 간편할 때가 많다.

점 $(x_1,\ y_1)$에서 직선 $ax+by+c=0$까지의 거리 ⇨ $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

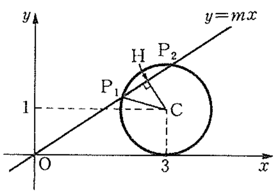
ⓑ P_1, P_2의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $P_1(\alpha,\ m\alpha)$, $P_2(\beta,\ m\beta)$이므로

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(m\beta-m\alpha)^2}=\sqrt{(m^2+1)(\beta-\alpha)^2}$$

한편 α, β는 x의 2차방정식의 두 실근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$를 m의 식으로 나타낼 수 있다. 그러나 아래 모범해답에서는 다른 방법으로 하였다.

모범해답 ⓐ 직선 : $y=mx$ ……①

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 원의 중심 C(3, 1)에서 직선 $mx-y=0$까지의 거리는 원의 반지름의 길이보다 작다.



즉, $\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}<1$

$\therefore\ m^2+1>(3m-1)^2$ $\qquad\therefore\ 8m^2-6m<0$

$\therefore\ 0<m<\dfrac{3}{4}$ ……답

ⓑ 위의 그림에서 $\overline{P_1P_2}=2\overline{P_1H}$이고, $\overline{P_1H}=\sqrt{\overline{P_1C}^2-\overline{CH}^2}$

$\overline{P_1C}=$(반지름), $\overline{CH}=\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$이므로

$$\overline{P_1P_2}=2\sqrt{1-\frac{(3m-1)^2}{m^2+1}}$$

$$=2\sqrt{\frac{6m-8m^2}{m^2+1}}$$ ……답

⇦ 직선이 원에 접할 때는 $\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$에서

$m=0,\ \dfrac{3}{4}$

직선을 원점을 중심으로 회전하면서 서로 다른 두 점에서 만날 조건을 구해도 된다.

1-(4) $A=\{(x, y)|0\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}\}$, $B=\{(x, y)|2x+y>k\}$에서 $A\cap B=\phi$되게 하는 k의 범위는 (ⓐ)이고 $A\cap B=A$되게 하는 k의 범위는 (ⓑ)이다.

[배 점] 8점(각4점)

[출제분야] 일반수학>도형의 방정식>부등식의 영역

[난 이 도]

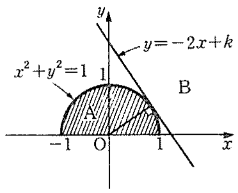
기본			표준			어려움		
			ⓑ	ⓐ				

[문제분석] 점 (x_0, y_0)에서 직선 $ax+by+c=0$에 이르는 거리 d는

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

를 이용하여 접할 때의 k값을 구한다. 특히 경계의 포함여부에 주의해야 한다.

모범해답 ⓐ 집합 A가 나타내는 영역은 원점을 중심으로 하고, 반지름이 1인 원의 윗부분과 x축으로 둘러싸인 반원판이다. 또 집합 B가 나타내는 영역은 직선 $2x+y=k$의 윗쪽 반평면이다.



따라서 $A\cap B=\phi$이 되는 경우는 원점에서 직선 $2x+y=k$까지의 거리가 반원의 반지름의 길이보다 작지 않을 때이다.

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\geqq 1 \qquad \therefore\ |k|\geqq\sqrt{5}$$

그런데 $k>0$이어야 하므로, $k\geqq\sqrt{5}$ ……답

ⓑ 직선 $2x+y=k$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때의 k값은

$$-2+0=k \qquad \therefore\ k=-2$$

$A\cap B=A$ 즉, $A\subset B$로 되는 경우는 직선이 점 $(-1, 0)$을 지날 때보다 아래쪽에 있을 때이므로 $k<-2$

답 $k<-2$

⇦ $k\geqq\sqrt{5}$, $k\leqq-\sqrt{5}$를 답으로 하면 −2점

연구 [별해] ⓐ에서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $2x+y=k$가 접할 때의 k값을 구하여 해결할 수도 있다.

즉, 두 방정식에서 y를 소거하면

$$x^2+(k-2x)^2=1$$

$$\therefore\ 5x^2-4kx+k^2-1=0 \qquad \cdots\cdots①$$

이 때, 원과 직선이 접하기 위해서는 ①의 방정식이 중근을 가져야 하므로

$$D/4=(2k)^2-5(k^2-1)=0$$

$$\therefore\ k^2=5 \qquad \therefore\ k=\pm\sqrt{5}$$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{5}$

접할 때보다 위에 직선이 위치해야 하므로 $k\geqq\sqrt{5}$ ……답

1-(5) 한 변의 길이가 a인 정4면체 ABCD의 체적은 (ⓐ)이고, 변 AB 위의 점을 P, 변 CD 위의 점을 Q라 할 때 선분 PQ의 최소값은 (ⓑ)이다.

[배 점] 8점(각4점)

[출제분야] 수Ⅱ>공간도형과 공간좌표>공간도형

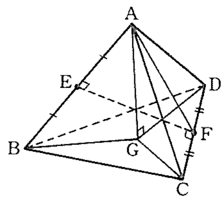
[난 이 도]

기본	표준	어려움
	ⓐ ⓑ	

[문제분석] ⓐ 정4면체 ABCD의 꼭지점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발 G는 무게중심이라는 것에 착안하면 쉽게 부피를 구할 수 있다. 만약 이 문제가 단답형이 아니라 풀이 과정을 보여야 하는 문제라면 G가 무게중심이라는 것을 밝혀야만 할 것이다.

ⓑ 꼬인 위치에 있는 두 직선 사이의 최단 거리 ⇨ 공통 수선의 길이에 착안해야 풀 수 있다. 서술형 문제에서는 AB의 중점과 CD의 중점을 연결하는 직선이 공통 수선이라는 것을 입증해야 한다.

모범해답 ⓐ 꼭지점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면,



$\triangle ABG \equiv \triangle ACG \equiv \triangle ADG$

(RHS합동)

이므로 $\overline{BG}=\overline{CG}=\overline{DG}$

$\therefore$ G는 $\triangle BCD$의 외심이다.

그런데 $\triangle BCD$는 정3각형이므로 G는 무게중심이다.

$$\therefore\ \overline{AG}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BG}^2}$$

$$=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}\quad (\because\ \overline{AB}=a,\ \overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BF}\text{이므로})$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

또, ($\triangle BCD$의 면적)$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로 구하는 체적 V는

⇦ 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 면적 S는

$S=\frac{1}{2}\times a\times a\times \sin 60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$V=\frac{1}{3}(\triangle BCD)\times\overline{AG}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \quad \cdots\cdots \text{답}$$

ⓑ 꼬인 위치에 있는 두 직선 사이의 최단 거리는 공통 수선의 길이이므로 변 AB, 변 CD의 중점을 각각 E, F라 하면, 선분 EF의 길이가 선분 PQ의 최소값이다.

⇦ $AF\perp CD$, $BF\perp CD$ 이므로 $\triangle ABF\perp CD$

$\therefore$ $FE\perp CD$

마찬가지로 하면 $FE\perp AB$ 임을 유도할 수 있다.

$\therefore$ EF는 AB, CD의 공통수선이다.

$$\therefore\ (\overline{PQ}\text{의 최소값})=\overline{EF}$$

$$=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{AE}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a \quad \cdots\cdots \text{답}$$

2. 부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geqq -1+\log_{\frac{1}{4}}|x-2|$를 풀어라.

[배　　점] 20점

[출제분야] 일반수학>지수·로그>log부등식

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] log문제에서는 언제나 다음 두 철칙을 지켜야 한다.

1. **log문제의 대원칙 ⇨ 밑을 통일**

   이 문제에서는 $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m}\log_a A$를 이용하여 밑을 통일한다.

2. **log문제 ⇨ 밑조건, 진수조건에 주의**

또, 이 부등식에서는 log의 밑이 1보다 작으므로 부등호 방향이 바뀐다는 것에 주의해야 한다. 일반적으로,

$0<a<1$일 때

$$\log_a f(x) \geqq \log_a g(x) \iff 0<f(x) \leqq g(x)$$

$a>1$일 때

$$\log_a f(x) \geqq \log_a g(x) \iff f(x) \geqq g(x) > 0$$

모범해답 진수조건에서 $3-x>0$, $|x-2|>0$

$\therefore\ x<3,\ x \neq 2$ ……①

⇦ ①을 빠뜨리면 −5점

주어진 부등식에서 로그의 밑을 $\frac{1}{2}$로 같게 하면,

⇦ 로그의 밑을 2로 같게 하여 풀어도 된다. 각자 연구해 보도록!

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geqq \log_{\frac{1}{2}}2+\log_{(\frac{1}{2})^2}|x-2|$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geqq \log_{\frac{1}{2}}2+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}|x-2|$$

$$\therefore\ \log_{\frac{1}{2}}(3-x)^2 \geqq \log_{\frac{1}{2}}4|x-2|$$

밑이 1보다 작으므로 $(3-x)^2 \leqq 4|x-2|$ ……②

①에서 $x<2$ 또는 $2<x<3$이므로

⇦ 여기까지가 10점, ②에서 부등호 방향을 바꾸지 않은채 풀면 −10점

⇦ (i), (ii)로 나누어 풀지 않으면 −3점

(i) $x<2$일 때 ; ②에서 $(3-x)^2 \leqq -4(x-2)$

$$x^2-2x+1 \leqq 0$$

$$(x-1)^2 \leqq 0 \qquad \therefore\ x=1$$

(ii) $2<x<3$일 때 ; ②에서 $(3-x)^2 \leqq 4(x-2)$

$$x^2-10x+17 \leqq 0$$

$$\therefore\ 5-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 5+2\sqrt{2}$$

$2<x<3$와 공통범위를 구하면 $5-2\sqrt{2} \leqq x < 3$

⇦ 공통범위를 잘못 구하면 −3점

(i), (ii)에서 $x=1$, $5-2\sqrt{2} \leqq x < 3$ ……답

3. 한 변의 길이가 2인 정4각형 S_1의 내접원 C_1을 만들고 C_1에 내접하는 정4각형 S_2를 만든다. 또 S_2의 내접원 C_2를 만든다. 이와 같이 계속해서 원과 정4각형을 내접시켜 간다.

(1) n번째의 정4각형 S_n의 면적과 그 내접원 C_n의 면적의 차를 a_n이라 할 때, a_n을 구하라.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I >극한>무한등비급수의 응용

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(2)	(1)	

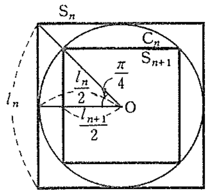
[문제분석] (1) 정4각형 S_n의 한 변의 길이를 l_n이라 두고, (i) l_1, (ii) l_n과 l_{n+1} 사이의 관계식(즉, 점화식)을 구한다. 이로부터 일반항 l_n을 구할 수 있다.

그리고, a_n=(S_n의 면적)−(C_n의 면적)에서 a_n도 쉽게 얻어진다.

(2) 무한등비급수에 관한 다음 공식을 이용한다.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots \Rightarrow -1<r<1 \text{이면 수렴하고 그 값은 } S=\frac{a}{1-r}$$

모범해답 (1) 정4각형 S_n의 한 변의 길이를 l_n으로 하면 그 내접원 C_n의 반지름의 길이는 $\frac{l_n}{2}$이다. 따라서 오른편의 그림에서



$$\frac{l_{n+1}}{2}=\frac{l_n}{2}\cos 45°=\frac{1}{2\sqrt{2}}l_n$$

$$\therefore\ l_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}l_n$$

주어진 조건에서 $l_1=2$이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 등비수열을 이룬다. $\therefore\ l_n=2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

⇐ 여기까지가 4점

$$\therefore\ a_n=(S_n\text{의 면적})-(C_n\text{의 면적})$$

$$=l_n^2-\pi\left(\frac{1}{2}l_n\right)^2=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)l_n^2$$

$$=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left\{4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=(4-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

(2) $-1<$(공비)<1이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=(4-\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(4-\pi)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2(4-\pi) \quad \cdots\cdots \text{답}$$

l_n이나 a_n을 처음 두, 세 항까지만 구한 뒤 추정하여 구하는 것은 감점의 소지가 있으니 주의해야 한다.

4. 3차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소가 되고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A\left(3, \frac{5}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은 $3y-9x+22=0$이라고 한다.

(1) $f(x)$를 구하라.

(2) 점 $A\left(3, \frac{5}{3}\right)$와 곡선 위의 다른 점 B에서의 접선의 기울기도 3이라고 한다. B의 좌표를 구하라.

(3) 선분 AB와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 면적을 구하라.

[배　　점] 20점(5점+5점+10점)

[출제분야] 수 Ⅰ >미분>접선의 방정식, 극대 · 극소
수 Ⅰ >적분>넓이와 적분

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		(2)	(1)		(3)			

[문제분석] (1) 극값을 가지는 x값들은 $f'(x)=0$의 근이므로

$$f'(a)=0,\ f'(b)=0 \Rightarrow f'(x)=(x-a)(x-b)Q(x)$$ …인수정리를 이용

임을 이용하면 쉽게 $f(x)$를 구할 수 있다.

(2) 접선의 기울기가 3인 접점이 $(t, f(t)) \Rightarrow f'(t)=3$
에서 t를 구하면 된다. 이 때, $t\neq3$임에 주의할 것!

(3) 적분을 이용하여 면적을 구하는 무난한 문제이나, 계산이 복잡하므로 신중하게 풀어가야 한다.

모범해답 (1) $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소가 되므로

$$f'(0)=0,\ f'(2)=0$$

$\therefore\ f'(x)=ax(x-2)$ (a는 양의 상수)

한 편, 점 $\left(3, \frac{5}{3}\right)$의 접선의 방정식이 $y=3x-\frac{22}{3}$이므로 $f'(3)=3$ ⇦ 접선의 기울기가 3이므로

$\therefore\ f'(3)=3a=3\quad \therefore\ a=1\quad \therefore\ f'(x)=x(x-2)$ ⇦ 여기까지가 3점

$\therefore\ f(x)=\int x(x-2)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$ (C는 상수)

$y=f(x)$가 점 $\left(3, \frac{5}{3}\right)$를 지나므로 $f(3)=\frac{5}{3}$

$\therefore\ f(3)=9-9+C=\frac{5}{3}\qquad \therefore\ C=\frac{5}{3}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{3}$ ……답

(2) $B(t, f(t))$ $(t\neq3)$라 하면 $f'(t)=3\qquad \therefore\ f'(t)=t(t-2)=3$

$\therefore\ t^2-2t-3=0\qquad \therefore\ (t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=-1$이고 $f(-1)=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 B의 좌표는 $B\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$ ……답

(3) 직선 AB는 $A\left(3,\ \frac{5}{3}\right)$와 $B\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$을 지나는 직선이므로

$$y-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}(x-3) \qquad \therefore\ y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

이것과 $y=f(x)$에서 y를 소거하면 $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{3}$

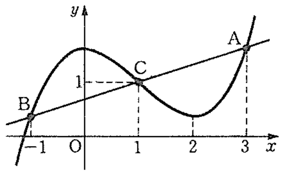
$$\therefore\ x^3-3x^2-x+3=0$$

$$\therefore\ (x-3)(x+1)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=\pm1,\ 3$$

⇦ 여기까지가 3점

따라서 직선 AB와 곡선 $y=f(x)$는 A, B 그리고 $C(1,\ f(1))$에서 만남을 알 수 있다.

따라서 구하는 면적을 S라 하면, 오른편 그림에서



⇦ 그래프를 생략하면 −3점

$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)\right\}dx$$

$$+\int_{1}^{3}\left\{\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{3}\right)\right\}dx$$

⇦ 여기까지가 7점

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{3}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{1}{3}x-1\right)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2-x\right]_1^3$$

$$=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left(-\frac{27}{4}+9+\frac{3}{2}-3\right)-\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1\right)$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-\left(-\frac{7}{12}\right)=\frac{8}{3}$$ ……답

연구 [별해] (3) (수Ⅱ 과정) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{3}$에서 $y'=x^2-2x,\ \ y''=2(x-1)$

$y''=0$에서 $x=1$ 이 때, $y=1$

$\therefore$ (1, 1)은 변곡점이다.

선분 AB의 중점을 구하면 $\left(\frac{3-1}{2},\frac{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{2}\right)=(1,\ 1)$이므로 점 A, 점 B는 변곡점 (1, 1)에 관하여 대칭이다. 3차함수는 변곡점에 관하여 대칭이므로 빗금 친 두 부분의 면적은 같다.

$$\therefore\ S=2\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)\right\}dx=2\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}x+1\right)dx$$

$$=4\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx=4\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$ ……답

합격포인트 *1*의 (1), (3), (4)번에서 20점 정도 얻고, *2, 3, 4*번에서 최소한 2문제를 완벽히 풀고 1문제는 부분 점수를 얻어서 총점이 65점 정도면 합격권. 수학이 주 득점원인 학생은 *2, 3, 4*번을 모두 풀어서 80점 정도 획득하면 성공!

'77고려대 수학Ⅱ 해설과 풀이

1-(1) 함수 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$는 ($x=$ ⓐ)일 때 최대값 (ⓑ)을(를) 취하며 ($x=$ ⓒ)일 때 최소값 (ⓓ)을(를) 취한다.

[배 점] 8점(각2점)
[출제분야] 수Ⅱ>삼각함수>삼각함수의 합성
[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 삼각함수를 합성해서 최대값·최소값을 구하는 평범한 문제이다.

$$y=a\sin x+b\cos x \Rightarrow y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$\Rightarrow$ 최대값 : $\sqrt{a^2+b^2}$, 최소값 : $-\sqrt{a^2+b^2}$

이 문제에서 주의할 것은 x의 제한변역이 없으므로 일반각을 구해야 한다는 것이다. 물론, 특수각을 구한 답안은 감점을 당한다.

모범해답 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$에서

$$y=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$
$$=2\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

(i) $x-\frac{\pi}{3}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$일 때 즉, $x=2n\pi+\frac{5}{6}\pi$일 때, 최대값 2

(ii) $x-\frac{\pi}{3}=2n\pi-\frac{\pi}{2}$일 때 즉, $x=2n\pi-\frac{\pi}{6}$일 때, 최소값 -2

답 ⓐ $2n\pi+\frac{5}{6}\pi$ ⓑ 2
ⓒ $2n\pi-\frac{1}{6}\pi$ ⓓ -2

⇦ ⓐ, ⓒ에서 일반각이 아닌 특수각을 쓰면 각 -1점

연구 [별해] $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right)=-2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

(i) $x+\frac{\pi}{6}=2n\pi+\pi$일 때 즉, $x=2n\pi+\frac{5}{6}\pi$일 때, 최대값 2

(ii) $x+\frac{\pi}{6}=2n\pi$일 때 즉, $x=2n\pi-\frac{\pi}{6}$일 때, 최소값 -2

1−(2) 10개의 제품이 들어 있는 상자가 있다. 이 가운데 2개의 불량품이 들어 있다. 지금 이 중에서 한 개씩 꺼내서 검사하여 불량품이 전부 발견되면 검사가 끝나는 것으로 한다. 꼭 2번째에서 검사가 끝날 확률은 (ⓐ)이고, 꼭 5번째에서 검사가 끝날 확률은 (ⓑ)이다.

[배　　점] 8점(각4점)

[출제분야] 수Ⅱ＞확률·통계＞확률의 곱셈정리

[난 이 도]

기본		표준		어려움	
ⓐ		ⓑ			

[문제분석] ⓐ 우량품을 ○, 불량품을 ×라 하면 2번째에서 검사가 끝나는 경우는 오른편 표와 같다. n번째에서 불량품이 나오는 사건을 A_n이라 하면, 구하는 사건은 $A_1 \cap A_2$이다. 여기서 다음 확률의 곱셈정리를 쓰면 확률 $P(A_1 \cap A_2)$를 구할 수 있다.

1회	2회
×	×
A_1	A_2

확률의 곱셈정리 : $\mathbf{P(A \cap B)=P(A) \times P(B|A)=P(B) \times P(A|B)}$

즉, $P(A_1 \cap A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\dfrac{2}{10} \times \dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{45}$

아래 모범해답에는 다른 방법을 소개하였다.

ⓑ 4번째 검사까지는 불량품이 1개 나오고 5번째 검사에서 불량품이 나올 확률이다.

∴ (구하는 확률)=(4회까지 불량 1, 우량 3이고 5회에서 불량일 확률)

$$=\frac{{}_2C_1 \times {}_8C_3}{{}_{10}C_4} \times \frac{1}{6}=\frac{4}{45}$$

그러나 식을 조리있게 작성하려면 아래 모범해답과 같이 확률의 곱셈정리를 이용하는 것이 좋다.

모범해답 ⓐ 구하는 확률은 10개의 제품 중에서 2개를 꺼낼 때, 2개 모두 불량품일 확률과 같다.

∴ (구하는 확률)$=\dfrac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{1}{\frac{10 \times 9}{2}}=\dfrac{1}{45}$ ……답

⇦ 순열을 써서 $\dfrac{{}_2P_2}{{}_{10}P_2}$로 계산해도 된다.

ⓑ 4번째까지 불량품이 1개 나오는 사건을 A, 5번째 검사에서 불량품이 나올 사건을 A_5라 하면 꼭 5번째에서 검사가 끝나는 사건은 $A \cap A_5$이다.

∴ (구하는 확률)$=P(A \cap A_5)=P(A) \times P(A_5|A)$

$$=\frac{{}_2C_1 \times {}_8C_3}{{}_{10}C_4} \times \frac{1}{6}$$

$$=\frac{4}{45}$$ ……답

⇦ 순열을 써서 풀면 $\dfrac{{}_2C_1 \times {}_8C_3 \times 4!}{{}_{10}P_4}$

1-(3) $A=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,2x+y>k\}$에서 $A\cap B=\phi$되게 하는 k의 범위는 (ⓐ)이고 $A\cap B=A$되게 하는 k의 범위는 (ⓑ)이다.

[배　　점] 8점(각4점)

[출제분야] 일반수학>도형의 방정식>부등식의 영역

[난 이 도]

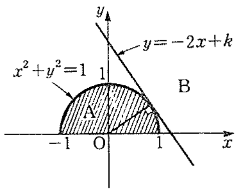
기본	표준	어려움
	ⓑ ⓐ	

[문제분석] 점 $(x_0,\ y_0)$에서 직선 $ax+by+c=0$에 이르는 거리 d는

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

를 이용하여 접할 때의 k값을 구한다. 특히 경계의 포함여부에 주의해야 한다.

모범해답 ⓐ 집합 A가 나타내는 영역은 원점을 중심으로 하고, 반지름이 1인 원의 윗부분과 x축으로 둘러싸인 반원판이다. 또 집합 B가 나타내는 영역은 직선 $2x+y=k$의 윗쪽 반평면이다.



따라서 $A\cap B=\phi$이 되는 경우는 원점에서 직선 $2x+y=k$까지의 거리가 반원의 반지름의 길이보다 작지 않을 때이다.

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\geqq 1 \qquad \therefore\ |k|\geqq\sqrt{5}$$

그런데 $k>0$이어야 하므로, $k\geqq\sqrt{5}$ ……답

⇐ $k\geqq\sqrt{5}$, $k\leqq-\sqrt{5}$를 답으로 하면 −2점

ⓑ 직선 $2x+y=k$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때의 k값은

$$-2+0=k \qquad \therefore\ k=-2$$

$A\cap B=A$ 즉, $A\subset B$로 되는 경우는 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때보다 아래쪽에 있을 때이므로 $k<-2$

답 $k<-2$

연구 [별해] ⓐ에서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $2x+y=k$가 접할 때의 k값을 구하여 해결할 수도 있다.
즉, 두 방정식에서 y를 소거하면

$$x^2+(k-2x)^2=1$$

$$\therefore\ 5x^2-4kx+k^2-1=0 \qquad \cdots\cdots①$$

이 때, 원과 직선이 접하기 위해서는 ①의 방정식이 중근을 가져야 하므로

$$D/4=(2k)^2-5(k^2-1)=0$$

$$\therefore\ k^2=5 \qquad \therefore\ k=\pm\sqrt{5}$$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{5}$

접할 때보다 위에 직선이 위치해야 하므로 $k\geqq\sqrt{5}$ ……답

1-(4) 벡터 $\vec{a}=(3,2)$, $\vec{b}=(1,-1)$, $\vec{c}=(1,4)$에 대해서 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ (x, y는 실수)와 같이 표시되게 하는 x, y의 값은 ($x=$ ⓐ , $y=$ ⓑ)이다.

[배　　점] 8점(각4점)

[출제분야] 수Ⅱ>벡터>벡터의 성분에 의한 연산

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 다음 평면벡터의 성분에 의한 연산을 이용하면 된다.

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$라 하면

(i) 두 벡터의 상등 : $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow (a_1,\ a_2)=(b_1,\ b_2) \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$

(ii) 벡터의 실수배 : $m\vec{a}=m(a_1,\ a_2)=(ma_1,\ ma_2)$

(iii) 벡터의 합·차 : $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1,\ a_2)\pm(b_1,\ b_2)=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2)$ (복호 동순)

모범해답 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$에

$$\vec{a}=(3,\ 2),\ \vec{b}=(1,\ -1),\ \vec{c}=(1,\ 4)$$

을 대입하면,

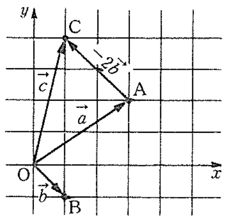
$$\begin{aligned}(1,\ 4)&=x(3,\ 2)+y(1,\ -1)\\&=(3x,\ 2x)+(y,\ -y)\\&=(3x+y,\ 2x-y)\end{aligned}$$

$$\therefore\ 3x+y=1,\quad 2x-y=4$$

이것을 풀면 $x=1$, $y=-2$

답 ⓐ 1 ⓑ −2

연구



문제를 xy평면 위에서 음미해 보자.

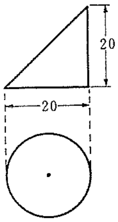
$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$와 같이 표시하는 것은 $\vec{c}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$ 방향으로 분해하라는 것이다.

위의 그림에서

$$\begin{aligned}\vec{c}&=\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\\&=\vec{a}-2\vec{b}\end{aligned}$$

$\therefore$ $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$와 비교하면 $x=1$, $y=-2$ ……답

1-(5) 오른쪽 투영도가 표시하는 입체의 표면적은 (ⓐ) 이고 체적은 (ⓑ)이다.



[배 점] 8점(각4점)

[출제분야] 수Ⅱ>공간도형과 공간좌표>공간도형

[난 이 도]

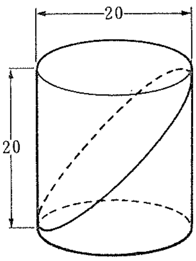
기본			표준			어려움		
		ⓑ			ⓐ			

[문제분석] 투영도는 현 교과 과정에서 제외되었으나 문제의 그림이 뜻하는 입체도형을 인지하면 누구나 풀 수 있는 문제이다. 문제의 투영도의 윗 부분 그림은 입화면으로서 정면에서 투영한 것을 나타내고, 아랫 부분의 그림은 평화면으로서 위에서 입체를 투영한 것을 나타낸다. 그러므로, 이 입체는 높이가 20인 원기둥을 밑면과 45°의 각을 이루는 평면에 의해 자른 것이다.

ⓐ (표면적)=(옆면적)+(밑면적)+(윗면적)

이 때, 전개도를 생각하면 옆면은 이등변삼각형임을 알 수 있다. 또, 윗면의 정사영이 밑면이므로 (밑면적)=(윗면적)×cos45°에서 윗면적을 구한다.

모범해답 이 입체도형은 지름과 높이가 각각 20인 원기둥을 밑면과 45°의 각을 이루는 평면으로 자른 오른편 그림과 같은 원기둥의 절반이다.



(i) 옆면적 ; 밑변의 길이 20π, 높이 20인 이등변삼각형의 면적이므로

$$\frac{1}{2}\times 20\pi\times 20=200\pi$$

⇦ 옆면의 밑변의 길이는 밑면의 원주의 길이와 같다. $\therefore\ 20\pi$

(ii) 밑면적 ; $\pi\times 10^2=100\pi$

(iii) 윗면적 ; 윗면적의 정사영이 밑면이고 윗면과 밑면이 이루는 각은 45°이므로

$$100\pi=(\text{윗면적})\times\cos 45^\circ$$

$$\therefore\ (\text{윗면적})=100\sqrt{2}\,\pi$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 표면적 S는

$$S=200\pi+100\pi+100\sqrt{2}\,\pi=100(3+\sqrt{2})\pi \quad \cdots\cdots \text{답}$$

또, 구하는 체적 V는 원기둥의 체적의 $\frac{1}{2}$이므로

$$V=\frac{1}{2}\times 100\pi\times 20=1000\pi \quad \cdots\cdots \text{답}$$

2. 방정식 $(1-\log_{20}x)\log_{10}x=\log_{20}2$를 풀어라.

[배　　점] 20점

[출제분야] 일반수학＞지수 · 로그＞log방정식

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 양변에서 log의 밑을 10으로 통일한 후, $\log_{10}x=t$로 치환하면 간단한 t의 2차방정식이 된다.

log문제의 대원칙 ⇨ 밑을 통일

을 명심할 것! 이 문제에서는 다음 밑 변환 공식을 이용하여 밑을 통일한다.

$$\log_a A=\frac{\log_b A}{\log_b a}$$

[모범해답] 준 식에서 로그의 밑을 10으로 통일하면,

$$\left(1-\frac{\log_{10}x}{\log_{10}20}\right)\log_{10}x=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}20}$$

$$\left(1-\frac{\log_{10}x}{1+\log_{10}2}\right)\log_{10}x=\frac{\log_{10}2}{1+\log_{10}2}$$

양변에 $1+\log_{10}2$을 곱하여 정리하면,

$$(1+\log_{10}2-\log_{10}x)\log_{10}x=\log_{10}2$$

⇦ 여기까지가 10점

이 때, $\log_{10}x=t$로 치환하면 $(1+\log_{10}2-t)t=\log_{10}2$

$$\therefore\ t^2-(1+\log_{10}2)t+\log_{10}2=0$$

$(t-\log_{10}2)(t-1)=0$　　$\therefore\ t=\log_{10}2$ 또는 1

즉, $\log_{10}x=\log_{10}2$ 또는 1　　$\therefore\ x=2$ 또는 10　……답

알쏭달쏭?!

2. A군과 B군, C군, D군 네 사람은 사이 좋은 친구이다. 연령은 14세에서 17세까지 한 살씩 차이가 나고 동갑내기는 없다. 그런데 여기서 Z군이 네 사람에게 나이를 물었다.

A군 : B는 17세이고 D는 16세이다.
B군 : A는 16세이고 C는 15세이다.
C군 : 나는 14세이고 B는 16세이다.

이건 아무래도 모순되는 대답이다.

D군 : 세 사람이 말한 것은 모두 한 마디는 참이고 한 마디는 거짓이야.

D군의 말이 정말이라면 A, B, C, D의 연령은 각각 몇 세일까?

A=☐　B=☐　C=☐　D=☐

이 증명의 어떤 부분이 잘못되었는지를 적어서 p. 220의 응모권과 함께 부쳐 주기 바랍니다.

3. 그릇 A에는 12%의 식염수 300g, 그릇 B에는 6%의 식염수 300g이 들어 있다.

(1) A, B로부터 각각 100g씩 취해서 A의 것은 B에, B의 것은 A에 넣으면 A, B의 식염수는 각각 몇 %가 되느냐?

(2) 위와 같은 조작을 n번 거듭한 결과 A의 식염수는 a_n%, B의 식염수는 b_n%가 되었다고 한다.

ⓐ a_n+b_n의 값은 n에 관계없이 일정함을 보이고, 그 값을 구하라.

ⓑ a_n를 a_{n-1}로 표시하여라.

ⓒ $\lim_{n\to\infty} a_n$를 계산하여라.

[배　　점] 20점(5점+15점)－ⓐ, ⓑ, ⓒ는 각5점

[출제분야] 수Ⅱ > 수열 > 수열의 점화식
수Ⅱ > 극한 > 수열의 극한

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(2)ⓑ (1) (2)ⓒ	(2)ⓐ	

[문제분석] 중학 과정에서 다루는 농도에 관해서 정확히 이해하고 있어야 한다.

$$\text{농도}=\frac{\text{용질의 양}}{\text{용액의 양}}\times \mathbf{100}\ (\%)$$

이 때, 용액이라 함은 용질과 용매를 섞은 것을 말한다.

(1) A가 a%, xg, B가 b%, yg의 용액이라 하자. A, B에서 각각 zg씩을 취해서 서로 바꾸어 넣으면 A의 농도는 다음과 같이 된다.

$$\text{A의 농도}=\frac{(x-z)\times a\%+z\times b\%}{x}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{(A에서 온 용질의 양)}+\text{(B에서 온 용질의 양)}}{\text{용액의 양}}$$

(2)의 ⓐ는 (1)과 같은 방법으로 해결할 수 있다. (2)의 ⓑ, ⓒ는 문제의 요구에 충실히 따르면 쉽게 해결된다.

모범해답 (1) 식염수의 %농도는

$$\frac{\text{소금의 양}}{\text{식염수의 양}}\times 100(\%)$$

이므로 구하는 농도는

$$\text{A}:\frac{200\times 0.12+100\times 0.06}{200+100}\times 100=10(\%)$$

$$\text{B}:\frac{200\times 0.06+100\times 0.12}{200+100}\times 100=8(\%)$$

답 A : 10%, B : 8%

(2) ⓐ a_n%(또는 b_n%)의 농도는 A의 식염수 a_{n-1}%, B의 식염수 b_{n-1}%를 (1)과 같은 조작을 한 결과이므로,

$$a_n=\frac{200\times\frac{a_{n-1}}{100}+100\times\frac{b_{n-1}}{100}}{200+100}\times100=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1})$$

$$b_n=\frac{200\times\frac{b_{n-1}}{100}+100\times\frac{a_{n-1}}{100}}{200+100}\times100=\frac{1}{3}(2b_{n-1}+a_{n-1})$$

⇦ 여기까지가 3점

$$\therefore\ a_n+b_n=\frac{1}{3}(3a_{n-1}+3b_{n-1})=a_{n-1}+b_{n-1}$$

n에 2, 3, …, n을 대입해서 변변 더하면,

$$a_n+b_n=a_1+b_1=10+8=18(\text{일정})$$

ⓑ $a_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1})$ ……①

ⓐ의 결과에서 $b_n=18-a_n$이므로

$$b_{n-1}=18-a_{n-1} \quad \cdots\cdots②$$

②를 ①에 대입하면

$$a_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+18-a_{n-1})=\frac{1}{3}a_{n-1}+6$$

답 $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+6$

ⓒ $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+6$의 양변에서 9를 빼면

$$a_n-9=\frac{1}{3}(a_{n-1}-9)$$

⇦ 여기까지가 2점

∴ 수열 $\{a_n-9\}$는 첫째항이 $a_1-9=10-9=1$이고

공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

⇦ 이것을 생략하면 －1점

$$a_n-9=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=9+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{9+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=9 \quad \cdots\cdots\text{답}$$

연구 만일 (2)에서 ⓑ가 없이 ⓒ가 바로 주어지면 다음과 같이 푸는 것도 좋은 방법이다.

[별해] ⓒ $a_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1})$ ……①

$$b_n=\frac{1}{3}(2b_{n-1}+a_{n-1}) \quad \cdots\cdots②$$

①+② : $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$ $\quad\therefore\ a_n+b_n=a_1+b_1=18$ ……③

①−② : $a_n-b_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}-b_{n-1})$ $\quad\therefore\ a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ……④

③+④ : $2a_n=18+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\quad\therefore\ a_n=9+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{9+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=9 \quad \cdots\cdots\text{답}$$

4. 함수 $f(x)=x^3-2ax^2$가 $0<x<1$에서 극소값을 가질 때,

(1) a가 취하는 값의 범위를 구하라.

(2) $\int_0^1|f(x)|dx$를 a의 함수로 표시하여라.

(3) $\int_0^1|f(x)|dx$의 최소값을 구하라.

[배　　점] 20점(5점+5점+10점)

[출제분야] 수Ⅱ>미분>극대·극소, 최대·최소
수Ⅱ>적분>정적분의 계산

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(1)	(2) (3)	

[문제분석] (1) 그래프의 개형으로부터 $f'(x)=0$의 근 중에서 큰 근에서 극소값을 가진다. 따라서 $f'(x)=0$의 큰 근이 $0<x<1$을 만족하도록 a의 값의 범위를 정하면 된다.

(2) 절대값 기호를 포함한 함수의 정적분이다. 절대값 안을 0으로 하는 값 즉, $f(x)=x^2(x-2a)=0$의 근 $x=0,\ 2a$에서 $x=2a$가 적분구간 $0<x<1$의 값일 때와 아닐 때의 경우로 나누어 풀어야 한다. 아니면 $\int_0^1|f(x)|dx$가 $y=f(x)$와 x축, $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 면적임에 착안하여 풀어도 된다.

(3) 고차함수의 최대·최소 문제 ⇨ 극값을 구하고 증감표를 작성한다.

모범해답 (1) $f(x)=x^3-2ax^2$에서

$$f'(x)=3x^2-4ax=3x\left(x-\frac{4}{3}a\right)$$

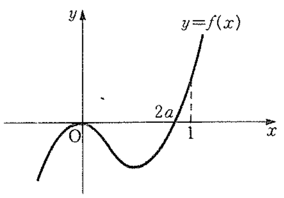
$f'(x)=0$에서 $x=0,\ \frac{4}{3}a$ 　　⇦ 여기까지가 2점

$0<x<1$에서 극소값을 가지려면 $0<\frac{4}{3}a<1$

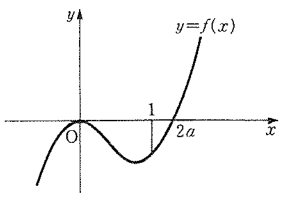
$$\therefore\ 0<a<\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots \text{답}$$

(2) $f(x)=x^3-2ax^2=x^2(x-2a)=0$에서 $x=0$(중근), $x=2a$

(그림 1°)



(그림 2°)



(i) $0<2a<1$ $\left(\text{즉, } 0<a<\frac{1}{2}\right)$일 때 ; (그림 1°)에서

⇦ a의 범위를 구분하지 않으면 −3점

$$\int_0^1 |f(x)|dx = -\int_0^{2a}(x^3-2ax^2)dx + \int_{2a}^1 (x^3-2ax^2)dx$$
$$= -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3\right]_0^{2a} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3\right]_{2a}^1$$
$$= -\left(4a^4 - \frac{16}{3}a^4\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}a\right) - \left(4a^4 - \frac{16}{3}a^4\right)$$
$$= \frac{8}{3}a^4 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{4}$$

(ii) $1 \leqq 2a < \frac{3}{2}$ $\left(즉,\ \frac{1}{2} \leqq a < \frac{3}{4}\right)$일 때 ; (그림 **2°**)에서

$$\int_0^1 |f(x)|dx = -\int_0^1 (x^3-2ax^2)dx$$
$$= -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3\right]_0^1$$
$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}a\right)$$
$$= \frac{2}{3}a - \frac{1}{4}$$

답 $\int_0^1 |f(x)|dx = \begin{cases} \frac{8}{3}a^4 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} & \left(0 < a < \frac{1}{2}\right) \\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{2} \leqq a < \frac{3}{4}\right) \end{cases}$

(3) $\mathrm{F}(a) = \begin{cases} \frac{8}{3}a^4 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} & \left(0 < a < \frac{1}{2}\right) \\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{4} & \left(\frac{1}{2} \leqq a < \frac{3}{4}\right) \end{cases}$ 이라 하면

(i) $0 < a < \frac{1}{2}$일 때 : $\mathrm{F}'(a) = \frac{32}{3}a^3 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(16a^3 - 1)$

$\mathrm{F}'(a) = 0$에서 $a^3 = \frac{1}{16}$

$\therefore\ a = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} < \frac{1}{2}$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$\mathrm{F}'(a)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{F}(a)$	$\frac{1}{4}$	↘	극소	↗	$\frac{1}{12}$

⇦ 증감표를 작성하지 않으면 −3점

극소값 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{16}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{16}} + \frac{1}{4}$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

(ii) $\frac{1}{2} \leqq a < \frac{3}{4}$일 때 : $F(a)$는 증가함수이므로

$$F(a) \geqq F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 최소값은 $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ ……답

⇦ (ii)의 내용이 빠지면 −3점

합격포인트 ***1***의 (1), (2), (3), (4)와 ***2***, ***3***의 (1), ***4***의 (1)은 완벽하게 풀고, ***1***의 (5), ***3***의 (2), ***4***의 (2)번 중에서 적어도 2개는 풀어서 총점이 70점 정도면 합격권. 수학이 주 득점원인 학생은 거의 모두 풀어서 감점을 고려해도 80점은 획득해야 성공!

'76 연세대 수학 I (100점/60분)

1. (a) 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근과 계수와의 관계를 유도하라. (5점)

(b) $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$의 주기를 구하라. (5점)

(c) 도함수의 정의를 써서, $f(x)=x^n$의 도함수를 구하라. (단, n은 자연수) (10점)

2. 다음을 증명하라.

(a) $\log_a AB=\log_a A+\log_a B$ (단, $A>0$, $B>0$) (5점)

(b) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^m f(x)dx+\int_m^b f(x)dx$ (특정한 도형을 이용하지 말 것) (5점)

(c) p는 소수이고 $1<r<p$이면, p는 ${}_pC_r$을 나눈다. (단, r은 정수) (10점)

3. 실수 a, b, c 사이에 $a<c<b$인 관계가 있을 때, 다음 부등식을 풀어라. (10점)

$$\frac{(x-a)(x-b)}{|x-c|}<0$$

4. $Y=\{m \mid m=8k+1$, k는 0 또는 양의 정수$\}$, $S=\{n \mid n=d^2$, d는 홀수$\}$이면 $S \subset Y$임을 증명하라. (15점)

5. 동심원 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$의 반지름을 각각 r_1, r_2, $\cdots$, r_n, $\cdots$, 그 면적을 각각 S_1, S_2, $\cdots$, S_n, $\cdots$이라 할 때, $S_k=2S_{k+1}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$인 관계가 있다. (20점)

(a) $\lim_{n\to\infty} r_n$을 구하라.

(b) $r_1 : \sum_{k=1}^{\infty} r_k$를 구하라.

6. 주사위를 5번 던질 때, 다음의 확률을 구하라. (15점)

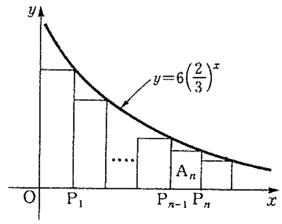
(a) 4번째에 처음으로 3의 눈이 나올 확률

(b) 2번 이상 5의 눈이 나올 확률

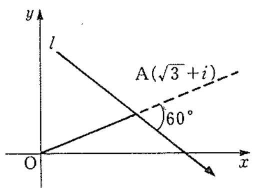
'76 연세대 수학 II $\left(\text{100점}/\text{60분}\right)$

1. 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\middle|\ \frac{1}{2}\log 2\log_{\sqrt{2}}y+\log x+\log 4=0\right\}$, $B=\{(x,\ y)|\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\}$에 대하여 $A\cap B\neq\phi$ 되는 a의 최소값을 구하라. (15점)

2. 그림과 같이 x축 위의 $x=n(n=0, 1, 2, \cdots)$인 점을 P_n, 선분 $P_{n-1}P_n$을 밑변으로 하고, 곡선 $y=6\left(\frac{2}{3}\right)^x$에 접하는 직사각형을 A_n이라 하자. A_n을 밑면으로 하고 높이가 n인 직육면체의 체적을 V_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$을 구하라. (15점)



3. 복소수평면 위에서 복소수 $\sqrt{3}+i$가 나타내는 점을 A라 할 때, 그림과 같이 A를 지나고 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $60°$를 이루는 직선 l의 벡터방정식을 구하라. (15점)



4. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하라. (10점)

5. 도함수의 정의를 써서, $f(x)=|x|$의 도함수를 구하라. (10점)

6. (a) f가 연속함수일 때,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

를 증명하라. (10점)

(b) 곡선 $y=x^n (n>0)$이 y축의 둘레를 회전할 때 생기는 회전면은 직선 $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분이 y축의 둘레를 회전할 때 생기는 회전체(원기둥)를 두 부분으로 나눈다. 이 때 나누어지는 두 부분의 체적의 비를 구하라. (10점)

7. 흰 공 4개와 빨간 공 6개가 들어 있는 주머니 속에서 A가 먼저 4개를 꺼내고 다음 B가 3개를 꺼낼 때, A, B 두 사람이 같은 수의 흰 공을 꺼낼 확률을 구하라.

(15점)

'76연세대 수학 I 해설과 풀이

1. (a) 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근과 계수와의 관계를 유도하라.

(b) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 주기를 구하라.

(c) 도함수의 정의를 써서, $f(x)=x^n$의 도함수를 구하라. (단, n은 자연수)

[배 점] 20점(5점+5점+10점)

[출제분야] 일반수학>방정식과 부등식>근과 계수와의 관계
일반수학>삼각함수>삼각함수의 주기
수 I >미분>도함수

[난 이 도]

기본		표준		어려움	
(b)	(a)	(c)			

[문제분석] (a) 2차방정식의 두 근을 α, β라 놓으면 근의 공식에 의하여 α, β를 직접 구할 수 있으므로 $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$도 쉽게 구할 수 있다.

(b) $y=r\cos(\omega x+\alpha)$는 $y=r\cos\omega x$를 x축의 양의 방향으로 $-\dfrac{\alpha}{\omega}$만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore$ 두 삼각함수의 주기는 같다.

반면에, $y=r\cos\omega x$는 $y=r\cos x$를 x축 방향으로 ω배 축소한 것이다.

$\therefore$ $y=r\cos\omega x$의 주기는 $y=r\cos x$의 주기의 $\dfrac{1}{|\omega|}$배이다.

일반적으로 다음과 같은 성질이 성립한다.

$y=f(x)$가 주기 T인 주기함수

$\Rightarrow$ $y=f(\omega x+\alpha)$는 주기 $\dfrac{T}{|\omega|}$인 주기함수

삼각함수를 예로 들면,

$y=r\cos(\omega x+\alpha)$에서, 주기는 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$

(c)에서는 $f(x)=x^n$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

분모, 분자의 극한이 모두 0이므로 분자에서 인수 h를 찾아낸 다음, 분모와 약분해야 한다. 이 때, 다음 a^n-b^n의 인수분해나 $(a+b)^n$의 전개식을 이용하면 인수 h를 쉽게 찾아낼 수 있다.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \quad \Leftarrow \text{조립제법 이용}$$

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n \quad \Leftarrow \text{이항정리 이용}$$

모범해답 (a) $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 두 근을 α, β라 하면,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{에서}$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ \beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases} \text{또는} \begin{cases}\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ \beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{cases}$$

← 여기까지가 2점

따라서 두 경우 공히 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$

(b) $y=r\cos(\omega x+\alpha)$에서 주기 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$

$$\therefore\ T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi \qquad \cdots\cdots \text{답}$$

(c) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+\cdots+x^{n-1}\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\{\underbrace{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+\cdots+x^{n-1}}_{\text{항이 } n\text{개}}\}$$
$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{\text{항이 } n\text{개}}=nx^{n-1} \qquad \cdots\cdots \text{답}$$

연구 **1°** [별해] $f(x)=ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 인수정리에서 $f(x)$는 $(x-\alpha)(x-\beta)$를 인수로 가진다.

$$\therefore\ f(x)=ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$$

양변의 최고차항을 비교하면 $a=g(x)$

$$\therefore\ f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$a\neq0$에서 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\therefore\ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

양변의 계수를 비교하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

2° [별해] (c)에서 이항정리를 이용하면,

$$(x+h)^n={}_nC_0x^n+{}_nC_1x^{n-1}h+\cdots+{}_nC_nh^n$$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_nh^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}({}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}h+\cdots+{}_nC_nh^{n-1})=nx^{n-1} \quad (\because\ {}_nC_1=n)$$

2. 다음을 증명하라.

(a) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ (단, $A>0$, $B>0$)

(b) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx$ (특정한 도형을 이용하지 말 것)

(c) p는 소수이고 $1<r<p$이면, p는 ${}_pC_r$을 나눈다. (단, r은 정수)

[배　점] 20점(5점+5점+10점)

[출제분야] 일반수학>지수 · 로그>log의 성질
수 I >적분>정적분의 성질
일반수학>수와 식>약수 · 배수

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(b)	(a)			(c)			

[문제분석] (c) p가 ${}_pC_r$을 나눈다는 것은 ${}_pC_r$이 p의 배수라는 것을 의미한다.

$${}_pC_r = \frac{p(p-1)\cdots(p-r+1)}{r!} = p\times\frac{(p-1)\cdots(p-r+1)}{r!} \text{ : 자연수}$$

에서 p와 $r!$이 서로 소임을 이용하여 $\frac{(p-1)\cdots(p-r+1)}{r!}$이 정수임을 밝히는 것이 문제의 핵심이다.

모범해답 (a) $x=\log_a A$, $y=\log_a B$ ……①

로 두면 로그의 정의에 의해 $A=a^x$, $B=a^y$

$\therefore\ AB=a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ 　　 $\therefore\ x+y=\log_a AB$

$\therefore$ ①을 다시 대입하면, $\log_a A+\log_a B=\log_a AB$ (증명 끝)

(b) $f(x)$의 원시함수를 $F(x)$라 하면,

$$\int_a^m f(x)dx+\int_m^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^m+\Big[F(x)\Big]_m^b$$
$$=\{F(m)-F(a)\}+\{F(b)-F(m)\}$$
$$=F(b)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$=\int_a^b f(x)dx \quad \text{(증명 끝)}$$

(c) ${}_pC_r=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r!}$에서

$(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)=m$이라 하면, ${}_pC_r=\frac{p\cdot m}{r!}$

p는 소수이고 $1<r<p$이므로 $r!$과 p는 서로 소이다. 그런데, ${}_pC_r$은 자연수이므로 $r!$은 m의 약수이어야 한다.

⇦ 이 과정이 핵심. 이것을 생략하면 거의 점수를 얻을 수 없다.

$\therefore\ \frac{m}{r!}=n$ (n은 자연수) 즉, ${}_pC_r=pn$

$\therefore$ p는 ${}_pC_r$을 나눈다. (증명 끝)

3. 실수 a, b, c 사이에 $a<c<b$인 관계가 있을 때, 다음 부등식을 풀어라.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{|x-c|}<0$$

[배 점] 10점
[출제분야] 일반수학>방정식과 부등식>2차부등식
[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] $|x-c|>0$이므로 양변에 $|x-c|$를 곱해주면 2차부등식 문제가 된다. $|x-c|$가 분모에 있으므로 $x\neq c$인 것에 주의해야 한다.

모범해답 $x\neq c$ ……①

준 부등식의 양변에 $|x-c|$를 곱하면 $(x-a)(x-b)<0$

$\therefore\ a<x<b$ ……②

문제의 조건에서 $a<c<b$이므로 ①, ②에서 $a<x<c$ 또는 $c<x<b$

⇐ ②를 답으로 하면 5점

4. $\mathrm{Y}=\{m|m=8k+1$, k는 0 또는 양의 정수$\}$, $\mathrm{S}=\{n|n=d^2$, d는 홀수$\}$이면 $\mathrm{S}\subset\mathrm{Y}$임을 증명하라.

[배 점] 15점
[출제분야] 일반수학>집합과 명제>부분집합
[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 임의의 x에 대하여, $x\in\mathrm{A}$이면 $x\in\mathrm{B}$일 때, $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$라 정의한다.
$\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$의 증명 ⇨ $x\in\mathrm{A}$에서 출발하여 $x\in\mathrm{B}$임을 보인다.

모범해답 $n\in\mathrm{S}$이면 $n=d^2$인 홀수 d가 존재한다.

$d=2l+1$ (l은 정수)로 두면

$$n=(2l+1)^2=4l^2+4l+1=4l(l+1)+1$$

⇐ 여기까지가 5점

$l(l+1)$은 연속한 두 정수의 곱이므로 음 아닌 짝수이다.

⇐ 이것을 생략하면 −5점

따라서

$$l(l+1)=2l'\ (l'\text{는 0 또는 양의 정수})$$

으로 둘 수 있다.

이 때, $n=4(2l')+1=8l'+1$ (l'는 0 또는 양의 정수)

$\therefore\ n\in\mathrm{Y}$

집합 S의 임의의 원 n에 대하여 $n\in\mathrm{Y}$이므로 $\mathrm{S}\subset\mathrm{Y}$ (증명 끝)

5. 동심원 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$의 반지름을 각각 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$, 그 면적을 각각 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$이라 할 때, $S_k=2S_{k+1}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$인 관계가 있다.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$을 구하라.

(b) $r_1 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k$를 구하라.

[배 점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수 I > 극한 > 수열의 극한, 무한급수

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(b)	(a)	

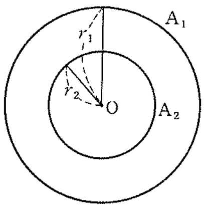
[문제분석] (a) $S_k=\pi r_k^2$을 $S_k=2S_{k+1}$에 대입하면 수열 $\{r_n\}$의 점화식이 얻어진다. 이 점화식에서 일반항을 구하는 것은 어렵지 않다.

(b) 수열 $\{r_n\}$의 무한등비급수의 합을 구하면 되는 평이한 문제이다.

무한등비급수 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots$

⇨ $|r|<1$이면 수렴하고, 그 값은 $S=\dfrac{a}{1-r}$

모범해답 (a) $S_k=\pi r_k^2$이고, $S_k=2S_{k+1}$ 이므로



$$\pi r_k^2=2\pi r_{k+1}^2$$

$$\therefore\ r_k^2=2r_{k+1}^2$$

그런데, $r_k>0$이므로

$$r_k=\sqrt{2}\,r_{k+1}$$

$$\therefore\ r_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}r_k$$

$\therefore$ 수열 $\{r_n\}$은 공비가 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 등비수열이다. ⇦ 여기까지가 5점

$$\therefore\ r_n=r_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty} r_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=0 \quad \cdots\cdots \text{답}$$

(b) $-1<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$이므로, ⇦ 이것을 언급하지 않으면 −3점

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}=\frac{r_1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=(2+\sqrt{2})r_1$$

$$\therefore\ r_1 : \sum_{k=1}^{\infty} r_k=r_1 : (2+\sqrt{2})r_1=1 : 2+\sqrt{2} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

6. 주사위를 5번 던질 때, 다음의 확률을 구하라.

(a) 4번째에 처음으로 3의 눈이 나올 확률

(b) 2번 이상 5의 눈이 나올 확률

[배 점] 15점(7점+8점)

[출제분야] 수 I > 확률 · 통계 > 확률의 계산

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
		(a)	(b)					

[문제분석] (a) 서로 독립인 사건에 관한 곱셈정리

사건 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 서로 독립

$$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

에 착안하면 된다.

(b) 주사위를 던질 때 매회의 시행이 독립이므로, 5회의 시행에서 5의 눈이 k회 나올 확률을 P_k라 하면 독립시행의 정리에서

$$P_k = {}_nC_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k} \quad (k=0, 1, \cdots, 5)$$

이 때, 구하는 확률은 $P_2+P_3+P_4+P_5$이지만 이것을 구하기 보다는

$$P_2+P_3+P_4+P_5 = 1-(P_0+P_1)$$

과 같이 여사건의 확률을 이용하여 푸는 것이 좋다.

모범해답 (a) 한 번 던져서 3의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이고 3 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{5}{6}$이다. 구하는 확률은 첫번째에서 세번째까지는 3 이외의 눈이 나오고, 네 번째에는 3의 눈이 나올 확률이므로,

⇦ 이것을 언급하지 않으면 −3점

$$p = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{5^3}{6^4} = \frac{125}{1296} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

(b) '2번 이상 5의 눈이 나오는 사건'은 '5의 눈이 나오지 않거나 한 번 나오는 사건'의 여사건이다.

$$\therefore\ p = 1-\left\{{}_5C_0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + {}_5C_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4\right\}$$

⇦ 여기까지가 5점

$$= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\times 2 = \frac{763}{3888} \quad \cdots\cdots \text{답}$$

합격포인트 ***1***의 (a), (b), ***2***의 (a), (b), ***3***번을 풀어서 30점을 얻고, ***4***번에서 10점, ***5, 6***번에서 30점을 얻어 총점이 70점 정도면 합격권. 수학이 주 득점원인 학생은 ***1***의 (c)를 풀어서 80점 정도면 성공.

'76연세대 수학Ⅱ 해설과 풀이

1. 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\frac{1}{2}\log 2\,\log_{\sqrt{2}}y+\log x+\log 4=0\right\}$, $B=\{(x,\ y)\,|\,\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\}$ 에 대하여 $A\cap B\neq\phi$ 되는 a의 최소값을 구하라.

[배　　점] 15점

[출제분야] 일반수학>지수·로그>log의 계산
일반수학>함수>유리·무리함수

[난 이 도]

기본			표준			어려움		

[문제분석] 밑 변환공식 $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$을 써서 집합 A의 조건식을 간단히 한 후, A, B의 그래프를 그려서 $A\cap B\neq\phi$ (⇔ A, B의 그래프가 교점을 가진다.)를 만족하게 해야 한다.

모범해답 집합 A를 정의하는 조건식에서 밑을 10으로 통일하여 간단히 하면, $\frac{1}{2}\log 2\cdot\dfrac{\log y}{\log\sqrt{2}}+\log x+\log 4=0$

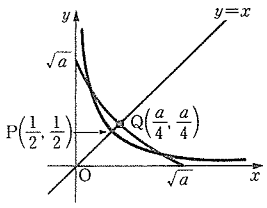
$\therefore\ \log y+\log x+\log 4=0\qquad\therefore\ \log 4xy=0\qquad\therefore\ 4xy=1$

또, 진수조건에서 $x>0,\ y>0$이므로 $y=\dfrac{1}{4x}\ (x>0,\ y>0)$ ……①

⇦ 여기까지가 5점

또, 집합 B를 정의하는 조건식에서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ……②

①, ②의 그래프는 모두 $y=x$에 관하여 대칭이고 $y=x$와의 교점은 각각 $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$이다. $A\cap B\neq\phi$이려면 점 P가 점 Q보다 원점에 가까이 있어야 한다.



⇦ 그래프를 제대로 그리지 못하면 −5점

$\therefore\ \frac{1}{2}\leqq\frac{a}{4}\qquad\therefore\ a\geqq 2$

따라서 구하는 a의 최소값은 2 ……답

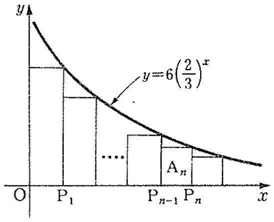
연구 [별해] ①을 ②에 대입하면 $\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{a}$

$\sqrt{x}=t\ (>0)$로 두고 정돈하면, $2t^2-2\sqrt{a}\,t+1=0$

이 2차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha\beta=\frac{1}{2}>0$이므로 $A\cap B\neq\phi$이려면 $\alpha>0,\ \beta>0$이어야 한다.

$\therefore\ \begin{cases}\alpha+\beta=\sqrt{a}>0\\ D/4=a-2\geqq 0\end{cases}$ 에서 $a\geqq 2$ $\qquad\therefore$ 구하는 최소값은 2 ……답

2. 그림과 같이 x축 위의 $x=n(n=0, 1, 2, \cdots)$인 점을 P_n, 선분 $P_{n-1}P_n$을 밑변으로 하고, 곡선 $y=6\left(\frac{2}{3}\right)^x$에 접하는 직사각형을 A_n이라 하자. A_n을 밑면으로 하고 높이가 n인 직육면체의 체적을 V_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$을 구하라.



[배 점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ>극한>무한등비급수

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 직육면체의 체적 V_n을 n에 관한 식으로 나타내는 것이 급선무.

이 때, $\sum_{k=1}^{n} V_k$의 식이 멱급수 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k r^k$의 형태로 나타나므로, 다음 요령에 따르는 것이 좋다.

멱급수 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k r^k$ ⇨ $S_n - rS_n$을 셈한다.

모범해답 A_n을 밑면으로 하고, 높이가 n인 직육면체의 체적이 V_n이므로, $V_n = A_n \times n$

$f(x)=6\left(\frac{2}{3}\right)^x$로 두면,

$$A_n=\overline{P_{n-1}P_n} f(P_n)=\{n-(n-1)\}\cdot 6\left(\frac{2}{3}\right)^n=6\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore\ V_n=6\left(\frac{2}{3}\right)^n \times n$$

⇦ 여기까지가 5점

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} V_k=\lim_{n\to\infty} 6\left\{1\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$S_n=1\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$이라 하면

$$\frac{2}{3}S_n=1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

변변 빼면, $\frac{1}{3}S_n=\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}-n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$\therefore\ \frac{1}{3}S_n=\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}}-n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}-n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

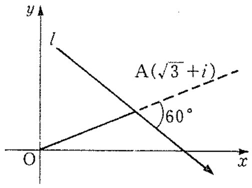
$$\therefore\ S_n=6\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}-3n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

⇦ 여기까지가 12점

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} V_n=\lim_{n\to\infty} 6\cdot S_n=6\lim_{n\to\infty} S_n=6\cdot 6=36$$ ……답

⇦ $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$

3. 복소수평면 위에서 복소수 $\sqrt{3}+i$가 나타내는 점을 A 라 할 때, 그림과 같이 A를 지나고 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $60°$를 이루는 직선 l의 벡터방정식을 구하라.



[배 점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ > 벡터 > 벡터방정식

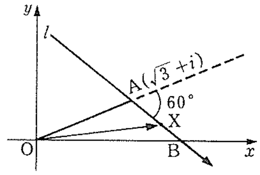
[난 이 도]

기본	표준	어려움

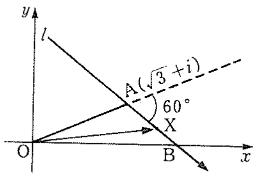
[문제분석] 오른편 그림에서 구하는 벡터방정식은

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{BA} \quad (t\text{는 임의의 실수})$$

$\angle ABO$를 구하고, 이를 이용해서 $\overrightarrow{BA}$의 방향을 결정하는 것이 문제를 해결하는 순서이다.



모범해답 직선 l 위의 임의의 점을 X, 직선 l과 x축의 교점을 B라 하면 구하는 벡터방정식은



$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t'\overrightarrow{BA}$ (t'은 임의의 실수) ⇐ 여기까지가 5점

그런데, $\tan(\angle AOB)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서

$\angle AOB=30°$이므로 $\angle ABO=60°-\angle AOB=60°-30°=30°$ ⇐ 여기까지가 8점

$\therefore\ \overrightarrow{BA}=k(\cos150°, \sin150°)=k\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$인 실수 k가 존재한다. ⇐ $\overrightarrow{BA}=k(\cos30°, \sin30°)$라 두면 -5점

$\therefore\ \overrightarrow{OX}=(\sqrt{3}, 1)+t'k\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)=(\sqrt{3}, 1)-\dfrac{t'k}{2}(\sqrt{3}, -1)$

$\overrightarrow{OX}=\vec{x}$, $-\dfrac{t'k}{2}=t$로 두면, 구하는 벡터방정식은

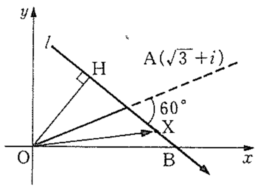
$\vec{x}=(\sqrt{3}, 1)+t(\sqrt{3}, -1)$ (t는 임의의 실수) ……답

연구 [별해] 원점 O에서 직선 l 위에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HX}=0$

$\therefore\ \overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OH})=0 \qquad \therefore\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OX}=|\overrightarrow{OH}|^2$ …(*)

그런데 $\tan(\angle AOB)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서 $\angle AOB=30°$이고, $\angle HAO=60°$ 에서 $\angle HOA=30°$이므로 $\angle HOB=60°$ ……①

또, $\overline{OH}=\overline{OA}\cos30°=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ……②



①, ②에서 H의 좌표는 $H(\sqrt{3}\cos60°, \sqrt{3}\sin60°)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

$\therefore$ (*)에서 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)\cdot\overrightarrow{OX}=3$ ……답

4. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하라.

[배　　점] 10점

[출제분야] 수Ⅱ>타원과 쌍곡선>쌍곡선의 접선

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 음함수 $f(x,\ y)=0$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선은 다음 순서에 따라 구한다.

STEP 1. 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

STEP 2. 접선의 기울기 $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}$을 구한다.

STEP 3. $y-y_1=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}(x-x_1)$이 구하는 접선이다.

모범해답 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 관하여 미분하면 $\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}y'=0$

(i) $y_1\neq 0$: 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기 m은 $m=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

따라서, 구하는 접선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$

$\therefore\ a^2y_1y-a^2{y_1}^2=b^2x_1x-b^2{x_1}^2$

$\therefore\ b^2x_1x-a^2y_1y=b^2{x_1}^2-a^2{y_1}^2=a^2b^2\ \left(\because\ \dfrac{{x_1}^2}{a^2}-\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1\right)$

따라서 양변을 a^2b^2으로 나누면, $\dfrac{xx_1}{a^2}-\dfrac{yy_1}{b^2}=1$ ……(*)

(ii) $y_1=0$: 그래프의 개형에서 접선의 식은 $x=x_1$이다.

(*)는 이것을 포함하므로 구하는 접선의 식은

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ (i), (ii)로 나누어 풀지 않으면 −5점

※ $x^2\to x_1x,\ y^2\to y_1y$ 를 대입하여 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ 로 답하면 답은 맞지만 0점

연구 [별해] 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …① 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선을 $y=mx+n$ …②이라 하자.

①, ②가 접하므로 ②를 ①에 대입하여 얻은 방정식 $b^2x^2-a^2(mx+n)^2=a^2b^2$이 중근을 가져야 한다.

$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0$에서 $\mathrm{D}/4=a^4m^2n^2+(b^2-a^2m^2)a^2(n^2+b^2)=0$

$\therefore\ n^2+b^2-a^2m^2=0$

$y_1=mx_1+n$에서 $n=y_1-mx_1$이므로 $(y_1-mx_1)^2+b^2-a^2m^2=0$ ……③

$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}-\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$을 써서 ③을 간단히 하면, $\left(\dfrac{a}{b}y_1m-\dfrac{b}{a}x_1\right)^2=0$ $\therefore\ m=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

이후는 **모범해답**과 같다.

5. 도함수의 정의를 써서, $f(x)=|x|$의 도함수를 구하라.

[배　　점] 10점

[출제분야] 수Ⅱ＞미분＞도함수의 정의

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 함수 $y=f(x)$의 도함수의 정의식

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

에 충실히 따라야 한다.

다음과 같이 푸는 것은 과정 ①과 과정 ②에서 논리적으로 다소 어색한 감이 없지 않다. 따라서 모범해답 과 같이 푸는 것이 최선!

풀이 (i) $x>0$일 때 ; $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}\overset{①}{=}\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$

(ii) $x<0$일 때 ; $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}\overset{②}{=}\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)+x}{h}=-1$

(iii) $x=0$일 때 ; $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$

그런데

$$\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1,\quad \lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로 $f'(0)$는 존재하지 않는다.

모범해답 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h(|x+h|+|x|)}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h(|x+h|+|x|)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{|x+h|+|x|}$$

(i) $x\neq 0$일 때 ; $f'(x)=\frac{2x}{2|x|}=\frac{x}{|x|}$

⇦ (i), (ii)로 나누어 풀지 않으면 −5점

(ii) $x=0$일 때 ; $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|}$

그런데,

$$\lim_{h\to +0}\frac{h}{|h|}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1,\quad \lim_{h\to -0}\frac{h}{|h|}=\lim_{h\to -0}\frac{h}{-h}=-1$$

이므로 $f'(0)$는 존재하지 않는다.

⇦ $f'(0)$가 존재하지 않는 이유를 밝히지 않으면 −3점

(i), (ii)에서 구하는 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}\quad (f'(0)\text{는 존재하지 않는다.})$$

……답

6. (a) f가 연속함수일 때,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

를 증명하라.

(b) 곡선 $y=x^n(n>0)$이 y축의 둘레를 회전할 때 생기는 회전면은 직선 $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분이 y축의 둘레를 회전할 때 생기는 회전체(원기둥)를 두 부분으로 나눈다. 이 때 나누어지는 두 부분의 체적의 비를 구하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수Ⅱ>적분>치환적분법, 회전체의 체적

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
					(b)	(a)		

[문제분석] (a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$와 치환적분 및 정적분의 계산공식을 이용하여 증명할 수 있다. 치환적분의 요령을 설명하면 다음과 같다.

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$에서 $g(x)=t$로 치환하면

(i) $g'(x)dx=dt$이고,

(ii) $x=a$일 때 $t=g(a)$, $x=b$일 때 $t=g(b)$이므로

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

(b) $y=x^n$과 $x=0$, $y=1$로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전할 때 생기는 회전체의 부피를 구한 후, 나머지 부분의 부피는 원기둥에서 빼면 된다.

모범해답 (a) $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$$

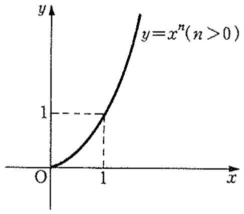
이 때, $\frac{\pi}{2}-x=t$로 치환하면 $-dx=dt$이고, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$, $x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx\end{aligned}$$ ……답

⇦ 좌변에서 우변의 모양을 이끌어 내려면 sin을 cos으로 바꾸어야 한다. 따라서 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 와 같이 변형하는 것이 필요하다. 다음은 $\frac{\pi}{2}-x=t$로 두고 치환적분법을 이용한다.

(b) 먼저, $y=x^n$과 $x=0$, $y=1$로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전할 때 생기는 회전체의 부피를 V_1이라 하면,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_1&=\int_0^1 x^2dy\\&=\int_0^1 y^{\frac{2}{n}}dy\\&=\pi\left[\frac{n}{n+2}y^{\frac{n+2}{n}}\right]_0^1\\&=\frac{n}{n+2}\pi\end{aligned}$$



⇦ 여기까지가 5점

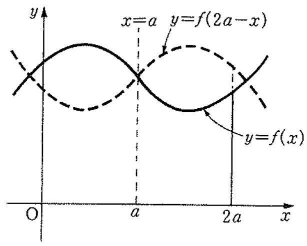
직선 $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분이 y축 둘레로 회전할 때 생기는 회전체의 부피는 반지름 1이고, 높이가 1인 원기둥의 부피와 같다. 이 원기둥의 부피에서 위에서 구한 회전체의 부피 V_1을 뺀 것을 V_2라 할 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_2&=(\pi\times1^2)\times1-\mathrm{V}_1\\&=\pi-\frac{n}{n+2}\pi\\&=\frac{2}{n+2}\pi\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}_1:\mathrm{V}_2=\frac{n}{n+2}\pi:\frac{2}{n+2}\pi=n:2$$ ……답

연구 (a) $y=f(x)$를 직선 $x=a$에 대칭이동하면 $y=f(2a-x)$로 옮겨진다. 오른편 그림에서,

$$\int_0^{2a}f(x)dx=\int_0^{2a}f(2a-x)dx$$



임을 알 수 있다.

따라서,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx\end{aligned}$$

그러나, 이것을 증명이라 하기에는 논리적인 면에서 다소 부족한 점이 많다.

7. 흰 공 4개와 빨간 공 6개가 들어 있는 주머니 속에서 A가 먼저 4개를 꺼내고 다음 B가 3개를 꺼낼 때, A, B 두 사람이 같은 수의 흰 공을 꺼낼 확률을 구하라.

[배 점] 15점

[출제분야] 수Ⅱ > 확률 · 통계 > 확률의 계산

[난 이 도]

기본	표준	어려움

[문제분석] 흰 공이 4개 뿐이므로 A, B 두 사람이 같은 수의 흰 공을 꺼내는 경우는 각각 1개씩 또는 각각 2개씩 뽑는 두 가지 경우뿐이다. 따라서 다음 두 경우로 나누어서 풀어야 한다.

(i) 흰 공을 1개씩 꺼내는 경우 (ii) 흰 공을 2개씩 꺼내는 경우

모범해답 각자 흰 공을 1개 또는 2개씩 꺼내는 경우가 가능하다.

⇦ 이것을 언급하면 2점

(i) 흰 공을 1개씩 꺼낼 확률 ; A가 흰 공을 1개 꺼낼 경우 빨간 공은 3개 꺼내므로 그 확률은 $\dfrac{{}_4C_1 \times {}_6C_3}{{}_{10}C_4} = \dfrac{8}{21}$

이제, 남은 흰 공 3개, 빨간 공 3개 중에서 B가 흰 공을 1개, 빨간 공을 2개 꺼낼 확률은 $\dfrac{{}_3C_1 \times {}_3C_2}{{}_6C_3} = \dfrac{9}{20}$

$$\therefore \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_3}{{}_{10}C_4} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{8}{21} \times \frac{9}{20} = \frac{6}{35}$$

⇦ (i)을 제대로 풀면 5점

(ii) 흰 공을 2개씩 꺼낼 확률 ; A가 흰 공을 2개 꺼낼 경우 빨간 공은 2개 꺼내므로 그 확률은 $\dfrac{{}_4C_2 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_4} = \dfrac{3}{7}$

이제, 남은 흰 공 2개, 빨간 공 4개 중에서 B가 흰 공을 2개, 빨간 공을 1개 꺼낼 확률은 $\dfrac{{}_2C_2 \times {}_4C_1}{{}_6C_3} = \dfrac{1}{5}$

$$\therefore \frac{{}_4C_2 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_4} \times \frac{{}_2C_2 \times {}_4C_1}{{}_6C_3} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$$

⇦ (ii)를 제대로 풀면 5점

(i), (ii)는 서로 배반이므로 구하는 확률은

⇦ 서로 배반임을 언급하지 않으면 −2점

$$\frac{6}{35} + \frac{3}{35} = \frac{9}{35}$$ ……답

합격포인트 **2, 4, 7**번은 반드시 풀어서 35점 이상 얻어야 하고, **1, 3**번 중에서 어느 하나를 풀고, **5, 6**번에서 부분 점수를 15점 정도 얻어서 총점이 60점 정도면 합격권. 수학이 주 득점원인 학생은 골고루 점수를 얻어서 70점 정도 획득하면 성공!

'76 고려대 수학 I $\left(100\text{점}/60\text{분}\right)$

1. 아래의 각 문제들은 맞는 것이 여러 개 있을 수도 있고 또 하나도 없을 수도 있다. 맞는 것에는 ○표, 틀린 것에는 ×표를 하라. (25점)

(주의 : 틀린 답은 감점되므로 유의할 것.)

(1) 세 실수 a, b, c가 모두 0이 아니기 위한 필요조건은

① $abc \neq 0$ ② $a+b+c \neq 0$ ③ $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

(2) $\log_2 3$을 변형하면

① $\log_{10}3 \cdot \log_{10}2$ ② $\log_{10}3 \cdot \log_2 10$ ③ $\dfrac{\log_{10}3}{\log_2 10}$

(3) 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 위의 정점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은

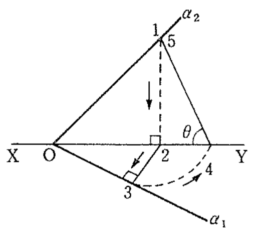
① $x_0x+y_0y=1$ ② $x_0x+y_0y=r$ ③ $x_0x^2+y_0y^2=r^2$

(4) 상자 속에 12개의 전구가 들어 있는데 그 중 3개는 불량품이라고 한다. 지금 이 상자 속에서 한 개를 꺼내서 불량품 여부를 조사하고 다시 집어 넣은 다음 또 다시 한 개를 꺼내서 조사한다. 이와 같은 조사를 여섯 번(6회) 거듭하고 불량품이 나올 횟수를 변량 X로 나타내면, X의 분산은

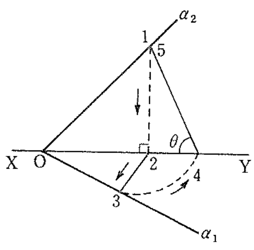
① $\dfrac{9}{8}$ ② $\dfrac{21}{16}$ ③ $\dfrac{9}{4}$

(5)* 아래의 것은 평면 α의 투영도에다 평면 α가 평화면과 이루는 실각 θ를 작도한 그림이다. (그림에서 $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$는 그리는 순서이며 ㄱ은 직각 표시이다. 또 호 $\overset{\frown}{34}$는 2를 중심으로 한 원호이며 둘째 그림에서는 $\overline{1O} /\!/ \overline{23}$이다.)

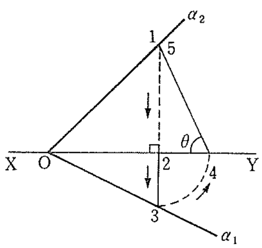
①



②



③



1−(5)* : 출제 당시의 교과 과정으로는 문·이과 공통이었으나 현재의 교과 과정으로는 이과 범위(수 II 과정)이다. 따라서 문과 학생들은 공부하지 않아도 된다.

2. (1) a, x, y가 모두 양의 정수일 때 등식 $\sqrt{a-\sqrt{24}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ $(x \geqq y)$를 성립시키는 a의 값은 $a=\boxed{}$이다. (5점)

(2) $\mathrm{A}=\{x|x^2-1>0\}$, $\mathrm{B}=\{x|\alpha \leqq x \leqq \beta\}$일 때 $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$는 모든 실수들의 집합이 되고 또 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}=\{x|1<x \leqq 3\}$와 같이 되는 α와 β의 값은 각각 $\alpha=\boxed{}$, $\beta=\boxed{}$이다. (10점)

(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ a)$를 지날 때 함수 $y=f(x-a)+a$의 그래프는 점 $(a,\ \boxed{})$를 지나며 함수 $y=f(x+a)-a$의 그래프는 점 $(\boxed{},\ 0)$를 지난다. (10점)

3. 이 문제는 풀이의 과정을 보이면서 답을 내라.

곡선 $y=8^n x^2-2^n(2^n+1)x+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$에서 (20점)

(1) 이 곡선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하라.

(2) 이 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값을 구하라.

4. 이 문제도 풀이의 과정을 보이면서 답을 내라.

3차 곡선 $y=ax^3+bx+2$ $(a \neq 0)$에서 (30점)

(1) 이 곡선이 점 $(1,\ 0)$에서 x축에 접할 때 계수 a와 b의 값을 구하라.

(2) 이 때 이 함수의 극대값과 극소값을 구하라.

(3) 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 면적을 구하라.

'76 고려대 수학 II $\left(^{100점}/_{60분}\right)$

1. 아래의 각 문제들은 맞는 것이 여러 개 있을 수도 있고 또 하나도 없을 수도 있다. 맞는 것에는 ○표, 틀린 것에는 ×표를 하라. (25점)

(주의 : 틀린 답은 감점되므로 유의할 것.)

(1) 세 실수 a, b, c가 모두 0이 아니기 위한 필요조건은

① $abc \neq 0$ ② $a+b+c \neq 0$ ③ $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

(2) 함수 $f(x)$의 정의역 내에서 모든 연속점들의 집합을 C, 또 미분가능한 점들의 집합을 D라 하면

① $\mathrm{C} \cup \mathrm{D} = \mathrm{D}$ ② $\mathrm{C} \cap \mathrm{D} = \mathrm{D}$ ③ $\mathrm{C} \cup \mathrm{D} = \mathrm{C}$

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$일 때 함수 $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$의 최대값에 가장 가까운 근사값은?

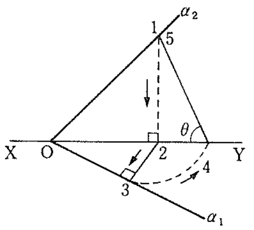
① 1.414 ② 1.366 ③ 1.732

(4) 원 $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$ 위의 정점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은

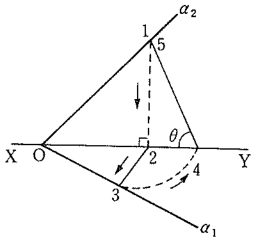
① $x_0x+y_0y=1$ ② $x_0x+y_0y=r$ ③ $x_0x^2+y_0y^2=r^2$

(5) 아래의 것은 평면 α의 투영도에다 평면 α가 평화면과 이루는 실각 θ를 작도한 그림이다. (그림에서 $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$는 그리는 순서이며 ㄱ은 직각 표시이다. 또 호 $\overset{\frown}{34}$는 2를 중심으로 한 원호이며 둘째 그림에서는 $\overline{1\mathrm{O}} /\!/ \overline{23}$이다.)

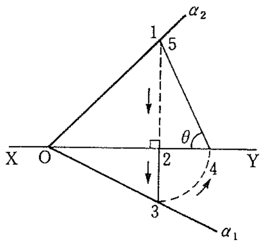
①



②



③



2. (1) a, x, y가 모두 양의 정수일 때 등식 $\sqrt{a-\sqrt{24}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}\ (x \geqq y)$를 성립시키는 a의 값은 $a=\boxed{}$이다. (5점)

(2) $\mathrm{A}=\{x \mid x^3+2x^2-x-2>0\}$, $\mathrm{B}=\{x \mid \alpha \leqq x \leqq \beta\}$라 할 때 $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}=\{x \mid x+2>0\}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}=\{x \mid 1<x \leqq 3\}$와 같이 되는 α와 β의 값은 각각 $\alpha=\boxed{}$, $\beta=\boxed{}$이다. (10점)

(3) 복소수평면 위에 두 점 α와 β가 있다. 지금 두 실수 x와 y는 각각 $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$과 같은 구간 내의 모든 값을 취하면서 변한다면 (단, 세 점 α와 β 및 원점은 같은 직선 위에 있지 않다.) (10점)

ⓐ 점 $x\alpha+y\beta$가 그리는 도형은 $\boxed{\quad}$이며

ⓑ 이 도형의 면적을 S라 할 때 $|\alpha|=|\beta|=1$일 경우의 면적 S의 최대값은 $\boxed{\quad}$이고

ⓒ 또 이 때의 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 $\boxed{\quad}$이다.

3. 이 문제는 풀이의 과정을 보이면서 답을 내라. 한 변의 길이가 $a(a>0)$인 정삼각형 $\triangle$ABC의 변 BC를 n등분하고 각 분점들을 점 B에서부터 차례로

$$P_0=B,\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_k,\ \cdots,\ P_{n-1},\ P_n=C$$

라 할 때 (30점)

(1) 벡터 $\overrightarrow{AP_k}$를 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BC}$로 표시하라.

(2) 두 벡터 $\overrightarrow{AP_{k-1}}$와 $\overrightarrow{AP_k}$와의 내적 $(\overrightarrow{AP_{k-1}},\ \overrightarrow{AP_k})$를 a로 표시하라.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{AP_{k-1}},\ \overrightarrow{AP_k})$를 구하라.

4. 이 문제도 풀이의 과정을 보이면서 답을 내라. (20점)

(1) 곡선 $y=\log_e x$와 $x=e$일 때의 이 곡선의 접선과 x축으로 둘러싸인 부분 S의 면적을 구하라.

(2) 위의 S가 y축을 축으로 하여 회전할 때 생기는 회전체의 체적을 구하라.

'76 고려대 수학 I 해설과 풀이

1-(1) 세 실수 a, b, c가 모두 0이 아니기 위한 필요조건은

① $abc \neq 0$ ② $a+b+c \neq 0$ ③ $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

(2) $\log_2 3$을 변형하면

① $\log_{10}3 \cdot \log_{10}2$ ② $\log_{10}3 \cdot \log_2 10$ ③ $\dfrac{\log_{10}3}{\log_2 10}$

[배　점] 10점(5점+5점)

[출제분야] 일반수학>집합과 명제>필요조건 · 충분조건
일반수학>지수 · 로그>log의 성질

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
(2)			(1)					

[문제분석] (1) 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때 즉, $p \Rightarrow q$일 때, 다음과 같이 정의한다.

p는 q이기 위한 충분조건　　**q는 p이기 위한 필요조건**

(2) 밑 변환 공식 $\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$을 활용하면 쉽게 해결된다.

모범해답 (1) 세 실수 a, b, c가 모두 0이 아니다. $\Longleftrightarrow a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

① $abc \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

$\therefore$ ①은 $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$이기 위한 필요충분조건이다.

② $a+b+c \neq 0 \ \overset{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow}\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

($\not\Rightarrow$의 반례) $a=1, b=1, c=0$이면 $a+b+c \neq 0$이지만 $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$인 것은 아니다.

($\not\Leftarrow$의 반례) $a=1, b=1, c=-2$이면 $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$이지만 $a+b+c \neq 0$인 것은 아니다.

$\therefore$ ②는 $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$이기 위한 아무 조건도 아니다.

⇦ 성립함을 보일 때에는 일반적인 증명을, 성립하지 않음을 보일 때에는 반례를 들면 된다. 이 문제는 객관식이므로 답만 제대로 쓰면 되겠지만…

③ $a^2+b^2+c^2 \neq 0 \ \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

($\Leftarrow$의 증명) a, b, c가 실수이므로 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$이면 $a^2, b^2, c^2 > 0$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2 > 0$　　$\therefore\ a^2+b^2+c^2 \neq 0$

($\not\Rightarrow$의 반례) $a=1,\ b=1,\ c=0$이면 $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ 이지만 $a \neq 0$, $b \neq 0,\ c \neq 0$인 것은 아니다.

$\therefore$ ③는 $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$이기 위한 필요조건이다.

답 ① × ② × ③ ○

(2) $\log_2 3 = \dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2} = \log_{10}3 \cdot \log_2 10$　　답 ① × ② ○ ③ ×

⇦ 필요충분조건이면 필요조건이지 않은가? ①도 ○이지 않을까? 물음이 모호하다.

1-(3) 원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 위의 정점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은

① $x_0x+y_0y=1$ ② $x_0x+y_0y=r$ ③ $x_0x^2+y_0y^2=r^2$

(4) 상자 속에 12개의 전구가 들어 있는데 그 중 3개는 불량품이라고 한다. 지금 이 상자 속에서 한 개를 꺼내서 불량품 여부를 조사하고 다시 집어 넣은 다음 또 다시 한 개를 꺼내서 조사한다. 이와 같은 조사를 여섯 번(6회) 거듭하고 불량품이 나올 횟수를 변량 X로 나타내면, X의 분산은

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{21}{16}$ ③ $\frac{9}{4}$

[배 점] 10점(5점+5점)

[출제분야] 일반수학>도형의 방정식>원의 접선
수 I >확률·통계>이항분포

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
(3)		(4)						

[문제분석] (3) 2차곡선 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

$$\Rightarrow\ x^2\to x_1x,\quad y^2\to y_1y,\quad x\to\frac{x_1+x}{2},\quad y\to\frac{y_1+y}{2},\quad \text{상수는 그대로}$$

의 요령에 따르면 된다.

(4) 매번의 시행이 서로 독립이므로 6회 중에서 꼭 r회 불량품이 나올 확률은 독립시행의 정리에서

$$P(X=r)={}_6C_r\left(\frac{3}{12}\right)^r\left(\frac{9}{12}\right)^{6-r}\quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ 6)$$

$\therefore$ X는 이항분포 $B\left(6,\ \frac{3}{12}\right)$에 따른다.

확률변수 X가 $B(n,\ p)$를 따를 때

$\Rightarrow$ 평균 $m=E(X)=np$, 분산 $\sigma^2=V(x)=npq$ $(q=1-p)$

모범해답 (3) $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은

$$x_0x+y_0y=r^2$$

답 ① × ② × ③ ×

(4) 매번의 시행이 서로 독립이므로 6회 중에서 꼭 r회 불량품이 나올 확률은

$$P(X=r)={}_6C_r\left(\frac{3}{12}\right)^r\left(\frac{9}{12}\right)^{6-r}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

$\therefore$ X는 이항분포 $\left(6,\ \frac{1}{4}\right)$에 따른다.

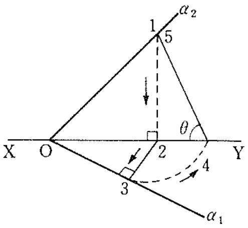
$\therefore$ X의 분산 $V(X)=6\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$

답 ① ○ ② × ③ ×

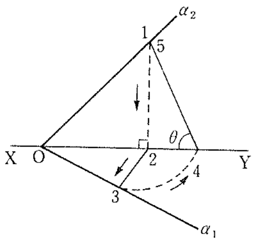
⇐ 접선은 중심 $(0,\ 0)$와 접점 $(x_0,\ y_0)$를 지나는 직선 $y=\frac{y_0}{x_0}x$에 수직이므로 $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$
증명을 요구하는 문제라면 연구와 같이 해야 한다.

1−(5) 아래의 것은 평면 α의 투영도에다 평면 α가 평화면과 이루는 실각 θ를 작도한 그림이다. (그림에서 $1\to2\to3\to4\to5$는 그리는 순서이며 ㄱ은 직각 표시이다. 또 호 $\overset{\frown}{34}$는 2를 중심으로 한 원호이며 둘째 그림에서는 $\overline{1O} /\!/ \overline{23}$이다.)

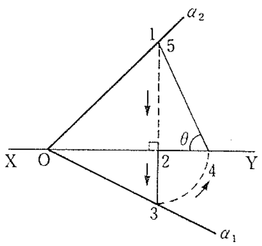
①



②



③



[배 점] 5점

[출제분야] 수Ⅱ>공간도형과 공간좌표>삼수선의 정리, 이면각

[난 이 도]

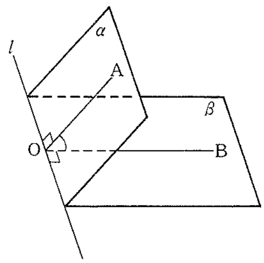
기본	표준	어려움

[문제분석] 평면 α가 어디에 위치한 도형인가를 정확히 상상할 수 있어야 한다. 그리고 다음 내용들을 자유자재로 구사할 수 있어야 한다.

(i) 삼수선의 정리

(ii) 두 평면이 이루는 각(이면각)의 정의

이 중에서 이면각의 정의를 살펴보자. 두 평면 α, β의 교선 l 위의 한 점 O를 지나 각 면 위에 수직인 직선 OA, OB를 그을 때, $\angle$AOB를 이면각이라 한다.



참고 문제에 주어진 그림에서 직선 α_1과 직선 XY가 놓인 평면을 평화면, 직선 α_2와 직선 XY가 놓인 평면을 입화면이라 한다.

모범해답 평면 α는 오른편 그림과 같이 1, O, 3을 품는 평면이다.

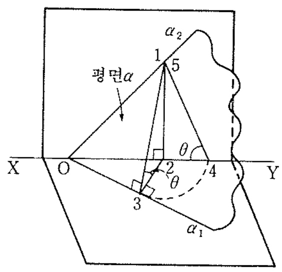
$\overleftrightarrow{12}\perp$(평화면)이고 $\overleftrightarrow{23}\perp\alpha_1$이면 삼수선의 정리에서 $\overleftrightarrow{13}\perp\alpha_1$

∴ 평면 α가 평화면과 이루는 각 θ는 $\theta=\angle 132$

그런데,

$\triangle 123\equiv\triangle 124$

이므로 $\theta=\angle 142$



답 ① ○ ② × ③ ×

⇦ 각자 ②, ③이 ×인 이유를 알아보도록!

2. (1) a, x, y가 모두 양의 정수일 때 등식 $\sqrt{a-\sqrt{24}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ $(x \geqq y)$를 성립시키는 a의 값은 $a=\square$이다.

(2) $\mathrm{A}=\{x|x^2-1>0\}$, $\mathrm{B}=\{x|\alpha \leqq x \leqq \beta\}$일 때 $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$는 모든 실수들의 집합이 되고 또 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}=\{x|1<x \leqq 3\}$와 같이 되는 α와 β의 값은 각각 $\alpha=\square$, $\beta=\square$이다.

(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, a)$를 지날 때 함수 $y=f(x-a)+a$의 그래프는 점 $(a, \square)$를 지나며 함수 $y=f(x+a)-a$의 그래프는 점 $(\square, 0)$를 지난다.

[배 점] 25점(5점+10점+10점)−각5점

[출제분야] 일반수학>수와 식>무리수 상등
일반수학>방정식과 부등식>2차부등식
일반수학>함수>평행이동

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(3) (1)	(2)	

[문제분석] (1) 양변을 제곱한 후, 다음 무리수 상등의 원리를 적용한다.

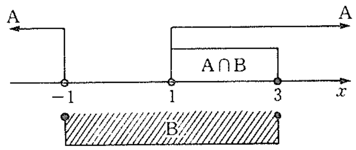
a, b, c, d는 유리수이고 $\sqrt{m}$은 무리수일 때,

$$a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m} \iff a=c,\ b=d$$

(2) A ; $x^2-1>0 \iff x>1$ 또는 $x<-1$

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}=\mathrm{R}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}=\{x|1<x \leqq 3\}$

을 만족하려면 오른편 그림에서



$\mathrm{B}=\{x|-1 \leqq x \leqq 3\}$

이어야 함을 직관적으로 알 수 있다.

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=3$

그러나, 풀이 과정을 서술해야 할 때에는 감점 방지를 위해 보다 논리적인 방법으로 풀어야 한다.

(3) $y=f(x)$를 x축, y축의 양의 방향으로 각각 m, n만큼 평행이동

$$\Rightarrow y-n=f(x-m)$$

을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

모범해답 (1) 주어진 등식의 양변을 제곱하면

$$a-\sqrt{24}=x+y-2\sqrt{xy}$$

$$\therefore\ a-2\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy}$$

a, x, y가 양의 정수이므로 무리수 상등의 원리에서

$$x+y=a,\quad xy=6$$

$xy=6$, $x \geqq y$을 만족하는 양의 정수의 쌍은

$$(x, y)=(3, 2), (6, 1)$$

이 때,

$$a=x+y=5 \text{ 또는 } 7$$

⇦ 하나를 빠뜨리면 −2점

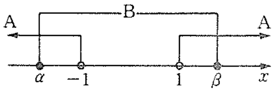
답 5 또는 7

(2) $A=\{x|x^2-1>0\}$

$=\{x|x<-1$ 또는 $x>1\}$,

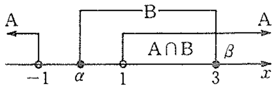
$B=\{x|\alpha \leqq x \leqq \beta\}$이므로,

$A\cup B=\{x|x$는 실수$\}$이려면 오른편 그림에서,



$\alpha \leqq -1,\ \beta \geqq 1$ ......①

또, $A\cap B=\{x|1<x\leqq 3\}$이려면 오른편 그림에서,



$-1\leqq \alpha \leqq 1,\ \beta=3$ ......②

①, ②에서, $\alpha=-1,\ \beta=3$ ......답

(3) $y=f(x-a)+a$의 그래프는 $y=f(x)$를 x축, y축의 양의 방향으로 각각 a만큼 평행이동한 그래프이다. 점 $(0,\ a)$는 이 평행이동에 의해 $(a,\ 2a)$로 평행이동되므로 $y=f(x-a)+a$의 그래프는 점 $(a,\ 2a)$를 지난다.

답 $2a$

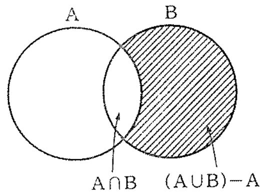
⇐『$y=f(x)$가 $(0,\ a)$를 지나므로 $f(0)=a$
$y=f(x-a)+a$
에서 $x=a$이면
$y=f(0)+a=a+a=2a$
$\therefore$ $(a,\ 2a)$를 지난다.』
와 같이 해도 된다.

$y=f(x+a)-a$의 그래프는 $y=f(x)$를 x축, y축의 양의 방향으로 각각 $-a$만큼 평행이동한 그래프이다. 점 $(0,\ a)$는 이 평행이동에 의해 $(-a,\ 0)$로 평행이동되므로 $y=f(x+a)-a$의 그래프는 점 $(-a,\ 0)$를 지난다.

답 $-a$

연구 *1°* [별해] (2) 집합의 연산을 이용하여 집합 B를 $A\cup B$, A, $A\cap B$로 나타내면

$$\mathbf{B=\{(A\cup B)-A\}\cup(A\cap B)}$$



그런데,

$$(A\cup B)-A=\{x|x\text{는 실수}\}-\{x|x^2-1>0\}$$
$$=\{x|x^2-1\leqq 0\}$$
$$=\{x|-1\leqq x\leqq 1\}$$

이므로,

$$B=\{(A\cup B)-A\}\cup(A\cap B)$$
$$=\{x|-1\leqq x\leqq 1\}\cup\{x|1<x\leqq 3\}$$
$$=\{x|-1\leqq x\leqq 3\}$$
$$=\{x|\alpha\leqq x\leqq \beta\}$$

에서 $\alpha=-1,\ \beta=3$ ......답

2° [별해] (3)의 후반부 물음에서 $y=f(x+a)-a$가 점 $(-a,\ 0)$를 지나는 것은 확실하지만 다른 점 $(\boxed{},\ 0)$을 지날 수도 있음을 간과하면 곤란하다.

$y=f(x)$가 일대일함수이어야만 점 $(\boxed{},\ a)$를 지난다고 할 때, $\boxed{}$는 $-a$로 결정될 수 있다.

그러나 수험생의 입장에서는 출제자의 의도를 짐작하여 모범해답과 같이 하는 것이 바람직한 태도이다.

3. 이 문제는 풀이의 과정을 보이면서 답을 내라.

곡선 $y=8^n x^2-2^n(2^n+1)x+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$에서

(1) 이 곡선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하라.

(2) 이 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값을 구하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 일반수학>함수>2차함수
수 I >극한>무한급수

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(2)	(1)						

[문제분석] (1) $\boldsymbol{y=f(x)}$가 $\boldsymbol{x}$축과 만나는 점의 $\boldsymbol{x}$좌표　　… $y=f(x)$에서 $y=0$일 때의 x값이다.

⇨ $\boldsymbol{f(x)=0}$의 실근

(2)는 무한등비급수 $\mathrm{S}=a+ar+ar^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에 관한 다음 내용을 활용한다.

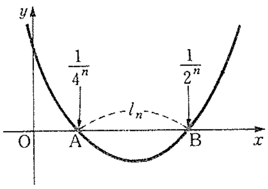
$$\mathrm{S}=\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \Rightarrow |r|<1\text{이면 수렴하고 그 값은 } \mathrm{S}=\frac{a}{1-r}$$

모범해답 (1) $y=8^n x^2-2^n(2^n+1)x+1$ …(*)이 x축과 만나는 점의 x좌표는 (*)에서 $y=0$일 때다.

$8^n x^2-2^n(2^n+1)x+1=0$에서 $4^n\cdot 2^n x^2-(4^n+2^n)x+1=0$

$\therefore\ (4^n x-1)(2^n x-1)=0$　　$\therefore\ x=\dfrac{1}{4^n},\ \dfrac{1}{2^n}$　……답

(2) $\dfrac{1}{4^n}<\dfrac{1}{2^n}$이므로 오른편 그림에서



$$l_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\quad\text{……답}$$

⇦ 여기까지가 5점

연구 [별해] (1) $8^n x^2-2^n(2^n+1)x+1=0$의 좌변이 인수분해됨을 발견하지 못했을 때에는 다소 복잡하긴 해도 근의 공식을 사용해서 풀어야 할 것이다. 즉,

$$x=\frac{2^n(2^n+1)\pm\sqrt{\{2^n(2^n+1)\}^2-4\times 8^n}}{2\times 8^n}=\frac{2^n(2^n+1)\pm\sqrt{(4^n)^2-2\times 8^n+(2^n)^2}}{2\times 8^n}$$

$$=\frac{2^n(2^n+1)\pm\sqrt{(4^n-2^n)^2}}{2\times 8^n}=\frac{(4^n+2^n)\pm(4^n-2^n)}{2\times 8^n}$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2^n},\ \frac{1}{4^n}\quad\text{……답}$$

4. 이 문제도 풀이의 과정을 보이면서 답을 내라.

3차 곡선 $y=ax^3+bx+2$ $(a\neq 0)$에서

(1) 이 곡선이 점 (1, 0)에서 x축에 접할 때 계수 a와 b의 값을 구하라.

(2) 이 때 이 함수의 극대값과 극소값을 구하라.

(3) 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 면적을 구하라.

[배 점] 30점(10점+10점+10점)

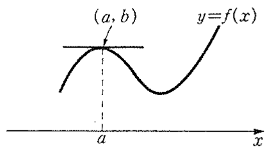
[출제분야] 수 I >미분>접선의 방정식, 극대·극소
수 I >적분>넓이와 적분

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
	(2)(3)	(1)						

[문제분석] (1) $y=f(x)$가 점 $(a, 0)$에서 x축에 접한다.

$\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$가 $x=a$에서 극값으로 0을 갖는다.



로 이해한 다음,

$y=f(x)$가 $x=a$에서 극값으로 b를 갖는다.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(a)=0 \\ f(a)=b \end{cases}$$

를 써서 풀면 된다.

(3) $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 면적을 구할 때에는

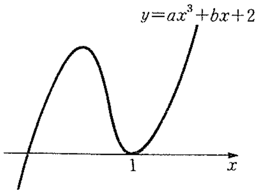
(i) $f(x)=g(x)$를 풀어서 실근을 구한다.

(ii) 위 방정식의 근을 $x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$라 하면, 구간 $[\alpha, \beta]$에서 $f(x)\geq g(x)$인지 $f(x)\leq g(x)$인지를 파악한다.

(iii) 넓이 $S=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$를 활용한다.

모범해답 (1) $f(x)=ax^3+bx+2$ $(a\neq 0)$로 두자.

$y=f(x)$가 점 (1, 0)에서 x축에 접하려면 $x=1$에서 극값으로 0을 가져야 한다.



$$\therefore \begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

그런데 $f'(x)=3ax^2+b$이므로

$$\begin{cases} f'(1)=3+b=0 \\ f(1)=a+b+2=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ a=1,\ b=-3$$ ……답

⇐『$y=f(x)$는 (1, 0)을 지나므로
$f(1)=0$
$x=1$에서 접선의 기울기가 0이므로
$f'(0)=0$』
과 같이 풀어도 좋다.

(2) (1)에서 구한 값을 대입하면 $f(x)=x^3-3x+2$이므로

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm 1$

$x=-1$과 $x=1$을 경계로 하여 증감표를 작성하면,

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

⇦ 증감표를 생략하면 −3점

$\therefore \begin{cases} x=-1\text{에서 극대값 } f(-1)=4 \\ x=1\text{에서 극소값 } f(1)=0 \end{cases}$

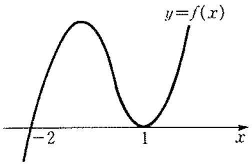
답 극대값 : 4, 극소값 : 0

(3) $f(x)=x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=1,\ x=-2$ (중근)

구하는 면적은 오른편 그림의 빗금 친 부분의 면적이다.



$\therefore$ (구하는 면적)$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$

⇦ 여기까지가 5점

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-(4-6-4)$

$=\frac{27}{4}$ ……답

⇦ 공식 $S=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ 을 써서 $S=\frac{1}{12}(1+2)^4=\frac{27}{4}$ 로 답을 내면 3점

합격포인트 *1*의 (5)번을 제외한 모든 문제를 풀어서 감점을 고려해도 78점은 받아야 합격 가능하다. 수학이 주 득점원인 학생은 88점 정도 획득하면 성공!

'76고려대 수학 II 해설과 풀이

1－(1) 세 실수 a, b, c가 모두 0이 아니기 위한 필요조건은

① $abc \neq 0$ ② $a+b+c \neq 0$ ③ $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

(2) 함수 $f(x)$의 정의역 내에서 모든 연속점들의 집합을 C, 또 미분가능한 점들의 집합을 D라 하면

① C∪D=D ② C∩D=D ③ C∪D=C

[배 점] 10점(5점+5점)

[출제분야] 일반수학>집합과 명제>필요조건 · 충분조건

수 II >미분>연속과 미분가능

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(2)	(1)	

[문제분석] (1) 명제 $p \to q$가 참일 때 즉, $p \Rightarrow q$일 때, 다음과 같이 정의한다.

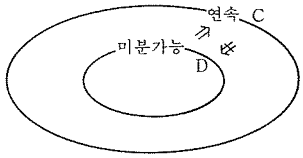
p는 q이기 위한 충분조건

q는 p이기 위한 필요조건

(2) $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능 ⇒ $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속

(증명) $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능이면

$f'(a)=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 유한확정값을 가진다.



$x \to a$일 때 (분모)→0이므로 유한확정값을 갖기 위해서는 (분자)→0이어야 한다.

$\therefore \lim\limits_{x \to a}\{f(x)-f(a)\}=0$

$\therefore \lim\limits_{x \to a}f(x)=f(a)$

이것은 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 뜻한다.

$\therefore$ $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능이면 $x=a$에서 연속이다.

참고 그러나 그 역은 성립하지 않는다. 즉, $y=f(x)$가 연속이라 해서 $y=f(x)$가 미분가능인 것은 아니다.

(반례) $f(x)=|x|$ … $x=0$에서 연속이지만 $f'(0)$는 존재하지 않는다.

모범해답 (1) 수학 I 의 **1**－(1)과 같다.

(2) $f(x)$가 어떤 점에서 미분가능하면 그 점에서 연속이다.

$\therefore$ D⊂C

$\therefore$ C∪D=C, C∩D=D

답 ① × ② ○ ③ ○

⇐ C∩D=D와 C∪D=C는 서로 동치이다.

1−(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$일 때 함수 $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$의 최대값에 가장 가까운 근사값은?

① 1.414 ② 1.366 ③ 1.732

(4) 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 위의 정점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은

① $x_0x+y_0y=1$ ② $x_0x+y_0y=r$ ③ $x_0x^2+y_0y^2=r^2$

[배 점] 10점(5점+5점)

[출제분야] 수Ⅱ>삼각함수>삼각함수의 합성

일반수학>도형의 방정식>원의 접선

[난 이 도]

기본			표준			어려움		
(4)				(3)				

[문제분석] (3) $\boldsymbol{y=a\sin\theta+b\cos\theta}$의 최대 · 최소 ⇨ 삼각함수의 합성을 이용

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$이므로 최대값 : $\sqrt{a^2+b^2}$, 최소값 : $-\sqrt{a^2+b^2}$

그러나, 이 문제와 같이 제한변역이 주어질 때에는 최대 · 최소가 되는 x값이 변역 내의 값인가를 반드시 확인해야 한다.

(4) 2차곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식

⇨ $\boldsymbol{x^2\to x_1x,\quad y^2\to y_1y,\quad x\to\frac{x_1+x}{2},\quad y\to\frac{y_1+y}{2}}$, 상수는 그대로

의 요령에 따르면 된다.

모범해답 (3) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

⇜ 최대값을 $\sqrt{2}$라 답하기 쉽다. 그러나 범위 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$에서 $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$ 인 경우는 존재하지 않는다.

⇜ 주관식이라면 이 부분이 채점의 급소이다.

$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=t$로 두면 $y=\sqrt{2}\sin t$

한편, $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{5\pi}{12}$

그런데, $y=\sqrt{2}\sin t$는 이 구간에서 단조증가하므로 $t=\frac{5\pi}{12}$ 즉, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최대값을 가진다.

∴ 원래의 함수식에 $x=\frac{\pi}{3}$를 대입하면 최대값은

$\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\fallingdotseq 1.366$

⇜ $\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$에서 삼각함수의 덧셈정리를 이용해도 된다.

답 ① × ② ○ ③ ×

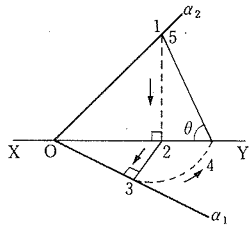
(4) $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 위의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선의 방정식은

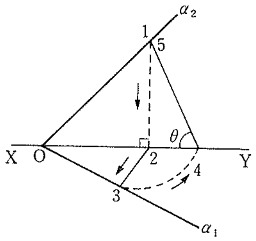
$x_0x+yy_0=r^2$

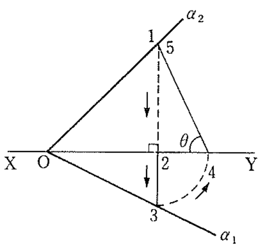
답 ① × ② × ③ ×

1-(5) 아래의 것은 평면 α의 투영도에다 평면 α가 평화면과 이루는 실각 θ를 작도한 그림이다. (그림에서 $1\to2\to3\to4\to5$는 그리는 순서이며 ㄱ은 직각 표시이다. 또 호 $\overset{\frown}{34}$는 2를 중심으로 한 원호이며 둘째 그림에서는 $\overline{1O}\,/\!/\,\overline{23}$이다.)

① ② ③







[배 점] 5점

[출제분야] 수Ⅱ>공간도형과 공간좌표>삼수선의 정리, 이면각

[난 이 도]

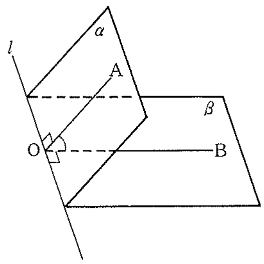
기본	표준	어려움

[문제분석] 평면 α가 어디에 위치한 도형인가를 정확히 상상할 수 있어야 한다. 그리고 다음 내용들을 자유자재로 구사할 수 있어야 한다.

(i) 삼수선의 정리

(ii) 두 평면이 이루는 각(이면각)의 정의

이 중에서 이면각의 정의를 살펴보자. 두 평면 α, β의 교선 l 위의 한 점 O를 지나 각 면 위에 수직인 직선 OA, OB를 그을 때, ∠AOB를 이면각이라 한다.



참고 문제에 주어진 그림에서 직선 α_1과 직선 XY가 놓인 평면을 평화면, 직선 α_2와 직선 XY가 놓인 평면을 입화면이라 한다.

모범해답 평면 α는 오른편 그림과 같이 1, O, 3을 품는 평면이다.

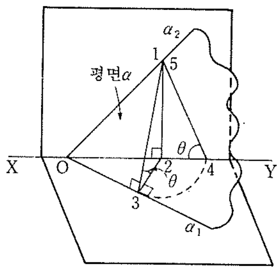
$\overleftrightarrow{12}\perp$(평화면)이고 $\overleftrightarrow{23}\perp\alpha_1$이면 삼수선의 정리에서 $\overleftrightarrow{13}\perp\alpha_1$

∴ 평면 α가 평화면과 이루는 각 θ는 $\theta=\angle 132$

그런데,

$\triangle 123\equiv\triangle 124$

이므로 $\theta=\angle 142$



답 ① ○ ② × ③ ×

⇐ 각자 ②, ③이 ×인 이유를 알아보도록!

2. (1) a, x, y가 모두 양의 정수일 때 등식 $\sqrt{a-\sqrt{24}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}\ (x \geqq y)$를 성립시키는 a의 값은 $a=\boxed{\quad}$이다.

(2) $A=\{x|x^3+2x^2-x-2>0\}$, $B=\{x|\alpha \leqq x \leqq \beta\}$라 할 때 $A \cup B=\{x|x+2>0\}$, $A \cap B=\{x|1<x \leqq 3\}$와 같이 되는 α와 β의 값은 각각 $\alpha=\boxed{\quad}$, $\beta=\boxed{\quad}$이다.

(3) 복소수평면 위에 두 점 α와 β가 있다. 지금 두 실수 x와 y는 각각 $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$과 같은 구간 내의 모든 값을 취하면서 변한다면 (단, 세 점 α와 β 및 원점은 같은 직선 위에 있지 않다.)

ⓐ 점 $x\alpha+y\beta$가 그리는 도형은 $\boxed{\quad}$이며

ⓑ 이 도형의 면적을 S라 할 때 $|\alpha|=|\beta|=1$일 경우의 면적 S의 최대값은 $\boxed{\quad}$이고

ⓒ 또 이 때의 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 $\boxed{\quad}$이다.

[배　　점] 25점(5점+10점+10점)−(3) : 3점+3점+4점

[출제분야] 일반수학>수와 식>무리수 상등
수Ⅱ>방정식과 부등식>고차부등식의 해법
수Ⅱ>벡터>벡터와 영역
수Ⅱ>복소수>복소수의 극형식

[난 이 도]

기본	표준	어려움
(1)	(2) (3)	

[문제분석] (1) 양변을 제곱한 후, 다음 무리수 상등의 원리를 적용한다.

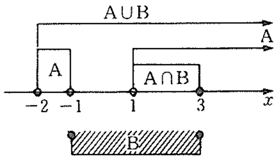
a, b, c, d는 유리수이고 $\sqrt{m}$은 무리수일 때,

$$a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m} \iff a=c,\ b=d$$

(2)에서 $A : x^3+2x^2-x-2>0 \iff (x+2)(x+1)(x-1)>0$
$\iff -2<x<-1,\ x>1$

$A \cup B=\{x|x>-2\}$, $A \cap B=\{x|1<x \leqq 3\}$
을 만족하려면 오른편 그림에서 $B=\{x|-1 \leqq x \leqq 3\}$이어야 함을 직관적으로 알 수 있다.

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=3$



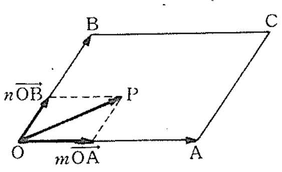
그러나, 풀이 과정을 서술해야 할 때에는 감점 방지를 위해 보다 논리적인 방법으로 풀어야 한다.

(3) ⓐ 복소수평면 위의 두 점 α, β를 xy평면 위의 두 위치벡터로 개념을 전환해서 생각하면 된다.

즉, $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$에 대하여 $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OA} \not\parallel \overrightarrow{OB}$일 때,

$$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB},\quad 0 \leqq m \leqq 1,\ 0 \leqq n \leqq 1$$

인 점 P의 존재 범위는 두 선분 OA, OB를 이웃변으로 하는 평행사변형의 둘레 및 내부이다.



ⓑ 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 사잇각이 θ인 평행사변형의 면적 ⇒ $\mathbf{S}=ab\sin\theta$

ⓒ ⓑ에서 $S=|\alpha||\beta|\sin\theta=\sin\theta$

S가 최대일 때, $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로 B(β)는 A(α)를 $\frac{\pi}{2}\left(\text{또는 } -\frac{\pi}{2}\right)$만큼 회전한 점이다.

$\therefore\ \beta=\alpha\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\pm\alpha i$를 이용하면 된다.

모범해답 (1) 주어진 등식의 양변을 제곱하면 $a-\sqrt{24}=x+y-2\sqrt{xy}$

$\therefore\ a-2\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy}$

a, x, y가 양의 정수이므로 무리수 상등의 원리에서 $x+y=a$, $xy=6$

$xy=6$, $x\geqq y$를 만족하는 양의 정수의 쌍은 $(x, y)=(3, 2)$, $(6, 1)$

이 때, $a=x+y=5$ 또는 7 　　답 5 또는 7

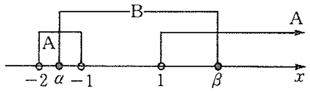
⇐ 하나만 적으면 −2점

(2) $A=\{x|x^3+2x^2-x-2>0\}$

$=\{x|(x+2)(x+1)(x-1)>0\}=\{x|-2<x<-1,\ x>1\}$

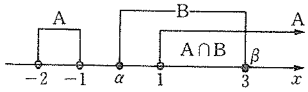
$B=\{x|\alpha\leqq x\leqq\beta\}$

이므로 $A\cup B=\{x|x>-2\}$이려면 오른편 그림에서



$-2<\alpha\leqq-1,\ 1\leqq\beta$ ……①

또, $A\cap B=\{x|1<x\leqq3\}$이려면 오른편 그림에서



$-1\leqq\alpha\leqq1,\ \beta=3$ ……②

①, ②에서 $\alpha=-1,\ \beta=3$ ……답

⇐ 집합의 연산을 이용하여 풀면 다음과 같다.

B={(A∪B)−A}∪(A∩B)

이고

$A\cup B=\{x|x>-2\}$

$A=\{x|-2<x<-1,\ x>1\}$

$A\cap B=\{x|1<x\leqq3\}$

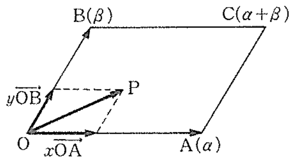
이므로

$B=\{x|-1\leqq x\leqq1\}\cup\{x|1<x\leqq3\}$

$=\{x|-1\leqq x\leqq3\}$

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=3$

(3) ⓐ 네 점 O(0), A(α), B(β), P($x\alpha+y\beta$) 사이에 $\overrightarrow{OP}=x\alpha+y\beta=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 인 관계가 성립하고, x, y는 $0\leqq x\leqq1$, $0\leqq y\leqq1$인 값들을 취하므로 점 P($x\alpha+y\beta$)의 존재 범위는 오른편 그림과 같은 평행사변형 OACB의 둘레와 내부이다. 　답 평행사변형



ⓑ $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각을 θ라 하면,

$S=|\alpha||\beta|\sin\theta=\sin\theta$ ($\because\ |\alpha|=|\beta|=1$에서)

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{2}$일 때 최대 면적 1을 가진다. 　답 1

ⓒ ⓑ에서 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 직각을 이룰 때 면적이 최대임을 알았다.

$\therefore$ B(β)는 A(α)를 원점 O(0)를 중심으로 $\frac{\pi}{2}\left(\text{또는 } -\frac{\pi}{2}\right)$ 만큼 회전한 점이다.

$\therefore\ \beta=\alpha\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\pm\alpha i$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=\alpha^2-\alpha^2=0$ ……답

3. 이 문제는 풀이의 과정을 보이면서 답을 내라. 한 변의 길이가 $a(a>0)$인 정삼각형 △ABC의 변 BC를 n등분하고 각 분점들을 점 B에서부터 차례로

$$\mathrm{P}_0=\mathrm{B},\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots,\mathrm{P}_k,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1},\ \mathrm{P}_n=\mathrm{C}$$

라 할 때

(1) 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}_k}$를 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$로 표시하라.

(2) 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}_{k-1}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}_k}$와의 내적 $(\overrightarrow{\mathrm{AP}_{k-1}},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}_k})$를 a로 표시하라.

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{AP}_{k-1}},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}_k})$를 구하라.

[배　　점] 30점(10점+10점+10점)

[출제분야] 수Ⅱ>벡터>벡터의 연산, 벡터의 내적
수Ⅱ>극한>무한급수

[난 이 도]

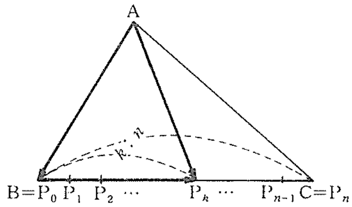
기본			표준			어려움		
		(1)	(2)	(3)				

[문제분석] (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}_k}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}_k}$
이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BP}_k}$를 $t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 꼴로 표현하면 된다.

이 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}_k}| : |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = k : n$$

을 이용하면 t의 값을 쉽게 구할 수 있다.



(2) (1)의 결과와 함께,
분배법칙

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\\(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{cases}$$

를 써서 전개한 후에, 벡터의 내적에 관한 다음 정의를 활용하여 계산하면 된다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

(3) (2)의 결과를 써서 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{AP}_{k-1}},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}_k})$을 계산하고 나면, $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한 문제가 된다. 이 때, 다음 기초 사항에 따르면 쉽게 해결된다.

$\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값 ⇨ 분모의 최고차항으로 분모·분자를 나눈다.

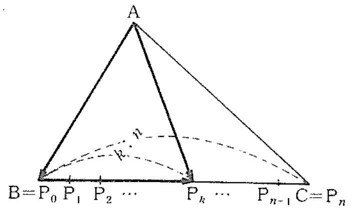
모범해답 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}_k}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}_k}$

그런데,

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}_k}| : |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = k : n$$

이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}_k}=\frac{k}{n}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$



$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}_k}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{k}{n}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\qquad\cdots\cdots\text{답}$$

⇦ 이것을 빠뜨리거나 틀리면 −5점

(2) (1)에서 얻은 결과를 이용하면,

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}_{k-1},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}_k)=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{k-1}{n}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{k}{n}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$$

$$=(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}})+\left(\frac{k-1}{n}+\frac{k}{n}\right)(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}})+\frac{k(k-1)}{n^2}(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}})$$

그런데, $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}})=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=a^2$

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}})=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos 120°=-\frac{a^2}{2}$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}})=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=a^2$$

⇐ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$가 이루는 각을 60°로 계산하면 −3점

이므로

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}_{k-1},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}_k)=a^2+\frac{2k-1}{n}\cdot\left(-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{k(k-1)}{n^2}a^2$$

$$=\left\{1-\frac{2k-1}{2n}+\frac{k(k-1)}{n^2}\right\}a^2 \quad \cdots\cdots \text{답}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}_{k-1},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{1-\frac{2k-1}{2n}+\frac{k(k-1)}{n^2}\right\}a^2$

그런데, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$이고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ …(*)

⇐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 써서 풀어도 되지만 계산이 복잡하다. (연구를 참고할 것.)

이므로

$$(\text{구하는 값})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{n-\frac{n^2}{2n}+\frac{(n-1)n(n+1)}{3n^2}\right\}a^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{n^2-1}{3n^2}\right)a^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1-\frac{1}{n^2}}{3}\right)a^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)a^2=\frac{5}{6}a^2 \quad \cdots\cdots \text{답}$$

연구 (3)에서 사용한 공식 (*)를 증명해 보자.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$ ⇐ 등차수열의 합의 공식을 적용

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{n(n+1)}{6}\{(2n+1)-3\}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

일반적으로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

$$\vdots$$

이 성립한다. 증명은 독자 여러분에게 맡긴다.

4. 이 문제도 풀이의 과정을 보이면서 답을 내라.

(1) 곡선 $y=\log_e x$와 $x=e$일 때의 이 곡선의 접선과 x축으로 둘러싸인 부분 S의 면적을 구하라.

(2) 위의 S가 y축을 축으로 하여 회전해서 생기는 회전체의 체적을 구하라.

[배　　점] 20점(10점+10점)

[출제분야] 수Ⅱ > 적분 > 넓이와 적분, 부피와 적분

[난 이 도]

기본		표준		어려움	
		(1)	(2)		

[문제분석] (1) STEP 1. $y=\log_e x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

STEP 2. 문제의 도형을 그래프로 나타낸다.

STEP 3. 적분변수를 x로 할 것인지 y로 할 것인지를 판단한다.

(2) 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$와 $y=c$, $y=d$ (단, $f(y)\geq g(y)\geq 0$, $d>c$)로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전한 입체의 부피는

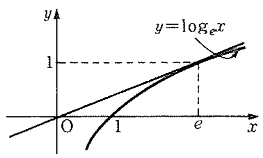
$$\mathbf{V}=\pi\int_c^d\left[\{f(y)\}^2-\{g(y)\}^2\right]dy$$

모범해답 (1) $y'=\dfrac{1}{x}$이므로, $x=e$에서의

접선의 방정식은 $y-1=\dfrac{1}{e}(x-e)$

즉, $y=\dfrac{1}{e}x$

⇦ 여기까지가 3점



따라서 오른편 그림에서

$$(\text{S의 면적})=\frac{1}{2}\cdot e\cdot 1-\int_1^e \log_e x\,dx$$

$$=\frac{e}{2}-\Big[x\log x-x\Big]_1^e=\frac{e}{2}-1 \quad \cdots\cdots \text{답}$$

⇦ 여기까지가 7점
(S의 면적)
$=\int_0^1(e^y-ey)dy$
로 계산해도 된다.

(2) 곡선 $x=e^y$과 직선 $x=ey$, $y=0$로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전한 회전체의 부피를 V라고 하면,

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^1\{(e^y)^2-(ey)^2\}dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-\frac{e^2}{3}y^3\right]_0^1$$

⇦ 여기까지가 5점

$$=\pi\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{3}e^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}(e^2-3) \quad \cdots\cdots \text{답}$$

합격포인트 *1*의 (5)번과 *2*의 (3) ⓒ번, *3*의 (3)번을 제외한 나머지 문제를 완벽히 풀어야 한다. 제외한 문제들 중에서도 1개 정도를 더 풀어서 총점이 67점은 되어야 합격 가능하다. 수학이 주 득점원인 학생은 77점 정도 획득하면 성공!

알쏭달쏭?! 안내

p. 153과 p. 176의 알쏭달쏭?!을 풀어서 응모권과 함께 본사로 보내 주시면 정답자 중에서 20명을 뽑아

본고사 기출문제 시리즈 3° 과기대 수학

을 발간 즉시 우송해 드리겠습니다.

- 해답은 정확히 적어 주십시오.
- 책 받으실 주소를 명확히 적어 주십시오.
- 두 문제를 모두 풀어야 합니다.
- 1993년 2월 28일까지 본사에 도착하여야 합니다.
- **과기대 수학**의 발간 예정일은 93년 2월 말입니다.

보내실 곳 110-617

서울 광화문 우체국 사서함 1772호

알쏭달쏭?!
응모권