본고사 수학 II(하)

머리말

8종 교과서를 종합 분석하여

새 입시 제도에 맞추어 새로 꾸몄습니다!

새로 바뀐 대학 입학 시험 제도에서는 내신 성적의 반영 비율이 높아지고 대학 수학 능력 시험과 아울러 주관식 문제가 중심이 될 대학별 본고사를 치르게 되었다. 이러한 시점에서 여러분들은 수험 준비에 알맞은 참고 서적이 부족함을 절실히 느끼고 있으리라 생각된다. 이에 본 저자들은 20여 년간의 수험 지도와 진학 지도의 경험을 살려서 간추린 수학 시리즈를 여러분 앞에 자신 있게 내어 놓는다.

본래 수학이란 과목은, 결과의 산출보다는 주어진 조건에 따라 논리적이고 체계적인 사고 과정을 올바르게 표현하는가를 확인하고, 철저한 개념 이해와 상호 연관성의 파악에 중점을 두어야 한다. 이 책은 이러한 사항에 맞추어 대학 입시 준비는 물론 학교에서의 교과 학습 및 내신 성적의 향상에도 완벽을 기할 수 있도록 다음과 같이 꾸몄다.

이 책의 전개 순서와 특징

❶ 8종의 수학 교과서를 분석·검토하여 그 핵심을 [핵심 정리]에 간추려 놓았고, 일반적으로 중요하다고 생각되는 내용도 빠짐없이 정리하였다.

❷ 반드시 이해하고 넘어가야 할 중요 내용은 [필수 예제]를 통하여 점검·확인하고 연관된 문제를 잘 해결할 수 있도록 풀이를 상세히 하였다.

❸ [수련 문제]는 필수 예제의 내용과 관련된 문제를 풀어봄으로써 기본 개념의 이해와 적용에 도움이 되도록 하였다.

❹ [해법 연구]는 필수 예제와 수련 문제의 풀이에 도움이 되는 내용 및 이와 유사한 문제의 풀이를 위한 중요 사항 등을 정리하였다.

❺ [실력 강화 문제] 및 [고급 문제]는 그 단원에서 다루어야 할 내용을 유형별로 정리하였으며, 본고사 대비에 만전을 기할 수 있는 문제를 엄선하여 수록하였다. 또한 항목별로 심화 학습을 기하고 출제 경향도 파악할 수 있도록 배려하였다.

끝으로 날로 치열해지는 대학 입시의 대열에서 자신감을 가지고 매진할 수 있도록 내용에 세심한 배려를 하였으며, 수험생 여러분들이 효과적으로 이용하면 반드시 바라는 바가 이루어지리라 확신하는 바이다.

지 은 이

대학별 본고사에서

대학별 본고사를 실시하는 대학의 입학 시험에서 수학이 차지하는 비중은 그 어느 과목보다도 크며, 실제로 수학의 성적에 의하여 합격, 불합격이 결정된다고 해도 과언이 아니다.
이에 대학 입학 시험에서 본고사를 준비하는 모든 수험생들에게 여러 수학 선생님들과 대학별 본고사에서 고득점을 획득한 선배들이 입을 모아 말하는 비결 몇 가지를 소개하기로 한다.

1 일반수학의 중요성을 잊지 말라!

본고사에서 일반수학의 비중은 25% 정도이나 수학 Ⅰ과 수학 Ⅱ의 어떤 문제라도 일반수학을 모르면 잘 풀 수가 없다.
그러므로 수학의 기초가 되는 일반수학부터 철저히 이해하도록 하자.

2 정의의 이해와 정리의 증명이 수학의 기초이다!

수학이란 공리를 기본으로 하여 정의와 정리로 이루어진 학문이다. 수학을 공부하는 지름길은 우선 새로운 정의를 완전히 이해하고, 이를 발전시킨 개념까지도 알고 있어야 한다. 또 정의에서 나온 정리와 공식은 반드시 증명할 수 있어야 하며, 이에서 파생된 따름정리나 보조정리 등도 증명할 수 있어야만 어떤 문제가 나와도 이미 학습한 내용을 적용시킬 수 있을뿐더러 본고사에서 요구하는 풀이 과정을 제대로 쓸 수 있다.

수학을 정복하는 비결

3 여러 단원 사이의 연관성을 파악하라!

대학 본고사에서 수학은 7~10개의 문제로 전반적인 수학 실력을 측정하기 때문에 여러 단원의 내용이 복합된 문제가 출제되고 있다. 그러므로 각 단원의 내용을 이해한 다음에는 여러 단원 사이의 연관성을 살펴서 복합적인 문제에 대비해야 한다.

4 계산 연습을 충분히 하라!

아무리 쉬운 문제라도 계산이 틀리면 감점이 된다. 특히 본고사에서는 문제를 푸는 시간이 부족할 수도 있고, 또 문제가 잘 풀리지 않아서 당황하다 보면 계산마저도 잘 되지 않는 수가 많다. 따라서 평소에 계산을 빠르고 정확히 하는 습관을 길러야 한다.

5 풀이 과정을 중요시하라!

수학은 답을 구하는 것도 중요하지만 문제를 해결해 나가는 과정이 더 중요하다. 본고사에서는 답이 틀렸더라도 풀이 과정이 맞으면 그 부분의 점수를 얻을 수 있다. 그러므로 비록 틀릴지라도 자기 스스로 문제를 해결하도록 한다.
문제풀이 중에 모르는 부분이 있으면 대부분의 학생들은 풀이와 답을 먼저 보려고 한다. 그러나 이것이 수학 공부를 그르치는 일임을 잊지 말자. 따라서 풀이와 답을 보기 전에 앞에서 공부한 기본 사항을 다시 점검해 보고, 그래도 안되면 다른 문제집의 유사 문제를 찾아서 풀어보도록 하자. 어떤 의미에서는 뒤에 있는 풀이와 답을 없애 버리고 공부하는 것도 좋은 방법이 될 것이다.

본고사 대비

학습 내용		쪽 수	학습일	학습 점검		재학습 내용	비고
				완전정복	재학습		
I. 극한	1. 수열의 극한	6~10					
	2. 무한급수	11~17					
	3. 함수의 극한	18~24					
	4. 함수의 연속성	25~28					
	고급 문제(I)	29~30					
II. 미분법	1. 변화율과 도함수	31~35					
	2. 여러가지 함수의 미분법	36~42					
	3. 접선의 방정식과 평균값의 정리	43~48					
	4. 함수의 증감과 극대 · 극소	49~54					
	5. 곡선의 개형과 최대 · 최소	55~60					
	6. 방정식 · 부등식에의 응용	61~65					
	7. 속도와 가속도	66~70					
	고급 문제(II)	71~72					

학습 점검표

학습 내용		쪽 수	학습일	학습 점검		재학습 내용	비고
				완전정복	재학습		
III. 적분법	1. 부정적분	73~76					
	2. 치환적분과 부분적분	77~82					
	3. 정 적 분	83~90					
	4. 정적분의 응용	91~96					
	5. 넓 이	97~102					
	4. 부피, 속도와 거리	103~109					
	고급 문제(III)	110~111					
IV. 확률	1. 경우의 수와 순열	112~119					
	2. 조합과 이항정리	120~129					
	3. 확률의 정의	130~135					
	4. 확률에 대한 정리	136~141					
	고급 문제(IV)	142~143					
V. 통계	1. 이산확률분포	144~149					
	2. 연속확률분포	150~156					
	3. 추정과 검정	157~163					
	고급 문제(V)	164~165					
해 답 편		166~255					

I

극 한

1. 수열의 극한

핵심정리

1 무한수열 $\{a_n\}$의 수렴·발산

(1) **수렴**(극한값이 있다.) : $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (유한확정값)

(2) **발산**(극한값이 없다.) :
- $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ (양의 무한대로 발산)
- $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ (음의 무한대로 발산)
- $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값이 일정하지 않다. (진동) ⇨ 극한이 없다.

(양·음의 무한대로 발산하는 경우 ⇨ 극한이 있다.)

2 수열의 극한값에 관한 기본 성질

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$($\alpha$, β는 일정)일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\alpha$ (c는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty} \{a_n\pm b_n\}=\alpha\pm\beta$ (복부호동순)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ ($b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

(5) 임의의 n에 대하여 $a_n<b_n \Longrightarrow \alpha\leqq\beta$

3 무한등비수열 $\{r^n\}$의 수렴·발산

무한등비수열 $\{r^n\}$: r, r^2, r^3, $\cdots$, r^n, $\cdots$에서

(1) $r>1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

(4) $r\leqq-1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^n$은 없다. (진동, 발산)

《참고》 무한수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴 $\Longleftrightarrow a=0$ 또는 $-1<r\leqq1$

(수열의 수렴·발산)

필수예제 1. 다음 무한수열의 수렴·발산을 조사하라.

(1) 10, 7, 4, 1, $\cdots$ (2) 1, 3, 1, 3, $\cdots$

(3) 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $\cdots$

풀이 (1) 첫째항이 10, 공차 -3인 등차수열이므로, 일반항은

$a_n=10+(n-1)(-3)=-3n+13$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(-3n+13)=-\infty$ ∴ **$-\infty$로 발산**

(2) n이 홀수일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 1=1$

n이 짝수일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 3=3$ ∴ **진동(발산)**

(3) 일반항은 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0$

∴ **0에 수렴**

♣ 해법 연구 ♣

▶ **무한수열의 수렴·발산**

① 일반항 a_n을 구한다.

② $\lim_{n\to\infty} a_n$을 조사한다.

▶ 수열의 일반항을 구할 때

① 일정한 규칙을 찾는다.

② 등차·등비·조화수열인가를 조사한다.

③ 계차수열을 조사한다.

수련문제 1. 다음 무한수열의 수렴·발산을 조사하라.

(1) $\frac{4}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{13}{4}$, $\cdots$ (2) $-\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{5}{4}$, $\frac{7}{5}$, $-\frac{3}{2}$, $\cdots$

(3) 6, 3, 2, 1.5, 1.2, 1, $\cdots$ (4) 2, $1+\sqrt{2}$, $1+\sqrt{3}$, 3, $1+\sqrt{5}$, $\cdots$

답 (1) 3에 수렴 (2) 발산 (3) 0에 수렴 (4) 발산

(부정형의 극한)

필수예제 2. 다음 수열의 극한값을 구하라.

(1) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}\right\}$

(3) $\left\{n\left(1-\dfrac{n-1}{n+1}\right)\right\}$

풀이 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=\sqrt{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{n-1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{\dfrac{(n+1)-(n-1)}{n+1}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **부정형의 극한**

① $\dfrac{\infty}{\infty}$ **꼴의 분수식** : 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

② $\infty-\infty$ **꼴의 다항식** : 최고차항으로 묶어 낸다.

③ $\infty-\infty$ **꼴의 무리식** : 유리화하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$의 꼴로 변형한다.

④ $\infty\times0$**의 꼴** : 분모를 통분하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴의 분수식으로 변형한다.

▶ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$, …

(무한등비수열의 극한)

필수예제 3. 다음 극한을 구하라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-3^n)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}{2^n-3^n}$

풀이 (1) (준식)$=\lim\limits_{n\to\infty}3^n\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(2) 주어진 식의 분자, 분모를 각각 3^n으로 나누면

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-3$$

▶ **수열 $\{r^n\}$의 극한**

① $r>1$ ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$

② $r=1$ ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$

③ $-1<r<1$ ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$

④ $r\leq-1$ ⇨ $\{r^n\}$은 진동 ($\lim\limits_{n\to\infty} r^n$은 없다.)

▶ **수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴**

$\Longleftrightarrow a=0$ 또는 $-1<r\leq1$

수련문제 2. 다음 수열의 극한값을 구하라.

(1) $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$ 〔부산대〕 (2) $\{\log_{10}(n+5)-\log_{10}(3n-1)\}$

(3) $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2n-1}\right\}$ (4) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}}\right\}$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $-\log_{10}3$ (3) 1 (4) $\dfrac{2}{3}$

수련문제 3. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+4^n}{(2^n+1)(3^n+1)}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^{n+1}\theta+\cos^{n+1}\theta}{\sin^n\theta-\cos^n\theta}$ $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$

답 (1) 0 (2) $-\cos\theta$

(${x^n}$ 을 포함하는 수열의 극한)

필수예제 4. $x \neq -2$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2^{n-1}}{x^n+2^n}$ 의 값을 구하라.

풀이 (i) $|x|>2$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n=0$

$$\therefore \text{(준식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^n}=x$$

(ii) $|x|<2$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=0$ $\therefore$ (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n+\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n+1}=\frac{1}{2}$

(iii) $x=2$ 일 때 (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+2^{n-1}}{2^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 2^{n-1}}{2\cdot 2^n}=\frac{5}{4}$

답 $|x|>2$ **일 때** x, $|x|<2$ **일 때** $\frac{1}{2}$, $x=2$ **일 때** $\frac{5}{4}$

♣ **해법 연구** ♣

▶ $\lim_{n\to\infty}\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}$ **의 극한**

① $|a|\geq|b|$일 때 : 분자, 분모를 각각 a^n으로 나눈다.

② $|a|<|b|$일 때 : 분자, 분모를 각각 b^n으로 나눈다.

(점화식으로 정의된 수열의 극한)

필수예제 5. $2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족하고 $a_1=1$, $a_2=3$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음을 구하라.

(1) 일반항 a_n (2) $\lim_{n\to\infty} a_n$

풀이 (1) 주어진 점화식에서 $2a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

즉, $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

따라서 $a_{n+1}-a_n=b_n$이라고 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_2-a_1=2$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{5}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{5-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}=\mathbf{5}$

▶ $p\,a_{n+2}+q\,a_{n+1}+r\,a_n=0$ (단, $p+q+r=0$)

⇨ $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$

▶ $a_{n+1}-a_n=b_n$ 일 때

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

수련문제 4. $r\neq-1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r}{r^n+1}$ 의 값을 구하라.

답 $|r|>1$ 일 때 1, $|r|<1$ 일 때 $-r$, $r=1$ 일 때 0

수련문제 5. $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음을 구하라.

(1) 일반항 a_n (2) $\lim_{n\to\infty} a_n$

답 (1) $a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2) 2

(부등식을 이용한 극한값의 계산)

필수예제 6. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ (θ는 상수)의 값을 구하라.

풀이 $-1\leq\sin n\theta\leq 1$에서 $-\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\sin n\theta\leq\frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 $0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\leq 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=0$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 모든 자연수 n에 대하여
$a_n<b_n<c_n$이고
$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$

(2^n, n^2의 대소 관계)

필수예제 7. 다음 물음에 답하라

(1) n이 5 이상의 정수일 때, 부등식 $2^n>n^2$이 성립함을 수학적귀납법을 써서 증명하라.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$의 값을 구하라.

풀이 (1) (i) $n=5$일 때, $2^5>5^2$이므로 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k>k^2$

양변에 2를 곱하면 $2^{k+1}>2k^2$ ……㉠

그런데 $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1$

$=(k-1)^2-2>0$ ($\because k\geq5$)

$\therefore 2k^2>(k+1)^2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2^{k+1}>(k+1)^2$이므로 $x=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에서 5 이상의 모든 정수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

(2) $n\geq5$일 때 $2^n>n^2$이 성립하므로

$0<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n^2}$에서 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{1}{n}$

그런데 $0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

▶ **수학적귀납법**

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$에 대하여

(i) $p(1)$이 참이 되고

(ii) $p(k)$ $(k\geq1)$가 참이라고 가정하여 $p(k+1)$도 참이 됨을 보이면 $p(n)$은 모든 자연수 n에 대하여 참이라고 주장할 수 있다.

수련문제 6. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n+n\sin n}{n^2-e^{-n}}$ $(e>1)$의 값을 구하라. 〔과기대〕

답 $\frac{1}{2}$

수련문제 7. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$을 이용하여 다음 극한을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n}$ (3) $\lim_{n\to\infty}(2^n-5n)$

답 (1) 0 (2) ∞ (3) ∞

〔해답 ⇨ p. 166〕

실력 강화 문제

□□ **1.** $a_1=1$, $a_n=3a_{n-1}+(-2)^n(n=2,\ 3,\ \cdots)$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}$을 구하라. 〔94. 연세대·서강대 응용〕

□□ **2.** 수열 $\{a_n\}$에서 $0<a_1<2$이고 $\left(\frac{a_n}{2}\right)^3=\left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^4(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하라. 〔육 사〕

□□ **3.** $S_n=\sum_{k=1}^{n}2k$라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\sqrt{S_{n+1}}}}{3^{\sqrt{S_n}}}$의 값을 구하라.

□□ **4.** 수열 $\{a_n\}$에서 $2n+1<(n+1)a_n<2n+3$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하라. (단, n은 자연수)

□□ **5.** 함수 $f(x)=x+4-\frac{1}{2}|x-2|$가 있다.

$$x_0=3,\ x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \cdots,\ x_n=f(x_{n-1}),\ \cdots$$

이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}x_n$의 값을 구하라. 〔과기대〕

□□ **6.** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+10}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, $a_1\geqq 0$이 성립한다. 다음 물음에 답하라.

(1) $|a_{n+1}-5|<\frac{3}{5}|a_n-5|$가 성립함을 증명하라.

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하라.

□□ **7.** $a_1=1$, $a_n=\frac{-a_{n-1}+8}{a_{n-1}-3}$ $(n\geqq 2)$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음을 구하라. 〔경북대〕

(1) 일반항 a_n　　　　(2) $\lim_{n\to\infty}a_n$

2. 무한급수

핵심 정리

1 무한급수의 수렴 · 발산

(1) **무한급수** : $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(2) **무한급수의 부분합** : $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

(3) **무한급수의 수렴 · 발산**

① 부분합의 수열 $\{S_n\}$이 수렴 $\Longleftrightarrow$ 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴

이 때 $\lim_{n\to\infty} S_n=S \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$ (무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합이 S)

② 부분합의 수열 $\{S_n\}$이 발산 $\Longleftrightarrow$ 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산

(4) **무한급수와 무한수열의 관계**

① 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$ (이 명제의 역은 성립하지 않는다.)

② $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0 \Longrightarrow$ 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산

2 무한등비급수의 수렴 · 발산

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots(a\neq 0)$은

① $|r|<1$일 때 수렴하고, 그 합은 $S=\dfrac{a}{1-r}$이다.　② $|r|\geq 1$일 때 발산한다.

(무한급수의 합 (1))

필수예제 8. 무한급수 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}+\cdots$의 합을 구하라.

풀이 $a_k=\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **무한급수의 합**

① 부분합 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$를 구한다.

② $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구한다.

▶ **부분분수 분해**

① $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$

② $\dfrac{1}{ABC}=\dfrac{1}{C-A}\left(\dfrac{1}{AB}-\dfrac{1}{BC}\right)$

수련문제 8. 무한급수 $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$의 합을 구하라.

답 $\dfrac{1}{4}$

(무한급수 · 무한수열)

필수예제 9. 다음을 증명하라.

(1) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

(2) 무한급수 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$은 발산한다.

증명 (1) $\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$이라고 하면 $n\geq 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$

또, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 수열 $\{S_n\}$은 수렴한다.

이 때 $\lim_{n\to\infty} S_n=S$ (유한확정값)라고 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

따라서 이 무한급수는 발산한다.

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$일 때 일반항 a_n은
① $a_1=S_1$
② $n\geq 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$

▶ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$
(역은 성립하지 않는다.)

▶ **필수예제 9**의 (2)에서
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지만
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ (발산)

(무한급수의 합 (2))

필수예제 10. 다음 무한급수의 수렴 · 발산을 조사하고, 수렴하는 경우에는 그 합을 구하라.

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots$

(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}+\cdots$

(3) $\left(\frac{2}{1}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)+\cdots$

풀이 (1) $S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}=1$$

$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=1$ ∴ **수렴, 합 : 1**

(2) $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n}=-\frac{n+2}{n+1}=-1$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$
이므로 이 급수는 발산한다. ∴ **발산**

(3) $S_n=\left(\frac{2}{1}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-\frac{n+2}{n+1}$

∴ $\lim_{n\to\infty} S_n=2-1=1$ ∴ **수렴, 합 : 1**

▶ 홀수번째항과 짝수번째항의 부호가 교대로 바뀌는 수열의 합은 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$, $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$을 구하여 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구한다.

▶ $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산

수련문제 9. 다음 무한급수의 수렴 · 발산을 조사하라.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}+\cdots$$

답 발산

(무한등비급수의 합)

필수예제 11. 다음 무한등비급수의 수렴・발산을 조사하고, 수렴하는 경우에는 그 합을 구하라.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots$

(2) $(\sqrt{5}-1)+(3-\sqrt{5})+(2\sqrt{5}-4)+\cdots$

풀이 (1) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $r=\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$인 무한등비급수이고 $|r|<1$ 이므로 수렴한다.

$$\therefore (\text{합})=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

$\therefore$ **수렴, 합 : $\frac{3}{2}$**

(2) 첫째항이 $\sqrt{5}-1$, 공비가 $r=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$인 무한등비급수이고 $|r|<1$이므로 수렴한다.

$$\therefore (\text{합})=\frac{\sqrt{5}-1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\sqrt{5}+1$$

$\therefore$ **수렴, 합 : $\sqrt{5}+1$**

(무한등비급수의 수렴 조건)

필수예제 12. 다음 무한급수가 수렴하도록 x의 값의 범위를 정하고, 이 때의 합을 구하라.

$$x+\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x)^{n-1}}+\cdots$$

풀이 (i) $x=0$이면 모든 항이 0이므로 이 급수는 0에 수렴한다.

(ii) $x\neq0$일 때 공비 $r=\frac{1}{1+x}$이므로 이 급수가 수렴하려면

$\left|\frac{1}{1+x}\right|<1$에서 $|1+x|>1$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>0$

이 때 구하는 합 S는 $S=\frac{x}{1-\frac{1}{1+x}}=1+x$

$$\therefore \boldsymbol{x<-2} \text{ 또는 } \boldsymbol{x\geq0},\ S=\begin{cases} 0 & (x=0\text{일 때}) \\ 1+x & (x<-2,\ x>0\text{일 때}) \end{cases}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴

$\Longleftrightarrow a=0$ 또는 $-1<r<1$

$$(\text{합})=\begin{cases} 0 & (a=0) \\ \frac{a}{1-r} & (-1<r<1) \end{cases}$$

수련문제 10. 다음 무한급수의 합을 구하라.

(1) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{6}+n\pi\right)$ 〔육 사〕

답 (1) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}+1}$ (2) $\frac{1}{4}$

수련문제 11. 두 급수 $S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n$, $T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{S^n}$이 모두 수렴하도록 r의 값의 범위를 정하라. 〔서강대〕

답 $-1<r<0$

(순환소수)

필수예제 13. a, b, c는 $1<a<b<c<9$인 정수이고, 수열 $0.\dot{a}$, $0.0\dot{b}$, $0.00\dot{c}$, …는 등비수열이다. 다음 물음에 답하라. (고려대)

(1) a, b, c 사이의 관계식을 구하라.
(2) a, b, c의 값을 구하라.
(3) 이 수열의 제 4항을 순환소수로 나타내라.
(4) 이 수열의 합 S를 구하여 순환소수로 나타내라.

풀이 (1) 주어진 수열을 분수로 나타내면 $\frac{a}{9}$, $\frac{b}{90}$, $\frac{c}{900}$, …이고, 이 수열이 등비수열이므로 $\left(\frac{b}{90}\right)^2=\frac{a}{9}\times\frac{c}{900}$　$\therefore$ $\boldsymbol{b^2=ac}$

(2) $b^2=ac$에서 a, b, c가 등비수열을 이루고 a, b, c가 $1<a<b<c<9$인 정수이므로

$\boldsymbol{a=2,\ b=4,\ c=8}$

(3) 첫째항이 $\frac{2}{9}$, 공비가 $\dfrac{\frac{4}{90}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{5}$인 등비수열이므로

$$a_4=\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{2}{1125}=\frac{16}{9000}=\frac{17-1}{9000}=\boldsymbol{0.001\dot{7}}$$

(4) $$S=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{18}=\frac{25}{90}=\frac{27-2}{90}=\boldsymbol{0.2\dot{7}}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 순환소수는 분수로 고쳐서 생각한다.

① $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$

② $0.\dot{2}3\dot{4}=\frac{234}{999}$

③ $0.2\dot{3}\dot{4}=\frac{234-2}{990}$

④ $0.23\dot{4}=\frac{234-23}{900}$

(멱급수의 합)

필수예제 14. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$의 합을 구하라.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=S_n$이라고 하면

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{1}{3}S_n=\quad\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면 $\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^{n+1}}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}S_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\quad\left(\because\ |r|=\frac{1}{3}<1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}\qquad\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$$

▶ **멱급수의 합**

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1}$$
$$-)\ x\,S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k}$$
$$(1-x)S_n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

을 이용한다.

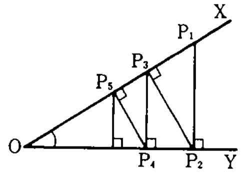
▶ $|x|>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^n}=0$$

수련문제 12. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$의 합을 구하라.　답 3

(무한등비급수의 응용)

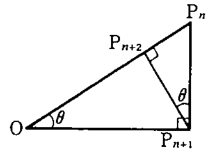
필수예제 15. 오른쪽 그림과 같이 예각 $\angle XOY$ 의 변 OX 위의 한 점 P_1 에서 변 OY 에 내린 수선의 발을 P_2, P_2 에서 변 OX 에 내린 수선의 발을 P_3 이라고 한다. 이와 같이 교대로 변 OY, OX 에 계속해서 내린 수선의 길이의 합 $\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$ 가 $\overline{OP_1}$ 의 길이의 $\sqrt{3}$ 배와 같다고 할 때, $\angle XOY$ 의 크기를 구하라.



풀이 $\overline{OP_1}=a$, $\angle XOY=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$\angle P_1P_2P_3=\angle P_2P_3P_4=\angle P_3P_4P_5=\cdots=\theta$ 이므로

$$\overline{P_1P_2}=a\sin\theta,$$
$$\overline{P_{n+1}P_{n+2}}=\overline{P_nP_{n+1}}\cos\theta$$



그런데 $0<\cos\theta<1$ 이므로

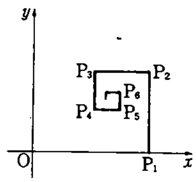
$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=\frac{a\sin\theta}{1-\cos\theta}=\sqrt{3}a$$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{3}(1-\cos\theta)$, $\quad\therefore\ \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3}}$

수련문제 13. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 동점 P_n 이 움직이고 있다.

$$\overline{OP_1}=1,\ \overline{P_1P_2}=\frac{2}{3},\ \overline{P_2P_3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \overline{P_3P_4}=\left(\frac{2}{3}\right)^3,\ \cdots$$

이라고 한다. 이와 같이 무한히 계속하여 P_n 이 움직일 때, P_n 이 한없이 가까워지는 극한의 위치를 구하라.



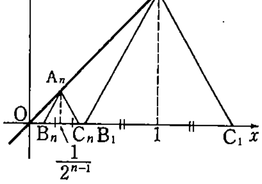
답 $\left(\frac{9}{13},\ \frac{6}{13}\right)$

수련문제 14. 한 변의 길이가 2인 정사각형 S_1 의 내접원 C_1 을 만들고 C_1 에 내접하는 정사각형 S_2 를 만든다. 또 S_2 의 내접원 C_2 를 만든다. 이와 같이 계속해서 원과 정사각형을 내접시켜 간다. n 번째의 정사각형 S_n 의 넓이와 그 내접원 C_n 의 넓이의 차를 a_n 이라고 할 때, 다음을 구하라. 〔고려대〕

(1) a_n (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

답 (1) $a_n=(4-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2) $2(4-\pi)$

수련문제 15. 자연수 n 에 대하여 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 $A_nB_nC_n$ 이 대응한다. 꼭지점 A_n 은 직선 $y=x$ 위에 있고, 꼭지점 B_n, C_n 은 x 축 위에 있으며 변 B_nC_n 의 중점은 $\left(\frac{1}{2^{n-1}},\ 0\right)$ 이다. $\triangle A_nB_nC_n$ 의 넓이를 S_n 이라고 할 때, 다음을 구하라. 〔서강대〕



(1) S_n (2) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$

답 (1) $S_n=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot 4^{n-1}}$ (2) $\frac{4}{9}\sqrt{3}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 무한등비급수의 응용 문제는 다음 두 가지 방법으로 푼다.

① a_1, a_2, a_3, $\cdots$을 구하여 무한등비급수가 됨을 확인한다.

② a_1을 구하고 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여 무한등비급수가 됨을 확인한다.

〔해답 ⇨ p. 167〕

실력 강화 문제

□□ *1*. 어떤 무한등비급수의 합은 1이고, 각 항의 세제곱으로 된 무한등비급수의 합은 3이라고 할 때, 각 항의 제곱으로 된 무한등비급수의 합을 구하라.

□□ *2*. 다음 무한급수의 합을 구하라. 〔과기대〕

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+4)!}$ (단, $n! = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$)

(2) $\frac{6}{2^2\cdot 4^2}+\frac{8}{3^2\cdot 5^2}+\frac{10}{4^2\cdot 6^2}+\frac{12}{5^2\cdot 7^2}+\cdots$

(3) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

□□ *3*. 영이 아닌 두 실수 a_0, b_0과 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$에 대하여

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=cb_n \end{cases}$$

이라고 정의할 때, 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 모두 수렴하기 위한 실수 c의 범위를 구하라.

〔94. 서울대〕

□□ *4*. 무한급수 $\log_{10}x+\frac{\log_{10}x}{1+\log_{10}x}+\frac{\log_{10}x}{(1+\log_{10}x)^2}+\cdots$가 수렴한다고 할 때, 다음을 구하라.

(1) x의 값의 범위

(2) 무한급수의 합 S

□□ *5*. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=2$, $a_n=a_{n-1}+2n\ (n=2,\ 3,\cdots)$일 때, 다음 물음에 답하라. 〔부산대〕

(1) $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 n의 식으로 나타내라.

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}\right)$을 구하라.

□□ **6.** 첫째항이 3이고 공비가 r인 등비수열의 제 n항까지의 합을 S_n이라 하고, 이 수열의 각 항의 제곱을 항으로 하는 수열의 제 n항까지의 합을 T_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) 수열 $\{S_n\}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$의 값을 구하라.

(2) $\lim_{n\to\infty} S_n=2$일 때, $\lim_{n\to\infty} T_n$의 값을 구하라. 〔서강대〕

□□ **7.** $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$일 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\tan^n\theta$의 값을 구하라.

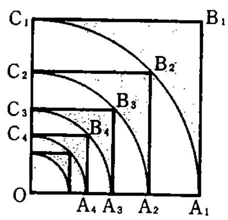
□□ **8.** $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=9$일 때, 상수 α, β의 값을 구하라.

□□ **9.** 수열 $\{S_n(\theta)\}$가 $0<\theta<2\pi$인 θ에 대하여

$$S_1(\theta)=1+\cos\theta,\ S_{n+1}(\theta)=S_n(\theta)(1+\cos^{2^n}\theta)\ (n=1, 2, \cdots)$$

로 정의될 때, $f(\theta)=\lim_{n\to\infty} S_n(\theta)$를 구하라. 〔서울대〕

□□ **10.** 오른쪽 그림에서 사각형 $OA_nB_nC_n$은 부채꼴 $OA_{n-1}C_{n-1}$에 내접하는 정사각형이다. 정사각형 $OA_nB_nC_n$의 넓이에서 부채꼴 OA_nC_n의 넓이를 뺀 값을 S_n이라 하고 $\overline{OA_1}=1$이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하라.

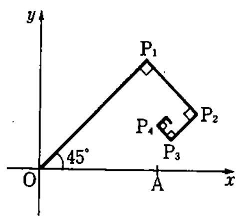


□□ **11.** 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 어떤 동점 P_n이 움직인다.

$$\overline{OP_1}=1,\ \overline{P_1P_2}=\frac{1}{2},\ \overline{P_2P_3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \cdots,\ \overline{P_nP_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \cdots$$

$$\angle AOP_1=45°,\ \angle OP_1P_2=90°,\ \angle P_1P_2P_3=90°,\ \cdots$$

이와 같이 운동을 계속할 때, P_n이 한없이 가까워지는 점을 구하라.



□□ **12.** 양수의 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)일 때, $\lim_{n\to\infty} S_{n+1}(S_n-S_{n-1})$의 값을 구하라.

3. 함수의 극한

핵심정리

1 함수의 수렴 · 발산

함수 $f(x)$에서 x의 값이 $x \neq a$이면서 a에 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$의 값의 변화 상태를 조사한다.

(1) **수렴** (극한값이 있다.) : $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ (유한확정값)

(2) **발산** (극한값이 없다.) : $\begin{cases} \lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ (양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ (음의 무한대로 발산)} \\ \lim_{x \to a} f(x) \text{의 값이 일정하지 않다. (진동)} \end{cases}$

(수렴, 양의 무한대로 발산, 음의 무한대로 발산) ⇨ 극한이 있다.

(진동) ⇨ 극한이 없다.

2 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한

(1) $x<a$에서 $x \to a$일 때의 극한을 **좌극한**이라 하고, $\lim_{x \to a-0} f(x)$로 나타낸다.

(2) $x>a$에서 $x \to a$일 때의 극한을 **우극한**이라 하고, $\lim_{x \to a+0} f(x)$로 나타낸다.

(3) $\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ (α는 극한값)

(4) $\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x) \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x)$의 값은 없다.

3 함수의 극한값에 관한 기본 성질

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$($\alpha$, β는 일정)일 때

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = c\alpha$ (c는 상수)

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$ (복부호동순)

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x) \neq 0$, $\beta \neq 0$)

(5) $f(x) < g(x) \Longrightarrow \alpha \leq \beta$

4 삼각함수의 극한 (단, x의 단위는 라디안)

(1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

5 지수 · 로그함수의 극한

(1) $a>1$일 때 $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$, $\lim_{x \to +0} \log_a x = -\infty$

(2) $0<a<1$일 때 $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \to +0} \log_a x = \infty$

6 무리수 e와 극한값

(1) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{x \to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

《참고》 ① e는 무리수로서 그 값은 2.718281828459…이다.

② e를 밑으로 하는 로그를 **자연로그**라 하고, $\log_e x$를 $\ln x$로 나타낸다.

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x} = k$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

(3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{kx}-1}{x} = k$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

($\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값)

필수예제 16. 다음 극한을 구하라.

(1) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-3x+2}$　　(2) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}$

(3) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$　　(4) $\lim_{x\to0}\frac{x-2}{x^2}$

풀이 (1) (준식)$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x-1}=\mathbf{12}$

(2) (준식)$=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x+6)-9}=\lim_{x\to3}(x+3)(\sqrt{x+6}+3)=\mathbf{36}$

(3) (준식)$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

(4) $x\to0$일 때, $x-2\to-2$, $x^2\to+0$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{x-2}{x^2}=\mathbf{-\infty}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **부정형의 극한** [1]

① $\frac{0}{0}$ 꼴의 유리함수 : 분모·분자를 인수분해하여 약분한다.

② $\frac{0}{0}$ 꼴의 무리함수 : 분모 또는 분자를 유리화하여 약분한다.

▶ $\begin{cases}\frac{1}{+0}\to\infty\\ \frac{1}{-0}\to-\infty\end{cases}$

($\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\infty\times0$ 꼴의 극한)

필수예제 17. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-2}-x)$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-3x}+2x)$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)$

풀이 (1) (준식)$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) $x=-t$라고 하면, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

(준식)$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2+3t}-2t)=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{4t^2+3t}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{t}}+2}=\mathbf{\frac{3}{4}}$

(3) (준식)$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1-x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to1}\frac{-(x^2+x+1)}{(x\sqrt{x}+1)x}=\mathbf{-\frac{3}{2}}$

▶ **부정형의 극한** [2]

$\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\infty\times0$의 꼴의 극한은 무한수열의 극한을 구할 때와 같은 방법으로 처리한다.

▶ $\sqrt{x^2}=|x|$
$=\begin{cases}x & (x\geq0\text{일 때})\\ -x & (x<0\text{일 때})\end{cases}$

수련문제 16. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-5x+4}$　　(2) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-\sqrt{3x-2}}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1

수련문제 17. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x+1})$　〔과기대〕

(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$　〔서강대〕

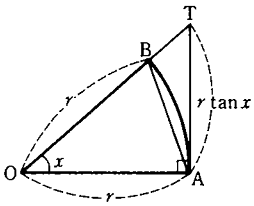
답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$

($\dfrac{\sin x}{x}$의 극한)

필수예제 18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$임을 증명하라.

증명 (i) $x>0$일 때

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원 O 위에 $\angle AOB=x$인 두 점 A, B를 잡고 A를 지나는 원의 접선이 $\overline{OB}$의 연장선과 만나는 점을 T라고 하면



$\triangle OAB<$(부채꼴 OAB의 넓이)$<\triangle OAT$

즉, $\dfrac{1}{2}r^2\sin x<\dfrac{1}{2}r^2x<\dfrac{1}{2}r^2\tan x \quad \therefore \sin x<x<\tan x$

그런데 $\sin x>0$이므로 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x} \quad \therefore \cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

$$\therefore \lim_{x\to+0}\cos x\leqq\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\leqq1$$

여기서 $\lim\limits_{x\to+0}\cos x=1$이므로 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(ii) $x<0$일 때, $x=-\theta$로 놓으면 $x\to-0$일 때 $\theta\to+0$

$$\therefore \lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}=1\end{cases}$

이면 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

▶ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha$,

$f(x)<h(x)<g(x)$

이면 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\alpha$

(삼각함수의 극한값)

필수예제 19. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(2x-\pi)\cos x}$

풀이 (1) (준식)$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos2x)(1+\cos2x)}{x^2(1+\cos2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos2x)}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\times4\times\frac{1}{1+\cos2x}\right\}=\mathbf{2}$$

(2) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$라고 하면 $x=t+\dfrac{\pi}{2}$, $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$

$$\therefore (\text{준식})=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2t\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{-2t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{-2t(1+\cos t)\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin t}{t}\right)\cdot\frac{1}{1+\cos t}\right\}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

▶ 삼각함수의 극한

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

③ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin bx}{\sin ax}=\dfrac{b}{a}$

수련문제 18. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{\cos3x-\cos x}$ (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) -1 (3) $-\dfrac{1}{4}$ (4) $-\pi$

(지수・로그함수의 극한)

필수예제 20. 다음 극한을 구하라.

(1) $\lim_{x\to\infty}(3^x+2^x)^{\frac{1}{x}}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\log_a x-x)$ (단, $a>1$)

풀이 (1) (준식) $=\lim_{x\to\infty}\left[3^x\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}3\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}=3\times1=\mathbf{3}$

(2) $\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$ 이므로 $\lim_{x\to -0}2^{\frac{1}{x}}=2^{-\infty}=0$

$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=\infty$ 이므로 $\lim_{x\to +0}2^{\frac{1}{x}}=2^{\infty}=\infty$

$\therefore \lim_{x\to -0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1,\ \lim_{x\to +0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$ $\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ 의 값은 **없다.**

(3) $\log_a x-x=\log_a x-\log_a a^x=\log_a\frac{x}{a^x}$

그런데 $a>1$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x}=+0,\ \lim_{x\to +0}\log_a x=-\infty$

$\therefore$ (준식) $=\lim_{x\to\infty}\log_a\frac{x}{a^x}=\mathbf{-\infty}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\begin{cases}|r|<1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}r^x=0\\ |r|>1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{r^x}=0\end{cases}$

▶ $\lim_{x\to a+0}f(x)\neq\lim_{x\to a-0}f(x)$
$\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)$ 의 값은 없다.

▶ $a>1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x}=0$

▶ $\begin{cases}a>1 \Rightarrow \lim_{x\to +0}\log_a x=-\infty\\ 0<a<1 \Rightarrow \lim_{x\to +0}\log_a x=\infty\end{cases}$

(무리수 e 와 극한값)

필수예제 21. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$

풀이 (1) (준식) $=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2x)=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{1}{2x}\ln(1+2x)$

$=2\lim_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=2\ln e=\mathbf{2}$

(2) $3^x-1=t$ 라고 하면 $x=\log_3(1+t)$ 이고, $x\to 0$ 일 때 $t\to 0$

(준식) $=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_3(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_3(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_3 e}=\mathbf{\ln 3}$

▶ $\begin{cases}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\\ \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\end{cases}$

▶ $\begin{cases}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\end{cases}$

수련문제 19. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x-2^x}{3^x-2^x}$ (2) $\lim_{x\to 0}2^{-x^{-2}}$

답 (1) -1 (2) 0

수련문제 20. 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{\log_3 x}{1-x}$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\tan x}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $-\log_3 e$ (4) 3

(미정계수의 결정)

필수예제 22. 다음 물음에 답하라.

(1) 등식 $\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{1-\cos x}=1$이 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하라.

(2) x에 관한 다항식 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+x+1}=1$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=1$을 만족할 때, $f(x)$를 구하라.

풀이 (1) $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}(ax\sin x+b)=b=0$에서 $b=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{ax(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}a\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot(1+\cos x)=2a=1$$

$$\therefore \boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=0}$$

(2) 첫째 조건에서 $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값이 1이므로 $f(x)$의 최고차항은 $2x^2$

둘째 조건에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

이상에서 $f(x)=2(x-2)(x+p)$라고 놓을 수 있다.

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x+p)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{2(x+p)}{x+1}=\frac{2}{3}(2+p)=1$$

$$\therefore p=-\frac{1}{2}\qquad \therefore f(x)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{2x^2-5x+2}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 미정계수의 결정

① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$(유한확정)

$\lim_{x\to a}g(x)=0$

$\Longrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$

($\alpha\neq0$인 유한확정)

$\lim_{x\to a}f(x)=0$

$\Longrightarrow \lim_{x\to a}g(x)=0$

▶ x의 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

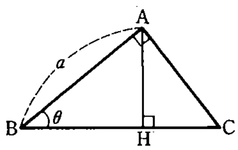
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$(유한확정)

$\Longrightarrow \{f(x)$의 최고차항$\}$

$=\alpha\{g(x)$의 최고차항$\}$

(극한값의 도형에의 응용)

필수예제 23. $\angle A=90°$, $\overline{AB}=a$인 직각삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle B=\theta$라고 할 때, $\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}$의 값을 구하라.



풀이 문제의 그림에서 $\angle CAH=\theta$이므로 $\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta$, $\overline{AC}=a\tan\theta$

$$\therefore \overline{CH}=a\tan\theta\sin\theta=\frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{a}{\cos\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2=\boldsymbol{a}$$

▶ 도형에 관한 응용 문제는 문제의 뜻에 따라 적당한 변수를 정하고, 이 변수를 써서 조건에 알맞은 식을 세워서 처리한다.

수련문제 21. $\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}=5\sqrt{2}$가 성립할 때, 상수 a, b의 값을 구하라.

답 $a=1$, $b=-6$

수련문제 22. **필수예제 23**에서 $\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{AC}-\overline{AH}}{\theta^3}$의 값을 구하라.

답 $\frac{1}{2}a$

〔해답 ⇨ p. 170〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,x}$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

□□ **2.** 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to\infty} x\{\ln(2x+1)-\ln 2x\}$　　(2) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-e^{x-1}}{x-1}$

□□ **3.** 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x^2}$　　(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan(1-\cos 2x)}{x^2}$

□□ **4.** 다음 중 극한값이 0이 아닌 것은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $\lim_{x\to0} x\sin\dfrac{1}{x}$　　② $\lim_{x\to0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}$　　③ $\lim_{x\to0}\cos x\sin\dfrac{1}{x}$

④ $\lim_{x\to4+0}\dfrac{[x]-4}{x-4}$　　⑤ $\lim_{x\to0} 2^{-\frac{1}{x}}$

□□ **5.** 다음 등식이 성립하도록 상수 a, b의 값을 정하라.

(1) $\lim_{x\to2}\dfrac{a\sqrt{x^2+5}-b}{x-2}=\dfrac{2}{3}$　　(2) $\lim_{x\to-1}\dfrac{ax+b}{\sin\pi x}=\dfrac{1}{\pi}$

□□ **6.** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{3f(x)-2g(x)\}=1$이 성립할 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+4g(x)}{-2f(x)+6g(x)}$의 값을 구하라.

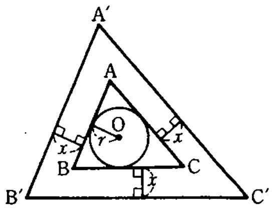
□□ **7.** $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$, $\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=5$를 만족시키는 x의 다항식 $f(x)$ 중에서 차수가 가장 낮은 것을 $g(x)$라고 할 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^3}$의 값을 구하라.

□□ **8.** 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 제1사분면 위의 점 P$(x, y)$에서 이 쌍곡선의 점근선 $y=\frac{3}{4}x$에 내린 수선의 길이를 $f(x)$라고 할 때, $\lim_{x\to\infty} xf(x)$의 값을 구하라.

□□ **9.** 좌표평면에서 x축, y축 위에 두 정점 A$(2, 0)$, B$(0, 1)$과 두 동점 P$(t, 0)$, Q$(0, s)$가 있다. 두 동점 P, Q가 $\triangle$OPQ$=\triangle$OAB인 관계를 유지하면서 움직인다고 한다. 이 때 점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 두 직선 AB, PQ의 교점 R는 어떤 점으로 한없이 가까워지겠는가?

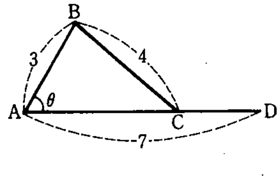
□□ **10.** 크기가 1인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 45°라고 할 때, $\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$의 값을 구하라.

□□ **11.** 오른쪽 그림의 $\triangle$ABC의 둘레의 길이가 l이고, 내접원의 반지름의 길이가 r라고 한다. $\triangle$ABC의 외부에 $\overline{\text{A}'\text{B}'} /\!/ \overline{\text{AB}}$, $\overline{\text{B}'\text{C}'} /\!/ \overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{C}'\text{A}'} /\!/ \overline{\text{CA}}$이고, 각 평행선 사이의 거리가 x인 $\triangle$A'B'C'을 그려서 그 넓이를 $f(x)$라고 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값을 구하라.



□□ **12.** 지름이 $\overline{\text{AB}}=2a$인 반원의 호의 중점을 M이라 하고, A에서 출발한 광선이 호 MB 위의 점 Q에서 반사되어 $\overline{\text{AB}}$와 만나는 점을 P라고 한다. 반사점 Q가 B에 한없이 접근할 때, $\overline{\text{BP}}$의 극한값을 구하라.

□□ **13.** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\text{AB}}=3$, $\overline{\text{BC}}=4$, $\overline{\text{AD}}=7$이고, $\angle$BAC의 크기 θ에 따라 $\overline{\text{AD}}$ 위를 움직이는 점 C가 있다. 이 때 $\lim_{\theta\to 0}\frac{\overline{\text{CD}}}{\theta^2}$의 값을 구하라.



4. 함수의 연속성

핵심 정리

1 함수 $f(x)$의 연속성

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속 $\Longleftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(2) 함수 $f(x)$가 구간 I에서 연속 $\Longleftrightarrow f(x)$가 구간 I에 속하는 모든 점에서 연속

《참고》 ① $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아니면, $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다.

② $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속

$\Longleftrightarrow$ (i) $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ (ii) $\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$

(iii) $a<c<b \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

2 연속함수의 성질

(1) 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 I에서 연속이면 다음 각 함수도 이 구간에서 연속이다.

① $cf(x)$ (c는 상수) ② $f(x)\pm g(x)$ ③ $f(x)g(x)$

④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0$) ⑤ $g(f(x))$ (단, $\{f$ 의 치역$\}\subset\{g$의 정의역$\}$)

(2) **최대·최소의 정리** : 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최대값과 최소값을 갖는다.

(3) **중간값의 정리** : 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k(a<c<b)$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

(함수의 연속성)

필수예제 24. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$$

를 만족시키고, $x=0$에서 연속이면 $f(x)$는 모든 실수에서 연속임을 증명하라.

♣ 해법 연구 ♣

▶ 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속

$\Longleftrightarrow$ 임의의 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

에서 $x=a+h$이면

$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$

증명 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

또 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

즉, $\lim_{h\to 0} f(h)=0$

따라서 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\{f(a)+f(h)+ah\}$$
$$=f(a) \quad (\because \lim_{h\to 0} f(h)=0,\ \lim_{h\to 0} ah=0)$$

따라서 $f(x)$는 임의의 실수 a에서 연속이다.

수련문제 23. 함수 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0\text{일 때}) \\ 0 & (x=0\text{일 때}) \end{cases}$ 는 $x=0$에서 연속임을 증명하라.

답 풀이 참조

(함수가 연속인 구간)

필수예제 25. 다음 함수 $f(x)$가 연속인 구간을 구하라.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　　(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

(3) $f(x)=x-[x]$ (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

풀이 (1) (i) $f(1)$의 값은 없다. ($\because$ (분모)$=0$)

(ii) $x\neq1$이면 $f(x)=x+1$은 모든 구간에서 연속이다.

따라서 $f(x)$가 연속인 구간은 $\mathbf{(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)}$

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$은 $1-x^2\geq0$인 모든 구간에서 연속이다.

$1-x^2\geq0$, 즉 $x^2-1\leq0$에서 $-1\leq x\leq1$

따라서 $f(x)$가 연속인 구간은 $\mathbf{[-1,\ 1]}$

(3) n이 정수라고 할 때

(i) $\displaystyle\lim_{x\to n+0}[x]=n$, $\displaystyle\lim_{x\to n-0}[x]=n-1$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to n}[x]$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $n<a<n+1$이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}[x]=n=[a]$

따라서 함수 $g(x)=[x]$는 $x\neq n$일 때 연속이다.

즉, $f(x)=x-[x]$가 연속인 구간은 $\mathbf{(n,\ n+1)}$ (n은 정수)

♣ 해법 연구 ♣

▶ **함수가 연속인 구간**

① 다항함수, $\sin x$, $\cos x$, ⇨ $(-\infty,\ \infty)$

② $f(x)$, $g(x)$가 다항함수일 때, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ⇨ $g(x)\neq0$인 모든 구간

③ $\sqrt{x}$ ⇨ $[0,\ \infty)$

④ $\log_a x$ ⇨ $(0,\ \infty)$

⑤ $a^x(a>0,\ a\neq1)$ ⇨ $(-\infty,\ \infty)$

⑥ $\tan x$ ⇨ $\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2},\ n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (n은 정수)

⑦ $[x]$ ⇨ $(n,\ n+1)$ (n은 정수)

(극한으로 표시된 함수의 연속성)

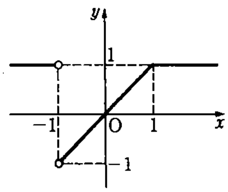
필수예제 26. 다음 함수의 그래프를 그리고, 연속성을 조사하라.

(1) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+x}{x^n+1}$　　(2) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$

풀이 (1) $|x|<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로 $f(x)=x$

$|x|>1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

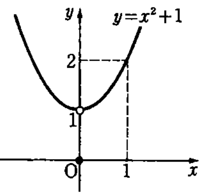
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^n}}=1$$



또, $f(1)=1$이고 $f(-1)$의 값이 존재하지 않으므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같고, **$x\neq-1$인 모든 점에서 연속**이다.

(2) $x\neq0$일 때 $f(x)$는 첫째항이 x^2, 공비가 $r=\dfrac{1}{1+x^2}$인 등비급수이고 $|r|<1$이다.

$$\therefore\ f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2$$



또, $f(0)=0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, **$x\neq0$인 모든 점에서 연속**이다.

▶ **$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n$의 극한**

① $|r|<1$ ⇨ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$

② $|r|>1$ ⇨ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

③ $r=1$ ⇨ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$

④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n$의 값은 없다.

▶ **$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 극한**

① $a=0$ ⇨ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=0$

② $|r|<1$ ⇨ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$

③ $a\neq0$, $|r|\geq1$ ⇨ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$은 발산

수련문제 24. 함수 $f(x)=\tan\dfrac{x}{2}$가 연속인 구간을 구하라.

답 $((2n-1)\pi,\ (2n+1)\pi)$ (n은 정수)

(연속함수의 조건)

필수예제 27. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(e^{2x}-1)f(x)=\sin 3x$$

를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하라.

풀이 $x\neq 0$일 때, $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{e^{2x}-1}$이므로 $f(x)$는 $x\neq 0$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이 되려면 $x=0$에서 연속이면 된다.

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{e^{2x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속 $\Longleftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

(실근의 존재 범위)

필수예제 28. 다음 방정식은 $0<x<1$인 범위에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

(1) $x^n-3x+1=0$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

(2) $\log_2 x+x=0$

증명 (1) $f(x)=x^n-3x+1$이라고 놓으면 $f(x)$는 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

$$f(0)=1>0,\ f(1)=-1<0$$

이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ $(0<c<1)$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

이 실수 c가 주어진 방정식 $f(x)=0$의 실근이다.

(2) $f(x)=\log_2 x+x$라고 놓으면 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1]$에서 연속이고

$$\lim_{x\to +0}f(x)=-\infty<0,\ f(1)=1>0$$

이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ $(0<c<1)$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

이 실수 c가 주어진 방정식 $f(x)=0$의 실근이다.

▶ **중간값의 정리**

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$, $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k\ (a<c<b)$$

인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

특히, $f(a)$, $f(b)$의 부호가 서로 다르면

$$f(c)=0\ (a<c<b)$$

인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

수련문제 25. 모든 양의 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-1)f(x)=\ln x$$

를 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하라.

답 $f(1)=1$

수련문제 26. 다음 방정식은 ( ) 안의 범위에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

(1) $x^{10}=10^{x+1}$ $(1<x<2)$

(2) $\sqrt{x}\tan x=100$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

답 풀이 참조

〔해답 ⇨ p. 172〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 다음 중 $x=0$에서 불연속인 함수는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $f(x)=x[x]$　② $f(x)=\operatorname{cosec} x$　③ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n$

④ $f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$　⑤ $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-2x}{x^2+x} & (x\neq 0) \\ 2 & (x=0) \end{cases}$

□□ **2.** 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 에 대하여 개구간 $(-5,\ 5)$에서 정의된 합성함수 $f(\sin x)$의 불연속점의 개수를 구하라. (단, x의 단위는 라디안이다.)

□□ **3.** 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 가 모든 실수에서 연속일 때, 상수 a, b의 값을 구하라.

□□ **4.** 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$ 이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하라.

□□ **5.** 방정식 $\sin x - x\cos x=0$은 구간 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 증명하라.

□□ **6.** $a<b<c$일 때, x에 관한 다음의 삼차방정식은 서로 다른 세 실근 α, β, $\gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$를 갖는다고 한다. 이 때 α, β, γ와 a, b, c의 대소를 비교하라.

$$(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

□□ **7.** 구간 $0\leqq x\leqq 2\pi$에서 함수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\cos^2 x\cdot\sin^{3n}x$가 불연속인 x의 값을 모두 구하라.

□□ **8.** 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos^3 x}{x^n} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$ 은 $x=0$에서 연속이라고 한다. 다음을 구하라.

(1) 자연수 n의 최대값

(2) 자연수 n이 최대일 때, 상수 a의 값

〔해답 ⇨ p. 173〕

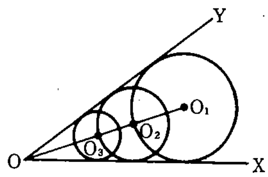
고급 문제 (Ⅰ)

1. 무한수열 $\sqrt{5}$, $\sqrt{5\sqrt{5}}$, $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$, …에서 일반항을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하라.

2. 무한급수 $\frac{1}{1\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+3)}+\cdots$의 합을 구하라.

3. 수열 a_1, $2a_2$, $3a_3$, …, na_n, …의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $n^2(n+1)$이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값을 구하라.

4. 오른쪽 그림과 같이 예각 ∠XOY의 두 변 OX, OY에 접하는 원 O_1, O_2, O_3, …이 있다. 원 O_{n+1}의 중심 O_{n+1}은 원 O_n과 선분 OO_n의 교점이라고 한다. $\angle XOY=2\alpha$이고, 원 O_1의 반지름의 길이가 1이라고 할 때, 원 O_1, O_2, O_3, …, O_n, …의 넓이의 총합을 구하라.



5. 다항식 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$이 성립할 때, $f(x)$를 구하라.

6. 다음 조건을 만족하는 상수 a, b의 값을 구하라.

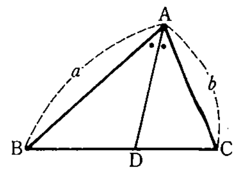
(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-ax-1)=b$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{a+\cos^2 x}+a}{2\sin x-1}=b$

7. $\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-4^{x-\frac{1}{4}}}{1-4x}$의 값을 구하라.

8. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(1-\cos 2x)}{2^m x^n} = \alpha$를 만족하는 자연수 m, n, α의 값을 구하라.

9. $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\angle BAC=\theta$인 $\triangle ABC$에서 $\angle BAC$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D, $\overline{AD}=l$이라고 할 때, 다음 물음에 답하라.



(1) l을 a, b, θ를 써서 나타내라.

(2) a, b가 일정하다고 할 때, $\lim_{\theta \to 0} l$의 값을 a, b를 써서 나타내라.

10. 함수 $f(x)=\lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+1}+(a-1)x^n-1}{x^{2n}-ax^n-1}$이 $x \geq 0$에서 연속이라고 할 때, 상수 a의 값을 구하라. (단, $a \neq 0$)

11. 한 변의 길이가 a인 정삼각형 ABC의 변 AB 위에 점 P_1을 잡아 P_1에서 변 BC에 내린 수선의 발을 Q_1, Q_1에서 변 CA에 내린 수선의 발을 R_1, R_1에서 변 AB에 내린 수선의 발을 P_2와 같이 점 Q_2, R_2, P_3, Q_3, R_3, …을 잡는다. $n \to \infty$일 때 선분 AP_n의 길이의 극한값을 구하라.

12. 평면 위의 점 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, …, $P_n(x_n, y_n)$, … 이 다음과 같이 정의된다. $n \to \infty$일 때, P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하라.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} (n=1, 2, 3, \cdots), \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13. $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 한다. 변 BC의 n등분점을 차례로 P_1, P_2, P_3, …, P_{n-1}이라 하고 C를 P_n이라고 할 때,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(\overline{AP_1}^2+\overline{AP_2}^2+\overline{AP_3}^2+\cdots+\overline{AP_n}^2)$$

의 값을 a, b, c를 써서 나타내라.

14. 어떤 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 호 AB, 호 BC의 길이를 각각 a, $2a$라 하고 현 AB, 현 BC의 길이를 각각 b, c라고 할 때, $\lim_{a \to 0} \frac{b+c}{a}$의 값을 구하라.

1. 변화율과 도함수

핵심 정리

1 평균변화율

함수 $y=f(x)$에 대하여 x가 a에서 b까지 변할 때의 **평균변화율**은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ (\text{단, } b=a+\Delta x)$$

이고, 두 점 $A(a,\ f(a))$, $B(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기를 나타낸다.

2 미분계수 (순간변화율, 변화율)

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **미분계수**는

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

이고, 점 $A(a,\ f(a))$에서의 곡선 $y=f(x)$의 **접선의 기울기**를 나타낸다. 이 때 $f'(a)$의 값이 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능하다**고 한다.

3 도 함 수

함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

이고, y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}y$, $\frac{d}{dx}f(x)$, … 등으로 나타낸다. $f(x)$의 도함수를 구하는 것을 $f(x)$를 x에 대하여 **미분한다**고 한다.

4 미분법의 기본 공식

함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $y=c$ (c는 상수) ⇨ $y'=0$

(2) $y=x^n$ (n은 정수) ⇨ $y'=nx^{n-1}$

(3) $y=cf(x)$ (c는 상수) ⇨ $y'=cf'(x)$

(4) $y=f(x)\pm g(x)$ ⇨ $y'=f'(x)\pm g'(x)$ (복부호동순)

(5) $y=f(x)g(x)$ ⇨ $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(6) $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ ⇨ $y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ (단, $g(x)\neq 0$)

(평균변화율)

필수예제 1. 함수 $f(x)=ax^3+bx+c$의 구간 $[0,\ 1]$에서의 평균변화율이 5이고, 구간 $[1,\ 3]$에서의 평균변화율이 -7이라고 할 때 구간 $[0,\ 3]$에서의 평균변화율을 구하라.

풀이 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=a+b=5$, $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=13a+b=-7$

에서 $a=-1$, $b=6$

따라서 구간 $[0,\ 3]$에서의 평균변화율은 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=9a+b=\mathbf{-3}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **평균변화율**

함수 $f(x)$의 구간 $[a,\ b]$에서의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

수련문제 1. 함수 $f(x)=-x^3+kx$의 구간 $[-3,\ 1]$에서의 평균변화율이 -5라고 할 때, 상수 k의 값을 구하라.

답 $k=2$

(미분계수와 극한)

필수예제 2. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 다음 극한값을 $f(a)$, $f'(a)$를 써서 나타내라.

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ (2) $\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

풀이 (1) (준식) $=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$

$=f'(a)+f'(a)=\mathbf{2f'(a)}$

(2) (준식) $=\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(a)-a^2f(x)+a^2f(a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\left\{f(a)\times\frac{x^2-a^2}{x-a}-a^2\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}$

$=\mathbf{2af(a)-a^2f'(a)}$

(미분가능성과 연속성)

필수예제 3. 다음 물음에 답하라.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속임을 증명하라.

(2) 함수 $f(x)=|x|$에 대하여 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하라.

풀이 (1) $x=a$에서 미분가능하므로 $f'(a)$의 값이 존재한다.

$\therefore \lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{(x-a)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}$

$=\lim_{x\to a}(x-a)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x-a)f'(a)=0$

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(2) (i) $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0)$ $\therefore$ **$f(x)$는 $x=0$에서 연속**

(ii) $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$에서

$\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{x}{x}=1$, $\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{-x}{x}=-1$

이므로 $f'(0)$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore$ **$f(x)$는 $x=0$ 에서 미분불가능**

♣ 해법 연구 ♣

▶ **미분계수와 극한**

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}$

(k는 상수)

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\cdots$

▶ **미분가능성과 연속성**

① $f(x)$가 $x=a$에서 연속 $\Longleftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

② $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능 $\Longleftrightarrow$ $f'(a)$의 값이 존재

③ $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능 $\Longrightarrow$ $f(x)$는 $x=a$에서 연속 (단, 역은 성립하지 않는다.)

수련문제 2. 모든 실수에서 정의되고 $x=a$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음 극한값을 구하라.

(1) $f'(a)=55$일 때 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+7h)-f(a-3h)}{h}$ 〔서강대〕

(2) $\lim_{x\to a}\frac{x^nf(a)-a^nf(x)}{x^n-a^n}$ (n은 양의 정수) 〔연세대〕

답 (1) 550 (2) $f(a)-\frac{a}{n}f'(a)$

수련문제 3. 함수 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 에 대하여 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하라.

답 연속, 미분불가능

(미분계수)

필수예제 4. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$$

를 만족하고 $f'(0)=1$이라고 할 때, $f'(1)$의 값을 구하라.

풀이 주어진 등식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$$

$$\therefore f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$$

$$\therefore f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+3h-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=1+3=\mathbf{4}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **미분계수**

① $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

② $f'(1)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

(도함수의 정의)

필수예제 5. 다음 물음에 답하라.

(1) 도함수의 정의에 의하여 함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 도함수를 구하고, $x=1$에서의 미분계수를 구하라.

(2) 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y=f(x)g(x)$일 때, $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 증명하라.

풀이 (1) $f(x)=\sqrt{x}$에서

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{1}{2}$$

(2) $y=f(x)g(x)=F(x)$라고 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

▶ **도함수의 정의**

$f'(x)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

▶ **도함수와 미분계수**

$f(x)$의 도함수가 $f'(x)$일 때, $x=a$에서 미분계수는 $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 구할 수 있다.

수련문제 4. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f'(0)=-2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

를 만족시킨다. 이 때 $f'(1)$의 값을 구하라.

〔공 사〕

답 0

수련문제 5. 도함수의 정의에 의하여 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$의 도함수를 구하고, $x=1$에서 미분계수를 구하라.

답 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'(1)=-1$

(분수함수의 미분)

필수예제 6. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ (a, b는 상수)에 대하여 $f'(1)=2$, $f'(2)=1$이라고 할 때, $f(1)$의 값을 구하라.

풀이 $f'(x)=\dfrac{(ax+b)'(x^2+1)-(ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$

$f'(1)=\dfrac{-2b}{4}=-\dfrac{b}{2}=2$에서 $b=-4$

$f'(2)=\dfrac{-3a-4b}{25}=1$에서 $3a+4b=-25$

$\therefore\ a=-3,\ b=-4$

$f(x)=\dfrac{-3x-4}{x^2+1}$에서 $\boldsymbol{f(1)=-\dfrac{7}{2}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **분수함수의 도함수**

미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ ⇨

$y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(미분가능의 조건)

필수예제 7. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3-9x & (x\geq a) \\ 3x^2+b & (x<a)\end{cases}$ (a, b는 상수)가 모든 실수에서 미분가능할 때, $f(0)$의 값을 구하라.

풀이 $x\neq a$일 때의 함수 $f(x)$는 각각 다항함수로서 항상 미분가능하다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하기만 하면 모든 실수에서 미분가능하다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이어야 한다.

$\therefore\ a^3-9a=3a^2+b$ $\therefore\ b=a^3-3a^2-9a$ ……㉠

(ii) $f(x)$는 $x=a$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=3a^2-9$, $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=6a$

에서 $3a^2-9=6a$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$

$a=-1$일 때 ㉠에서 $b=5$

이 때 $x\geq-1$에서 $f(x)=x^3-9x$이므로 $f(0)=0$

$a=3$일 때 ㉠에서 $b=-27$

이 때 $x<3$에서 $f(x)=3x^2-27$이므로 $f(0)=-27$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(0)=0}$ **또는** $\boldsymbol{-27}$

▶ **미분가능의 조건**

미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$y=\begin{cases} f(x) & (x\geq a) \\ g(x) & (x<a)\end{cases}$

가 $x=a$에서 미분가능

$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(a)=\displaystyle\lim_{x\to a-0}g(x) \\ \displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ =\displaystyle\lim_{x\to a-0}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\end{cases}$

수련문제 6. 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 해를 구하라.

답 $x=\pm1$

수련문제 7. 함수 $f(x)$를 $f(x)=\begin{cases} x^3 & (x\leq 1) \\ ax+b & (x>1)\end{cases}$로 정의할 때, 이 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정하라.

〔서강대〕

답 $a=3$, $b=-2$

〔해답 ⇨ p.176〕

실력 강화 문제

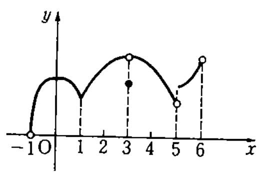
□□ **1.** 함수 $f(x)=x^2+4x+5$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) 구간 $[p, q]$에서의 평균변화율을 구하라.

(2) $x=m$에서의 미분계수를 구하라.

(3) $x=m$에서의 미분계수와 구간 $[p, q]$에서의 평균변화율이 같을 때, m의 값을 p, q를 써서 나타내라.

□□ **2.** 오른쪽 그림은 $-1<x<6$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 다음 중 옳지 않은 것은?



① $f'(2)$는 양수이다.

② $\lim_{x \to 3} f(x)$가 존재한다.

③ $f(x)$의 불연속점은 2개이다.

④ $f(x)$의 미분가능하지 않은 점은 3개이다.

⑤ $f'(x)=0$인 점은 2개이다.

□□ **3.** 함수 $f(x)=x^2+x+1$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} n^2\left\{f\left(\frac{2}{n}+1\right)-f(1)\right\}^2$의 값을 구하라. 〔과기대〕

□□ **4.** $\lim_{x \to 1}\frac{x^n-3x^2-x+3}{x-1}=2$일 때, 양의 정수 n의 값을 구하라.

□□ **5.** 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x)=\frac{x}{g(x)+2}$로 정의되고 $g(0)=1$이라고 할 때, $f'(0)$의 값을 구하라.

□□ **6.** 항상 양의 값을 갖는 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=2f(x)f(y)$$

인 관계를 만족시킬 때, 다음 물음에 답하라. 〔중앙대〕

(1) $f(0)$의 값을 구하라.

(2) $f'(0)=a$일 때, $f'(x)$를 a와 $f(x)$를 써서 나타내라.

□□ **7.** 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $\lim_{x \to 1}\frac{f(x^3)-2x^3}{x^2-1}$의 값을 구하라.

□□ **8.** 함수 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ (a, b, c는 서로 다른 상수)에 대하여

$$\frac{a^3}{f'(a)}+\frac{b^3}{f'(b)}+\frac{c^3}{f'(c)}$$

을 간단히 하라.

2. 여러 가지 함수의 미분법

핵심 정리

1 삼각함수 · 지수함수 · 로그함수의 도함수

(1) $\begin{cases}(\sin x)'=\cos x \\ (\cos x)'=-\sin x\end{cases}$ $\begin{cases}(\tan x)'=\sec^2 x \\ (\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2 x\end{cases}$ $\begin{cases}(\sec x)'=\sec x\tan x \\ (\mathrm{cosec}\, x)'=-\mathrm{cosec}\, x\cot x\end{cases}$

(2) $(e^x)'=e^x \quad (a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,\ a\neq 1)$

(3) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x} \quad (\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{\log_a e}{x}\ (x>0,\ a\neq 1,\ a>0)$

2 합성함수 · 음함수 · 매개변수 함수의 미분

(1) 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=f'(u)\times g'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$$

(2) 음함수 $f(x,\ y)=0$으로 표시된 함수의 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$는 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 구한다. 이 때 $\dfrac{d}{dx}g(y)=\dfrac{d}{dy}g(y)\times\dfrac{dy}{dx}=g'(y)\times\dfrac{dy}{dx}$이다.

(3) 매개변수 t로 표시되는 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 미분가능할 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}\ (f'(t)\neq 0)$$

3 고계도함수

(1) **이계도함수** : 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 다시 x에 대하여 미분해서 얻어진 함수를 $f(x)$의 **이계도함수**라 하고, y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$, … 등으로 나타낸다.

(2) **고계도함수** : 함수 $y=f(x)$를 n번 미분하여 얻어진 함수를 $f(x)$의 **n계도함수**라 하고, $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$, … 등으로 나타낸다. 이계 이상의 도함수를 통틀어 **고계도함수**라고 한다.

($\sin x$의 도함수)

필수예제 8. 도함수의 정의를 써서 함수 $f(x)=\sin x$의 도함수를 구하라.

풀이
$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\frac{(x+h)+x}{2}\sin\frac{(x+h)-x}{2}\\&=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\boldsymbol{\cos x}\end{aligned}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **삼각함수·로그함수의 극한**

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

수련문제 8. 도함수의 정의를 써서 함수 $f(x)=\ln x$의 도함수를 구하라. 답 $\dfrac{1}{x}$

(합성함수의 미분)

필수예제 **9.** 다음 물음에 답하라.

(1) 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수가 $y'=f'(g(x))\times g'(x)$임을 증명하라.

(2) 다음 함수를 미분하라.

① $f(x)=(x^2-x+1)^3$ ② $f(x)=\cos^2 3x$

풀이 (1) x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu, Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면, 함수 $u=g(x)$가 연속함수이므로 $\Delta x\to 0$일 때 $\Delta u\to 0$이다.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\therefore y'=f'(u)\times g'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$$

(2) ① $f'(x)=3(x^2-x+1)^2\times(x^2-x+1)'$

$=\mathbf{3(x^2-x+1)^2(2x-1)}$

② $f'(x)=2(\cos 3x)(\cos 3x)'$

$=2\cos 3x(-\sin 3x)(3x)'$

$=-6\sin 3x\cos 3x$

$=\mathbf{-3\sin 6x}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **합성함수의 도함수**

① $y=f(g(h(x)))$

$\Rightarrow y'=f'(g(h(x)))\times g'(h(x))\times h'(x)$

② $y=\sin(f(x))$

$\Rightarrow y'=\{\cos f(x)\}f'(x)$

③ $y=\ln|f(x)|$

$\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(음함수의 미분)

필수예제 **10.** 방정식 $x^3+y^3=3(xy+1)$로 표시되는 곡선 위의 점 A(2, 1)에서의 접선의 기울기를 구하라.

풀이 $x^3+y^3=3xy+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2\times\frac{dy}{dx}=3\left(1\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$

$$(x-y^2)\times\frac{dy}{dx}=x^2-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2}$$

여기에 $x=2$, $y=1$을 대입하면

$$(\text{접선의 기울기})=\frac{2^2-1}{2-1^2}=\mathbf{3}$$

▶ **음함수의 미분**

$$\frac{d}{dx}f(y)=f'(y)\times\frac{dy}{dx}$$

▶ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 기울기

$$\Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}$$

수련문제 **9.** 다음 함수를 미분하라.

(1) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ (2) $f(x)=\ln(\sin x)$

답 (1) $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ (2) $\cot x$

수련문제 **10.** 다음 곡선 위의 점 $A(x_1, y_1)$에서의 접선의 기울기를 구하라.

(1) $y^2=4x$ (2) $3x^2+4y^2=12$

답 (1) $\dfrac{2}{y_1}$ (2) $-\dfrac{3x_1}{4y_1}$

(x^r(r : 유리수)의 미분)

필수예제 **11.** 다음 물음에 답하라.

(1) n이 정수일 때 $(x^n)'=nx^{n-1}$이다. 이를 이용하여 r가 유리수일 때, $(x^r)'=rx^{r-1}$임을 증명하라.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$을 미분하라.

풀이 (1) r가 유리수이므로 $r=\dfrac{n}{m}$(m, n은 정수, $m\neq0$)이라 하고,

$y=x^r$이라고 하면 $y=x^{\frac{n}{m}}$에서 $y^m=x^n$

양변을 x에 대하여 미분하면 $my^{m-1}\times\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}}=\frac{n}{m}\times\frac{x^{n-1}}{\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}}$$

$$=\frac{n}{m}x^{(n-1)-\left(n-\frac{n}{m}\right)}=\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}=rx^{r-1}$$

$$\therefore\ (x^r)'=rx^{r-1}$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+1)'=-\frac{2x}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **무리함수의 미분**

① $y=\sqrt{x}$

⇨ $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

② $y=\sqrt{f(x)}$

⇨ $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

(매개변수 함수의 미분)

필수예제 **12.** $x=1+t^2$, $y=2-t-t^2$(t는 실수)인 점 (x, y)가 그리는 곡선 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기를 구하라.

풀이 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-1-2t}{2t}$

한편, $x=1+t^2=2$에서 $t=\pm1$ ……㉠

$y=2-t-t^2=0$에서 $t=1,\ -2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $t=1$

$$\therefore\ (\text{접선의 기울기})=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=2\\y=0}}=\left[\frac{-1-2t}{2t}\right]_{t=1}=-\frac{3}{2}$$

▶ **매개변수 함수의 미분**

$x=f(t)$, $y=g(t)$

⇨ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

(단, $f'(t)\neq0$)

수련문제 **11.** 함수 $f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하라. 답 1

수련문제 **12.** $x=t+\dfrac{1}{t}$, $y=t-\dfrac{1}{t}$(t는 실수)일 때, 점 (x, y)가 그리는 곡선 위의 점 $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$에서의 접선의 기울기를 구하라. 답 $\dfrac{5}{3}$

(지수함수 · 삼각함수의 미분)

필수예제 13. 다음 물음에 답하라.

(1) $\frac{d}{dx}\{(x^2+ax+b)e^{px}\}=x^2e^{px}$이 성립하도록 상수 a, b, p의 값을 정하라.

(2) $f(x)=x^2e^{-x}\sin x$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2}$의 값을 구하라.

풀이 (1) $\frac{d}{dx}\{(x^2+ax+b)e^{px}\}$

$=(x^2+ax+b)'e^{px}+(x^2+ax+b)(e^{px})'$

$=\{(2x+a)+p(x^2+ax+b)\}e^{px}$

$=\{px^2+(2+ap)x+(a+bp)\}e^{px}=x^2e^{px}$

에서 $p=1$, $2+ap=0$, $a+bp=0$ $\therefore$ $\mathbf{a=-2,\ b=2,\ p=1}$

(2) $f'(x)=2xe^{-x}\sin x-x^2e^{-x}\sin x+x^2e^{-x}\cos x$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2e^{-x}\sin x}{x}-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\right)=\mathbf{3}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **지수함수의 미분**

① $(e^x)'=e^x$

② $(e^{f(x)})'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

③ $(a^x)'=a^x\ln a$

$(a>0,\ a\neq 1)$

(로그미분법)

필수예제 14. 다음 함수를 미분하라.

(1) $y=x^x(x>0)$ (2) $y=\frac{(x+2)^3(x+3)^4}{(x+1)^2}$

풀이 (1) $y=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln y=x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=y(\ln x+1)=\mathbf{x^x(\ln x+1)}$

(2) $|y|=\left|\frac{(x+2)^3\cdot(x+3)^4}{(x+1)^2}\right|$이므로 양변에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=3\ln|x+2|+4\ln|x+3|-2\ln|x+1|$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x+3}-\frac{2}{x+1}=\frac{5x^2+14x+5}{(x+2)(x+3)(x+1)}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=y\times\frac{5x^2+14x+5}{(x+2)(x+3)(x+1)}=\mathbf{\frac{(x+2)^2(x+3)^3(5x^2+14x+5)}{(x+1)^3}}$

▶ **로그미분법**

$y=f(x)$이면

$\ln|y|=\ln|f(x)|$에서

$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=y\times\frac{f'(x)}{f(x)}$

수련문제 13. $f(x)=e^{\cos x}$일 때 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$의 값을 구하라.

답 $-e$

수련문제 14. 다음 함수를 미분하라.

(1) $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ (2) $y=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x(x+2)}$

답 (1) $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$ (2) $y'=\frac{(-5x^2+2x+6)\sqrt[3]{x-1}}{3x^2(x-1)(x+2)^2}$

(역함수의 미분)

필수예제 15. $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하라.

풀이 $g(x)=f^{-1}(x)=y$라고 하면 $x=f(y)=\sin y$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=\frac{d}{dy}(\sin y)\times\frac{dy}{dx}=\cos y\times\frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$$

그런데 ㉠에서 $x=\frac{1}{2}$이면 $\sin y=\frac{1}{2}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **역함수의 미분**

$f^{-1}(x)=g(x)=y$이면 $x=f(y)$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=f'(y)\times\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$

(이계도함수)

필수예제 16. 다음 물음에 답하라.

(1) $f(x)=x^x e^x (x>0)$일 때 $f''(1)$의 값을 구하라.

(2) $x=\cos\theta+\theta\sin\theta$, $y=\sin\theta-\theta\cos\theta$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{d^2y}{dx^2}$의 값을 구하라.

풀이 (1) $f(x)=x^x e^x (x>0)$에서 $\ln f(x)=x\ln x+x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1=\ln x+2 \text{에서} \quad f'(x)=f(x)(\ln x+2)$$

$$\therefore f''(x)=f'(x)(\ln x+2)+f(x)(\ln x+2)'$$

$$=f(x)(\ln x+2)^2+f(x)\cdot\frac{1}{x}=f(x)\left\{(\ln x+2)^2+\frac{1}{x}\right\}$$

$$\therefore f''(1)=f(1)\{(\ln 1+2)^2+1\}=\mathbf{5e}$$

(2) $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta=\theta\sin\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\theta\sin\theta}{\theta\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\tan\theta)=\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)\Big/\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\frac{\sec^2\theta}{\theta\cos\theta}=\frac{1}{\theta\cos^3\theta}$$

$$\therefore \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left[\frac{1}{\theta\cos^3\theta}\right]_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\mathbf{\frac{24}{\pi}}$$

▶ **매개변수 함수의 미분**

$x=f(t)$, $y=g(t)$일 때

① $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$

② $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{dt}{dx}$

$=\frac{\frac{d}{dt}\left\{\frac{g'(t)}{f'(t)}\right\}}{\frac{dx}{dt}}$

수련문제 15. 함수 $f(x)=x^3+3x-2$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(2)$의 값을 구하라.

답 $\frac{1}{6}$

〔해답 ⇨ p.177〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 다음 물음에 답하라.

(1) $f(x)=x^{10}+x^5+3$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하라.

(2) ax^4+bx^3+1이 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하라. 〔홍익대〕

(3) $x^{10}+x^3+ax^2+bx+c$가 $(x-1)^3$으로 나누어 떨어지도록 상수 a, b, c의 값을 정하라.

□□ **2.** 함수 $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^{10}$에 대하여 $f'(1)\times f'(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 50 ⑤ 100

□□ **3.** 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $f'(0)=1$이고, $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

② $f'(0)=1$이고, $f'(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

③ $f'(0)=0$이고, $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

④ $f'(0)=0$이고, $f'(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

□□ **4.** 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 x에 대하여 $f(2x+\sin x)=x$를 만족시킬 때, $f'(0)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

□□ **5.** 함수 $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(9+x)-f(9-x)}{x}$의 값을 구하라.

□□ **6.** $x=\frac{1}{3}t^3-9t$, $y=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t$일 때, $\lim_{t\to 3}\frac{dy}{dx}$의 값을 구하라.

□□ **7.** $f(x)=\ln(\sec x+\tan x)$일 때, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하라.

□□ *8*. 함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ \ln bx & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 $x=1$에서 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정하라.

□□ *9*. $f(x)=x^2 \ln x$일 때, 방정식 $f(x)+f'(x)-4f''(x)=x-12$를 풀어라.

□□ *10*. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}$ 의 값을 구하여 n에 관한 식으로 나타내라.

□□ *11*. $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}$일 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x^2-1}$의 값을 구하라.

□□ *12*. $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g(x)$의 도함수 $g'(x)$를 x에 관한 식으로 나타내라.

□□ *13*. $\begin{cases} x=e^t-e^{-t} \\ y=e^t+e^{-t} \end{cases}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 를 각각 t에 관한 식으로 나타내라.

□□ *14*. $x=0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin 8x)-f(\tan x)}{x}$의 값을 $f'(0)$을 써서 나타내라.

□□ *15*. $x^2+2xy-y^2=1$이라고 할 때, $\frac{d^2y}{dx^2}$를 x, y에 관한 식으로 나타내라.

□□ *16*. 방정식 $e^y+\ln\cos x=1$에서 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 를 구하라. 〔연세대〕

3. 접선의 방정식과 평균값의 정리

핵심 정리

1 접선・법선의 방정식

곡선 $y=f(x)$에 대하여

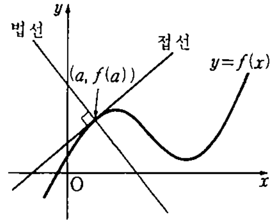
(1) 곡선 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식

⇨ $\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$

(2) 곡선 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 법선의 방정식

⇨ ① $f'(a)\neq 0$일 때 $\boldsymbol{y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)}$

② $f'(a)=0$일 때 $\boldsymbol{x=a}$



(3) 기울기 m인 접선의 방정식 ⇨ 접점을 $(t,\ f(t))$로 놓고 $f'(t)=m$인 t를 구한다.

(4) 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 접선의 방정식

⇨ 접점을 $(t,\ f(t))$로 놓고, 이 때의 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하여 t를 구한다.

2 평균값의 정리

(1) **롤(Rolle)의 정리** : 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하고 $f(a)=f(b)$이면, $f'(c)=0\ (a<c<b)$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

(2) **평균값의 정리** : 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\ (a<c<b)$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

(접선의 방정식(1))

필수예제 17. 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(t,\ \sin t)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(f(t),\ 0)$이라고 한다.
이 때 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$의 값을 구하라.

♣ 해법 연구 ♣

▶ **접선의 방정식** [1]
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

풀이 $y=\sin x$에서 $y'=\cos x$

$\therefore$ (접선의 기울기)$=[\cos x]_{x=t}=\cos t$

따라서 접선의 방정식은 $y-\sin t=\cos t(x-t)$

$y=0$을 대입하면 $x=-\dfrac{\sin t}{\cos t}+t=f(t)$ $\quad\therefore f(t)=t-\tan t$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\tan t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(1-\frac{\tan t}{t}\right)=\boldsymbol{0}$$

수련문제 16. 곡선 $y=\sin^2 x$ 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{4}\right)$에서의 접선의 방정식을 구하라.

답 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

수련문제 17. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하라. 〔연세대〕

답 $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

(법선의 방정식)

필수예제 18. 곡선 $y=\cos 3x$ 위의 점 $P(t,\ \cos 3t)$에서의 법선이 y축과 만나는 점의 y좌표를 $g(t)$라고 할 때, $\lim_{t\to 0} g(t)$의 값을 구하라.

풀이 $f(x)=\cos 3x$라고 하면 $f'(x)=-3\sin 3x$

$\therefore f'(t)=-3\sin 3t$

$P(t,\ \cos 3t)$에서의 법선의 방정식은

$$y-\cos 3t=\frac{1}{3\sin 3t}(x-t)$$

$x=0$을 대입하여 이 법선의 y절편을 구하면

$$g(t)=\frac{-t}{3\sin 3t}+\cos 3t$$

$$\therefore \lim_{t\to 0} g(t)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-t}{3\sin 3t}+\cos 3t\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{9}\times\frac{3t}{\sin 3t}+\cos 3t\right)$$
$$=-\frac{1}{9}+1=\mathbf{\frac{8}{9}}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **법선의 방정식**

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 법선의 방정식은

$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$

(단, $f'(t)\neq 0$)

(접선의 방정식(2))

필수예제 19. 원점에서 곡선 $y=\frac{e^x}{x}$에 접선을 그을 때, 접점의 좌표를 구하라.

풀이 $f(x)=\frac{e^x}{x}$이라고 하면 $f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

접점을 $\left(t,\ \frac{e^t}{t}\right)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$y-\frac{e^t}{t}=\frac{e^t(t-1)}{t^2}(x-t)$$

이 접선이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$-\frac{e^t}{t}=-\frac{e^t(t-1)}{t}$$

에서 $e^t\neq 0$, $t\neq 0$이므로 $t-1=1$, 즉 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $\mathbf{\left(2,\ \frac{1}{2}e^2\right)}$

▶ **접선의 방정식** [2]

곡선 $y=f(x)$에 대하여 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 접선의 방정식

⇨ 접점을 $(t,\ f(t))$로 놓고 구한 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하여 t의 값을 구한다.

수련문제 18. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 위의 점 $A(3,\ 2)$에서의 법선이 y축과 만나는 점을 B라고 할 때, △OAB의 넓이를 구하라. (단, O는 원점) 답 $\frac{9}{2}$

수련문제 19. 두 곡선 $y=\ln x$와 $y=e^x$에 대하여 원점에서 이 두 곡선에 그은 접선의 접점을 각각 A, B라고 할 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하라. 답 $\sqrt{2}(e-1)$

수련문제 20. 점 $(0,\ 1)$을 지나고 곡선 $y=\frac{2}{x^2+1}$에 접하는 직선의 개수를 구하라. 〔과기대〕

답 2개

(접할 조건 · 직교 조건)

필수예제 20. 곡선 $y=kx^2e^{-x}$, 직선 $y=x$에 대하여 다음의 각 경우에 상수 k의 값을 각각 구하라.

(1) 곡선과 직선이 접한다. (2) 곡선과 직선이 직교한다.

풀이 $f(x)=kx^2e^{-x}$, $g(x)=x$라고 하면

$$f'(x)=k(2xe^{-x}-x^2e^{-x})=kxe^{-x}(2-x),\ g'(x)=1$$

(1) 접점의 x좌표를 t라고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서 $kt^2e^{-t}=t$, 즉 $t(kte^{-t}-1)=0$ ……㉠

(ii) $f'(t)=g'(t)$에서 $kte^{-t}(2-t)=1$ ……㉡

㉡에서 $t\neq0$이므로 ㉠에서 $kte^{-t}=1$

㉡에서 $2-t=1$ ∴ $t=1$, $\boldsymbol{k=e}$

(2) 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 t라고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서 $t(kte^{-t}-1)=0$ ……㉠

(ii) $f'(t)\times g'(t)=-1$에서 $kte^{-t}(2-t)=-1$ ……㉡

㉡에서 $t\neq0$이므로 ㉠에서 $kte^{-t}=1$

㉡에서 $2-t=-1$ ∴ $t=3$, $\boldsymbol{k=\frac{1}{3}e^3}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **접할 조건 · 직교 조건**

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여

① $x=t$인 점에서 접한다.

⇨ $\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$

② $x=t$인 점에서 직교한다.

⇨ $\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)g'(t)=-1 \end{cases}$

▶ 두 곡선이 직교한다.

⟺ 교점에서의 두 곡선의 접선이 직교한다.

(평균값의 정리)

필수예제 21. 구간 $[1,\ e]$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 평균값의 정리가 적용될 수 있는지를 조사하고, 평균값의 정리를 만족하는 상수 c의 값을 구하라.

풀이 함수 $f(x)=\ln x$는 $x>0$일 때 연속이고 미분가능하므로 구간 $[1,\ e]$에서 연속이고 구간 $(1,\ e)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값의 정리를 적용할 수 있다.

$$\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{\ln e-\ln 1}{e-1}=\frac{1}{e-1}$$

$f'(x)=\frac{1}{x}$에서 $f'(c)=\frac{1}{c}=\frac{1}{e-1}$ (단, $1<c<e$)

∴ $\boldsymbol{c=e-1}$

▶ **평균값의 정리** [1]

함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$(a<c<b)$

인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

수련문제 21. 직선 $y=mx+1$이 곡선 $y=x^3$에 접하기 위한 상수 m의 값을 구하라. 〔고려대〕

답 $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

수련문제 22. 다음 물음에 답하라.

(1) 평균값의 정리를 써라. 〔서울대, 숙명여대〕

(2) 구간 $[-4,\ 4]$에서 함수 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$에 대하여 평균값의 정리를 만족하는 상수 c의 값을 구하라. 〔숙명여대〕

답 (1) 풀이 참조 (2) 0

(평균값의 정리의 응용)

필수예제 22. 함수 $f(x)=\sqrt{x}$에서
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\ (a>0,\ h>0,\ 0<\theta<1)$$
을 만족하는 θ에 대하여 $\lim_{h\to0}\theta$의 값을 구하라.

풀이 주어진 등식에서 $f'(a+\theta h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

그런데 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 $\dfrac{1}{2\sqrt{a+\theta h}}=\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

$$\therefore\ \sqrt{a+\theta h}=\frac{h}{2(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{2}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})^2-4a}{4h}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{2h}$$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\theta=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{4}+\frac{a(a+h)-a^2}{2h(\sqrt{a(a+h)}+a)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{4}+\frac{a}{2(\sqrt{a(a+h)}+a)}\right\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **평균값의 정리 [2]**
함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ a+h]$에서 연속이고, 개구간 $(a,\ a+h)$에서 미분가능하면
$f(a+h)$
$=f(a)+hf'(a+\theta h)$
$(h>0,\ 0<\theta<1)$
인 실수 θ가 존재한다.

(평균값의 정리와 부등식)

필수예제 23. 평균값의 정리를 이용하여 $x>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하라.
$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

증명 $f(x)=\ln x$라고 하면, $x>0$일 때 함수 $f(x)$는 폐구간 $[x,\ x+1]$에서 연속이고, 개구간 $(x,\ x+1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리가 성립한다.

즉, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 $\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{(x+1)-x}=\dfrac{1}{c}\ (x<c<x+1)$
인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

그런데 $x<c<x+1$에서 $x>0$이므로 $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$이고,
$\dfrac{1}{c}=\ln(x+1)-\ln x$이므로 $\dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$

▶ **부등식의 증명**
폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$를 찾고, $f(x)$의 도함수 $f'(x)$와 $a,\ b$ 사이의 관계를 조사한다.

수련문제 23. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$에서 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$를 만족하는 θ에 대하여 $\lim_{h\to0}\theta$의 값을 구하라. (단, $a>0,\ h>0,\ 0<\theta<1$)

답 $\dfrac{1}{2}$

수련문제 24. $0<x<y<z<\pi$일 때 평균값의 정리를 이용하여 부등식
$$\frac{\sin y-\sin x}{y-x}>\frac{\sin z-\sin y}{z-y}$$
가 성립함을 증명하라.

답 풀이 참조

〔해답 ⇨ p. 179〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(a,\ a^3)$에서의 접선과 y축과의 교점을 $(0,\ g(a))$라고 할 때,
$\lim_{a\to\infty}\frac{g(a)-g(\sqrt{a^2+a})}{a^2}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

□□ **2.** 다음 곡선 위의 주어진 점에서 접하는 직선의 방정식을 구하라.

(1) $x^2+2ye^x+y^3=3$ $(0,\ 1)$ (2) $y=\frac{x^2+1}{x+1}$ $(1,\ 1)$

□□ **3.** 함수 $f(x)=\ln x+1$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라고 할 때, 원점에서 곡선 $y=f^{-1}(x)$에 그은 접선의 기울기는?

① 1 ② 2 ③ e ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{e}$

□□ **4.** 포물선 $y=x^2$ 위에 원점이 아닌 동점 P가 있다. P에서의 이 곡선의 법선이 y축과 만나는 점을 Q라고 할 때, P가 원점 O에 한없이 접근하면 Q는 어느 점에 한없이 접근하는가?

□□ **5.** 곡선 $y=e^{ax}-x$가 x축에 접하도록 상수 a의 값을 정하라.

□□ **6.** x축 위의 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=e^{-x^2}$에 2개의 접선을 그을 수 있다고 할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하라.

□□ **7.** 두 곡선 $y=\ln x$, $y=ax+\frac{b}{x}$가 x축 위의 한 점에서 접한다고 할 때, 상수 a, b의 값을 구하라.

□□ **8.** 함수 $f(x)=e^{ax}(a>0)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$가 접하도록 상수 a의 값을 정하라.

□□ **9.** 두 곡선 $y=\ln(2x+1)$, $y=-\ln x^3+k$가 서로 직교하도록 상수 k의 값을 정하라.

□□ **10.** 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $a<b<c$인 모든 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

일 필요충분조건은 $x_1<x_2$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)<f'(x_2)$임을 증명하라.

〔94. 서울대〕

□□ **11.** 평균값의 정리를 이용하여 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$의 값을 구하라.

□□ **12.** 함수 $f(x)=e^{-x}\sin x\,(x>0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 x절편을 작은 것부터 차례로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n, $\cdots$ 이라고 한다. 점 $(x_n,\ 0)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 y절편을 y_n 이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n}$의 값을 구하라.

□□ **13.** 구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{-x}\sin x$가 있다. 구간 $[0,\ \pi]$에 속하는 임의의 서로 다른 두 수 a, b에 대하여 $t=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$가 취하는 값의 범위를 구하라.

4. 함수의 증감과 극대·극소

핵심정리

1 함수의 증감

어떤 구간 I 에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 I 에 속하는 임의의 두 수 a, b에 대하여

(1) $a<b$ 일 때 $f(a)<f(b)$이면 $f(x)$는 구간 I 에서 증가한다.
$a<b$ 일 때 $f(a)>f(b)$이면 $f(x)$는 구간 I 에서 감소한다.

(2) 구간 I 의 모든 점에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 구간 I 에서 증가한다.
구간 I 의 모든 점에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 구간 I 에서 감소한다.

(3) $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태, $f'(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다고 한다.

2 함수의 극대·극소

함수 $f(x)$가 $x=a$의 부근에서 연속이고 x가 증가하면서 a를 지날 때

(1) $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변할 때 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**이고 $f(a)$를 **극대값**, 점 $(a,\ f(a))$를 **극대점**이라고 한다.

(2) $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변할 때 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**이고 $f(a)$를 **극소값**, 점 $(a,\ f(a))$를 **극소점**이라고 한다.

(3) 극대값, 극소값을 통틀어 **극값**이라 하고, 극대점, 극소점을 통틀어 **극점**이라고 한다.

(4) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(a)$는 극대값, 음에서 양으로 바뀌면 $f(a)$는 극소값이다.

3 곡선의 오목·볼록

이계도함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$의 그래프는

(1) $f''(x)>0$인 구간에서 아래로 볼록하고, $f''(x)<0$인 구간에서 위로 볼록하다.

(2) $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 **변곡점**이다.

(3) $f'(a)=0$, $f''(a)<0$이면 $f(a)$는 극대값, $f'(a)=0$, $f''(a)>0$이면 $f(a)$는 극소값이다.

(함수의 증감)

필수예제 24. 함수 $f(x)=ax^3-ax^2-5x+1(a>0)$이 $-1<x<1$의 범위에서 단조감소일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하라.

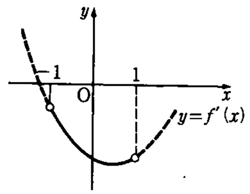
풀이 $-1<x<1$일 때 $f(x)$가 단조감소함수이므로 $f'(x)\leq 0$

그런데 $f'(x)=3ax^2-2ax-5\ (a>0)$이므로 $-1<x<1$에서 $f'(x)\leq 0$이 성립하려면

$f'(-1)=5a-5\leq 0$ ……㉠

$f'(1)=a-5\leq 0$ ……㉡

$a>0$이므로 ㉠, ㉡에서 $\mathbf{0<a\leq 1}$



♣ 해법 연구 ♣

▶ **함수의 증감**

함수 $f(x)$가 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능할 때

① $f(x)$가 $(\alpha,\ \beta)$에서 증가
⇨ $(\alpha,\ \beta)$에서 $f'(x)\geq 0$

② $f(x)$가 $(\alpha,\ \beta)$에서 감소
⇨ $(\alpha,\ \beta)$에서 $f'(x)\leq 0$

수련문제 25. 함수 $f(x)=(x-k)e^{x^2}$이 단조증가함수일 때, 상수 k의 값의 범위를 정하라.

답 $-\sqrt{2}\leq k\leq\sqrt{2}$

(증감과 극대 · 극소)

필수예제 25. 다음 함수의 증감을 조사하고, 극값을 구하라.

(1) $f(x)=x\ln x$ (2) $f(x)=|x|(x^2-x-1)$

(3) $f(x)=\sin x(1-\cos x)\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$

풀이 (1) $f'(x)=\ln x+1$이므로

$x>0$에서 $f'(x)=0$인 값 $x=\dfrac{1}{e}$을 기준으로 $f(x)$의 증감표를 만들면 오른쪽과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗
			(극소)	

따라서 $f(x)$는 $0<x<\dfrac{1}{e}$에서 **감소**하고 $x>\dfrac{1}{e}$에서 **증가**한다. $f(x)$의 **극소값**은 $-\dfrac{1}{e}$, **극대값**은 **없다.**

(2) $x\geqq 0$ 일 때

$f(x)=x^3-x^2-x$ 에서

$f'(x)=3x^2-2x-1$

$=(x-1)(3x+1)$

$x<0$ 일 때

$f(x)=-x^3+x^2+x$ 에서

$f'(x)=-3x^2+2x+1$

$=-(x-1)(3x+1)$

$f'(x)=0$이면 $x=-\dfrac{1}{3},\ 1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{27}$	↗	0	↘	-1	↗
		(극소)		(극대)		(극소)	

또, $x=0$에서 미분불가능하므로 이 값들을 기준으로 $f(x)$의 증감표를 만들면 위와 같다.

따라서 $f(x)$는 $x<-\dfrac{1}{3},\ 0<x<1$에서 **감소**하고 $-\dfrac{1}{3}<x<0,\ x>1$에서 **증가**한다. $f(x)$의 **극소값**은 $-\dfrac{5}{27},\ -1$, **극대값**은 **0**

(3) $f'(x)=\cos x(1-\cos x)+\sin^2 x=-(2\cos x+1)(\cos x-1)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$에서 $f'(x)=0$이면 $x=0,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3},\ 2\pi$이므로 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	
			(극대)		(극소)		

따라서 $f(x)$는

$0<x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<x<2\pi$에서 **증가**하고

$\dfrac{2}{3}\pi<x<\dfrac{4}{3}\pi$에서 **감소**한다.

$f(x)$의 **극대값**은 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, **극소값**은 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

♣ **해법 연구** ♣

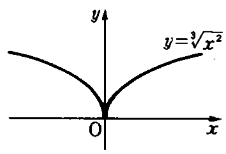
▶ **함수의 증감**

① $f'(x)>0$인 구간에서 $f(x)$는 증가한다.

② $f'(x)<0$인 구간에서 $f(x)$는 감소한다.

▶ $x=a$에서 $f(x)$가 미분불가능하더라도 $x=a$에서 연속이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

예를 들면 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$은 $x=0$에서 미분불가능하지만 $x=0$에서 극소값을 갖는다.



유련문제 26. 다음 함수의 극값을 구하라.

(1) $f(x)=(2x^2+3x)e^{-x}$ 〔서강대〕 (2) $f(x)=x^2|x-3|$

답 (1) 극대값 $\dfrac{9}{e\sqrt{e}}$, 극소값 $-e$ (2) 극대값 4, 극소값 0

(극값을 가질 조건(1))

필수예제 26. 함수 $f(x)=\dfrac{ax^2+2x+b}{x^2+1}$가 $x=1$에서 극대값 4를 갖는다고 할 때, a, b의 값을 구하고 $f(x)$의 극소값을 구하라.

풀이 $f'(x)=\dfrac{(2ax+2)(x^2+1)-2x(ax^2+2x+b)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+2(a-b)x+2}{(x^2+1)^2}$

그런데 $f(x)$가 $x=1$에서 극대값 4를 가지므로

$f'(1)=0$에서 $a-b=0$, $f(1)=4$에서 $a+b=6$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=3,\ b=3}$

이 때 $f'(x)=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$이면 $x=1,\ -1$

따라서 오른쪽의 증감표에서

극소값은 **2**

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	2	↗	4	↘
		(극소)		(극대)	

♣ 해법 연구 ♣

▶ **극값을 가질 조건 [1]**

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값 β를 갖는다.

⇨ $f'(\alpha)=0$, $f(\alpha)=\beta$

(극값을 가질 조건(2))

필수예제 27. 함수 $f(x)=x+a\cos x\,(a>0)$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) $f(x)$가 극값을 가지도록 a의 값의 범위를 정하라.

(2) $0\leqq x\leqq 2\pi$에서 $f(x)$의 극대값이 3일 때 극소값을 구하라.

풀이 (1) $f'(x)=1-a\sin x=0$이면 $\sin x=\dfrac{1}{a}$ ……㉠

$f(x)$의 극값이 존재하려면 ㉠의 해가 존재하고 이 해의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변화하여야 한다. 또, $a>0$이므로 $0<\dfrac{1}{a}<1$에서 $\boldsymbol{a>1}$

(2) $\sin x=\dfrac{1}{a}$의 해를

$x=\alpha,\ \pi-\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

라고 할 때 $f(x)$의 증감을 조사하면 오른쪽 표와 같다.

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	3	↘	$\pi-3$	↗	
			(극대)		(극소)		

따라서 극대값은 $f(\alpha)=\alpha+a\cos\alpha=3$

극소값은 $f(\pi-\alpha)=(\pi-\alpha)+a\cos(\pi-\alpha)=\pi-(\alpha+a\cos\alpha)$

$=\boldsymbol{\pi-3}$

▶ **극값을 가질 조건 [2]**

미분가능한 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$의 해가 존재하고, 이 해의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변화하여야 한다.

수련문제 27. 함수 $f(x)=x+\dfrac{a}{x-1}$의 극대값이 -1이라고 할 때, 상수 a의 값을 구하고, $f(x)$의 극소값을 구하라.

답 $a=1$, 극소값 3

수련문제 28. 다음 함수가 극값을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하라.

(1) $f(x)=x^3+kx^2+3x+2$ (2) $f(x)=kx+\sin x$

답 (1) $k<-3$ 또는 $k>3$ (2) $-1<k<1$

(매개변수 함수의 극값)

필수예제 28. 매개변수 t로 나타내어지는 곡선

$$C : x=t+e^{at},\quad y=-t+e^{at}\ (t \text{는 실수})$$

가 x축에 접한다고 할 때, 양의 상수 a의 값을 구하라.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=1+ae^{at}$, $\dfrac{dy}{dt}=-1+ae^{at}$에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-1+ae^{at}}{1+ae^{at}}$$

곡선 C가 x축에 접할 때의 t의 값을 p라고 하면

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{t=p}=0$에서 $-1+ae^{ap}=0$ ……㉠

$[y]_{t=p}=0$에서 $-p+e^{ap}=0$ ……㉡

㉡에서 $e^{ap}=p$이므로 ㉠에서 $ap=1$

$\therefore\ p=e,\ \boldsymbol{a=\dfrac{1}{e}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **곡선이 x축에 접할 조건**

곡선 $y=f(x)$가 x축에 접한다.

$\Longleftrightarrow f(x)$의 극값이 0이다. 즉, $f'(t)=0$, $f(t)=0$인 값 t가 존재한다.

(곡선의 오목·볼록·변곡점)

필수예제 29. 함수 $f(x)=x^2(\ln x-1)$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) 곡선 $y=f(x)$의 오목·볼록을 조사하라.

(2) 함수 $f(x)$의 극값을 구하라.

(3) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 구하라.

풀이 $f'(x)=2x(\ln x-1)+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x-1)$

$$f''(x)=1\cdot(2\ln x-1)+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x+1$$

$x>0$이므로 $f'(x)=0$이면 $x=\sqrt{e}$, $f''(x)=0$이면 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

따라서 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하면 오른쪽 표와 같다.

x	0	…	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	…	$\sqrt{e}$	…
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{3}{2e}$	↘	$-\frac{e}{2}$	↗
			(변곡)		(극소)	

(1) $\begin{cases} 0<x<\dfrac{1}{\sqrt{e}} : \text{위로 볼록} \\ x>\dfrac{1}{\sqrt{e}} : \text{아래로 볼록} \end{cases}$

(2) **극소값** $-\dfrac{e}{2}$

(3) **변곡점** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},\ -\dfrac{3}{2e}\right)$

▶ **곡선의 오목·볼록·변곡점**

곡선 $y=f(x)$는

① $f''(x)>0$인 구간에서는 아래로 볼록 (위로 오목)

② $f''(x)<0$인 구간에서는 위로 볼록 (아래로 오목)

③ $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하면 $(a,\ f(a))$는 변곡점

수련문제 29. 곡선 $y=\dfrac{2x-3}{x^2+4}+k$가 x축에 접하도록 상수 k의 값을 정하라. 답 $k=1,\ -\dfrac{1}{4}$

수련문제 30. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 오목·볼록을 조사하고, 극값과 변곡점을 구하라. 답 풀이 참조

〔해답 ⇨ p. 181〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>g'(x)$를 만족하고 $f(0)=g(0)$이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $f(-2)>g(-2)$, $f(2)>g(2)$
② $f(-2)>g(-2)$, $f(2)<g(2)$
③ $f(-2)<g(-2)$, $f(2)>g(2)$
④ $f(-2)<g(-2)$, $f(2)<g(2)$
⑤ $f(-2)<f(2)$, $g(-2)>g(2)$

□□ **2.** 삼차함수 $f(x)=ax^3-2ax^2+4x$에 대하여 다음을 구하라. 〔94. 서강대 응용〕

(1) 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $f(x)$가 증가함수가 되도록 상수 a의 범위를 정하라.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 극대값, $x=c$에서 극소값을 가질 때, $b+c$의 값을 구하라.

□□ **3.** 함수 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2-x-2}$가 극값을 갖지 않도록 상수 a의 값의 범위를 정하라.

□□ **4.** $f(0)=0$이고 $f'(x)$가 증가함수이면 $x>0$일 때, 함수 $\dfrac{f(x)}{x}$는 증가함수임을 증명하라. 여기서 어떤 함수 $g(x)$가 증가함수라고 하는 것은 $x_1<x_2$이면 $g(x_1)<g(x_2)$임을 뜻한다.
〔고려대〕

□□ **5.** 함수 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$의 극대값과 극소값 그리고 변곡점의 x좌표를 구하라. 〔서강대〕

□□ **6.** 함수 $f(x)=a\sin 2x+b\cos x$가 $x=\dfrac{7}{6}\pi$에서 극대값 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$을 갖는다고 할 때, 상수 a, b의 값을 구하라.

□□ **7.** 함수 $f(x)=x^3-2ax^2$이 $0<x<1$에서 극소값을 가질 때, 상수 a가 취하는 값의 범위를 구하라. 〔고려대〕

□□ **8.** 함수 $f(x)=x^3+2ax^2-4a^2x$가 $-1<x<1$인 범위에서 극대값을 갖고, $x>1$인 범위에서 극소값을 갖는다고 할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하라.

□□ **9.** 함수 $f(x)=e^{2x}+ae^x+2x$의 극대값과 극소값의 합이 -11이라고 할 때, 상수 a의 값을 구하라.

□□ **10.** 곡선 $y=e^{-2x^2}$의 변곡점이 A, B라고 한다. 원점을 O라고 할 때, $\triangle$OAB의 넓이를 구하라.

□□ **11.** 함수 $f(x)=x^2(a-x)$에 대하여 다음을 구하라. (단, a는 양의 상수) 〔전남대〕

(1) $f(x)$의 극대값

(2) a가 변할 때 $f(x)$의 극대점이 그리는 곡선의 방정식

□□ **12.** 함수 $f(x)=(2x+a)e^{-bx}$가 $x=-2$에서 극값을 가지고 점 $(-1,\ f(-1))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 할 때, 상수 a, b의 값을 구하라.

□□ **13.** 함수 $f(x)=e^x(ax^2+2bx+1)$이 극값을 갖지 않는다고 할 때, 점 $(a,\ b)$가 존재하는 영역의 넓이를 구하라.

□□ **14.** 구간 $x\geqq0$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{-x}\sin x$를 극대 또는 극소가 되게 하는 x의 값을 x_1, x_2, x_3, $\cdots(x_1<x_2<x_3<\cdots)$이라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|$의 합을 구하라. 〔연세대〕

5. 곡선의 개형과 최대 · 최소

핵심정리

1 곡선의 개형

함수 $y=f(x)$의 그래프는 필요에 따라 다음 중 몇 가지를 조사하여 그릴 수 있다.

(1) 정의역, 치역
(2) 대칭성, 주기성
(3) x절편, y절편
(4) 함수의 증감, 극값
(5) 곡선의 오목 · 볼록, 변곡점
(6) 불연속점, 미분불가능점
(7) $x\to\pm\infty$일 때의 극한
(8) 점근선
(9) 특수한 점에서의 함수값

2 최대 · 최소

(1) **최대 · 최소의 정리** : 폐구간에서 연속인 함수는 그 구간에서 반드시 최대값과 최소값을 갖는다.

(2) **최대값 · 최소값** : 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)$, $f(b)$와 구간 $[a,\ b]$에 포함된 $f(x)$의 모든 극값 중에서 가장 큰 값이 최대값이고, 가장 작은 값이 최소값이다.

(3) **도형에서의 최대 · 최소** : 적당한 변수를 정하고 조건에 맞는 식을 세워서, 변수의 범위에 주의하여 도함수와 증감표를 이용하여 최대값 · 최소값을 구한다.

(곡선의 개형)

필수예제 30. 곡선 $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$의 개형을 그려라.

풀이 로그의 진수 조건에서 $x>0$, 지수함수이므로 $y>0$이다.

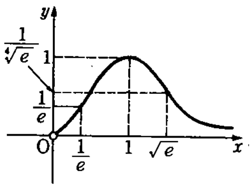
$\ln y=-(\ln x)^2$에서 $\dfrac{y'}{y}=-2(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$ $\quad\therefore\ y'=-2(\ln x)\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1+\ln x}$

$$y''=(-2\ln x)'\times\frac{1}{x}\times y+(-2\ln x)\times\left(\frac{1}{x}\right)'\times y+(-2\ln x)\times\frac{1}{x}\times y'$$

$$=2\left(\frac{1}{x}\right)^{2+\ln x}(\ln x+1)(2\ln x-1)$$

$\lim\limits_{x\to+0}\ln y=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to+0}y=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$

x	$+0$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	∞
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	(0)	↗	$\frac{1}{e}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$	↘	(0)



♣ 해법 연구 ♣

▶ 점근선

① $\lim\limits_{x\to a\pm0}f(x)=\pm\infty$이면 직선 $x=a$

② $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b$이면 직선 $y=b$

③ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\{f(x)-mx\}=n$ 이면 직선 $y=mx+n$

수련문제 31. 다음 각 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $y=xe^x$ (단, $x\geq-3$) 〔서울대〕 (2) $y=(2x^2+3x)e^{-x}$ 〔서강대〕

답 풀이 참조

(최대값 · 최소값(1))

필수예제 31. 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하라.

(1) $f(x)=x^2|x-3|\ (-2\leq x\leq 4)$

(2) $f(x)=xe^{-x^2}\ (-1\leq x\leq 1)$

(3) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{5x+10}$

(4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}\ (-1\leq x\leq 2)$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 최대값 · 최소값

$f'(x)=0$인 점, 미분불가능한 점 등을 기준으로 함수의 극값, 구간의 끝점에서의 함수값 등을 구하고 함수의 증감표를 만들어 함수의 최대값 · 최소값을 구한다.

풀이 (1) $x\geq 3$일 때 $f(x)=x^3-3x^2$에서 $f'(x)=3x^2-6x$

$x<3$일 때 $f(x)=-x^3+3x^2$에서 $f'(x)=-3x^2+6x$

$f'(x)=0$이면 $x=0,\ 2$

$f(x)$는 $x=3$에서 미분불가능

오른쪽 증감표에서

최대값 20, 최소값 0

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	20	↘	0	↗	4	↘	0	↗	16

(2) $f'(x)=1\cdot e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=-e^{-x^2}(2x^2-1)=0$이면

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 오른쪽 증감표에서

최대값 $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$,

최소값 $-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{e}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘	$\frac{1}{e}$

(3) $1-x\geq 0,\ 5x+10\geq 0$에서 $-2\leq x\leq 1$

$f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}+\dfrac{5}{2\sqrt{5x+10}}=\dfrac{5\sqrt{1-x}-\sqrt{5x+10}}{2\sqrt{1-x}\sqrt{5x+10}}=0$이면

$5\sqrt{1-x}=\sqrt{5x+10}$

$25(1-x)=5(x+2)$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$

따라서 오른쪽 증감표에서

최대값 $3\sqrt{2}$, 최소값 $\sqrt{3}$

x	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↗	$3\sqrt{2}$	↘	$\sqrt{15}$

(4) $f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{-(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}=0$이면

$x=1,\ -1$

따라서 오른쪽 증감표에서

최대값 1,

최소값 $-\dfrac{1}{3}$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	↗	1	↘	$\frac{2}{3}$

수련문제 32. 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하라.

(1) $f(x)=x-2\cos x\,(0\leq x\leq 2\pi)$　　(2) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+2}$

(3) $f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$

답 풀이 참조

(최대값・최소값(2))

필수예제 32. 다음을 구하라.

(1) $-1 \leq x \leq 2$에서 함수 $f(x)=ax^3-6ax^2+b(a>0)$의 최대값이 3, 최소값이 -5라고 할 때, 상수 a, b의 값

(2) $f(x)=2\sin^3 x-3\cos^2 x+a$의 최대값이 0일 때, $f(x)$의 최소값

♣ 해법 연구 ♣

▶ 미정계수를 포함한 함수의 최대・최소의 문제는 미정계수를 포함한 채로 증감표를 만들어 방정식을 세운다.

▶ $\sin x=t$라고 치환했을 때, 치환된 문자의 변역에 주의하도록 한다.

풀이 (1) $f'(x)=3ax^2-12ax$
$=3ax(x-4)$

$-1 \leq x \leq 2$에서

$f'(x)=0$이면 $x=0$

오른쪽 증감표에서

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-7a+b$	↗	b	↘	$-16a+b$

최대값은 $f(0)=b=3$, 최소값은 $f(2)=-16a+b=-5$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{b=3}$

(2) $\sin x=t\ (-1 \leq t \leq 1)$, $f(x)=g(t)$라고 하면 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$g(t)=2t^3+3t^2+a-3$

$g'(t)=6t^2+6t$
$=6t(t+1)$

$g'(t)=0$이면 $t=0,\ -1$

오른쪽 증감표에서

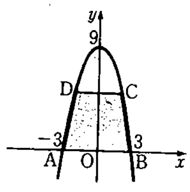
t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$a-2$	↘	$a-3$	↗	$a+2$

최대값은 $g(1)=a+2=0$에서 $a=-2$, 최소값은 $g(0)=a-3=-5$

따라서 $f(x)$의 최소값은 $\boldsymbol{-5}$

(최대・최소의 응용(1))

필수예제 33. 포물선 $y=9-x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형에 내접하는 사다리꼴 ABCD를 오른쪽 그림과 같이 만들 때, 이 사다리꼴의 넓이의 최대값을 구하라.



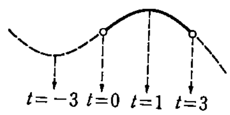
▶ **최대・최소의 응용**

① 적당한 변수를 채택한다.

② 문제의 조건에 맞는 식을 세운다.

③ 변수의 변역에 주의하여 최대・최소값을 구한다.

풀이 C의 좌표를 $(t,\ 9-t^2)$이라 하고, 사다리꼴의 넓이를 $f(t)$라고 하면



$f(t)=\frac{1}{2}(2t+6)(9-t^2)$

$=-t^3-3t^2+9t+27\ (0<t<3)$

$f'(t)=-3t^2-6t+9=-3(t+3)(t-1)=0$에서 $t=1$

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 극대이면서 최대로 된다.

$\therefore$ (최대값)$=f(1)=-1-3+9+27=\mathbf{32}$

수련문제 33. 함수 $f(x)=4\sin^3 x+3\cos^2 x-6\sin x+a$의 최대값이 5일 때 최소값을 구하라.

답 $-\frac{7}{4}$

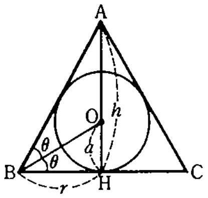
수련문제 34. 포물선 $y=12-x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형에 내접하고 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이의 최대값을 구하라.

답 32

(최대 · 최소의 응용(2))

필수예제 34. 반지름의 길이가 a인 구에 외접하는 직원뿔의 부피의 최소값을 구하라.

풀이 직원뿔의 부피를 V, 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하고 모선이 밑면과 이루는 각을 2θ라고 하면



오른쪽 그림에서 $\tan\theta=\frac{a}{r}$, $\tan 2\theta=\frac{h}{r}$

배각의 공식을 쓰면 $h=\frac{2ar^2}{r^2-a^2}$

$\therefore\ V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{2\pi a}{3}\times\frac{r^4}{r^2-a^2}$

$\frac{dV}{dr}=\frac{2\pi a}{3}\times\frac{2r^3(r^2-2a^2)}{(r^2-a^2)^2}=0\,(r>0)$이면 $r=\sqrt{2}a$

함수의 증감을 조사하면 $r=\sqrt{2}a$일 때 V의 최소값은 $\boldsymbol{\frac{8}{3}\pi a^3}$

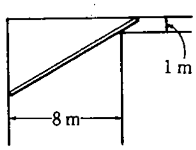
♣ 해법 연구 ♣

▶ 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h로 놓고, r, h 사이의 관계식을 구한 후 부피 V를 r 또는 h의 식으로 나타내도록 한다.

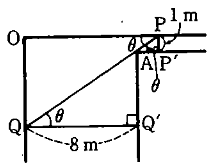
▶ $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(최대값 · 최소값 (3))

필수예제 35. 폭이 8m인 통로와 1m인 통로가 오른쪽 그림과 같이 직각으로 만나고 있다. 막대를 수평으로 들고 이 모서리를 돌아갈 수 있는 막대의 최대 길이를 구하라.



풀이 오른쪽 그림과 같이 $\angle\mathrm{OPQ}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고 $\overline{\mathrm{PQ}}=f(\theta)$라고 하면



$f(\theta)=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}$

$f'(\theta)=\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{8\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\frac{8\tan^3\theta-1}{\sin\theta\tan\theta}=0$이면 $\tan\theta=\frac{1}{2}$

$f(\theta)$의 증감을 조사하면 $\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때 $f(\theta)$는 최소이다.

이 때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ ($f(\theta)$의 최소값)$=\sqrt{5}+4\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

따라서 통과할 수 있는 막대의 최대 길이는 **$5\sqrt{5}$ (m)**

▶ 막대와 벽면이 이루는 각을 θ라 하고 막대의 길이를 θ를 써서 나타내어 $f(\theta)$라고 하여 $f(\theta)$의 최소값을 구하면 된다.

수련문제 35. 반지름의 길이가 a인 구에 내접하는 직원뿔의 부피의 최대값을 구하여라.

답 $\frac{32}{81}\pi a^3$

수련문제 36. $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$가 일정하고 $\angle\mathrm{C}$가 변할 때,

$P=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$의 범위를 구하라. (단, $a>b$)

답 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\leq P<\frac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}$

〔해답 ⇨ p. 183〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 다음 중 곡선 $y=\sqrt[3]{x^2(x-3)}$ 의 점근선은?

① $y=x$　② $y=x-1$　③ $y=x+1$
④ $y=2x-1$　⑤ $y=2x+1$

□□ **2.** 곡선 $y=2x^6-5x^4+3$ 의 변곡점의 x 좌표를 모두 구하면?

① 0　② 0, 1　③ 0, −1
④ 1, −1　⑤ −1, 0, 1

□□ **3.** 다음 곡선의 개형을 그려라.

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$　(2) $y=x+2\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

□□ **4.** 다음 함수 $f(x)$의 최대값과 최소값을 구하라.

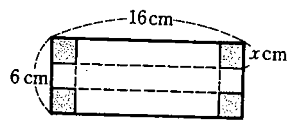
(1) $f(x)=\sin x+\sin 2x\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　〔서강대〕

(2) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x-3\sin x\cos x$

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ $\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(4) $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+x}$ $(x>0)$

□□ **5.** 가로, 세로의 길이가 각각 16 cm, 6 cm 인 직사각형의 종이의 네 모퉁이에서 한 변의 길이가 x cm 인 정사각형을 잘라내고 남은 부분으로 상자를 만들 때, 이 상자의 부피의 최대값을 구하라.



□□ **6.** 밑면의 반지름의 길이가 r 인 직원뿔에 내접하는 직원기둥의 부피를 최대로 하려면, 이 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 얼마로 하면 되는가?

□□ **7.** 겉넓이가 일정한 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h 라고 하자. 이 직원기둥의 부피가 최대일 때의 r 와 h 에 대하여 $r:h$ 를 구하라.

□□ **8.** 곡선 $y=x-\ln(x+1)$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선과 법선이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이의 최소값을 구하라. (단, $x_1\neq0$)

□□ **9.** $f(x)=x^3+(a^2-4a+2)x+(a^3-6a^2+9a-1)$은 x에 관한 삼차함수이다. 다음 물음에 답하라. 〔중앙대〕

(1) $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위를 구하라.

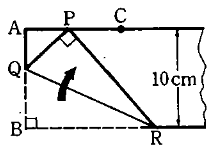
(2) a가 (1)의 범위 내에서 움직일 때, $f(x)$의 극대값과 극소값의 합 $g(a)$를 구하고, $g(a)$의 최대값 및 최소값을 구하라.

□□ **10.** 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원에 내접하는 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최대값을 구하라.

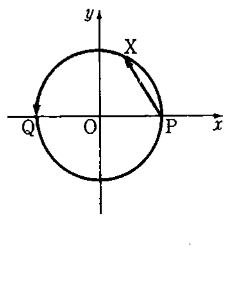
□□ **11.** 곡선 $y=x^2\ln ax\,(a>0)$의 변곡점 P는 a가 변함에 따라 일정한 곡선 위를 움직인다고 한다. 이 P가 움직이는 곡선의 방정식을 구하라.

□□ **12.** 함수 $f(n)=\sqrt[n]{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 최대값과 최소값을 구하라.

□□ **13.** 폭이 10 cm인 종이 테이프를 오른쪽 그림과 같이 접어 꼭지점 B가 선분 AC 위의 점 P에 오도록 하였을 때, 접히는 선분 QR의 길이가 최소가 되게 하려고 한다. 이 때 $\overline{\text{AP}}$의 길이를 구하라.



□□ **14.** $\overline{\text{PQ}}=2$ km를 지름으로 하는 원형의 연못이 있다. P에서 Q까지 가는 데 오른쪽 그림과 같이 연못가의 한 점 X까지는 수영으로, X에서 Q까지는 연못가에 있는 길을 걸어서 가기로 한다. 수영은 매시 2 km, 보행은 매시 4 km의 빠르기로 간다. P에서 Q까지 가는 데 걸리는 시간의 최대값과 최소값을 구하라. 〔서울대〕



6. 방정식·부등식에의 응용

핵심 정리

1 방정식의 실수해

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 x좌표이다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표이다.

(3) 삼차방정식 $f(x)=0$의 근

① $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때

$f(\alpha)\times f(\beta)<0 \Longleftrightarrow f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$f(\alpha)\times f(\beta)=0 \Longleftrightarrow f(x)=0$은 이중근(실근)과 다른 한 실근을 갖는다.

$f(\alpha)\times f(\beta)>0 \Longleftrightarrow f(x)=0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는다.

② $f'(x)=0$이 중근 α를 가질 때

$f(\alpha)=0 \Longleftrightarrow f(x)=0$은 삼중근(실근 α)을 갖는다.

$f(\alpha)\neq 0 \Longleftrightarrow f(x)=0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는다.

③ $f'(x)=0$이 허근을 가질 때, $f(x)=0$은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는다.

2 부등식에의 응용

(1) $f(x)$, $g(x)$의 대소 관계는 $F(x)=f(x)-g(x)$의 부호를 조사하여 결정한다.

(2) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)>g(x)$임을 증명할 때, $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓고

① $F(x)$의 극값이 존재하면 {$F(x)$의 최소값}>0임을 보인다.

② $F'(x)>0$이면 $F(a)>0$임을 보인다.

③ $F'(x)<0$이면 $F(b)>0$임을 보인다.

(곡선의 교점의 개수)

필수예제 36. 두 곡선 $y=x^3-4x^2+6x$, $y=2x^2-3x+a$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나는 a의 값의 범위를 구하라.

(2) 두 곡선이 단 한 점에서 만나는 a의 값의 범위를 구하라.

풀이 두 곡선의 교점의 개수는 방정식

$$x^3-4x^2+6x=2x^2-3x+a$$

즉, $x^3-6x^2+9x-a=0$의 실근의 개수와 같다.

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-a$라고 하면

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$=3(x-1)(x-3)$$
$$f'(x)=0\text{에서 } x=1,\ 3$$

(1) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로

$$f(1)\times f(3)=(4-a)(-a)=a(a-4)<0$$

$\therefore$ **$0<a<4$**

(2) 방정식 $f(x)=0$이 단 하나의 실근을 가져야 하므로

$$f(1)\times f(3)=a(a-4)>0$$

$\therefore$ **$a<0$ 또는 $a>4$**

♣ 해법 연구 ♣

▶ **곡선의 교점의 개수**

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 방정식

$f(x)=g(x)$

즉, $f(x)-g(x)=0$

의 실근의 개수와 같다.

▶ 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 갖고

$f(\alpha)\times f(\beta)<0$

이어야 한다.

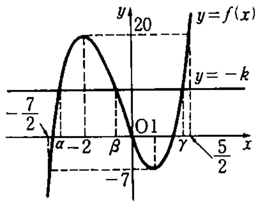
(실근의 존재 범위)

필수예제 37. 방정식 $2x^3+3x^2-12x+k=0$(k는 상수)이 서로 다른 세 실근 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖는다고 할 때, α, β, γ의 존재 범위를 구하라.

풀이 주어진 방정식은

$$2x^3+3x^2-12x=-k$$

이므로, 이 방정식의 실근은 곡선 $y=f(x)=2x^3+3x^2-12x$와 직선 $y=-k$가 만나는 점의 x좌표이다.



$$f'(x)=6x^2+6x-12$$
$$=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$이면 $x=-2,\ 1$

$\therefore$ 극대값 $f(-2)=20$, 극소값 $f(1)=-7$

또, $f(x)=20$이면 $(x+2)^2(2x-5)=0$에서 $x=-2,\ \frac{5}{2}$

$f(x)=-7$이면 $(x-1)^2(2x+7)=0$에서 $x=1,\ -\frac{7}{2}$

위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 x좌표인 α, β, γ의 범위를 구하면

$$-\frac{7}{2}<\alpha<-2<\beta<1<\gamma<\frac{5}{2}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **실근의 존재 범위**

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 존재 범위는 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표의 존재 범위와 일치한다.

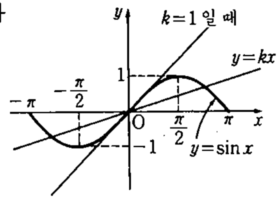
(실근의 개수)

필수예제 38. 방정식 $\sin x=kx$가 $-\pi\leq x\leq\pi$의 범위에서 서로 다른 세 실근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하라.

풀이 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$\begin{cases} y=\sin x & \cdots\cdots ㉠ \\ y=kx & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



그런데 ㉠에서 원점에서의 접선의 기울기는

$$[y']_{x=0}=[\cos x]_{x=0}=1$$

이므로 ㉠, ㉡이 서로 다른 세 점에서 만나려면 위의 그림에서 $\mathbf{0\leq k<1}$

▶ **실근의 개수**

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 일치한다.

수련문제 37. 방정식 $x^3-ax+2=0$이 서로 다른 세 실근을 가지고, 세 근 중 가장 큰 근이 1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 정하라. 답 $3<a<5$

수련문제 38. 방정식 $\ln x=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하라.

답 $0<k<\frac{1}{e}$

(접선의 개수)

필수예제 39. 점 $P(2,\ a)$에서 곡선 $y=x^3$에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있도록 상수 a의 값의 범위를 정하라.

풀이 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $T(t,\ t^3)$에서의 접선의 방정식은

$$y-t^3=3t^2(x-t),\ \text{즉}\ y=3t^2x-2t^3$$

이 접선이 점 $P(2,\ a)$를 지나므로

$$a=6t^2-2t^3,\ \text{즉}\ 2t^3-6t^2+a=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 P에서의 접선이 3개 존재하려면 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

따라서 $f(t)=2t^3-6t^2+a$라고 하면

$$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)=0\text{에서 } t=0,\ 2$$

$$\therefore f(0)\times f(2)=a(a-8)<0 \qquad \therefore \mathbf{0<a<8}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **접선의 방정식**

곡선 $y=f(x)$ 밖의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선은 접점을 $(t,\ f(t))$로 놓고 구한 접선의 방정식

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

에 $x=x_1,\ y=y_1$을 대입하여 t의 값을 구한다.

(대소 관계)

필수예제 40. 다음 물음에 답하라.

(1) $0<x<\pi$일 때 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$의 증감을 조사하라.

(2) $0<\alpha<\beta<\pi$일 때 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$와 $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 크기를 비교하라.

풀이 (1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\ (0<x<\pi)$에서 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$g(x)=x\cos x-\sin x$라고 놓으면

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$$

$0<x<\pi$에서 $x>0$, $\sin x>0$이므로 $g'(x)<0$

따라서 $g(x)$는 감소함수이고, $g(0)=0$이므로

$$0<x<\pi\text{에서 } f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}<0$$

따라서 $0<x<\pi$일 때, $f(x)$는 **감소**한다.

(2) (1)에서 $0<x<\pi$일 때, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$가 감소함수이므로

$0<\alpha<\beta<\pi$일 때

$$f(\alpha)>f(\beta),\ \text{즉}\ \frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$$

양변에 $\dfrac{\alpha}{\sin\beta}$를 곱하면 $\mathbf{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}>\dfrac{\alpha}{\beta}}$

▶ **대소 관계**

구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$, $g(x)$의 크기를 비교할 때, $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $F(x)$의 증감을 조사하여 $F(x)$의 부호를 구한다.

수련문제 39. 점 $P(a,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^x$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있도록 상수 a의 값의 범위를 정하라.

답 $a<-4$ 또는 $a>0$

수련문제 40. $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$일 때, $\tan\beta-\tan\alpha$와 $\beta-\alpha$의 크기를 비교하라.

답 $\tan\beta-\tan\alpha>\beta-\alpha$

(부등식의 증명)

필수예제 41. $x>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

(1) $x\ln x \geqq x-1$ (2) $\cos x > 1-\frac{1}{2}x^2$

증명 (1) $f(x)=x\ln x-x+1\,(x>0)$이라고 하면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x=0\text{에서}\quad x=1$$

$0<x<1$일 때 $f'(x)<0$, $x>1$일 때 $f'(x)>0$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고, 최소가 된다.

즉, $x>0$일 때 $f(x)=x\ln x-x+1\geqq f(1)=0$

$\therefore\ x\ln x\geqq x-1$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

(2) $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2\,(x>0)$이라고 하면

$$f'(x)=-\sin x+x,\quad f''(x)=-\cos x+1\geqq 0$$

따라서 $f'(x)$는 단조증가함수이고, $f'(0)=0$이므로

$x>0$일 때 $f'(x)>0$

따라서 $f(x)$는 단조증가함수이고, $f(0)=0$이므로

$x>0$일 때 $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2>0$

즉, $x>0$일 때 $\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **부등식의 증명**

$f(x)>g(x)$임을 증명할 때, $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, $F(x)$의 증감을 조사하여

$\{F(x)\text{의 최소값}\}>0$

임을 보이면 된다.

(부등식의 성립 조건)

필수예제 42. $x>0$일 때, 부등식 $\sqrt{x}>a\ln x$가 항상 성립하도록 상수 a의 값의 범위를 정하라.

풀이 $f(x)=\sqrt{x}-a\ln x\,(x>0)$라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$$

(i) $a>0$일 때 $f'(x)=0$이면 $x=4a^2$이고

$0<x<4a^2$일 때 $f'(x)<0$, $x>4a^2$일 때 $f'(x)>0$

즉, $f(x)$는 $x=4a^2$에서 극소이고, 최소가 된다.

따라서 $x>0$일 때 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(4a^2)=2a-a\ln 4a^2=a(2-\ln 4a^2)>0$이어야 하므로 $0<a<\frac{1}{2}e$

(ii) $a=0$이면 $f(x)=\sqrt{x}>0$ ($\because x>0$)이므로 항상 성립한다.

(iii) $a<0$이면 $\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$에서 $f(x)>0$이 항상 성립할 수는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a의 값의 범위는 $\mathbf{0\leqq a<\frac{1}{2}e}$

수련문제 41. $x>0$일 때 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

(1) $x>\ln x$ (2) $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$

답 풀이 참조

수련문제 42. $x>0$일 때 부등식 $e^{ax}\geqq a^2x$가 항상 성립하도록 상수 a의 값의 범위를 정하라.

답 $0\leqq a\leqq e$

〔해답 ⇨ p. 186〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 방정식 $(x^2-3x+1)e^x+1=0$의 실근의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

□□ **2.** 곡선 $y=x^3+3x^2-6x+k$가 두 점 $A(-1,\ -7)$, $B(2,\ 2)$를 연결하는 선분 AB와 적어도 한 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 정하라.

□□ **3.** 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

(1) $x>0$일 때 $2x-x^2<\ln(1+x)^2<2x$

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$

□□ **4.** 다음 물음에 답하라. 〔94. 포항공대〕

(1) 구간 $[0,\ 1]$에서 방정식 $2\ln(\cos x)+x^2=0$의 해는 $x=0$ 하나뿐임을 보여라.

(2) 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right|$이 발산함을 보여라.

□□ **5.** 두 함수 $f(x)=4x^3-x^2-x+3$, $g(x)=2x^2+5x+a$에 대하여 $-1<x<2$일 때 항상 $f(x)>g(x)$가 성립하도록 상수 a의 값의 범위를 정하라.

□□ **6.** x에 관한 방정식 $x^3-3x^2+3ax+a-2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하라. (단, a는 실수)

□□ **7.** 다음 물음에 답하라.

(1) $x>0$일 때 $2\sqrt{x}>\ln x$임을 보이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$의 값을 구하라.

(2) 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 개형을 그려라.

(3) $a>0$일 때 방정식 $a^x=x^a$의 실근의 개수를 구하라.

7. 속도와 가속도

핵심 정리

1 직선 위의 점의 운동

수직선 위의 동점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$로 주어질 때

(1) $t=a$에서 $t=b$일 때까지의 P의 평균속도 : $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(2) 시각 t에서의 P의 속도 : $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$, 속력 : $|v|=\left|\dfrac{dx}{dt}\right|=|f'(t)|$

(3) 시각 t에서의 P의 가속도 : $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$

2 평면 위의 점의 운동

평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 위치가 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$로 주어질 때

(1) 시각 t에서의 P의 속도

$$\vec{v}=(v_x,\ v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(f'(t),\ g'(t))$$

(2) 시각 t에서의 P의 속력

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$$

(3) 시각 t에서의 P의 가속도

$$\vec{a}=\left(\frac{dv_x}{dt},\ \frac{dv_y}{dt}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t),\ g''(t))$$

3 길이 • 넓이 • 부피의 변화율

어떤 물체의 길이(l), 넓이(S), 부피(V)의 시각 t에 대한 변화율은 각각

$$\frac{dl}{dt},\ \frac{dS}{dt},\ \frac{dV}{dt}$$

(낙하 운동)

필수예제 43. 지상 25m의 높이에서 처음 속도 20m/sec로 똑바로 위로 던져 올린 물체의 t초 후의 지상에서의 높이를 sm라고 하면 $s=25+20t-5t^2$이라고 한다.
다음 물음에 답하라.
(1) 던진 후 3초 후의 속도를 구하라.
(2) 최고 높이에 도달하는 것은 던진 후 몇 초 후인가?
(3) 최고 높이에 도달할 때까지의 평균속도를 구하라.

풀이 (1) $v=\dfrac{ds}{dt}=20-10t$에서 $t=3$일 때

$v=20-10\cdot3=\mathbf{-10}$ **(m/sec)**

(2) 최고 높이에서는 $v=0$이므로

$20-10t=0 \quad \therefore\ \mathbf{t=2}$ **(초)**

(3) $t=2$일 때 최고 높이에 도달하므로 평균속도는

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{(25+20\cdot2-5\cdot2^2)-25}{2-0}=\mathbf{10\ (m/sec)}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **평균속도와 속도**

① (평균속도)$=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

② (속도)$=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{ds}{dt}$

▶ **운동 방향** (속도의 방향)

운동의 방향이 바뀌는 지점은 속도 v의 부호가 바뀌는 지점이므로 $v=0$일 때이다.

(직선 위의 점의 운동)

필수예제 44. 수직선 위의 동점 P의 시각 t에서의 좌표 x가 $x=3\sin 2t+4\cos 2t$라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) $t=\frac{\pi}{4}$일 때 P의 속도와 가속도

(2) $0\leq t\leq\pi$에서 P가 실제로 운동한 거리

풀이 (1) t시각의 속도를 v, 가속도를 α라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=6\cos 2t-8\sin 2t$$

$$\alpha=\frac{d^2x}{dt^2}=-12\sin 2t-16\cos 2t$$

따라서 $t=\frac{\pi}{4}$일 때 $\boldsymbol{v=-8,\ \alpha=-12}$

(2) $v=6\cos 2t-8\sin 2t=0$이면 $\tan 2t=\frac{3}{4}$ ……㉠

$0\leq t\leq\pi$에서 ㉠의 해를 $t=\theta,\ \frac{\pi}{2}+\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라고 하면

$\sin 2\theta=\frac{3}{5},\ \cos 2\theta=\frac{4}{5}$

이므로 오른쪽 표에서 실제로 운동한 거리는

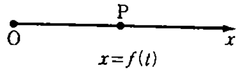
$|5-4|+|(-5)-5|+|4-(-5)|$

$=\mathbf{20}$

t	0	…	θ	…	$\frac{\pi}{2}+\theta$	…	π
v		+	0	−	0	+	
x	4	↗	5	↘	−5	↗	4

♣ 해법 연구 ♣

▶ **직선 위의 점의 운동**



① $v=\frac{dx}{dt}$

② $\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$

▶ 운동 방향(속도의 방향)

① $v>0$이면 양의 방향

② $v<0$이면 음의 방향

(평면 위의 점의 운동)

필수예제 45. 평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) P의 속도의 크기의 최대값

(2) $t=\frac{\pi}{3}$일 때, P의 속도벡터와 가속도벡터가 이루는 각 θ (단, $0\leq\theta\leq\pi$)

풀이 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{\alpha}$라고 하면

$$\vec{v}=(1-\cos t,\ \sin t),\ \vec{\alpha}=(\sin t,\ \cos t)$$

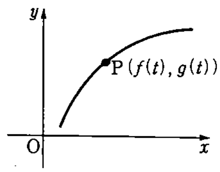
(1) $|\vec{v}|=\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}=\sqrt{2(1-\cos t)}=\left|2\sin\frac{t}{2}\right|\leq 2$

따라서 $|\vec{v}|$의 최대값은 $\mathbf{2}$

(2) $t=\frac{\pi}{3}$일 때 $\vec{v}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \vec{\alpha}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{v}||\vec{\alpha}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (0\leq\theta\leq\pi)\quad\therefore\ \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6}}$$

▶ **평면 위의 점의 운동**



① $\vec{v}=(f'(t),\ g'(t))$

② $|\vec{v}|=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

③ $\vec{\alpha}=(f''(t),\ g''(t))$

▶ $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각을 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

수련문제 43. 평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 위치가 $(6t^2,\ t^3-12t)$일 때, $t=1$에서의 P의 속도와 가속도의 크기를 구하라.

답 속도 15, 가속도 $6\sqrt{5}$

(비스듬히 발사된 물체의 운동)

필수예제 46. 지면과 θ의 각을 이루는 방향으로 처음 속도 $100\,\text{m/sec}$로 발사된 물체의 t초 후의 위치 $(x,\ y)$는

$$x=100t\cos\theta,\quad y=100t\sin\theta-5t^2$$

이라고 한다. 다음 물음에 답하라. (단, $0°<\theta<90°$)

(1) $\theta=60°$일 때 이 물체의 운동 방향이 지면에 대하여 위쪽으로 $30°$의 각을 이루는 지점의 높이를 구하라.

(2) $\theta=60°$일 때 이 물체가 도달하는 최고 지점의 높이를 구하라.

(3) 이 물체가 가장 멀리까지 가려면 θ를 얼마로 하면 되겠는가? 또, 이 때 발사 지점에서 낙하 지점까지의 거리를 구하라.

풀이 (1) $\theta=60°$이므로 $x=50t,\ y=50\sqrt{3}\,t-5t^2$ ……㉠

따라서 t초 후의 속도 $\vec{v}=(v_x,\ v_y)$는

$$v_x=\frac{dx}{dt}=50,\quad v_y=\frac{dy}{dt}=50\sqrt{3}-10t \qquad \cdots\cdots ㉡$$

그런데 $\vec{v}$의 방향이 지면에 대하여 위쪽으로 $30°$의 각을 이루므로

$$\frac{v_y}{v_x}=\frac{50\sqrt{3}-10t}{50}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\ t=\frac{10}{\sqrt{3}}$$

이 때의 높이는 ㉠에서 $y=\mathbf{\dfrac{1000}{3}}$ **(m)**

(2) 최고 지점에서는 $v_y=0$이므로

㉡에서 $v_y=50\sqrt{3}-10t=0 \quad \therefore\ t=5\sqrt{3}$

이 때의 높이는 ㉠에서 $y=$ **375 (cm)**

(3) 이 물체가 지면에 도달하면 높이가 0이므로

$y=5t(20\sin\theta-t)=0\,(t>0)$에서 $t=20\sin\theta$

이 때 발사 지점에서 낙하 지점까지의 거리는

$$x=100\times 20\sin\theta\cdot\cos\theta=1000\sin 2\theta \qquad \cdots\cdots ㉢$$

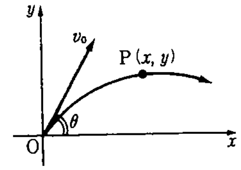
x가 최대일 때 $2\theta=90° \quad \therefore\ \theta=45°$

이 때 ㉢에서 $x=1000\text{(m)}$

답 **$\theta=45°$, 1000 m**

♣ 해법 연구 ♣

▶ **비스듬히 발사된 물체의 운동**



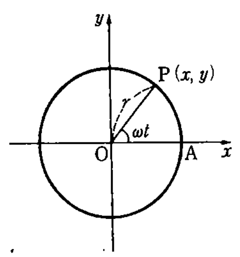
$$\begin{cases} x=v_0t\cos\theta \\ y=v_0t\sin\theta+g(t) \end{cases}$$

① (운동 방향)=(속도의 방향)

② 최고 지점에서 $v_y=0$

③ 지면에 도달했을 때 $y=0$

수련문제 44. 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위를 일정한 각속도 $w\,\text{(rad/sec)}$로 운동하고 있는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 있다. $t=0$일 때의 P의 위치가 $\mathrm{A}(r,\ 0)$이라고 한다. 다음 물음에 답하라. (단, $w>0$)



(1) $x,\ y$를 t의 함수로 나타내라.

(2) P의 속도와 가속도의 크기를 구하라.

(3) P의 속도벡터와 가속도벡터가 이루는 각을 구하라.

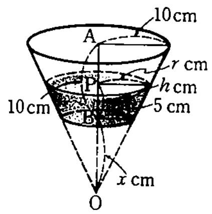
답 (1) $x=r\cos wt,\ y=r\sin wt$ (2) $|\vec{v}|=rw,\ |\vec{a}|=rw^2$ (3) $90°$

(길이 · 넓이 · 부피의 변화율)

필수예제 47. 윗면의 반지름의 길이는 10 cm, 밑면의 반지름의 길이는 5 cm, 높이가 10 cm 인 직원뿔대 모양의 그릇에 매초 25 cm^3 의 속도로 물을 담고 있다. 수면의 높이가 5 cm 로 되는 순간의 수면의 상승 속도를 구하라. 또, 이 때의 수면의 넓이의 변화율을 구하라.

풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{BO}=x(\mathrm{cm})$라고 하면

$$(x+10):10=x:5 \quad \therefore\ x=10(\mathrm{cm})$$



물을 넣기 시작하여 t 초 후의 수면의 높이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm 라고 하면

$$r=\frac{1}{2}(h+10)$$

이므로 이 때의 부피 V 는

$$V=\frac{1}{3}\pi\left\{\frac{1}{2}(h+10)\right\}^2(h+10)-\frac{1}{3}\pi\cdot5^2\cdot10$$

$$=\frac{\pi}{12}(h^3+30h^2+300h)$$

$$\therefore\ \frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}(3h^2+60h+300)\times\frac{dh}{dt}$$

$\frac{dV}{dt}=25$, $h=5$를 대입하면 $\frac{dh}{dt}=\frac{4}{9\pi}$ (cm/sec)

또, 이 때의 수면의 넓이 S는

$$S=\pi\left\{\frac{1}{2}(h+10)\right\}^2=\frac{1}{4}\pi(h^2+20h+100)$$

$$\therefore\ \frac{dS}{dt}=\frac{1}{4}\pi(2h+20)\times\frac{dh}{dt}=\frac{10}{3}\ (\mathrm{cm^2/sec})$$

답 **수면의 상승 속도 $\frac{4}{9\pi}$ (cm/sec), 넓이의 변화율 $\frac{10}{3}$ ($\mathrm{cm^2}$/sec)**

♣ 해법 연구 ♣

▶ **길이 · 넓이 · 부피의 변화율**

시각 t에 따라 변화하는 길이(l), 넓이(S), 부피(V)의 시각 t에 대한 변화율은 각각

$$\frac{dl}{dt},\ \frac{dS}{dt},\ \frac{dV}{dt}$$

이다.

수련문제 45. 매초 10 cm^3 의 비율로 부피가 불어나는 공 모양의 고무풍선이 있다. 이 고무풍선의 반지름의 길이가 5 cm 로 되는 순간의 반지름의 길이의 변화율을 구하라.
또, 이 때의 고무풍선의 겉넓이의 변화율을 구하라.

답 반지름의 길이의 변화율 $\frac{1}{10\pi}$ cm/sec, 겉넓이의 변화율 4 $\mathrm{cm^2}$/sec

수련문제 46. 키가 165 cm 인 사람이 지상 3 m 의 높이에 있는 가로등의 바로 아래에서부터 일직선으로 매분 90 m 의 속도로 걸어갈 때, 이 사람의 그림자의 끝의 속도를 구하라.
또, 이 때의 그림자의 길이의 변화율을 구하라.

답 그림자의 끝의 속도 200 m/분, 그림자의 길이의 변화율 110 cm/분

수련문제 47. 정육면체의 각 모서리의 길이가 매초 5 cm 의 비율로 증가할 때, 각 모서리의 길이가 12 cm 로 되는 순간의 부피의 변화율을 구하라. 또, 이 때의 겉넓이의 변화율을 구하라.

답 부피의 변화율 2160 $\mathrm{cm^3}$/sec, 겉넓이의 변화율 720 $\mathrm{cm^2}$/sec

〔해답 ⇨ p.188〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 원점 O에서 동시에 출발하여 x축 위를 움직이는 두 동점 P, Q가 있다. 움직이기 시작하여 t분 후의 P, Q의 위치는 각각

$$x_1=2t^3-9t^2+6t,\quad x_2=-3t^2+12t$$

이고, P와 Q의 중점을 M이라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) 출발한 지 2분 후의 M의 속도

(2) 출발하여 처음 5분 동안에 M이 실제로 운동한 거리

□□ **2.** 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 좌표를 각각

$$t^2(t^2-8t+18),\quad mt$$

라고 하자. P와 Q의 속도가 같게 되는 때가 3회 있기 위한 m의 값의 범위를 구하라.

□□ **3.** 평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 위치가

$$(x,\ y)=(t^3-5t^2-4at+3,\ t^3+t^2+(8a-72)t+1)$$

이라고 할 때, 점 P의 속력이 0으로 되는 순간이 존재하도록 상수 a의 값을 정하라.
(단, $t\geqq 0$)

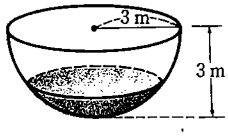
□□ **4.** 평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 위치가 $(x,\ y)=(e^t\cos t,\ e^t\sin t)$라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) 속도벡터 $\vec{v}$와 위치벡터 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각 α의 크기

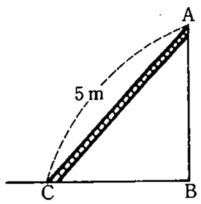
(2) 속도벡터 $\vec{v}$와 가속도벡터 $\vec{\alpha}$가 이루는 각 β의 크기

(3) 가속도벡터 $\vec{\alpha}$와 위치벡터 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각 γ의 크기 (단, $0\leqq\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqq\pi$)

□□ **5.** 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 3 m인 반구 모양의 용기에 수면의 상승 속도를 1 m/분으로 유지하면서 물을 넣으려고 한다. 물을 넣기 시작한 지 t분$(0<t<3)$이 되었을 때, 수면의 넓이의 변화율 $v\,\text{m}^2$/분을 t의 함수로 나타내라.



□□ **6.** 길이가 5 m인 사다리가 오른쪽 그림과 같이 벽에 기대어져 있다. 이 사다리의 아래쪽 끝점 C가 매초 12 cm의 속도로 벽에서 미끌어지고 있을 때, 이 사다리의 위 끝 A가 지상에서 3 m인 위치에 있을 때, A가 미끌어져 내려오는 속도를 구하라.



〔해답 ⇨ p. 189〕

고 급 문 제 (II)

1. 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=1$, $f'(a)=2$, $g(a)=3$, $g'(a)=4$라고 할 때, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{af(x)-xf(a)}{ag(x)-xg(a)}$의 값을 구하라.

2. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)-3f(a)}{h}=12$일 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$의 값을 구하라.

3. 양의 실수의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$가 임의의 양수 x, y에 대하여

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

를 만족시키고 $f'(1)=a$라고 할 때, $f'(3)$의 값을 구하라.

4. 다음을 구하라.

(1) x^{10}을 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지

(2) $2x^{10}+ax^5+bx+c$가 $(x+1)^3$으로 나누어 떨어질 때, 상수 a, b, c의 값

5. 곡선 $y=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$에서의 법선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 Q라고 할 때, 다음 물음에 답하라. (단, $a \neq 1$)

(1) 선분 PQ의 길이를 a의 식으로 나타내라.

(2) P가 곡선을 따라 점 $(1,\ 1)$에 한없이 가까워질 때, Q의 극한의 위치를 구하라.

6. $a>0$일 때 x의 함수 $f(x)=\dfrac{-ax+a^2+1}{x^2-4}$의 극소값과 그 때의 x의 값을 구하라.

7. x의 함수 $f(x)=\dfrac{bx+1}{x^2+ax}$ $(a>0,\ b>0)$이 2개의 극값 -1, -4를 가지도록 상수 a, b의 값을 정하라.

8. $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$에서 함수 $f(x)=\dfrac{2\cos x-\sin x}{1-\sin x}$의 최대값을 구하라.

9. 곡선 $y=e^{-2x}$의 제 1 사분면 위의 점 $\mathrm{T}(t,\ e^{-2t})$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) S를 t의 함수로 나타내라.

(2) S의 최대값을 구하라.

10. xy평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 위치가 $(x,\ y)=(4\cos t,\ \sin 2t)$라고 한다. $0\leqq t\leqq 2\pi$에서 점 P의 속도의 크기의 최대값과 최소값을 구하라.

11. $0<x<2\pi$일 때, 함수 $f(x)=ax+e^{-x}\sin x$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) $g(x)=f'(x)$라고 할 때, $g(x)$의 극값을 구하라.

(2) 함수 $f(x)$의 극대값과 극소값이 꼭 한 개씩 존재하도록 상수 a의 값의 범위를 정하라.

12. 함수 $f(x)=\dfrac{tx+1}{x^2+t^2}$ (t는 양의 상수)의 최소값을 $g(t)$라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $g(t)$를 구하라.

(2) $g(t)$의 증가・감소를 조사하라.

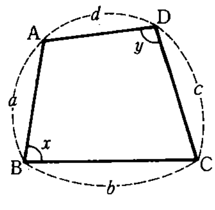
(3) $g(t)$가 취하는 값의 범위를 구하라.

13. 곡선 $y=\cos x\,(0\leqq x\leqq \pi)$ 위의 점 $\mathrm{T}(t,\ \cos t)$에서의 접선을 l이라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) 원점에서 접선 l까지의 거리 d를 구하라.

(2) d의 최대값을 구하라.

14. 사각형 ABCD의 네 변의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$, $\overline{\mathrm{CD}}=c$, $\overline{\mathrm{DA}}=d$로서 일정하고 $\angle \mathrm{B}=x$, $\angle \mathrm{D}=y$라고 할 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라고 한다. 다음 물음에 답하라.



(1) $\dfrac{dy}{dx}$를 x, y로 나타내라.

(2) $\dfrac{dS}{dx}$를 x, y로 나타내라.

(3) S가 최대일 때, x, y의 관계를 구하라.

1. 부정적분

핵심 정리

1 부정적분

$F'(x)=f(x)$이고 C를 적분상수라고 할 때

(1) $F(x)$를 $f(x)$의 **원시함수** 또는 **부정적분**이라고 한다.

(2) $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)$, $\int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx=f(x)+C$

2 부정적분의 기본 공식

(1) $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$ (k는 상수)

(2) $\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$ (복부호동순)

(3) $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$, $\int(ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$ ($a\neq0$, $n\neq-1$)

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$, $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$ ($a\neq0$)

(4) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$, $\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$, $\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+C$

$\int\cos x\,dx=\sin x+C$, $\int\mathrm{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+C$, $\int\mathrm{cosec}\,x\cot x\,dx=-\mathrm{cosec}\,x+C$

(5) $\int e^x dx=e^x+C$, $\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C$ ($a>0$, $a\neq1$)

(부정적분)

필수예제 1. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int\frac{x-3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (2) $\int 2^x(2^x-1)\,dx$ (3) $\int\frac{3x-4\cos^2 x}{x\cos^2 x}\,dx$

풀이 (1) $\int\frac{x-3}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int(x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}})\,dx=\mathbf{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+C}$

(2) $\int 2^x(2^x-1)\,dx=\int(4^x-2^x)\,dx=\mathbf{\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+C}$

(3) $\int\frac{3x-4\cos^2 x}{x\cos^2 x}\,dx=\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{4}{x}\right)dx=\int\left(3\sec^2 x-\frac{4}{x}\right)dx$

$=\mathbf{3\tan x-4\ln|x|+C}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 부정적분의 기본 공식

$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$

$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

($a>0$, $a\neq1$)

수련문제 1. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int\frac{2x^2-3}{x^3}\,dx$ (2) $\int(2^x+3^x)^2 dx$ (3) $\int\frac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}\,dx$

답 (1) $2\ln|x|+\frac{3}{2x^2}+C$ (2) $\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$ (3) $\sin x+\tan x+C$

(접선의 기울기와 부정적분)

필수예제 2. 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$을 지나는 곡선 $y=f(x)\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 위의 점 $P(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $(\tan x+2\cot x)^2$이라고 할 때, 함수 $f(x)$를 구하라.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $(\tan x+2\cot x)^2$이므로 $f'(x)=(\tan x+2\cot x)^2$

$$\therefore f(x)=\int(\tan x+2\cot x)^2\,dx$$
$$=\int(\tan^2 x+4+4\cot^2 x)\,dx$$
$$=\int(\sec^2 x+4\operatorname{cosec}^2 x-1)\,dx$$
$$=\tan x-4\cot x-x+C$$

점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$을 지나므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-4-\frac{\pi}{4}+C=0$에서 $C=\frac{\pi}{4}+3$

$$\therefore \boldsymbol{f(x)=\tan x-4\cot x-x+\frac{\pi}{4}+3}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $f'(x)$일 때

$$\boldsymbol{f(x)=\int f'(x)\,dx}$$

▶ $\tan^2 x+1=\sec^2 x$
$\cot^2 x+1=\operatorname{cosec}^2 x$

(도함수와 부정적분)

필수예제 3. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$$

를 만족시키고 $f'(0)=1$이라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $f(0)$의 값을 구하라. (2) $f'(x)$를 구하라.

(3) $f(x)$를 구하라.

풀이 (1) 주어진 등식에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$에서 $\boldsymbol{f(0)=0}$

(2) $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+3xh(x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+3x(x+h)\right\}=\boldsymbol{3x^2+1}$$

(3) $f(x)=\int(3x^2+1)\,dx=x^3+x+C$에서 $f(0)=C=0$

$$\therefore \boldsymbol{f(x)=x^3+x}$$

▶ $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\int f'(x)\,dx=f(x)+C$

수련문제 2. 점 $(1,\ e)$를 지나는 곡선 $y=f(x)\ (x>0)$ 위의 점 $P(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $e^x+\frac{1}{x}$이라고 할 때, 함수 $f(x)$를 구하라.

답 $f(x)=e^x+\ln x$

수련문제 3. 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여

(i) $f(x)>0$ (ii) $f(x+y)=f(x)f(y)$ (iii) $f'(0)=1$

을 만족하는 함수 $f(x)$를 구하라. 〔94. 서강대 응용〕

답 e^x

(연속함수의 원시함수)

필수예제 4. 함수 $f(x)$는 구간 $(-\pi,\ \pi)$에서 연속이고

$$f'(x)=\begin{cases}\sin x(\cot x-3) & (-\pi<x<0)\\ \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x} & (0<x<\pi)\end{cases}$$

이다. $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$일 때 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하라.

풀이 (i) $-\pi<x<0$일 때

$$f(x)=\int\sin x(\cot x-3)\,dx=\int(\cos x-3\sin x)\,dx$$
$$=\sin x+3\cos x+C_1$$
$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1+C_1=0\text{에서}\quad C_1=1$$

(ii) $0<x<\pi$일 때

$$f(x)=\int\frac{\sin^2x}{1+\cos x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2x}{1+\cos x}\,dx=\int(1-\cos x)\,dx$$
$$=x-\sin x+C_2$$

$x=0$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)$

따라서 $3+C_1=C_2$에서 $C_1=1$이므로 $C_2=4$

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1+4=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+3}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **함수의 연속**

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a-0}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$

$=f(a)$

(부정적분의 응용)

필수예제 5. 함수 $f(x)$에 대하여 $\int f(x)\,dx=xf(x)-2x^3+x^2$ 이 성립하고 $f(0)=1$이라고 할 때, $f(-1)$의 값을 구하라.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)=1\cdot f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$$

$\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)$이므로

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$$
$$\therefore\ xf'(x)=6x^2-2x,\ \text{즉}\ f'(x)=6x-2$$

따라서 $f(x)=\int(6x-2)\,dx=3x^2-2x+C$이고 $f(0)=1$이므로 $C=1$

$$\therefore\ f(-1)=3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+1=\boldsymbol{6}$$

▶ $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)$

$\dfrac{d}{dx}\{xf(x)\}=f(x)+xf'(x)$

수련문제 4. 모든 실수 구간에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $x>0$일 때 $f'(x)=\cos x$, $x<0$일 때 $f'(x)=k\sin x$이고 $f(\pi)=1$, $f(-\pi)=2$라고 할 때, 상수 k의 값을 구하라.

답 $\dfrac{1}{2}$

수련문제 5. $f(2)=0$인 함수 $f(x)$가 항상 $\int f(x)\,dx=xf(x)+x^3$을 만족시킨다고 할 때, $f(1)$의 값을 구하라.

답 $\dfrac{9}{2}$

〔해답 ⇨ p.192〕

실력 강화 문제

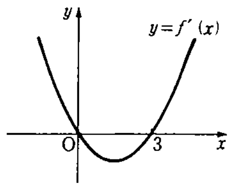
□□ **1.** 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int(x-2)\left(2x-\frac{1}{x}\right)dx$　　(2) $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

(3) $\int(2^x+x^2)\,dx$　　(4) $\int\cos x(3+2\tan x)\,dx$

(5) $\int\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$　　(6) $\int\frac{dx}{1+\tan^2 x}+\int\frac{dx}{1+\cot^2 x}$

□□ **2.** $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같은 포물선이고 함수 $f(x)$의 극대값이 4, 극소값이 $-\frac{1}{2}$이라고 할 때, $f(x)$를 구하라.



□□ **3.** 원점을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식이 $y=(3t^2-t)x+g(t)$라고 할 때, $g(t)$를 구하라.

□□ **4.** 함수 $f(x)$에 대하여 $f''(x)=\sin x$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$이 성립할 때, 함수 $f(x)$를 구하라.

□□ **5.** 모든 실수 구간에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3 & (|x|>1) \\ 3x^2-2x & (|x|<1) \end{cases}$$

를 만족하고 $f(-2)=10$이라고 할 때, $f(2)$의 값을 구하라.

□□ **6.** 모든 실수 x에 대하여 $(x^3-1)f'(x)+3x^2f(x)=2x+1$을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 해를 구하라.

□□ **7.** $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음 두 가지 조건을 만족시킨다.

(i) $f(x)$는 $x>0$에서 2회 미분가능하고 $f(1)=0$, $f'(1)=2$이다.

(ii) 모든 양수 x, y에 대하여 항상 $f(xy)=yf(x)+xf(y)$이다.

다음 물음에 답하라. 〔중앙대〕

(1) $x>0$에서 $f'(x)=\frac{f(x)}{x}+2$임을 증명하라.

(2) $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$를 각각 구하라.

2. 치환적분과 부분적분

핵심 정리

1 치환적분

(1) $g(x)=t$ 라고 놓으면 $g'(x)\,dx=dt$ 이므로 $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$

(2) $\int f(x)\,dx=F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\,(a\neq 0)$

2 유리함수의 적분

(1) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$

(2) 분모가 인수분해되는 유리함수는 부분분수로 분해하여 적분한다.

3 삼각함수의 적분

(1) 곱의 꼴로 표시된 삼각함수는 합·차의 꼴로 고쳐서 적분한다.

(2) $\begin{cases} \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x) \\ \cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x) \end{cases}$

4 부분적분

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int f(x)\,g'(x)\,dx$$

($f(ax+b)$의 적분)

필수예제 6. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int (e^x+e^{-x})^2 dx$ (2) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}\,dx$

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ 일 때

$\int f(ax+b)\,dx$

$=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\,(a\neq 0)$

▶ $\int \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

풀이 (1) $\int (e^x+e^{-x})^2 dx=\int (e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}\,dx=\int \frac{x(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1})}{(2x+1)-(x+1)}\,dx$

$$=\int(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1})\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$$

수련문제 6. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int 2^{3x-1}dx$ (2) $\int\{\sin(1-2x)+\cos(3x-5)\}\,dx$

답 (1) $\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}+C$ (2) $\frac{1}{2}\cos(1-2x)+\frac{1}{3}\sin(3x-5)+C$

(치환적분)

필수예제 7. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (2) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ (3) $\int \tan x\,dx$

풀이 (1) $1+x^2=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$ $\therefore\ x\,dx=\frac{1}{2}dt$

$\therefore$ (준식) $=\int\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\boldsymbol{\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}+C}$

(2) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}dx=dt$

$\therefore$ (준식) $=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\boldsymbol{\ln|\ln x|+C}$

(3) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x\,dx=dt$

$\therefore$ (준식) $=\int\frac{-1}{t}dt=-\ln|t|+C=\boldsymbol{-\ln|\cos x|+C}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **치환적분**

$g(x)=t$로 놓으면

$g'(x)\,dx=dt$

$\therefore\ \int f(g(x))g'(x)\,dx$

$=\int f(t)\,dt$

(유리함수의 적분)

필수예제 8. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int\frac{x+1}{x^3-1}dx$ (2) $\int\frac{x+2}{x(x+1)^2}dx$

풀이 (1) $\frac{x+1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$

에서 a, b, c를 구하면 $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ (준식) $=\int\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx$

$=\boldsymbol{\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln(x^2+x+1)+C}$

(2) $\frac{x+2}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}$

에서 $a+b=0$, $2a+b+c=1$, $a=2$ $\therefore\ b=-2$, $c=-1$

$\therefore$ (준식) $=\int\left\{\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$

$=2\ln|x|-2\ln|x+1|+(x+1)^{-1}+C$

$=\boldsymbol{2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C}$

▶ **유리함수의 적분**

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

를 적용할 수 없는 경우 부분분수로 분해하여 부정적분을 구한다.

▶ $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$

수련문제 7. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ (2) $\int\cot x\,dx$

(3) $\int\frac{x^3-x-2}{x^3-x^2+x-1}dx$ 〔연세대〕 (4) $\int\frac{1}{x(x+1)^3}dx$

답 (1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$ (2) $\ln|\sin x|+C$

(3) $x+\ln\left|\frac{x^2+1}{x-1}\right|+C$ (4) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C$

(부분적분)

필수예제 9. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x\sin x\,dx$ (2) $\int x^2e^x dx$ (3) $\int \ln x\,dx$

풀이 (1) $\int x\sin x\,dx=(-\cos x)\cdot x-\int(-\cos x)\cdot 1\,dx$

$=\boldsymbol{-x\cos x+\sin x+C}$

(2) $\int x^2e^x dx=(e^x)\cdot x^2-\int e^x\cdot 2x\,dx$

$=e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x+\int e^x\cdot 2dx=\boldsymbol{e^x(x^2-2x+2)+C}$

(3) $\int \ln x\,dx=\int 1\cdot\ln x\,dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\boldsymbol{x\ln x-x+C}$

(삼각함수의 적분)

필수예제 10. $f'(x)=\begin{cases}\sin 3x\cos x & (x>0)\\ \cos^2 x & (x<0)\end{cases}$

인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$일 때, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하라.

풀이 $x>0$일 때 $f(x)=\int\sin 3x\cos x\,dx=\int\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)\,dx$

$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$ ……㉠

$x<0$일 때 $f(x)=\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$

$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_2$ ……㉡

㉠에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+C_1=0$ $\therefore C_1=-\frac{1}{8}$

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 ㉠, ㉡에서

$-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+C_1=C_2$ $\therefore C_2=-\frac{1}{2}$ $\therefore \boldsymbol{f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **부분적분**

$\int f'(x)g(x)\,dx$

$=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$

▶ 부분적분을 적용해서 한 번에 끝나지 않을 때는 다시 한 번 부분적분을 한다.

▶ **삼각함수의 적분**

① 곱의 꼴로 된 삼각함수는 합·차의 꼴로 고쳐서 적분한다.

② $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

③ $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$

$\cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$

수련문제 8. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x^2\cos x\,dx$ (2) $\int(\ln x)^2 dx$

답 (1) $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$ (2) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

수련문제 9. $x=0$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\begin{cases}\cos^3 x & (x>0)\\ \cos 3x\cos 2x & (x<0)\end{cases}$$

이고 $f(\pi)=0$일 때, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하라.

답 $-\frac{3}{5}$

(부분적분의 응용)

필수예제 11. 다음 물음에 답하라.

(1) $I=\int e^x \sin x\,dx$를 구하라.

(2) 함수 $f(x)$는 미분가능하고 $f(0)=\frac{3}{2}$이며 모든 실수 x에 대하여 관계식 $f(x)+f'(x)=1-\sin x$가 성립한다고 할 때, $f(x)$를 구하라. 〔경북대〕

(힌트 $g(x)=e^x f(x)$로 놓고 $g'(x)$를 생각하라.)

♣ 해법 연구 ♣

▶ 부분적분

$$\int f''(x)g(x)\,dx$$
$$=f'(x)g(x)-\int f'(x)g'(x)\,dx$$
$$=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)+\int f(x)g''(x)\,dx$$

풀이 (1) $I=\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$

$=e^x\sin x-\left\{e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)\,dx\right\}$

$=e^x(\sin x-\cos x)-I$

따라서 $2I=e^x(\sin x-\cos x)$에서 $\boldsymbol{I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C}$

(2) $g(x)=e^x f(x)$라고 하면

$g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}=e^x(1-\sin x)$

$\therefore\ g(x)=e^x f(x)=\int g'(x)\,dx=\int e^x(1-\sin x)\,dx$

$=\int(e^x-e^x\sin x)\,dx=e^x-\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

$f(0)=\frac{3}{2}$에서 $g(0)=f(0)=1+\frac{1}{2}+C=\frac{3}{2}$ $\therefore\ C=0$

$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2}(2-\sin x+\cos x)}$

(sec x 의 적분)

필수예제 12. $f(x)=\int\sec x\,dx$에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln 3$일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하라.

▶ $\tan\frac{x}{2}=t$일 때

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

이므로

$\sec x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$

$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$

를 이용할 수도 있다.

풀이 $f(x)=\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$

에서 $\sin x=t$라고 하면 $\cos x\,dx=dt$

$\therefore\ f(x)=\int\frac{1}{1-t^2}dt=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$

$=\frac{1}{2}(-\ln|1-t|+\ln|1+t|)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

그런데 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln 3$에서 $C=0$ $\therefore\ \boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ln(2+\sqrt{3})}$

수련문제 10. $\int e^x\cos x\,dx$를 구하라.

답 $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

수련문제 11. $f(x)=\int\operatorname{cosec} x\,dx$에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln(2-\sqrt{3})$일 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하라.

답 $-\frac{1}{2}\ln 3$

〔해답 ⇨ p. 194〕

실력 강화 문제

1. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$　　(2) $\int x(x+2)^4 dx$　　(3) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

2. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \sin 3x \cos x\, dx$　　(2) $\int \tan^2 x\, dx$　　(3) $\int \tan^4 x\, dx$

3. 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$　　(2) $\int \frac{1}{e^x+1}dx$　　(3) $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$

4. $xf'(x)=\ln x$이고 $f(1)=\frac{9}{2}$인 함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)-3\ln x=0$의 해를 구하면?

① e　　② e^2　　③ e^3
④ $\ln 2$　　⑤ $\ln 3$

5. $f(x)=\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx$에 대하여 $f(1)=\frac{1}{2}\ln 2$라고 할 때, $f(2)$의 값은?

① $1+\ln 3$　　② $1+\ln 5$　　③ $\frac{1}{2}(1+\ln 3)$
④ $\frac{1}{2}(1+\ln 5)$　　⑤ $3+\ln 5$

6. 모든 실수 x에 대하여 $F(x)=\int f(x)\,dx=xf(x)-x^2\sin x$가 성립하고 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$라고 할 때, $f(\pi)$의 값을 구하라.

7. 두 점 A(1, 2), B($\sqrt{e}$, k)를 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $x\ln x$일 때, k의 값을 구하라.

□□ **8.** 함수 $f(x)=\int(x^2+1)e^x dx$에 대하여 $f(1)-f(0)$의 값을 구하라.

□□ **9.** 항상 양의 값을 갖는 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=2f(x)f(y)$인 관계를 만족시키고, $f'(0)=a$일 때, 다음 물음에 답하라. 〔중앙대〕

(1) $f(0)=\dfrac{1}{2}$임을 증명하라.

(2) $f'(x)=2af(x)$임을 증명하라.

(3) $f(x)$를 구하라.

□□ **10.** 함수 $f(x)=\int\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$에서 $f(1)=\ln(3-2\sqrt{2})$일 때, $f(2)$의 값을 구하라.

□□ **11.** 다음 물음에 답하라.

(1) 임의의 양수 x에 대하여 항상 등식 $\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{c}{\sqrt{x}}$가 성립하도록 상수 a, b, c의 값을 정하라.

(2) 부정적분 $\int\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}dx$를 구하라.

□□ **12.** 다음 물음에 답하라.

(1) $\tan x=t$일 때 $\sin 2x$, $\cos 2x$를 t에 관한 식으로 나타내라.

(2) $\tan x=t$로 치환하여 부정적분 $\int\dfrac{dx}{1+\sin 2x}$, $\int\dfrac{dx}{1-\cos 2x}$를 구하라.

□□ **13.** 수열 $\{I_n\}$의 제 n항이 $I_n=\int x^n e^x dx$일 때, I_n을 I_0을 써서 나타내라. 〔연세대〕

□□ **14.** $f(x)=\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$에서 $f(0)=-1$일 때, $f(1)+\sqrt{2}$의 값을 구하라.

□□ **15.** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\{f(x)+g(x)\}'=xe^x$, $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=-(2x+1)e^{2x}$이고 $f(0)=f'(0)=-1$, $g(0)=0$이라고 할 때, $g(3)$의 값을 구하라.

3. 정 적 분

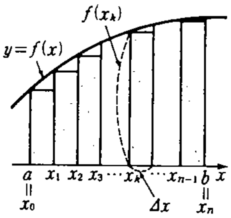
핵심 정리

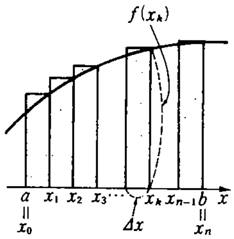
[1] 구분구적법

(1) 어떤 도형을 n개의 구간으로 분할하여 각 소구간의 넓이 또는 부피의 근사값의 합 S_n을 구한 후, $n\to\infty$일 때의 S_n의 극한값으로써 주어진 도형의 넓이 또는 부피를 구할 수 있다. 이러한 방법을 **구분구적법**이라고 한다.

(2) 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $f(x)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$\left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\times\frac{b-a}{n}\right)$$





[2] 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\times\dfrac{b-a}{n}$라고 할 때

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

[3] 정적분의 성질

$a,\ b,\ c$가 상수일 때

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ (2) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$

(3) $\displaystyle\int f(x)\,dx=F(x)+C \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

(4) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$ (5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

(6) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$ (복부호동순)

(7) $f(x)$: 기함수 $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$, $f(x)$: 우함수 $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

(8) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_0^a\{f(x)+f(-x)\}\,dx$, $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$

[4] 정적분의 치환적분

(1) $g(x)=t,\ g(a)=\alpha,\ g(b)=\beta \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$

(단, 구간 $[a,\ b]$에서 $g(x)$는 단조함수일 것)

(2) $\sqrt{a^2-x^2}$의 꼴 $\Rightarrow$ $x=a\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$로 치환

(3) $\sqrt{a^2+x^2}$, $\dfrac{1}{a^2+x^2}$의 꼴 $\Rightarrow$ $x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 치환

[5] 정적분의 부분적분

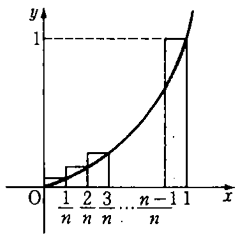
$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx=\Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

(구분구적법(1))

필수예제 13. 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 각 구간의 폭은 $\dfrac{1}{n}$이고, 각 구간의 오른쪽 끝점에서의 함수값은 차례로

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \left(\frac{3}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{k}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n}{n}\right)^2$$



이므로 잘려진 각 부분을 직사각형으로 보면, 이들 직사각형의 넓이는 차례로

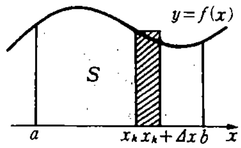
$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$\therefore\ S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 구분구적법 [1]



$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x$$

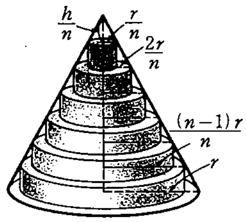
$$\left(\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

(구분구적법(2))

필수예제 14. 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피 V를 구분구적법으로 구하라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n등분하고 각 분점을 지나 밑면에 평행인 평면으로 원뿔을 자르면, 자른 자리의 반지름은 위에서부터 차례로

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \cdots,\ \frac{kr}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$



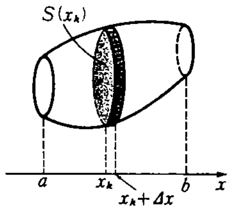
이고 분할된 각 부분을 원기둥으로 보고 부피를 구하면 이들의 높이는 모두 $\dfrac{h}{n}$이므로

$$V_n=\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}+\cdots+\pi\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}$$

$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\therefore\ V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)=\mathbf{\frac{1}{3}\pi r^2h}$$

▶ 구분구적법 [2]



$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\Delta x$$

$$\left(\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

수련문제 12. 곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하라.

답 4

수련문제 13. 반지름의 길이가 r인 구의 부피 V를 구분구적법으로 구하라.

답 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

(정 적 분)

필수예제 15. 다음 정적분을 구하라.

(1) $\int_0^1 (-x^2+4x+5)\,dx$ (2) $\int_0^{\pi} (e^x+\cos x)\,dx$

(3) $\int_0^3 |x^2+2x-3|\,dx$ (4) $\int_4^5 \frac{2}{x^2-4x+3}\,dx$

풀이 (1) $\int_0^1 (-x^2+4x+5)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_0^1=-\frac{1}{3}+2+5=\mathbf{\frac{20}{3}}$

(2) $\int_0^{\pi} (e^x+\cos x)\,dx=\left[e^x+\sin x\right]_0^{\pi}=(e^{\pi}+\sin\pi)-(e^0+\sin 0)=\mathbf{e^{\pi}-1}$

(3) $|x^2+2x-3|=|(x+3)(x-1)|=\begin{cases}-x^2-2x+3 & (0\leqq x\leqq 1)\\ x^2+2x-3 & (1\leqq x\leqq 3)\end{cases}$

$\therefore$ (준식) $=\int_0^1 (-x^2-2x+3)\,dx+\int_1^3 (x^2+2x-3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_1^3=\mathbf{\frac{37}{3}}$

(4) $\frac{2}{x^2-4x+3}=\frac{2}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}$

$\therefore$ (준식) $=\int_4^5 \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right]_4^5=\mathbf{\ln\frac{3}{2}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **정 적 분**

$\int f(x)\,dx=F(x)+C \Longrightarrow$

$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b$

$=F(b)-F(a)$

(정적분의 치환적분(1))

필수예제 16. 다음 정적분을 구하라.

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}$ (2) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$

풀이 (1) $e^x=t$ 라고 하면 $e^x dx=dt$ 에서 $dx=\frac{1}{e^x}dt=\frac{1}{t}dt$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=e$

$\therefore$ (준식) $=\int_1^e \frac{dt}{t(t+1)^2}=\int_1^e \left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right\}dt$

$=\left[\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right]_1^e=\mathbf{\ln\frac{2}{e+1}+\frac{1}{e+1}+\frac{1}{2}}$

(2) $2+\cos x=t$ 라고 하면 $-\sin x\,dx=dt$

$x=0$ 일 때 $t=3$, $x=\pi$ 일 때 $t=1$

$\therefore$ (준식) $=\int_3^1 \frac{-1}{t}\,dt=\int_1^3 \frac{1}{t}dt=\left[\ln|t|\right]_1^3=\mathbf{\ln 3}$

▶ **정적분의 치환적분 [1]**

$g(x)=t$ 이면 $g'(x)\,dx=dt$

$g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$ 이면

$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx$

$=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$

(단, $t=g(x)$는 단조함수)

수련문제 14. 다음 정적분을 구하라.

(1) $\int_0^3 |x^2-4|\,dx$ (2) $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

답 (1) $\frac{23}{3}$ (2) $1+\ln\frac{3}{2}$ (3) $\ln\frac{2e}{e+1}$ (4) $\frac{1}{4}$

(정적분의 치환적분 (2))

필수예제 **17.** 다음 정적분을 구하라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{3+x^2}$

풀이 (1) $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\cos\theta,\ dx=2\cos\theta\,d\theta$

또, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ (준식)$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$=\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$3+x^2=3(1+\tan^2\theta)=3\sec^2\theta,\ dx=\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$

또, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ (준식)$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}d\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\pi}{9}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 정적분의 치환적분 [2]

① $\sqrt{a^2-x^2}$의 꼴은

$x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

로 치환한다.

② $\sqrt{a^2+x^2}$, $\frac{1}{a^2+x^2}$의 꼴은

$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

로 치환한다.

(정적분의 부분적분)

필수예제 **18.** 다음 정적분을 구하라.

(1) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$

풀이 (1) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$=\displaystyle\frac{1}{3}e^3-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}e^3+\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}}$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$

$=\displaystyle -e^\pi-1+\Big[e^x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$

$\therefore\ 2\displaystyle\int_0^\pi e^x\cos x\,dx=-(e^\pi+1)$

$\therefore\ \displaystyle\boldsymbol{\int_0^\pi e^x\cos x\,dx=-\frac{1}{2}(e^\pi+1)}$

▶ 정적분의 부분적분

$\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

$=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$

$\displaystyle-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

수련문제 **15.** 다음 정적분을 구하라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{2+x^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\sin t\,dt$ 〔숙명여대〕

답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ (3) $\frac{1}{4}(e^2+1)$ (4) $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$

(정적분의 구간 분할)

필수예제 19. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leqq 1) \\ 2-x & (x\geqq 1)\end{cases}$ 일 때, $\int_1^3 xf(x-1)\,dx$ 의 값을 구하라.

풀이 $x-1=t$ 라고 하면 $dx=dt$, $x=t+1$
또, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=3$ 일 때 $t=2$

$$\therefore \text{(준식)}=\int_0^2 (t+1)f(t)\,dt$$
$$=\int_0^1 (t+1)t^2dt+\int_1^2 (t+1)(2-t)\,dt$$
$$=\int_0^1 (t^3+t^2)\,dt+\int_1^2 (-t^2+t+2)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^2=\mathbf{\frac{7}{4}}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **정적분의 구간 분할**

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (a\leqq x\leqq c) \\ h(x) & (c\leqq x\leqq b)\end{cases}$$
$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$
$$=\int_a^c g(x)\,dx+\int_c^b h(x)\,dx$$

(정적분과 수열)

필수예제 20. 다음을 구하라.

(1) n 이 자연수일 때 정적분 $\int_0^1 (1+x)\cos\frac{x}{n}\,dx$ 의 값

(2) (1) 정적분의 값을 I_n 이라고 할 때 $\lim_{n\to\infty} I_n$ 의 값

풀이 (1) $\text{(준식)}=\left[(1+x)\left(n\sin\frac{x}{n}\right)\right]_0^1-\int_0^1 n\sin\frac{x}{n}dx$

$$=2n\sin\frac{1}{n}+n\left[n\cos\frac{x}{n}\right]_0^1$$
$$=\mathbf{2n\sin\frac{1}{n}-n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$$

(2) $\frac{1}{n}=h$ 라고 하면 $n\to\infty$ 일 때 $h\to 0$

$$\therefore \text{(준식)}=\lim_{h\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin h}{h}-\frac{1-\cos h}{h^2}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{2\cdot\frac{\sin h}{h}-\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos h}\right\}$$
$$=2-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

수련문제 16. 함수 $f(x)=x^3-2ax^2$ 이 $0<x<1$ 에서 극소값을 가질 때, 다음 물음에 답하라.

〔고려대〕

(1) a 가 취하는 값의 범위를 구하라.

(2) $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ 를 a 의 함수로 표시하라.

(3) $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ 의 최소값을 구하라.

답 풀이 참조

(치환적분의 응용 (1))

필수예제 21. $0 \leq x \leq \pi$일 때 함수 $f(x)=\int_0^x \sin^2(t-x)\,dt$의 최대값을 구하라.

풀이 $f(x)=\int_0^x \sin^2(t-x)\,dt=\int_0^x \frac{1}{2}\{1-\cos 2(t-x)\}\,dt$

$$=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2(t-x)\right]_0^x=\frac{1}{2}\left\{x+\frac{1}{2}\sin(-2x)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$$

따라서 $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \geq 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

그런데 $0 \leq x \leq \pi$이므로 $f(x)$는 $x=\pi$에서 최대이다.

따라서 구하는 최대값은 $f(\pi)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

▶ $f'(x) \geq 0 \Longrightarrow$ $f(x)$는 증가함수

(치환적분의 응용 (2))

필수예제 22. 다음 물음에 답하라.

(1) $f(x)$가 연속함수일 때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$ 가 성립함을 증명하라. 〔연세대〕

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$의 값을 구하라.

풀이 (1) $x=\frac{\pi}{2}-t$라고 하면 $dx=-dt$이고 $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$

또, $x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)(-1)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$라 하고 $x=\frac{\pi}{2}-t$라고 하면

$\sin x=\cos t$, $\cos x=\sin t$, $dx=-dt$

또, $x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$

$$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\cdot(-1)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$$

즉, $2I=\frac{\pi}{2}$에서 $I=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

▶ $\sin x \Longrightarrow \cos t$로 변형하려면 여각의 삼각함수의 공식을 이용한다.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t \end{cases}$$

▶ ① $\int_a^b f(\sin x)\cos x\,dx$에서 $\sin x=t$로 치환한다.

② $\int_a^b f(\cos x)\sin x\,dx$에서 $\cos x=t$로 치환한다.

▶ $(a\sin x+b\cos x)^n$ 꼴의 적분은 합성하여 한 개의 항으로 만든다. 즉,

$a\sin x+b\cos x$
$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$
$\left(\text{단, } \tan\theta=\frac{b}{a}\right)$

수련문제 17. $\int_0^{\pi}(a\sin x-\pi)^2 dx$를 최소가 되게 하는 실수 a의 값을 구하라. 답 4

〔해답 ⇨ p. 196〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 다음 정적분의 값을 구하라.

(1) $\int_0^{\pi}(\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1-\cos 2x})\,dx$　　(2) $\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|\,dx$

□□ **2.** 다음 정적분의 값을 구하라.

(1) $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3 x\,dx$

□□ **3.** 다음 정적분의 값을 구하라.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$　　(2) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$

(3) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$　　(4) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$

□□ **4.** $0<a<b$ 이고 $\int_0^a |x-b|\,dx=\int_0^b |x-a|\,dx$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하라.

□□ **5.** $f(x)$는 x에 대한 이차함수이고

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=-8,\ \int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=0,\ \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx=0$$

이라고 할 때, $f(2)$의 값을 구하라.

□□ **6.** $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-x)(x+x^n)}{1+x^n}$ (n은 정수)일 때 $\int_0^2 f(x)\,dx$의 값을 구하라.

□□ **7.** a, b가 양의 실수이고, m, n이 자연수일 때,

$$A=m\int_0^a x^{m+n-1}dx+n\int_0^b y^{m+n-1}dy,\quad B=a^m b^n$$

의 대소를 비교하라.

〔94. 고려대 응용〕

□□ **8.** 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1$, $a_{n+1}-a_n=\int_n^{n+1} t\,dt\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$일 때, 제 n항 a_n을 n에 관한 식으로 나타내라.

□□ **9.** 연속함수 $f(x)$가 $f(x)+f(-x)=x^2-1$을 만족시킬 때, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$의 값을 구하라.

□□ **10.** 다음 물음에 답하라.

(1) n이 자연수일 때, 정적분 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2n-1)x\,dx$를 구하라.

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{\frac{\sin x}{3}+\frac{\sin 3x}{5}+\frac{\sin 5x}{7}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n+1}\right\}dx$의 값을 구하라. 〔건국대〕

□□ **11.** 다음 물음에 답하라.

(1) 평균값의 정리를 써라.

(2) 실수 $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$이 $c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$을 만족시킨다. 이 때 방정식 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$이 0과 1 사이에서 실근을 가짐을 증명하라. 〔서울대〕

□□ **12.** 자연수 n에 대하여 $a_n=\int_0^1 \{x+(n-1)\}e^{\frac{x}{n}}\,dx$라고 한다. 다음 물음에 답하라.

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 n항까지의 합 S_n을 n의 식으로 나타내라. 〔경북대〕

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$의 값을 구하라.

□□ **13.** $f(n)=\int_0^1 x^2(1-x)^n dx\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$로 주어지는 수열 $\{f(n)\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$의 합을 구하라.

□□ **14.** $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$임을 증명하라. (단, $n\geq 2$)

(2) I_5와 I_6을 각각 구하라.

4. 정적분의 응용

핵심 정리

1 무한급수와 정적분

구간 $[a, b]$에서 $f(x)$가 연속인 함수일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx \left(단,\ \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+b\cdot\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{b}{n}=\int_a^{a+b} f(x)\,dx=\int_0^b f(a+x)\,dx=\int_0^1 b\cdot f(a+bx)\,dx$

2 정적분으로 표시된 함수의 도함수

함수 $f(x)$가 연속이고 a가 상수일 때

(1) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)\,dt=f(x+a)-f(x)$

(3) $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$

3 정적분으로 표시된 함수의 극한

함수 $f(x)$가 연속이고 a가 상수일 때

(1) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=f(a)$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)\,dt=f(a)$

《참고》 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 평균은 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

4 정적분과 부등식

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $f(x)\geqq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx\geqq 0$ (단, 등호는 $f(x)=0$일 때 성립)

(2) $f(x)\geqq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx\geqq\int_a^b g(x)\,dx$ (단, 등호는 $f(x)=g(x)$일 때 성립)

(무한급수와 정적분(1))

필수예제 23. 다음 무한급수의 합을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

풀이 (1) (준식) $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\int_1^2 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{7}{3}$

(2) (준식) $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^2=\mathbf{\ln 2}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 무한급수와 정적분 [1]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{p}{n}$

$=\int_a^{a+p} f(x)\,dx$

$=\int_0^1 p\cdot f(a+px)\,dx$

수련문제 18. 다음 무한급수의 합을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^7\cdot\frac{1}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{\pi k}{n}$

답 (1) 410 (2) $\frac{1}{2}$

(무한급수와 정적분(2))

필수예제 24. 다음 무한급수의 합을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\left(\cos\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{2\pi}{n}+3\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+n\cos\frac{n\pi}{n}\right)$

풀이 (1) (준식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$=\left[2\sqrt{x}\right]_1^2=\mathbf{2\sqrt{2}-2}$

(2) (준식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right)\cdot\frac{\pi}{n}$

$=\int_0^1 x(\cos\pi x)\cdot\pi\,dx=\left[x\sin\pi x\right]_0^1-\int_0^1\sin\pi x\,dx$

$=\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=-\frac{2}{\pi}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **무한급수와 정적분 [2]**

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\int_0^1 f(x)\,dx$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\int_a^{a+1}f(x)\,dx$

(정적분과 극한)

필수예제 25. $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}(e^t+\ln t)\,dt$ 의 값을 구하라.

풀이 $f(t)=e^t+\ln t$ 라 하고 $\int f(t)\,dt=F(t)+C$ 라고 하면

(준식) $=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left[F(t)\right]_1^{x^2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)$

$=2F'(1)$

그런데 $F'(t)=f(t)$에서 $F'(1)=f(1)=e$

∴ (준식) $=2F'(1)=\mathbf{2e}$

▶ **정적분과 극한**

$\int f(t)\,dt=F(t)+C$

$\Longrightarrow\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$

$=F'(a)=f(a)$

수련문제 19. 다음 무한급수의 합을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$ 〔과기대〕

(2) $f(x)=xe^{x^2}$일 때 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}(e^9-e)$

수련문제 20. $F(x)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{x}(\cos t+e^t)\,dt$ 일 때 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{F(x)}{x-\frac{\pi}{6}}$ 를 구하라. 〔전남대〕

답 $e^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

수련문제 21. $\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\int_2^{2+x}(t^2+t+2)\,dt$ 의 값을 구하라.

답 4

(정적분으로 표시된 함수(1))

필수예제 26. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$를 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하라.

풀이 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=k$($k$는 상수)라고 하면 $f(x)=x\cos x+k$ ……㉠

$$\therefore\ k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos x+k)\,dx$$
$$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+\Big[kx\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}k=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}k$$

즉, $k=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}k$에서 $\left(1-\frac{\pi}{2}\right)k=\frac{\pi}{2}-1$ $\therefore\ k=-1$

㉠에서 $f(0)=k=\mathbf{-1}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **정적분으로 표시된 함수 [1]**

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)\,dt$
(a, b는 상수)
$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt=k$
(k는 상수)로 놓는다.

(정적분으로 표시된 함수(2))

필수예제 27. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 항상

$$xf(x)=x^2+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다고 할 때, $\int_0^2 f(x)\,dx$의 값을 구하라.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=2x+f(x)\qquad\therefore\ f'(x)=2$$
$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 2dx=2x+C\qquad\text{……㉠}$$

또, 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$

㉠에서 $f(1)=2+C=1$이므로 $C=-1$ $\therefore\ f(x)=2x-1$

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(2x-1)\,dx=\Big[x^2-x\Big]_0^2=\mathbf{2}$$

▶ **정적분으로 표시된 함수 [2]**

$f(x)=g(x)+\int_a^x f(t)\,dt$
(a는 상수)

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\\ \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt=0\end{cases}$$

수련문제 22. $f(x)=\sin^2 x+\int_0^{\pi}tf(t)\,dt$일 때 $f(x)$를 구하라. 〔경희대〕

답 $\sin^2 x+\dfrac{\pi^2}{2(2-\pi^2)}$

수련문제 23. $f(x)=e^x+x-\int_0^x f'(t)e^t dt$일 때 함수 $f(x)$를 구하라.

답 $x+1$

수련문제 24. 연속함수 $f(x)$가 모든 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt=e^x-ae^{2x}\int_0^1 f(t)e^{-t}dt$$

를 만족할 때, 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 구하라.

답 $f(x)=e^x-2e^{2x}$, $a=\dfrac{1}{3-2e}$

(정적분과 도함수)

필수예제 28. 함수 $f(t)=t\ln t$에 대하여 함수

$F(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt$의 극값을 구하라. 〔부산대〕

풀이 $F'(x)=f(x^2)\cdot 2x-f(x)=(x^2\ln x^2)\cdot 2x-x\ln x$

$=4x^3\ln x-x\ln x=x(2x+1)(2x-1)\ln x$

따라서 $F'(x)=0$이면

$x>0$이므로 $x=\frac{1}{2},\ 1$

$F(1)=\int_1^1 f(t)\,dt=0$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		+	0	−	0	+
$F(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

$F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} f(t)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{t^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{16}\ln 2+\frac{3}{64}$

$\therefore$ **극대값 $\frac{1}{16}\ln 2+\frac{3}{64}$, 극소값 0**

♣ 해법 연구 ♣

▶ 정적분과 도함수

$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$

$=f(g(x))\,g'(x)$

$\quad -f(h(x))\,h'(x)$

(정적분과 부등식)

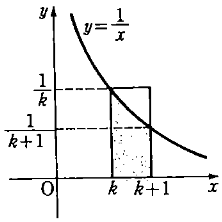
필수예제 29. 양의 정수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$$

증명 $f(x)=\frac{1}{x}\,(x>0)$이라고 하면

$f(x)$는 감소함수이므로 구간 $[k,\ k+1]$

(k는 자연수)에서



$\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{k}$

$\therefore\ \frac{1}{k+1}\cdot 1<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\frac{1}{k}\cdot 1$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^n=\ln n$

즉, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n \quad \therefore\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$ ……㉠

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^{n+1}=\ln(n+1)$

즉, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$

▶ 정적분과 부등식

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$f(x)\geq g(x)$

$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$

(단, 등호는 $f(x)=g(x)$일 때 성립)

수련문제 25. $0\leq x\leq\pi$에서 함수 $F(x)=\int_0^x(\cos t+\sin t)\,dt$의 최대값을 구하라. 〔건국대〕

답 $\sqrt{2}+1$

수련문제 26. 다음 부등식을 증명하라. 〔과기대〕

$$\frac{1}{4}(e^2-1)\leq\int_0^1 e^{x^2+x}dx\leq\frac{1}{2}(e^2-1)$$

답 풀이 참조

〔해답 ⇨ p. 200〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 다음 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{4k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1^4+2^4+\cdots+n^4)}{(1+2+\cdots+n)(1^5+2^5+\cdots+n^5)}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\times\cdots\times(2n-1)}$

□□ **2.** 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x (t-1)f(t)\,dt=\frac{1}{4}x^4-x$를 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2} f(t)\,dt$의 값을 구하라.

□□ **3.** $x\geqq 1$일 때 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$는 항상 양의 값을 갖고, $\{f(x)\}^2-1=\int_1^x f(t)\cdot\frac{1}{t}dt$를 만족시킨다. 이 때 $\int_1^e f(x)\,dx$의 값을 구하라.

□□ **4.** $f(x)=\frac{1}{2}x^2-e^2x\int_1^e f'(t)\ln t\,dt$를 만족하는 함수 $f(x)$를 구하라. 〔94. 성균관대 응용〕

□□ **5.** $x>0$에서 정의되고 $f(x)=x^{-\int_1^x f(t)\,dt}$를 만족하는 연속함수 $f(x)$는 $f(x)=\frac{1}{x}$임을 증명하라.

〔94. 고려대 응용〕

□□ **6.** 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\int_0^x t^2 f(t)\,dt=\frac{2}{3}x^2\int_0^x f(t)\,dt$를 만족시키고, $f(1)=2$라고 할 때, 함수 $f(x)$를 구하라.

□□ ***7.*** 연속함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = p\sin x + q\cos x$를 만족시키고 $f(0)=1$이라고 한다. 다음 물음에 답하라. [illegible]

(1) 실수 p, q의 값을 정하라.

(2) $F(x)=f(x)-\cos x$라고 하면 $\int_{-x}^{x} F(t)\,dt = 0$임을 증명하라.

□□ ***8.*** 함수 $f(x)=\int_{-x}^{x}(t^2-k^4)\,dt$의 극대값을 a_k라고 할 때, 무한급수 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n^7}$의 합을 구하라.

□□ ***9.*** $f(x)=x+\int_{0}^{x} t f'(x-t)\,dt$를 만족하는 연속함수 $f(x)$를 구하라.

□□ ***10.*** $a \leqq x \leqq b$에서 연속인 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 증명하라.

$$\left\{\int_{a}^{b} f(x)\,g(x)\,dx\right\}^2 \leqq \int_{a}^{b}\{f(x)\}^2 dx \cdot \int_{a}^{b}\{g(x)\}^2 dx$$

□□ ***11.*** $f_n(x)=\int_{0}^{x}(x-t)\sin nt\,dt\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에 대하여 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f_n(x)$의 최대값을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 극한값을 구하라.

□□ ***12.*** 함수 $f(x)$는 $0 \leqq x \leqq 1$에서 연속이고 $0 < t \leqq 1$인 모든 실수 t에 대하여 $\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,f(t\sqrt{x})\,dx = e^t$을 만족한다고 할 때, $f(x)$를 구하라. [과기대]

□□ ***13.*** n, k는 자연수이고 $n \geqq k$이다. 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $\left(\frac{k}{n},\ e^{\frac{k}{n}}\right)$에서의 접선의 x절편과 y절편의 곱을 $S_{n,k}$라고 한다. 다음 물음에 답하라. [서울대]

(1) $S_{n,k}$를 구하라.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}S_{n,k}$의 극한값을 구하라.

□□ ***14.*** $A=\int_{0}^{1} x^3 e^x dx$, $B=\int_{0}^{1} x^3 e^{-x} dx$, $C=\int_{1}^{e} x(\ln x)^3 dx$의 대소를 비교하라.

5. 넓 이

핵심 정리

[1] 곡선과 좌표축 사이의 넓이

(1) 곡선 $y=f(x)\,(a\leqq x\leqq b)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S

⇨ $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

(2) 곡선 $x=g(y)\,(c\leqq y\leqq d)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S

⇨ $S=\int_c^d |g(y)|\,dy$

(3) $x=f(t)$, $y=g(t)\,(a\leqq t\leqq b)$로 표시되는 곡선과 x축 및 두 직선 $x=f(a)$, $x=f(b)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S ⇨ $S=\int_a^b |g(t)f'(t)|\,dt$

(4) $x=f(t)$, $y=g(t)\,(a\leqq t\leqq b)$로 표시되는 곡선과 y축 및 두 직선 $y=g(a)$, $y=g(b)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S ⇨ $S=\int_a^b |f(t)g'(t)|\,dt$

[2] 두 곡선 사이의 넓이

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)\,(a\leqq x\leqq b)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S

⇨ $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

(2) 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)\,(c\leqq y\leqq d)$와 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S

⇨ $S=\int_c^d |f(y)-g(y)|\,dy$

[3] 정적분의 공식 활용

$\alpha<\beta$라고 할 때

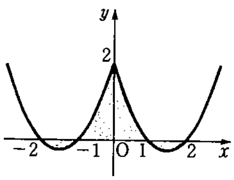
$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6},\quad \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12},\quad \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

(곡선과 x축 사이의 넓이)

필수예제 30. 곡선 $y=x^2-3|x|+2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.

풀이 $x\geqq 0$일 때 $y=x^2-3x+2$
$=(x-1)(x-2)$

$x<0$일 때 $y=x^2+3x+2$
$=(x+1)(x+2)$



따라서 구하는 넓이를 S라고 하면

$$S=2\int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx-2\int_1^2 (x^2-3x+2)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1-2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=2$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 곡선 $y=f(x)\,(a\leqq x\leqq b)$와 x축 사이의 넓이

$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

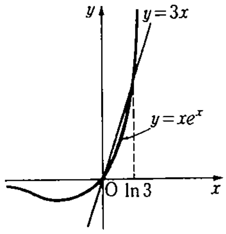
수련문제 27. $\int_1^x f(2t)\,dt=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.

답 1

(두 곡선 사이의 넓이(1))

필수예제 31. 곡선 $y=xe^x$과 직선 $y=3x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라. 〔서울대〕

풀이 $xe^x-3x=x(e^x-3)=0$이면 $x=0$, $\ln 3$이므로 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 0, $\ln 3$이다.
또, $0\leqq x\leqq \ln 3$일 때 $x(e^x-3)\leqq 0$이므로
곡선 $y=xe^x$이 직선 $y=3x$의 아래쪽에 있다.
따라서 구하는 넓이 S는



$$S=\int_0^{\ln 3}(3x-xe^x)\,dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\ln 3}-\left[xe^x\right]_0^{\ln 3}+\int_0^{\ln 3}e^x dx$$
$$=\frac{3}{2}(\ln 3)^2-3\ln 3+\left[e^x\right]_0^{\ln 3}$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}(\ln 3)^2-3\ln 3+2}$$

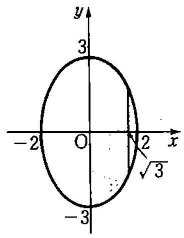
♣ 해법 연구 ♣

▶ **두 곡선 사이의 넓이**
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 사이의 $x=a$에서 $x=b$까지의 넓이 S는
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

(두 곡선 사이의 넓이(2))

필수예제 32. 두 직선 $x=0$, $x=\sqrt{3}$과 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라. 〔서강대〕

풀이 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이 S는



$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=3\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면
$$dx=2\cos\theta\,d\theta$$
$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\cos\theta$$
또, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$
$$\therefore\ S=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta\,d\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=6\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=6\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\mathbf{2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

▶ $\int_0^a\sqrt{b^2-x^2}$일 때
$x=b\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$로 놓는다.

수련문제 28. 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos 2x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$와 두 직선 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라. 〔서강대, 과기대〕

답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$

수련문제 29. 반지름의 길이가 r인 원의 넓이를 적분으로 구하라. 〔서울대, 전남대〕

답 πr^2

(곡선과 접선 사이의 넓이)

필수예제 33. 다음 물음에 답하라.

(1) 원점에서 곡선 $y=e^x$에 그은 접선의 방정식을 구하라.

(2) 위의 곡선과 접선 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.

풀이 (1) 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-e^t=e^t(x-t) \qquad \therefore\ y=e^t x-e^t(t-1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 접선이 원점을 지나므로 $-e^t(t-1)=0 \quad \therefore\ t=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 ㉠에서 $\boldsymbol{y=ex}$

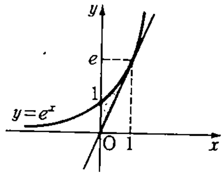
(2) (1)에서 접점의 x좌표가 1이고,

$0 \leqq x \leqq 1$에서 $e^x \geqq ex$이므로

구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1 (e^x-ex)\,dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=e-\frac{1}{2}e-1=\boldsymbol{\frac{1}{2}e-1}$$



♣ 해법 연구 ♣

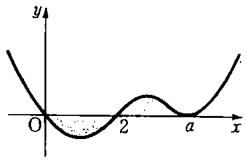
▶ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

(넓이가 서로 같을 조건)

필수예제 34. 곡선 $y=x(x-2)(x-a)^2\,(a>2)$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 x축의 위와 아래에 있는 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^a x(x-2)(x-a)^2 dx$$

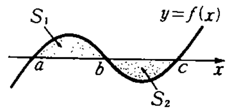
$$=\int_0^a \{x^4-2(a+1)x^3+a(a+4)x^2-2a^2x\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}(a+1)x^4+\frac{1}{3}a(a+4)x^3-a^2x^2\right]_0^a$$

$$=\frac{a^4}{30}\{6a-15(a+1)+10(a+4)-30\}=\frac{a^4}{30}(a-5)=0$$

$a>2$이므로 $\boldsymbol{a=5}$

▶ 넓이가 서로 같을 조건



$$S_1=S_2$$

$$\Longrightarrow \int_a^c f(x)\,dx=0$$

수련문제 30. 두 포물선 $y=-x^2+8$, $y=-x^2+4x$에 대하여 다음을 구하라.

(1) 두 포물선의 공통접선의 방정식

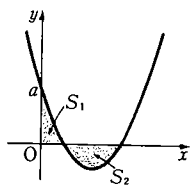
(2) 위의 공통접선과 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

〔경희대〕

답 (1) $y=-2x+9$ (2) $\frac{2}{3}$

수련문제 31. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)=x^2-4x+a\,(a>0)$와 x축, y축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이 S_1, S_2의 비가 $1:2$일 때, 상수 a의 값을 구하라.

답 $\frac{8}{3}$



(넓이의 최대 · 최소)

필수예제 35. 곡선 $y=x^2-2x-1$과 직선 $y=m(x-2)+1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 최소일 때, 상수 m의 값을 구하라.

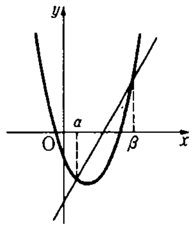
풀이 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 α, β라고 하면

α, β는 방정식 $x^2-2x-1=m(x-2)+1$

즉, $x^2-(m+2)x+2(m-1)=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=m+2$, $\alpha\beta=2(m-1)$

또, 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 하면



$$S=\int_\alpha^\beta\{m(x-2)+1-(x^2-2x-1)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta-\{x^2-(m+2)x+2(m-1)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

따라서 S가 최소로 될 때는 $(\beta-\alpha)$가 최소일 때이다.

그런데 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=(m+2)^2-8(m-1)$

$=m^2-4m+12=(m-2)^2+8$

따라서 S가 최소로 될 때의 m의 값은 **2**이다.

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

(매개변수로 표시된 영역의 넓이)

필수예제 36. 좌표평면 위를 운동하는 점 P(x, y)의 시각 t에서의 위치는

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0,\ 0\leqq t\leqq 2\pi)$

로 주어진다. 점 P가 그리는 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라. 〔부산대〕

풀이 $y=a(1-\cos t)=0$이면 $t=0,\ 2\pi$

$t=0$일 때 $x=0$, $t=2\pi$일 때 $x=2\pi a$

$dx=a(1-\cos t)\,dt$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{2\pi a}y\,dx=\int_0^{2\pi}\{a(1-\cos t)\times a(1-\cos t)\}dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{3\pi a^2}$$

▶ 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 $[a, b]$에서 $y\geqq0$, $a=f(\alpha)$, $b=f(\beta)$일 때

$$\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

▶ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$라고 할 때

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

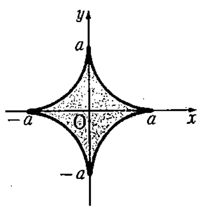
가 성립한다.

수련문제 32. 포물선 $y=-x^2+3x$ 위의 점 P에서 그은 접선과 포물선 $y=x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 최소로 되는 점 P의 좌표를 구하라. 〔전남대〕

답 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{27}{16}\right)$

수련문제 33. 매개변수 t로 나타내어지는 곡선 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(a>0)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.

답 $\frac{3}{8}\pi a^2$



〔해답 ⇨ p.203〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 다음의 각 곡선과 직선 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구하라.

(1) $y=\sqrt{x-1}$, $x=5$

(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x=-1$, $x=1$

(3) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$

(4) $y=e^x\sin x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$

□□ **2.** 점 P(0, 1)에서 곡선 $y=x^2-2x+5$에 그은 두 접선의 접점을 A, B라고 한다. 다음을 구하라.

(1) 이 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이

(2) 이 곡선과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이

□□ **3.** $x>0$일 때, 두 곡선 $C_1 : y=\dfrac{x}{e^x}$, $C_2 : y=\dfrac{\ln x}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) C_1, C_2의 극대점과 변곡점을 각각 구하고, 그 그래프를 같은 좌표평면에 그려라.

(2) 두 직선 $l_1 : x=2$, $l_2 : x=e$와 두 곡선 C_1, C_2로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

〔94. 연세대 응용〕

□□ **4.** 점 (1, 2)를 지나는 직선과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이 S가 최소일 때, 이 직선의 기울기를 구하라.

□□ **5.** 벡터 $\vec{a}=(a,\ b)$에 대하여 $\|\vec{a}\|_1=|a|+|b|$, $\|\vec{a}\|_2=\sqrt{a^2+b^2}$이라고 정의한다.

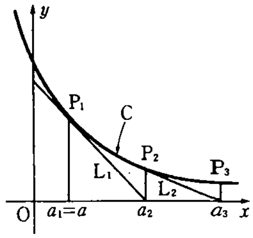
(1) 정점 O(0, 0), A(1, 1), B(−1, 1)에 대하여 영역 $\{(x,\ y)\,|\,|x|\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$에 속하는 동점 P가 $\|\overrightarrow{OP}\|_1\leqq \min(\|\overrightarrow{PA}\|_2,\ \|\overrightarrow{PB}\|_2)$를 만족할 때, 점 P가 존재하는 영역 S를 좌표평면에 나타내라.

(2) (1)에서 구한 영역 S의 넓이를 구하라.

〔94. 서강대 응용〕

□□ **6.** 포물선 $y=2x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=ax^2(a>0)$이 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하라.

□□ **7.** $a_1=a\,(a>0)$에 대하여 곡선 $\mathrm{C}: y=e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}_1(a_1,\ e^{-a_1})$에서의 접선 L_1의 x절편을 a_2라 하고, 점 $\mathrm{P}_2(a_2,\ e^{-a_2})$에서의 접선 L_2의 x절편을 a_3이라 하고, …, 이와 같이, 무한히 반복하여 얻어지는 접선 L_1, L_2, …와 곡선 C로 만들어지는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 $S(a)$라고 할 때, $S(a)$를 최소로 하는 실수 a의 값을 구하라. 〔94. 포항공대〕



□□ **8.** $x>0$에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=\dfrac{1}{x}-1$의 교점의 x좌표를 α라고 하면, $\dfrac{2}{5}<\alpha<\dfrac{1}{2}$이라고 한다. 두 곡선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) S를 α로 나타내라. 〔중앙대〕

(2) $S<1$임을 증명하라. (단, $e=2.718\cdots$은 자연로그의 밑이다.)

□□ **9.** 곡선 $y=a\ln x-1\,(a>0)$에 대하여 다음 물음에 답하라. 〔고려대〕

(1) 원점에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하라.

(2) 이 곡선과 (1)에서 구한 접선 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구하라.

(3) 위의 S가 최소가 되게 하는 상수 a의 값을 구하라.

□□ **10.** 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$ 사이에

$$f(x)=-2x^2+3+\int_0^1 g(x)\,dx,\quad g(x)=2x-8+3\int_0^1 f(x)\,dx$$

인 관계가 있다. 다음 물음에 답하라. 〔경북대〕

(1) 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 구하라.

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하라.

□□ **11.** 곡선 $y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 두 곡선 $y=a\sin x$, $y=b\sin x\,(a>b>0)$에 의하여 삼등분될 때, 상수 a, b의 값을 구하라.

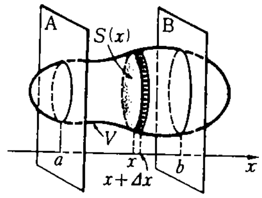
6. 부피 · 속도와 거리

핵심 정리

1 입체의 부피

어떤 입체를 x축 위의 점 x를 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 이 입체의 $x=a$인 평면에서 $x=b$인 평면까지의 부피를 V라고 하면

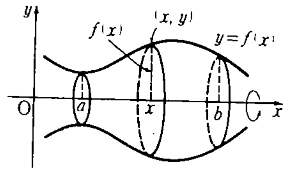
$$V=\int_a^b S(x)\,dx \quad (\text{단, } a<b)$$



2 회전체의 부피

(1) 곡선 $y=f(x)\,(a\leqq x\leqq b)$를 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 V_x라고 하면

$$V_x=\int_a^b \pi y^2dx=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$$



(2) 곡선 $x=g(y)\,(c\leqq y\leqq d)$를 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 V_y라고 하면

$$V_y=\int_c^d \pi x^2dy=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2dy$$

(3) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)\,(a\leqq x\leqq b,\ 0\leqq g(x)\leqq f(x))$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 V_x라고 하면

$$V_x=\pi\int_a^b[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]\,dx$$

3 직선 위의 점의 운동

직선 위의 동점 P의 시각 t에서의 속도가 $v=f(t)$이고, $t=t_0$에서의 P의 위치가 x_0일 때, $a\leqq t\leqq b$인 동안의 P의 운동에 대하여

(1) 위치의 변화량 ⇨ $\Delta x=\int_a^b f(t)\,dt$

(2) 실제 운동거리 ⇨ $\int_a^b |f(t)|\,dt$

(3) 시각 t에서의 P의 위치 ⇨ $x=\int_{t_0}^t f(t)\,dt+x_0$

4 평면 위의 점의 운동

평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 속도가 $\vec{v}=(f(t),\ g(t))$이고, $t=t_0$에서의 P의 위치가 $(x_0,\ y_0)$일 때, $a\leqq t\leqq b$인 동안의 P의 운동에 대하여

(1) 위치의 변화를 나타내는 벡터 ⇨ $\left(\int_a^b f(t)\,dt,\ \int_a^b g(t)\,dt\right)$

(2) 실제 운동거리 ⇨ $s=\int_a^b|\vec{v}|\,dt=\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2}\,dt$

(3) 시각 t에서의 P의 위치 ⇨ $(x,\ y)=\left(\int_{t_0}^t f(t)\,dt+x_0,\ \int_{t_0}^t g(t)\,dt+y_0\right)$

5 곡선의 길이

(1) 매개변수 t로 표시되는 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)\,(\alpha\leqq t\leqq\beta)$에서 호의 길이 L은

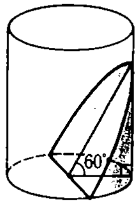
$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(2) 곡선 $y=f(x)\,(a\leqq x\leqq b)$에서 호의 길이 L은

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(입체의 부피)

필수예제 37. 밑면의 반지름의 길이가 1, 높이가 2인 직원기둥을 밑면의 중심을 지나고, 밑면과 60°의 각을 이루는 평면으로 자를 때 생기는 두 입체 중에서 작은 것의 부피를 구하라.



풀이 밑면의 중심을 O라 하고, 밑면의 지름 AB 위에 $\overline{\mathrm{OP}}=x$인 점 P를 지나 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수직인 평면으로 자른 단면을 오른쪽 그림과 같이 △PQR라고 할 때, 그 넓이를 $S(x)$라고 하면

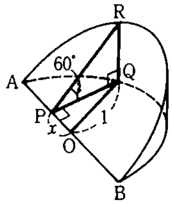
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1-x^2}$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 60°=\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$

$\therefore\ S(x)=\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$

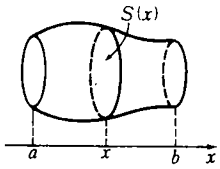
$$\therefore\ (\text{부피})=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)\,dx$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)\,dx=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$



♣ 해법 연구 ♣

▶ 입체의 부피



$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

(회전체의 부피(1))

필수예제 38. 두 곡선 $y=x^2$, $y^2=8x$로 둘러싸인 도형을 x축, y축의 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 각각 V_x, V_y라고 할 때, $V_x : V_y$를 구하라.

풀이 두 곡선의 교점을 구하면

$x^4=8x$에서 $x(x-2)(x^2+2x+4)=0$이므로 $x=0,\ 2$이다.

$$\therefore\ V_x=\pi\int_0^2\{8x-(x^2)^2\}dx$$

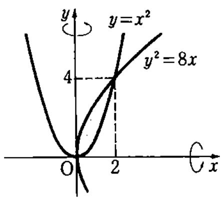
$$=\pi\left[4x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^2=\frac{48}{5}\pi$$

$$V_y=\pi\int_0^4\left\{y-\left(\frac{1}{8}y^2\right)^2\right\}dy$$

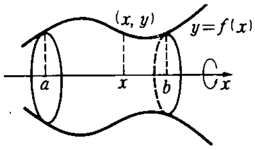
$$=\pi\int_0^4\left(y-\frac{1}{64}y^4\right)dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{320}y^5\right]_0^4=\frac{24}{5}\pi$$

$$\therefore\ V_x : V_y=\frac{48}{5}\pi:\frac{24}{5}\pi=\mathbf{2:1}$$



▶ 회전체의 부피



$$V_x=\int_a^b \pi y^2dx$$

$$=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$$

수련문제 34. 어떤 입체의 밑면이 직선 $y=0$, $x=e$와 곡선 $y=\ln x$로 둘러싸인 xy평면의 부분이고, x축에 수직인 평면으로 이 입체를 잘랐을 때의 단면은 한 변을 밑면에 두는 정삼각형이다. 이 입체의 부피를 구하라. 〔서강대〕

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$

수련문제 35. 곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분을 x축, y축의 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 각각 V_x, V_y라고 할 때, $V_x : V_y$를 구하라. 답 15 : 16

(회전체의 부피(2))

필수예제 39. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$을 각각 x축, y축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 구하라.

풀이 x축, y축의 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 각각 V_x, V_y라고 하면

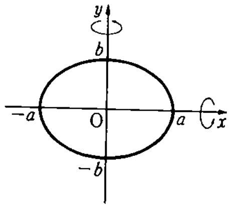
$$V_x=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=2\pi\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\times b^2dx$$

$$=2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

$$V_y=\int_{-b}^{b}\pi x^2dy$$

$$=2\pi\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\times a^2dy$$

$$=2\pi a^2\left[y-\frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2b$$



♣ 해법 연구 ♣

▶ 회전체의 부피

① x축 둘레의 회전일 때

$$V_x=\int_a^b\pi y^2dx$$

$(a\leqq x\leqq b)$

② y축 둘레의 회전일 때

$$V_y=\int_c^d\pi x^2dy$$

$(c\leqq y\leqq d)$

(회전체의 부피(3))

필수예제 40. 곡선 $y=\ln x$와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 구하라.

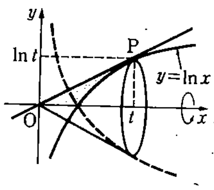
풀이 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

이 접선이 원점을 지나므로

$-\ln t=-1$에서 $t=e$

즉, 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$이다.



따라서 구하는 부피는

$$\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot e-\int_1^e\pi y^2dx=\frac{1}{3}\pi e-\pi\int_1^e(\ln x)^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\pi e-\pi\Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e+\pi\int_1^e2\ln x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\pi e-\pi e+2\pi\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$$

$$=2\pi\left(1-\frac{e}{3}\right)$$

▶ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-f(t)=-tf'(t)$$

에서 t의 값을 구한다.

수련문제 36. 연립부등식 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}\leqq1,\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}\leqq1$이 나타내는 영역을 x축의 둘레로 회전시켜서 생기는 입체의 부피를 구하라.

〔서강대〕

답 $16\pi(\sqrt{6}-1)$

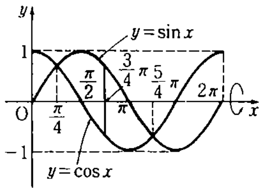
수련문제 37. 곡선 $y=e^x$과 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 y축으로 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 구하라.

답 $2\pi\left(1-\frac{e}{3}\right)$

(회전체의 부피(4))

필수예제 41. 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x(0\leq x\leq 2\pi)$로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 구하라.

풀이 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분은 합동이므로 구하는 부피 V는



$$V=2\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\pi\sin^2 x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 x\,dx\right\}$$

$$=\pi\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(1-\cos 2x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx\right\}$$

$$=\pi\left\{\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}-\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}(\pi+6)}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 회전축의 양쪽에 걸쳐 있는 도형을 회전시킨 입체의 부피는 회전축으로부터 먼 곳에 있는 곡선만을 생각하면 된다.

(거리 · 속도 · 가속도)

필수예제 42. 원점에서 10m/sec의 속도로 출발하여 일직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 가속도가 $2t-7$(m/sec²)이라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) 출발한 지 4초 후의 P의 속도 v

(2) 출발한 지 4초 후의 원점에서 P까지의 거리 x

(3) 출발하여 4초 동안 P가 실제로 운동한 거리 s

풀이 출발한 지 t초 후의 속도를 v, 위치를 x라고 하면

(1) $v=\int_0^t(2t-7)\,dt+10=t^2-7t+10$

$t=4$일 때 $v=4^2-7\cdot 4+10=\mathbf{-2\,(m/sec)}$

(2) $x=\int_0^t(t^2-7t+10)\,dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t$

$t=4$일 때 $x=\frac{1}{3}\cdot 4^3-\frac{7}{2}\cdot 4^2+10\cdot 4=\boldsymbol{\frac{16}{3}}\,\mathbf{(m)}$

(3) $s=\int_0^4|t^2-7t+10|\,dt$

$$=\int_0^2(t^2-7t+10)\,dt-\int_2^4(t^2-7t+10)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t\right]_0^2-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t\right]_2^4=\mathbf{12\,(m)}$$

▶ 직선 위의 동점 P의 시각 t에서의 가속도를 a, 속도를 v, 위치를 x라고 하면

$$v=\int_0^t a\,dt+v_0$$

$$x=\int_0^t v\,dt+x_0$$

(단, $t=0$일 때 $v=v_0$, $x=x_0$)

실제로 운동한 거리는

$$s=\int_0^t|v|\,dt$$

수련문제 38. 회전체 모양의 물그릇이 있다. 높이 $h$cm에서의 수면은 반지름이 Rcm인 원이다. 물그릇에 2cm³/sec의 속도로 물이 채워지고 있다. 물이 들어가기 시작한 지 t초 후 수면의 상승속도가 $\frac{1}{t+1}$cm/sec일 때, R를 h의 식으로 나타내라.
(단, 통의 두께는 무시한다.) 〔94. 포항공대〕

답 $\sqrt{\frac{2e^h}{\pi}}$

(평면 위의 점의 운동)

필수예제 43. 평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 속도가

$$\vec{v}=\left(\frac{\cos t}{t^2+1},\ \frac{\sin t}{t^2+1}\right)$$

라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) 시각 t에서의 P의 가속도의 크기

(2) $t=0$에서 $t=\sqrt{3}$까지의 P의 실제 운동 거리

풀이 (1) 가속도 벡터를 $\vec{a}=(\alpha_x,\ \alpha_y)$라고 하면

$$\alpha_x=\frac{d}{dt}v_x=\frac{(-\sin t)(t^2+1)-2t\cos t}{(t^2+1)^2}$$

$$\alpha_y=\frac{d}{dt}v_y=\frac{(\cos t)(t^2+1)-2t\sin t}{(t^2+1)^2}$$

$$\therefore\ |\vec{a}|=\sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2}=\frac{\sqrt{(t^2+1)^2+4t^2}}{(t^2+1)^2}$$

(2) 움직인 거리를 s라고 하면

$$s=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{\cos t}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{\sin t}{t^2+1}\right)^2}=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}dt$$

에서 $t=\tan\theta$라고 놓으면 $t=0$일 때 $\theta=0$, $t=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$dt=\sec^2\theta\,d\theta\qquad \therefore\ s=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 평면 위의 점의 운동

동점 P의 위치벡터 $(x,\ y)$가 시각 t의 함수일 때

① 속도

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

② 가속도

$$\vec{a}=\left(\frac{dv_x}{dt},\ \frac{dv_y}{dt}\right)$$

③ 실제 운동 거리$(t_1\leq t\leq t_2)$

$$s=\int_{t_1}^{t_2}|v(t)|dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

(곡선의 길이)

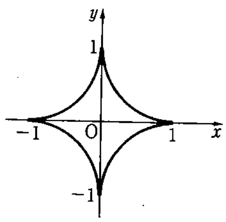
필수예제 44. 곡선 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1$의 전체 길이를 구하라.

풀이 $x>0$, $y>0$일 때 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\times\frac{dy}{dx}=0\text{에서}\quad \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}=x^{-\frac{1}{3}}$$



따라서 $x>0$, $y>0$에서의 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}dx=\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{2}\qquad\therefore\ (\text{전체 곡선의 길이})=4l=6$$

▶ 곡선의 길이

① $x=f(t)$, $y=g(t)\,(\alpha\leq t\leq\beta)$

⇨ $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$

② $y=f(x)\,(a\leq x\leq b)$

⇨ $L=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

수련문제 39. 평면 위의 동점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $\left(\ln t,\ \frac{t}{2}+\frac{1}{2t}\right)$일 때, $t=\frac{1}{e}$에서 $t=e$까지 P가 실제로 운동한 거리를 구하라. **답** $e-\frac{1}{e}$

수련문제 40. 곡선 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,(-1\leq x\leq 1)$의 길이를 구하라. **답** $e-\frac{1}{e}$

수련문제 41. 곡선 $x=3t^2$, $y=3t-t^3\,(-\sqrt{3}\leq t\leq\sqrt{3})$의 길이를 구하라. **답** $12\sqrt{3}$

〔해답 ⇨ p.206〕

실 력 강 화 문 제

□□ **1.** 밑면에서의 높이가 x인 점을 지나 밑면에 평행인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)=x^2\sin x\,(0\leqq x\leqq \pi)$인 입체의 부피를 구하라.

□□ **2.** 다음 물음에 답하라.

(1) O를 원점으로 하는 좌표평면에 직선 $y=-1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 직선 OP에 수직이고 점 P를 지나는 직선들이 존재하는 영역을 구하라.

(2) $y\leqq 0$이고 (1)에서 구한 영역에 속하지 않는 점 Q$(x,\ y)$의 영역을 y축의 둘레로 회전시켜 얻어지는 입체의 부피를 구하라. 〔94. 고려대 응용〕

□□ **3.** 포물선 $y=ax^2(a>0)$이 곡선 $y=\ln x$에 접한다고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) 상수 a의 값을 구하라.

(2) 이 포물선과 곡선 및 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 구하라.

□□ **4.** 곡선 $y=\tan x\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$와 이 곡선 위의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 구하라.

□□ **5.** 곡선 $x=\frac{2}{1-t^2}$, $y=\frac{2t}{1-t^2}\left(0\leqq t\leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$와 직선 $x=4$ 및 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 구하라.

□□ **6.** 좌표평면에서 두 부등식 $x^2+(y-1)^2\leqq 1$과 $y\leqq x$가 나타내는 영역을 직선 $y=x$를 축으로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피를 구하라. 〔94. 서울대〕

□□ **7.** 곡선 $(x-3)^2+y^2=1$을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 구하라.

□□ ***8.*** 좌표평면 위의 동점 P$(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x=e^{-t}(\sin t+\cos t),\ \ y=e^{-t}(\sin t-\cos t)$$

일 때, $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 실제로 운동한 거리를 구하라.

□□ ***9.*** 매개변수 θ로 표시되는 곡선 $x=\cos 3\theta+3\cos\theta,\ y=\sin 3\theta+3\sin\theta\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$의 길이를 구하라.

□□ ***10.*** 공간의 점 A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 1,\ 1)$을 잇는 선분 AB를 z축의 둘레로 회전시킨 곡면과 두 평면 $z=0,\ z=1$로 둘러싸인 부분의 부피를 구하라.

□□ ***11.*** 곡선 $y=x^n(n>0)$이 y축의 둘레로 회전할 때 생기는 회전면은 직선 $y=0,\ y=1,\ x=0,\ x=1$로 둘러싸인 부분이 y축의 둘레로 회전할 때 생기는 회전체(원기둥)를 두 부분으로 나눈다. 이 때 나누어지는 두 부분의 부피의 비를 구하라. 〔연세대〕

□□ ***12.*** 두 개의 원통 $y^2+z^2\leqq 1,\ x^2+z^2\leqq 1$의 공통 부분의 부피를 구하라.

□□ ***13.*** 매개변수 θ에 대하여 $x=e^{-\theta}\cos\theta,\ y=e^{-\theta}\sin\theta$로 표시되는 곡선 C가 있다. $\theta=0$에서 $\theta=a$까지의 곡선 C의 길이를 $l(a)$라고 할 때, $\lim_{a\to\infty} l(a)$의 값을 구하라.

□□ ***14.*** $0\leqq t\leqq 2\pi$인 실수 t에 대하여 일차변환 f가 점 $(1,\ -1)$을 $(t-\sin t,\ 1-\cos t)$로 점 $(0,\ 3)$을 $(3\sin t,\ 3\cos t)$로 이동시킨다고 할 때, 이 일차변환 f에 의하여 점 $(1,\ 1)$이 옮겨진 점의 시간 t에 따라 움직인 거리를 구하라. 〔94. 고려대 응용〕

〔해답 ⇨ p. 209〕

고급 문제(III)

1. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$F(x)=xf(x)-x^2\sin x,\ F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

를 만족할 때, 다음을 구하라.

(1) $f'(x)$　　(2) $f(x)$

2. 벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(-2,\ -3)$에 대하여 $\int_0^1|\vec{a}+t\vec{b}|^2dt$의 값을 구하라.

3. $\lim_{a\to\infty}\int_0^a xe^{-x^2}dx$의 값을 구하라. 〔경북대〕

4. 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{2}x & (0\leqq x\leqq 1)\\ 1 & (1\leqq x\leqq 2)\\ \sin\frac{\pi}{2}(x-1) & (2\leqq x\leqq 3)\end{cases}$ 이고, 모든 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족한다고 할 때, 다음을 구하라. 〔건국대〕

(1) $f\left(\frac{20}{3}\right)$의 값　　(2) $\int_{-2}^5 f(x)\,dx$의 값

5. $\int_{-1}^1\frac{x^2}{1+e^x}\,dx$의 값을 구하라.

6. 다음을 구하라.

(1) n이 자연수일 때, $\int_0^\pi\cos^2nx\,dx$의 값

(2) m, n이 서로 다른 자연수일 때, $\int_0^\pi\cos mx\cos nx\,dx$의 값

(3) $\int_0^\pi(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx)^2dx$의 값

7. 함수 $f_1(x)=xe^x+\frac{1}{2}$과 $f_n(x)=xe^x+\frac{1}{2}\int_0^1 f_{n-1}(x)\,dx\,(n=2,\ 3,\ \cdots)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 $a_n=\frac{1}{2}\int_0^1 f_{n-1}(x)\,dx$, $a_1=\frac{1}{2}$로 정해진다고 한다. 다음 물음에 답하라.

(1) a_n, a_{n+1} 사이의 관계식을 구하라.

(2) a_n을 n의 식으로 나타내라.

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하라.

8. 함수 $f(x)=\int_0^x 2(2\cos t-1)(\cos t+1)\,dt$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$의 최대값과 최소값을 구하라.

9. $0<x<\pi$에서 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f'(x)g(x)=\sin x+\cos x,\quad f(x)g'(x)=-\sin x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \lim_{x\to 0} g(x)=-1$$

을 만족한다고 할 때, 함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각 구하라.

10. 다음을 구하라.

(1) $\int_0^\pi \sin^2 t\,dt$, $\int_0^\pi e^t \sin t\,dt$의 값

(2) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)\,dt=\cos x-ae^x\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$가 성립하는 함수 $f(x)$와 상수 a의 값

11. $\frac{d}{dx}f(x)=\int_0^1 e^{x-t}f(t)\,dt+1$이고, $f(0)=0$인 함수 $f(x)$를 구하라.

12. 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{e}{2}\ln x$가 오직 한 점에서 접한다고 할 때, 다음을 구하라.

(1) 두 곡선의 접점의 좌표

(2) 두 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S

13. 두 곡선 $y=\sin x$, $y=-\cos x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$와 y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 구하라.

14. 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2-ax\,(a>0)$와 x축으로 둘러싸인 영역을 D라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) D를 x축의 둘레로 회전시킨 입체의 부피 V_x

(2) D를 y축의 둘레로 회전시킨 입체의 부피 V_y

(3) $V_x=V_y$일 때, 상수 a의 값

15. 좌표공간에서 직선 $x=y=1-z$를 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 곡면과 두 평면 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 입체의 부피를 구하라.

IV 확률

1. 경우의 수와 순열

핵심 정리

[1] 경우의 수

(1) **합의 법칙** : 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어날 경우의 수가 각각 m, n가지이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $(m+n)$가지이다.

(2) **곱의 법칙** : 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m가지, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n가지이면 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 mn가지이다.

[2] 순 열

서로 다른 n개의 대상에서 서로 다른 r개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고 이 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(r-1)\}$ $(0<r\leqq n)$이다.

[3] 중복순열

서로 다른 n개의 대상에서 중복을 허용하여 r개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 **중복순열**이라 하고 이 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r=n^r$이다.

[4] 같은 것이 포함된 순열

n개의 물건 중에서 p개, q개, r개, $\cdots$가 각각 같은 것일 때, 이 n개 모두를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}$ (단, $p+q+r+\cdots=n$)이다.

[5] 원순열 · 염주순열

(1) 서로 다른 n개의 물건을 원형으로 배열한 원순열의 수는 $(n-1)!$이다.

(2) 원순열에서 뒤집어 놓을 수 있는 염주순열의 수는 $\dfrac{1}{2}(n-1)!$이다.

(경우의 수 (1))

필수예제 **1.** 0 또는 자연수를 원소로 하는 3차의 정사각행렬을 만들 때, 1행과 1열의 세 원소의 합이 각각 k이고, 2행, 3행, 2열, 3열의 세 원소의 합이 각각 1이 되는 행렬의 개수를 $f(k)$라고 할 때, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값을 구하라.

풀이 2행, 3행, 2열, 3열의 세 원소의 합이 각각 1이므로, 가능한 경우는

$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$의 꼴로 구별된다.

이 때 A_1, A_2, A_3의 꼴은 각각 1, 4, 2가지씩 만들어지므로

$k=0$인 경우는 A_3의 꼴에서 $c_{11}=0$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{f(0)=2}$

$k=1$인 경우는 A_2의 꼴에서 $b_{11}=0$일 때와 A_3의 꼴에서 $c_{11}=1$

$\therefore$ $f(1)=4+2=\mathbf{6}$

$k=2$인 경우는 A_1의 꼴에서 $a_{11}=0$, A_2의 꼴에서 $b_{11}=1$, A_3의 꼴에서 $c_{11}=2$ $\quad\therefore$ $f(2)=1+4+2=\mathbf{7}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ A_2의 꼴은

$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} b_{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

의 4가지

A_3의 꼴은

$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

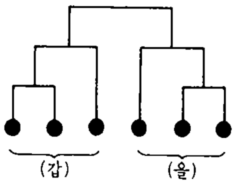
의 2가지

수련문제 **1.** a, a, b, b, c, c의 6개의 문자를 같은 문자끼리는 이웃하지 않도록 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하라.

답 30가지

(경우의 수 (2))

필수예제 **2.** A, B, C 세 학교에서 각각 2명씩 양궁 선수를 출전시켜 오른쪽 그림과 같이 토너먼트로 경기를 한다. 같은 학교 선수끼리는 결승전 외에는 서로 시합하지 않기로 할 때, 몇 가지의 대진표가 생기겠는가? (단, 갑, 을 조는 구별하지 않는다.)



풀이 세 학교의 선수들을 $a,\ a'$; $b,\ b'$; $c,\ c'$이라고 하면, $a,\ a'$은 각각 다른 조에 편성되어야 하고, 그 때 $b,\ b'$; $c,\ c'$이 어느 조에 배치되는가는 각각 2가지씩이다. 또, 각 조에 속한 3명이 대진하는 방법은 3가지씩이므로 구하는 경우의 수는 $(2\times2)\times(3\times3)=$**36 (가지)**

▶ **필수예제** **2**와 같이 대진한다고 할 때, 출전 학교의 수를 n개라고 하면 조편성 방법은 2^{n-1}가지이다. 이 때 한 조에서의 대진 방법이 m가지이면 대진표의 개수는 $2^{n-1}\cdot m^2$가지이다.

(경우의 수 (3))

필수예제 **3.** 한 구면 위에서 서로 다른 4개의 대원에 의하여 분할 된 구면의 조각의 개수를 다음 각 경우에 대하여 구하라.

(1) 네 개의 대원이 한 지름을 공유할 때

(2) 세 개의 대원이 한 지름을 공유할 때

(3) 어느 세 개의 대원도 한 지름을 공유하지 않을 때

▶ 대원이란 구면의 중심을 지나는 평면으로 자른 단면을 말한다.

풀이 (1) 네 개의 대원이 한 지름을 공유하면 대원 1개가 구면을 2개씩 나누므로 $2\times4=$**8 (개)**

(2) 세 대원이 한 지름을 공유하면 나누어진 조각은 $2\times3=6$ (개)
이 각각을 네 번째 대원이 두 개씩 나누므로 $6\times2=$**12 (개)**

(3) $(n-1)$개의 대원에 의해 나누어진 구면의 조각이 $f(n-1)$개라고 하면 n번째의 대원은 처음 $(n-1)$개의 대원과 각각 2점에서 만나게 되고, $2(n-1)$개만큼 조각의 개수가 늘어나므로

$$f(n)=f(n-1)+2(n-1)\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ f(1)=2)$$

따라서 $f(2)=f(1)+2=2+2=4$

$f(3)=f(2)+2\times(3-1)=4+4=8$

$f(4)=f(3)+2\times(4-1)=8+6=14$ $\quad\therefore$ **14 (개)**

수련문제 **2.** 같은 품질의 귤 8개를 똑같은 세 개의 접시에 담는 방법은 몇 가지인가? (단, 어느 접시에도 적어도 1개는 담기로 한다.)

답 5가지

수련문제 **3.** 국어, 영어, 수학의 세 과목 중 어느 두 과목의 참고서를 사려고 서점에 갔더니 국어는 4종류, 영어는 3종류, 수학은 5종류의 책이 있었다. 살 책을 선택하는 방법은 모두 몇 가지인가?

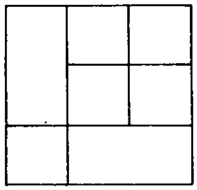
답 47가지

수련문제 **4.** 자연수 $n,\ k$에 대하여 $n>k$라고 할 때, $1\leqq a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k\leqq n$인 k개의 자연수 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$에 대하여 $S_k=\sum_{i=1}^{k} a_i$로 나타나는 S_k의 개수를 구하라.

답 $k(n-k)+1$

(경우의 수, 순열)

필수예제 4. 오른쪽 그림과 같이 나누어진 도형에 빨간색, 주황색, 노란색, 초록색, 파란색, 남색, 보라색의 7가지 색을 칠하여 경계선을 구별하려고 한다. 다음 경우의 수를 구하라.



(1) 7가지 색을 모두 사용하는 경우

(2) 빨간색만 두 군데 칠하는 경우

(3) 같은 색을 여러 번 사용하는 경우

♣ 해법 연구 ♣

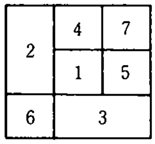
▶ 같은 색을 여러 번 써도 되는 경우는 경계선이 많이 인접한 부분부터 칠하는 방법을 생각한다.

풀이 (1) 7개의 부분이 모두 구별되므로 $7!=$**5040 (가지)**

(2) 빨간색을 두 군데 칠하는 방법은 11가지이고, 남은 6가지의 색에서 5가지의 색을 골라 5개의 부분에 칠하는 방법은 ${}_6P_5$가지

따라서 구하는 경우의 수는 $11\times{}_6P_5=$**7920 (가지)**

(3) 오른쪽 그림과 같이 칠하는 순서를 정하면



2, 3이 같은 색이면 6은 6가지 색

다른 색이면 6은 5가지 색

4, 5가 같은 색이면 7은 6가지 색

다른 색이면 7은 5가지 색

이므로 이 네 경우를 각각 A, B, C, D라고 하면

A, C인 경우 : $7\times(6)\times(5)\times6\times6=7560$(가지)

A, D인 경우 : $7\times(6)\times(5\times4)\times6\times5=25200$(가지)

B, C인 경우 : $7\times(6\times5)\times(4)\times5\times6=25200$(가지)

B, D인 경우 : $7\times(6\times5)\times(5\times4)\times5\times5=105000$(가지)

$\therefore$ $7560+25200+25200+105000=$**162960 (가지)**

(순　열 (1))

필수예제 5. 남학생 4명, 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 다음 경우의 수를 구하라.

(1) 여학생 3명이 이웃하는 경우

(2) 여학생끼리는 어떤 두 명도 이웃하지 않는 경우

(3) 남학생, 여학생이 교대로 서는 경우

▶ 인접하는 대상을 한 묶음으로 보고 나열하여 인접하지 못하는 대상은 나중에 끼워 넣기로 한다.

▶ 특정한 조건이 주어지면 그 조건을 만족하는 경우를 먼저 생각한다.

풀이 (1) 먼저 여학생 3명을 한 명으로 보고, 5명을 일렬로 세우고 나서 그 각각에 대하여 여학생 3명을 일렬로 세운다. $\therefore$ $5!\times3!=$**720 (가지)**

(2) 먼저 남학생 4명을 세우고, 남학생 사이사이의 다섯 곳 중에서 세 곳에 여학생 3명을 세운다.　V 남 V 남 V 남 V 남 V

$\therefore$ $4!\times{}_5P_3=$**1440 (가지)**

(3) 남 여 남 여 남 여 남 으로 세우는 방법이다.

$\therefore$ $4!\times3!=$**144 (가지)**

수련문제 5. 1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개의 숫자를 한 번씩 사용하여 다섯 자리의 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하라.

답 48개

(순 열 (2))

필수예제 6. 다음 물음에 답하라.

(1) 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리의 정수를 만들 때, 이들의 총합은 얼마인가?

(2) 숫자 1, 2, 3, 4를 나열하여 네 자리의 정수를 만들 때, 이들의 총합은 얼마인가? (같은 숫자를 반복 사용해도 된다.)

풀이 (1) 백의 자리가 1인 경우는 0, 2, 3, 4 중 2개를 택하여 늘어 세우는 방법의 수 $_4P_2$만큼 있다. 2, 3, 4가 백의 자리에 있을 경우도 마찬가지이므로 백의 자리의 수의 합은 $_4P_2\cdot(1+2+3+4)$ ······㉠
십의 자리가 1인 경우의 수는 백의 자리가 0이 되는 경우가 제외 되어야 하므로 $(_4P_2-{}_3P_1)$번 있다. 2, 3, 4의 경우도 마찬가지이므로 십의 자리의 수의 합은 $(_4P_2-{}_3P_1)\cdot(1+2+3+4)$ ······㉡
일의 자리에 있는 수의 합도 마찬가지로 ㉡과 같다.
따라서 구하는 합은

$$_4P_2(1+2+3+4)\cdot10^2+(_4P_2-{}_3P_1)(1+2+3+4)(10+1)=\mathbf{12990}$$

(2) $4^3(1+2+3+4)(10^3+10^2+10+1)=\mathbf{711040}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ $_nP_n=n!$

$_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

$0!=1$

로 정한다.

(함수의 개수)

필수예제 7. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$, $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에 대하여 다음을 구하라.

(1) X에서 Y로의 함수의 개수

(2) X에서 Y로의 함수 f 중 일대일 함수의 개수 (단, $r\leqq n$)

(3) X에서 Y로의 함수 f 중 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\geqq x$인 함수의 개수 (단, $r\leqq n$)

풀이 (1) X의 각 원소에 대응되는 원소는 각각 n개씩이므로
$n\times n\times\cdots\times n=\boldsymbol{n^r}$ **(개)**

(2) $f(1)$은 n가지, $f(2)$는 $(n-1)$가지, $\cdots$, $f(r)$는 $(n-r+1)$가지이므로 $\boldsymbol{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}$ **(개)**

(3) $x=k$이면 $f(k)\geqq k$이므로 $f(k)$는 k, $k+1$, $k+2$, $\cdots$, n의 $(n-k+1)$가지
따라서 구하는 개수는 $\boldsymbol{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}$ **(개)**

▶ $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$에 대하여

① 함수 $f: X\longrightarrow Y$의 개수는
$_n\Pi_m=n^m$ (개)

② $x_1\neq x_2$일 때 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 즉, 일대일 함수의 개수는
$_nP_m(n\geqq m)$ (개)

수련문제 6. 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 계수 a, b, c, d를 -3, 0, 2, 4, 6, 7 중에서 택하기로 할 때, 서로 다른 계수로 되는 삼차방정식의 개수를 구하라.

답 300개

수련문제 7. 다음을 구하라.

(1) 1, 2, 3의 세 숫자를 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 이하의 자연수의 개수

(2) 다섯 명의 아이에게 서로 다른 과일 세 개를 나누어 주는 방법의 수

답 (1) 363개 (2) 125가지

(순 열 (3))

필수예제 8. 사이렌을 울려서 신호를 만들려고 한다. 울리는 시간은 1초간과 2초간의 한 쪽 또는 양쪽을 쓰고, 중간에 쉬는 시간은 1초씩으로 한다. 한 신호에 필요한 시간을 15초로 할 때, 몇 가지 신호가 만들어지는가?

♣ 해법 연구 ♣

▶ 1초와 2초의 사이렌을 몇 번씩 울리면 되는가를 먼저 구한다.

▶ 부정방정식의 정수해는 계수가 큰 수부터 생각한다.

풀이 사이렌을 1초, 2초씩 울리는 것을 각각 △, □라고 하자.

△을 x번, □를 y번 사용하면 쉬는 것은 $(x+y-1)$번이므로 한 신호에 사용되는 시간은 $1\times x+2\times y+1\times(x+y-1)=15$ (초)

$\therefore 2x+3y=16$ (단, x, y는 음이 아닌 정수)

$\therefore (x, y)=(8, 0), (5, 2), (2, 4)$

$x=8$, $y=0$: △8개를 일렬로 배열하는 방법은 1가지

$x=5$, $y=2$: △5개, □2개를 배열하는 방법은 $\dfrac{7!}{5!2!}=21$ (가지)

$x=2$, $y=4$: △2개, □4개를 배열하는 방법은 $\dfrac{6!}{2!4!}=15$ (가지)

$\therefore 1+21+15=$ **37 (가지)**

(원순열 (1))

필수예제 9. 할머니 한 분과 부모, 아이들이 다섯인 가족이 있다. 이 가족이 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하라.

(1) 부모가 이웃하여 앉는 경우의 수

(2) 부모 사이에 아이가 한 명 앉는 경우의 수

(3) 어른들 사이에 적어도 한 명의 아이가 앉는 경우의 수

▶ 이웃하는(인접하는) 대상은 묶어서 생각하되 나중에 그들끼리 자리를 바꾸는 경우도 생각한다.

풀이 (1) 부모를 묶어서 생각하여 7명을 앉히는 방법의 수는

$(7-1)!$ (가지)

부모끼리는 자리를 바꿀 수 있으므로, 구하는 경우의 수는

$6!\times 2=$ **1440 (가지)**

(2) 부모 사이에 아이가 한 명 앉는 경우는 5가지, 부모와 아이 한 명이 이웃하므로 묶어서 생각하여 6명을 앉히는 방법의 수는 $(6-1)!=5!$ (가지)이므로, 구하는 수는 $5\times 5!\times 2=$ **1200 (가지)**

(3) 어른들은 인접할 수 없으므로 아이들을 먼저 원탁에 앉히고 그 사이의 다섯 자리 중 세 자리를 골라 어른들을 앉히면 되므로 구하는 수는

$4!\times {}_5P_3=$ **1440 (가지)**

수련문제 8. 다음 물음에 답하라.

(1) 5개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2로 만들 수 있는 네 자리 정수의 개수를 구하라.

(2) superman의 8개의 문자를 일렬로 배열할 때, m, a, n이 이 순서대로인 것은 몇 개인가?

답 (1) 10개 (2) 6720개

수련문제 9. 세 쌍의 부부가 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하라.

(1) 여자끼리 이웃하지 않는 경우의 수

(2) 부부끼리 이웃하는 경우의 수

(3) 남녀 교대로 앉는 경우의 수

답 (1) 12가지 (2) 16가지 (3) 12가지

(원순열 (2))

필수예제 10. 검은 공 6개, 흰 공 2개, 빨간 공 1개가 있다. 다음을 구하라. (단, 같은 색의 공은 구별 되지 않는다.)

(1) 9개의 공을 일렬로 배열하는 경우의 수

(2) 9개의 공 모두를 원형으로 배열하는 경우의 수

(3) 9개의 공으로 만든 염주순열의 수

풀이 (1) 같은 것이 있는 순열이므로 $\frac{9!}{6!2!}=\mathbf{252}$ **(가지)**

(2) 빨간 공을 먼저 배치하면 나머지 8개의 공을 일렬로 나열하는 것과 같으므로 $\frac{8!}{6!2!}=\mathbf{28}$ **(가지)**

(3) (2)의 원순열 중에서 좌우대칭인 것은 빨간 공을 중심으로 양쪽에 각각 검은 공 3개, 흰 공 1개가 나열된 것이므로 $\frac{4!}{3!}=4$ (가지)

따라서 좌우비대칭인 것은 $28-4=24$ (가지)

$\therefore$ 염주순열의 수는 $4+24\times\frac{1}{2}=\mathbf{16}$ **(가지)**

♣ 해법 연구 ♣

▶ 같은 것이 있는 원순열의 수는 개수의 G.C.D.가 1인가 아닌가를 구별해서 다룬다.

▶ 원순열에서 좌우대칭인 것은 뒤집어도 같으므로 그대로 염주순열의 수가 되나 비대칭인 것을 뒤집으면 일치하는 것이 2가지씩이므로 염주순열의 수는

(원순열의 수)$\times\frac{1}{2}$

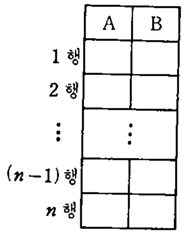
이다.

(점화식의 이용)

필수예제 11. 오른쪽 그림과 같이 각 행당 A, B의 난이 있는 답안지가 있다. 이 답안지에 ○, ×를 임의로 표기하되, 인접한 난에는 ×표를 이어 쓸 수 없다고 한다. 이와 같이 n행까지 표기한 방법의 수를 $f(n)$이라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $f(1)$, $f(2)$를 구하라.

(2) $f(n)$을 $f(n-1)$, $f(n-2)$로 나타내라.



풀이 (1) 1행을 표기하는 경우는 [○○], [○×], [×○]의 3가지 $\therefore$ $\boldsymbol{f(1)=3}$

1행, 2행을 조건에 맞게 표기하는 경우는

[○○/○○] [○○/○×] [○○/×○] [○×/○○] [○×/×○] [×○/○○] [×○/○×] $\therefore$ $\boldsymbol{f(2)=7}$

(2) 제 n행이 [○○], [○×], [×○]으로 끝난 경우를 각각 a_n, b_n, c_n가지라고 하면 $f(n)=a_n+b_n+c_n$ ……㉠

또, $a_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=f(n-1)$, $b_n=a_{n-1}+c_{n-1}$, $c_n=a_{n-1}+b_{n-1}$

㉠에서 $f(n)=f(n-1)+\{a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}\}+a_{n-1}=2f(n-1)+f(n-2)$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(n)=2f(n-1)+f(n-2)}$ (단, $n\geq3$, $f(1)=3$, $f(2)=7$)

▶ 각 행을 표기 할 수 있는 방법은

[○○], [○×], [×○]

의 경우 뿐이므로 그 다음 행이 어떻게 기표될 수 있나를 연구하여 거꾸로 거슬러서 점화식을 유도한다.

수련문제 10. 흰 구슬 5개와 빨간 구슬 4개가 있다. 이 구슬로 만든 원순열의 수와 목걸이의 수를 구하라. (단, 같은 색의 구슬은 구별 되지 않는다.)

답 14가지, 10가지

수련문제 11. n단의 계단을 오르는 데 1단 또는 2단을 섞어서 오르는 방법의 수를 $f(n)$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(n)$을 $f(n-1)$, $f(n-2)$로 나타내라. (2) $f(8)$을 구하라.

답 (1) $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ (단, $n\geq3$) (2) 34

〔해답 ⇨ p. 211〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 100원, 50원, 10원짜리 동전이 각각 2개, 3개, 3개가 있다. 다음을 구하라.
(1) 이 동전들의 일부 또는 전부를 써서 지불할 수 있는 방법의 수
(2) 이 동전들의 일부 또는 전부를 써서 지불할 수 있는 금액의 수

□□ **2.** 10원, 50원, 100원짜리 동전들이 각각 넉넉하게 있다. 다음을 구하라.
(1) 이 동전들을 사용하여 240원을 지불하는 방법의 수
(2) 이 동전들을 각각 적어도 한 개 사용하여 240원을 지불하는 방법의 수

□□ **3.** 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 배열할 때 i번째 숫자를 $a_i(1\leqq i\leqq 5)$라고 하면

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)(a_5-5)\neq 0$$

인 경우의 수는 몇 가지인가?

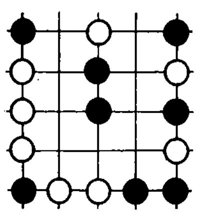
□□ **4.** A, B, C의 세 나라 사람들이 각각 2명씩 있다. 이들 6명을 같은 나라의 사람끼리는 이웃하지 않도록 일렬로 세우는 방법의 수를 구하라.

□□ **5.** 다음 등식이 성립함을 증명하라.
(1) ${}_n\mathrm{P}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$
(2) ${}_n\mathrm{P}_r=(n-r+1)\,{}_n\mathrm{P}_{r-1}$
(3) $n(n!)=(n+1)!-n!$
(4) $\dfrac{n^2}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{1}{(n-2)!}$

□□ **6.** 남자 4명, 여자 5명이 일렬로 설 때, 특정한 두 남자 사이에 세 명의 여자가 서게 되는 경우의 수를 구하라.

□□ **7.** 3명의 학생이 일렬로 놓여 있는 6개의 의자에 앉을 때, 어느 2명도 이웃하지 않게 앉는 방법의 수는 $\boxed{}$ 가지이다.

□□ **8.** 오른쪽 그림과 같이 바둑돌이 놓여 있다. 9군데의 빈자리에 흑과 백을 각각 4개씩 8개의 바둑돌을 놓으려면 놓는 방법은 모두 몇 가지인가?



① 70　② 100　③ 144
④ 576　⑤ 630

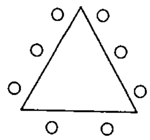
□□ **9.** 다음 경우의 수를 구하라.

(1) 8명을 아래 〔그림 1〕과 같이 정삼각형의 둘레에 앉히는 경우

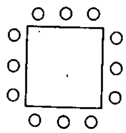
(2) 12명을 아래 〔그림 2〕와 같이 정사각형의 둘레에 앉히는 경우

(3) 10명을 아래 〔그림 3〕과 같이 직사각형의 둘레에 앉히는 경우

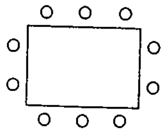
〔그림 1〕



〔그림 2〕



〔그림 3〕



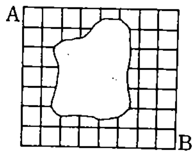
□□ **10.** 다음 물음에 답하라.

(1) 후보자가 2명, 선거인이 6명인 경우의 기명투표에 있어서 1인 1표로 투표할 때, 그 결과는 몇 가지 경우가 있는가?

(2) 5명이 가위바위보를 할 때, 그 결과는 몇 가지 경우가 있는가?

(3) 5개의 서로 다른 물건을 모양이 다른 3개의 상자에 넣는 방법은 몇 가지인가? (단, 각 상자에는 물건을 5개까지 넣을 수 있다.)

□□ **11.** 오른쪽 그림과 같이 바둑판 모양의 눈금으로 된 길이 있다. A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 몇 가지인가? (단, 색칠한 부분은 지나지 않는 것으로 한다.)



□□ **12.** 2개의 기호 —과 ·을 나열하여 부호를 만들려고 한다.

(1) ·과 —를 합하여 5개를 사용하면 몇 가지 부호를 만들 수 있는가?

(2) ·과 —의 수를 4개 이하를 사용하면 몇 가지 부호를 만들 수 있는가?

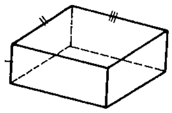
(3) —, ·의 두 기호를 되도록 적게 사용하여 78가지의 부호를 만들려고 한다. 최소한 몇 개까지 필요한가?

□□ **13.** 좌표평면 위에 점 P가 있다. 주사위를 던져서 나오는 눈의 수 n이 홀수이면 P는 x축 방향으로 n만큼 나아가고, n이 짝수이면 P는 y축 방향으로 n만큼 나아간다고 한다. P가 원점에서 출발하여 이러한 시행을 계속했을 때, 점 (4, 4)에 도달하는 경우의 수는 모두 몇 가지인가?

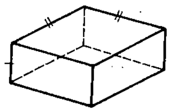
□□ **14.** 10명의 학생을 5명씩 다른 두 개의 원탁의 둘레에 앉히는 방법은 몇 가지인가?

□□ **15.** 다음 그림과 같은 입체도형에 1에서 6까지의 수를 써 넣는 방법의 수를 각각 구하라.

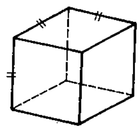
(1)



(2)



(3)



2. 조합과 이항정리

핵심정리

1 조 합

서로 다른 n개의 대상에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택할 때, 이 r개로 이루어진 각각의 집합을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하고 조합의 수는

$$ {}_{n}C_{r}=\frac{{}_{n}P_{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ (단, } n\geq r) $$

2 중복조합

서로 다른 n개의 대상에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라 하고 중복조합의 수는

$$ {}_{n}H_{r}={}_{n+r-1}C_{r} $$

3 조편성(분할과 분배)

(1) 서로 다른 n개의 대상을 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 3개조로 분할할 때, 동수인 조의 개수가 k개$(k=1,\ 2,\ 3)$이면 3개조로 분할하는 방법의 수는

$$ {}_{n}C_{p}\times{}_{n-p}C_{q}\times{}_{r}C_{r}\times\frac{1}{k!} $$

(2) 3개조로 나눈 것을 3사람에게 나누어 주는 방법의 수는

$$ {}_{n}C_{p}\times{}_{n-p}C_{q}\times{}_{r}C_{r}\times\frac{1}{k!}\times 3! $$

4 이항정리

(1) $(a+b)^{n}=\sum_{r=0}^{n}{}_{n}C_{r}\,a^{r}b^{n-r}=\sum_{k=0}^{n}{}_{n}C_{k}\,a^{n-k}b^{k}$

(2) $\sum_{r=0}^{n}{}_{n}C_{r}={}_{n}C_{0}+{}_{n}C_{1}+{}_{n}C_{2}+\cdots+{}_{n}C_{n}=2^{n}$

5 다항정리

$(a+b+c)^{n}$의 전개식의 일반항은 $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}a^{p}b^{q}c^{r}$ (단, $p+q+r=n$)

(조합의 수)

필수예제 12. 7명의 남자와 5명의 여자 중에서 4명의 대표를 뽑으려고 한다. 다음을 구하라.

(1) 남자 2명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수

(2) 특정한 남녀 2명이 모두 뽑히는 경우의 수

(3) 남녀가 적어도 1명씩 뽑히는 경우의 수

♣ 해법 연구 ♣

▶ 뽑아내는 순서가 정해져 있지 않으면 조합을 생각한다.

▶ '적어도 …'인 경우는 여사건을 생각한다.

풀이 (1) 남자 7명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{7}C_{2}$가지, 그 각각에 대하여 여자 5명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{5}C_{2}$가지이므로

${}_{7}C_{2}\times{}_{5}C_{2}=\mathbf{210}$ **(가지)**

(2) 특정한 남녀를 뽑고 남은 10명 중에서 2명을 더 뽑으면 되므로

${}_{10}C_{2}=\mathbf{45}$ **(가지)**

(3) 남녀가 적어도 한 명인 경우의 여사건은 남자만 4명 또는 여자만 4명인 경우이므로 ${}_{12}C_{4}-({}_{7}C_{4}+{}_{5}C_{4})=\mathbf{455}$ **(가지)**

(중복조합 (1))

필수예제 13. x, y, z의 세 문자를 사용하여 계수가 1인 10차의 단항식을 만들려고 한다. 다음을 구하라.
(1) 만들어진 단항식의 개수
(2) 두 문자로 만들어진 10차의 단항식의 개수
(3) 이 모든 단항식의 곱을 $P=x^a y^b z^c$이라고 할 때, $a+b+c$의 값

풀이 (1) x, y, z를 중복을 허용하여 10개를 택하여 곱하되 곱하는 순서는 상관없으므로 ${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}=\mathbf{66}$ **(개)**
(2) x, y 두 개의 문자로 된 10차항의 개수는 ${}_2H_{10}-2=9$ (개)
$(y,\ z)$, $(x,\ z)$의 경우도 마찬가지이므로 $9\times3=\mathbf{27}$ **(개)**
(3) x^1의 개수는 ${}_2H_9={}_{10}C_9=10$ (개)
x^2의 개수는 ${}_2H_8={}_9C_8=9$ (개)
x^3의 개수는 ${}_2H_7={}_8C_7=8$ (개)
……………………
x^{10}의 개수는 ${}_2H_0={}_1C_0=1$ (개)
$\therefore\ a=1\times10+2\times9+3\times8+\cdots+10\times1=\sum_{k=1}^{10}k(11-k)=220$
마찬가지 방법으로 $b=c=220$
$\therefore\ a+b+c=220+220+220=\mathbf{660}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 곱셈은 교환법칙이 성립하므로 곱하는 순서에 상관없다. 따라서 중복조합을 생각한다.

▶ **필수예제 13.** (3)의 다른 풀이
(1)에 의하여 10차의 단항식이 66개 만들어지므로 사용된 모든 문자의 개수는
$10\times66=660$ (개)
그런데 x, y, z는 모두 공평하게 사용되어야 하므로 각각 220개씩 곱해진다.
$\therefore\ P=x^{220}y^{220}z^{220}$
$\therefore\ a+b+c=660$

(중복조합 (2))

필수예제 14. 다음을 구하라. 〔94. 서강대 응용〕
(1) $x+y+z=8$인 음이 아닌 정수해 $(x,\ y,\ z)$의 개수
(2) 똑같은 연필 8개를 3명에게 나누어 주는 방법의 수
(단, 1개도 받지 않은 사람이 있어도 좋다.)
(3) $(a+b+c)^8$의 전개식에서 나타나는 서로 다른 항의 개수

풀이 (1) $x=1$, $y=2$, $z=5$인 경우를 a, b, c의 문자에서 a를 1개, b를 2개, c를 5개 택한 중복조합으로 생각하면 정수해 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 a, b, c에서 중복을 허용하여 8개 택하는 중복조합의 수와 같다.
$\therefore\ {}_3H_8={}_{10}C_8=\mathbf{45}$ **(개)**
(2) 세 명이 받은 연필의 개수를 각각 x개, y개, z개라고 하면 $x+y+z=8$인 음이 아닌 정수해 $(x,\ y,\ z)$를 구하는 것과 같으므로
${}_3H_8={}_{10}C_8=\mathbf{45}$ **(개)**
(3) a, b, c 세 문자로 만든 8차의 동차항을 $a^p b^q c^r$이라고 하면 $p+q+r=8$이고, p, q, r는 음이 아닌 정수이므로 8차의 동차항의 개수는 음이 아닌 정수해 $(p,\ q,\ r)$의 개수와 같다.
$\therefore\ {}_3H_8={}_{10}C_8=\mathbf{45}$ **(개)**

▶ 중복조합 ${}_nH_r$에서 H는 동차적(Homogeneous product)에서 따온 것이다.

▶ $x+y+z=r$에 대하여 (단, r는 음이 아닌 정수)
① 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_3H_r$가지
② 양의 정수해의 개수는 ${}_3H_{r-3}$가지

수련문제 12. 10명의 선거인이 A, B, C 세 후보에게 투표를 할 때, 다음 물음에 답하라.
(단, 기권이나 무효표는 없다.)
(1) 기명투표를 할 경우 개표 결과는 몇 가지인가?
(2) 무기명투표를 할 경우 개표 결과는 몇 가지인가?

답 (1) 3^{10}가지 (2) 66가지

(분할 · 분배)

필수예제 15. 9명의 가족이 3대의 택시에 나누어 탈 때, 다음을 구하라. (단, 택시 1대의 정원은 4명이다.)
(1) 택시 3대를 구별하지 않는 경우의 수
(2) 택시 3대를 구별하되 좌석은 구별하지 않는 경우의 수
(3) 택시 3대를 구별하고 좌석도 구별하는 경우의 수

♣ 해법 연구 ♣

▶ 택시의 정원이 4명이므로
$9=4+4+1$
$=4+3+2$
$=3+3+3$
의 세 경우로 구별해서 푼다.

풀이 (1) 4명, 4명, 1명의 조편성 ⇨ ${}_9C_4\times{}_5C_4\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=315$

4명, 3명, 2명의 조편성 ⇨ ${}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2=1260$

3명, 3명, 3명의 조편성 ⇨ ${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}=280$

$\therefore$ $315+1260+280=$ **1855 (가지)**

(2) (1)에서 구한 각각에 대하여 택시에 타는 방법은 3! 가지이므로
$1855\times3!=$ **11130 (가지)**

(3) 서로 다른 12개의 좌석에 9명이 앉는 방법과 같으므로
${}_{12}P_9=$ **79833600 (가지)**

(순　열)

필수예제 16. a, a, a, b, c, d의 6개의 문자가 있다.
(1) 3개를 택하여 만든 조합의 수를 구하라.
(2) 3개를 택하여 만든 순열의 수를 구하라.
(3) 3개를 택하여 단어를 만들어 사전식으로 나열할 때, 24번째 단어를 구하라.

▶ 같은 것이 있는 대상에서 택하는 조합의 수는 같은 문자를 몇 개 뽑는가를 기준하여 경우를 구별한다.

풀이 (1) (i) a만 3개 택하는 경우 ⇨ 1 (가지)
(ii) a를 2개 택하는 경우 ⇨ ${}_3C_1=3$ (가지)
(iii) 세 개가 서로 다른 문자인 경우 ⇨ ${}_4C_3=4$ (가지)
$\therefore$ $1+3+4=$ **8 (가지)**

(2) (1)에서 구한 각각을 가지고 순열을 만들면 되므로
$\therefore$ $1+{}_3C_1\times\frac{3!}{2!}+{}_4C_3\times3!=$ **34 (가지)**

(3) $a\square\square$인 경우 ⇨ $1+{}_4P_2=13$ (가지)
$b\square\square$인 경우 ⇨ $1+{}_3P_2=7$ (가지)
caa, cab, cad, cba, …
따라서 24번째 단어는 ***cba***

수련문제 13. 3인승 보트가 2척 있다. 4명이 2척의 보트에 나누어 타려고 할 때, 다음 경우의 수를 구하라.
(1) 사람도 보트도 구별하지 않을 때
(2) 사람, 보트는 구별하고 좌석을 구별하지 않을 때
(3) 사람, 보트, 좌석을 모두 구별할 때

답 (1) 2가지 (2) 14가지 (3) 360가지

(조 합 (1))

필수예제 17. 원에 내접하는 정n각형이 있다. 이 n개의 꼭지점과 원의 중심과의 $(n+1)$개의 점 중에서 3개를 택하여 삼각형을 그릴 때
(1) 삼각형은 모두 몇 개 그릴 수 있는가?
(2) 이 중에서 정삼각형은 몇 개 있는가?

♣ 해법 연구 ♣

▶ n이 짝수이면 세 점이 일직선 위에 있는 경우가 $\frac{n}{2}$가지 생기고, 이 세 점으로는 삼각형을 만들 수 없다.

풀이 (1) (i) n이 홀수일 때

$(n+1)$개의 어느 세 점도 동일 직선 위에 없으므로

$${}_{n+1}C_3=\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}=\frac{1}{6}n(n^2-1)\text{(개)}$$

(ii) n이 짝수일 때

$${}_{n+1}C_3-\frac{n}{2}=\frac{1}{6}n(n^2-1)-\frac{n}{2}=\frac{1}{6}n(n^2-4)\text{(개)}$$

(2) (i) $n=3k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이면

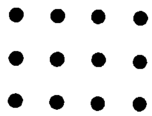
k가 홀수일 때에는 원둘레 위의 세 점으로 정삼각형은 $k=\frac{1}{3}n$(개)

k가 짝수일 때에는 홀수일 때 이외에 원둘레 위의 2점과 중심으로 정삼각형은 $3k$개가 더 있게 되므로 $k+3k=4k=\frac{4}{3}n$(개)

(ii) $n\neq 3k$이면 **정삼각형은 생기지 않는다.**

(조 합 (2))

필수예제 18. 오른쪽 그림과 같이 같은 간격으로 12개의 점이 있다. 다음을 구하라.
(1) 어느 두 점을 연결하여 그린 직선의 개수
(2) 어느 세 점을 연결하여 만든 삼각형의 개수



▶ 일직선 위에 있는 점 중에서 두 점을 택하는 경우는 모두 같은 직선이 된다.

▶ 일직선 위에 있는 점 중에서 세 점을 택하는 경우는 모두 삼각형이 될 수 없다.

풀이 (1) 직선은 두 점을 이어서 만들어지므로 ${}_{12}C_2=66$(개)

이 중에서 네 점이 직선 위에 있는 경우 ${}_4C_2=6$(개)가 겹치고

세 점이 일직선 위에 있는 경우 ${}_3C_2=3$(개)가 겹치므로

$${}_{12}C_2-\{({}_4C_2-1)\times 3+({}_3C_2-1)\times 8\}=\mathbf{35}\text{(개)}$$

(2) 삼각형은 세 점을 택하는 조합이므로 ${}_{12}C_3=220$(개)

이 중에서 삼각형이 되지 못하는 것은

네 점이 일직선 위에 있는 경우 ${}_4C_3=4$(개)

세 점이 일직선 위에 있는 경우 ${}_3C_3=1$(개)

$$\therefore\ {}_{12}C_3-({}_4C_3\times 3+{}_3C_3\times 8)=\mathbf{200}\text{(개)}$$

수련문제 14. 정n각형의 꼭지점을 차례로 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n$이라고 한다. 다음을 구하라.
(1) 이들 중 임의의 세 점으로 되는 삼각형의 개수
(2) 위의 삼각형 중 예각삼각형의 개수

답 (1) $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$개 (2) $\begin{cases} n\text{이 짝수일 때 } \frac{1}{24}n(n-2)(n-4)\text{개} \\ n\text{이 홀수일 때 } \frac{1}{24}n(n-1)(n+1)\text{개} \end{cases}$

(이항계수 (1))

필수예제 19. 다음 등식을 증명하라.

(1) ${}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3\cdot{}_nC_3+\cdots+n\cdot{}_nC_n=n\cdot2^{n-1}$

(2) ${}_nC_0+\dfrac{{}_nC_1}{2}+\dfrac{{}_nC_2}{3}+\cdots+\dfrac{{}_nC_n}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

증명 (1) $r\cdot{}_nC_r=r\cdot\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=\dfrac{n\cdot(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$

$\therefore$ (좌변) $=n\cdot{}_{n-1}C_0+n\cdot{}_{n-1}C_1+n\cdot{}_{n-1}C_2+\cdots+n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}+\cdots+n\cdot{}_{n-1}C_{n-1}$

$=n\cdot({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_{n-1}C_{r-1}+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$

$=n\cdot2^{n-1}$

(2) $\dfrac{{}_nC_r}{r+1}=\dfrac{1}{r+1}\cdot\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r)!}$

$=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!}=\dfrac{1}{n+1}\cdot{}_{n+1}C_{r+1}$

$\therefore$ (좌변) $=\dfrac{1}{n+1}({}_{n+1}C_1+{}_{n+1}C_2+{}_{n+1}C_3+\cdots+{}_{n+1}C_{n+1})=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **필수예제 19**의 다른 풀이

① $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,x^r$

양변을 x에 대하여 미분하여 $x=1$을 대입하면

$\sum_{r=1}^{n}r\cdot{}_nC_r=n\cdot2^{n-1}$

② $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,x^r$

양변을 구간 $[0,\ 1]$에서 적분하여 정리하면

$\therefore\ \sum_{r=0}^{n}\dfrac{{}_nC_r}{r+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(이항계수 (2))

필수예제 20. 다음 등식을 증명하라.

(1) ${}_{n+2}C_{r+1}={}_nC_{r-1}+2{}_nC_r+{}_nC_{r+1}$ (단, $r+1\leqq n$)

(2) ${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2={}_{2n}C_n$

증명 (1) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n$ ……㉠

$(1+x)^2=1+2x+x^2$ ……㉡

㉠과 ㉡을 변끼리 곱하면

$(1+x)^{n+2}=({}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n)(1+2x+x^2)$

좌변에서 x^{r+1}의 계수는 ${}_{n+2}C_{r+1}$

우변에서 x^{r+1}의 계수는 ${}_nC_{r-1}+2{}_nC_r+{}_nC_{r+1}$

$\therefore\ {}_{n+2}C_{r+1}={}_nC_{r-1}+2{}_nC_r+{}_nC_{r+1}$

(2) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_{n-r}\,x^{n-r}+\cdots+{}_nC_n\,x^n$ …㉠

$(1+x)^n={}_nC_n+{}_nC_{n-1}\,x+{}_nC_{n-2}\,x^2+\cdots+{}_nC_1\,x^{n-1}+{}_nC_0x^n$ …㉡

㉠과 ㉡을 변끼리 곱하면

$(1+x)^{2n}=({}_nC_0+{}_nC_1\,x+\cdots+{}_nC_n\,x^n)({}_nC_n+{}_nC_{n-1}\,x+\cdots+{}_nC_0\,x^n)$

좌변에서 x^n의 계수는 ${}_{2n}C_n$

우변에서 x^n의 계수는 ${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2$

$\therefore\ {}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2={}_{2n}C_n$

▶ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

▶ $(1+x)^n$의 전개식에서 x^r의 계수는 ${}_nC_r$이다.

▶ **필수예제 20.** (1)의 다른 풀이

${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ 이므로

${}_{n+2}C_{r+1}={}_{n+1}C_r+{}_{n+1}C_{r+1}$

$=({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)$

$+({}_nC_r+{}_nC_{r+1})$

$={}_nC_{r-1}+2{}_nC_r+{}_nC_{r+1}$

수련문제 15. 다음 등식을 증명하라.

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_1-2{}_nC_2+3{}_nC_3-\cdots+(-1)^{n-1}n{}_nC_n=0$

답 풀이 참조

수련문제 16. 다음 등식을 증명하라.

$${}_nC_0\,{}_nC_1+{}_nC_1\,{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}\,{}_nC_n=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

답 풀이 참조

(이항정리 (1))

필수예제 21. 다음을 구하라.

(1) $\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{12}$을 x의 오름차순으로 전개할 때, 중앙의 항

(2) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{11}$을 x의 내림차순으로 전개할 때, 처음으로 분모에 x가 나타나는 항

풀이 (1) $\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{12}=\sum_{r=0}^{12}{}_{12}C_r\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^r$

에서 항수는 13개이므로 중앙의 항은 $r=6$일 때이다.

$\therefore\ {}_{12}C_6\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^6=\mathbf{\frac{231}{16}x^{12}}$

(2) 일반항은 ${}_{11}C_r(x^2)^{11-r}\times\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_{11}C_r(-1)^r x^{22-3r}$이므로

$22-3r<0$인 최소의 r는 8이다.

$\therefore\ {}_{11}C_8(-1)^8x^{-2}=\mathbf{\frac{165}{x^2}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,a^rb^{n-r}$

(다항정리 (1))

필수예제 22. 다음을 구하라.

(1) $(x+2y-3z)^8$의 전개식에서 $x^3y^2z^3$의 계수

(2) $(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$의 전개식에서 x^6의 계수

풀이 (1) 일반항이 $\frac{8!}{p!\,q!\,r!}x^p(2y)^q(-3z)^r=\frac{8!}{p!\,q!\,r!}2^q(-3)^rx^py^qz^r$

이므로 $x^3y^2z^3$을 포함하는 항은 $p=3,\ q=2,\ r=3$일 때이다.

따라서 구하는 계수는 $\frac{8!}{3!\,2!\,3!}2^2\times(-3)^3=\mathbf{-60480}$

(2) $(1+x^2)^k=\sum_{i=0}^{k}{}_kC_i(x^2)^i=\sum_{i=0}^{k}{}_kC_i\,x^{2i}$이므로 $2i=6$에서 $i=3$

따라서 x^6의 계수는 ${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{20}C_3={}_{21}C_4=\mathbf{5985}$

《다른 풀이》 (준식)$=\frac{(1+x^2)\{(1+x^2)^{20}-1\}}{(1+x^2)-1}=\frac{(1+x^2)^{21}-x^2-1}{x^2}$이므로

x^6의 계수는 $(1+x^2)^{21}$의 전개식에서 x^8의 계수와 같다.

$(1+x^2)^{21}$의 일반항은 ${}_{21}C_r\,x^{2r}$이므로 $2r=8$에서 $r=4$이다.

따라서 구하는 계수는 ${}_{21}C_4=5985$

▶ $(x+y+z)^n$의 전개식의 일반항은

$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}x^py^qz^r$

(단, $p+q+r=n$)

▶ ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$에서

${}_{21}C_4={}_{20}C_3+{}_{20}C_4$

$={}_{20}C_3+{}_{19}C_3+{}_{19}C_4$

……………

$={}_{20}C_3+\cdots+{}_4C_3+{}_4C_4$

$={}_{20}C_3+\cdots+{}_4C_3+{}_3C_3$

($\because\ {}_4C_4={}_3C_3=1$)

수련문제 17. 다음을 구하라.

(1) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^7$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$의 계수

(2) 0.99^6을 소수 다섯째 자리에서 반올림한 값

답 (1) -672 (2) 0.9415

수련문제 18. $(1+x+x^2)^6$의 전개식에서 x^6의 계수를 구하라.

답 141

(다항정리 (2))

필수예제 23. $\{a+(b+c)^2\}^8$을 a, b, c에 대한 다항식으로 전개할 때, 다음을 구하라.

(1) $a^3b^6c^4$의 계수 (2) 서로 다른 항의 개수

(3) 모든 항의 계수의 총합

풀이 $\{a+(b+c)^2\}^8=\sum_{k=0}^{8}{}_8C_k\,a^{8-k}(b+c)^{2k}=\sum_{k=0}^{8}{}_8C_k\,a^{8-k}\left(\sum_{i=0}^{2k}{}_{2k}C_i\,b^ic^{2k-i}\right)$

$$=\sum_{k=0}^{8}\left\{\sum_{i=0}^{2k}({}_8C_k\,{}_{2k}C_i\,a^{8-k}b^ic^{2k-i})\right\}$$

(1) $a^3b^6c^4$을 포함하는 항은 $8-k=3$, $i=6$, $2k-i=4$일 때이므로

$a^3b^6c^4$의 계수는 ${}_8C_5\times{}_{10}C_6=\mathbf{11760}$

(2) 위의 전개식에서 $k=0$, 1, 2, 3, $\cdots$, 8이고

$k=m$일 때 $i=0$, 1, 2, $\cdots$, $2m$의 $(2m+1)$개의 항이 생기므로

$$(\text{항의 개수})=\sum_{k=0}^{8}(2k+1)=2\times\frac{8\times9}{2}+9=\mathbf{81}\,(\text{개})$$

(3) $a=b=c=1$을 대입하면 계수의 총합은 $\{1+(1+1)^2\}^8=\mathbf{5^8}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(a_k\times b_i)$

$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{i=1}^{m}b_i\right)$

(이항정리 (2))

필수예제 24. $x>0$일 때, $(1+x)^n$의 전개식에서 $(r+1)$번째 항을 ${}_nC_r\,x^r$이라고 한다.

(1) ${}_nC_{r-1}\,x^{r-1}\leqq{}_nC_r\,x^r$, ${}_nC_{r+1}\,x^{r+1}\leqq{}_nC_r\,x^r$을 만족하는 r의 범위를 n과 x로 나타내라.

(2) 이 결과를 이용하여 $\left(1+\frac{3}{4}y\right)^{10}$의 전개식에서 계수가 최대인 항을 구하라.

풀이 (1) ${}_nC_{r-1}\,x^{r-1}\leqq{}_nC_r\,x^r$에서

$$\frac{x^r}{r}\geqq\frac{x^{r-1}}{n-r+1}\quad\therefore\ r\leqq\frac{x(n+1)}{x+1}\quad\cdots\cdots㉠$$

${}_nC_{r+1}\,x^{r+1}\leqq{}_nC_r\,x^r$에서

$$\frac{x^{r+1}}{r+1}\leqq\frac{x^r}{n-r}\quad\therefore\ r\geqq\frac{nx-1}{x+1}\quad\cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서 $\boldsymbol{\frac{nx-1}{x+1}\leqq r\leqq\frac{x(n+1)}{x+1}}$

(2) $\left(1+\frac{3}{4}y\right)^{10}$의 전개식에서 일반항은 ${}_{10}C_r\left(\frac{3}{4}\right)^ry^r$이고

${}_{10}C_r\left(\frac{3}{4}\right)^r$은 (1)의 결과에 $n=10$, $x=\frac{3}{4}$일 때이므로

$$\frac{26}{7}\leqq r\leqq\frac{33}{7}\quad\therefore\ r=4$$

따라서 최대 계수인 항은 ${}_{10}C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4y^4=\boldsymbol{\frac{8505}{128}y^4}$

▶ $\left(1+\frac{3}{4}y\right)^{10}$

$=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\left(\frac{3}{4}y\right)^k$

${}_{10}C_k\left(\frac{3}{4}\right)^k=a_k$가 최대이면

$a_k\geqq a_{k+1}$, $a_k\geqq a_{k-1}$

$\therefore\ {}_{10}C_k\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$\geqq{}_{10}C_{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}\quad\cdots㉠$

${}_{10}C_k\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$\geqq{}_{10}C_{k-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\quad\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $\frac{26}{7}\leqq k\leqq\frac{33}{7}$

수련문제 19. $(a^2+ab+b^2)^4$의 전개식에서 a^3b^5의 계수를 구하라. 답 16

수련문제 20. $\left(1+\frac{4}{5}x\right)^{19}$의 전개식에서 최대 계수를 구하라. 답 ${}_{19}C_8\left(\frac{4}{5}\right)^8$

(경우의 수)

필수예제 25. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$, $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $y=f(x)$를 정의한다. 다음을 구하라.

(1) $n=r$일 때, 일대일 대응인 f의 개수

(2) $n \leqq r$일 때, $f(X)=Y$인 f의 개수

(3) $i, j \in X$일 때, $i<j \Rightarrow f(i)<f(j)$인 f의 개수 (단, $n \geqq r$)

(4) $i, j \in X$일 때, $i<j \Rightarrow f(i) \leqq f(j)$인 f의 개수

(5) $i, j \in X$일 때, $i<j \Rightarrow f(i) \leqq f(j)$이고 $f(X)=Y$인 f의 개수 (단, $n \leqq r$)

♣ 해법 연구 ♣

▶ 함수의 정의를 잘 이해하여야 한다.

풀이 (1) $n=r$이면 일대일 함수는 일대일 대응이 되므로 $n!$ (가지)

(2) 전체 함수의 개수에서 치역이 공역과 일치하지 않는 함수를 제외시키면 된다. 이 때 그 대표적인 것이 공역 Y의 원소 중 1개를 제외시킨 집합을 공역으로 하는 함수이다. 그러나 이 중에는 Y의 원소가 2개 제외된 함수들이 이중으로 제외되며 그 다음도 마찬가지이다.

$\therefore\ n^r - {}_nC_1(n-1)^r + {}_nC_2(n-2)^r - \cdots + (-1)^{n-1}{}_nC_{n-1} \cdot 1^r$ (개)

(3) 함수값 r개는 서로 달라야 하며 그 함수값들은 크기 순서대로 X의 원소에 대응되는 방법이 1가지씩으로 고정된다. 즉, 순서를 서로 바꿀 수 없다. $\therefore\ {}_nC_r$ (개)

(4) 함수값 r개는 서로 중복되어도 좋으며, 그 r개의 함수값들은 크기 순서대로 X의 원소에 대응되는 방법이 1가지씩으로 고정된다.

$\therefore\ {}_nH_r$ (개)

(5) $1, 2, 3, \cdots, r$를 순서는 그대로 두고 n개의 부분으로 분할하는 방법의 수와 같으므로

${}_nH_{r-n} = {}_{r-1}C_{r-n} = {}_{r-1}C_{n-1}$ (개)

《다른 풀이》 (4) Y의 각 원소들의 원상의 개수를 각각 $a_1, a_2, \cdots, a_n$개라고 하면 구하는 수는 $a_1+a_2+\cdots+a_n=r$인 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_nH_r$ (개)

(5) Y의 각 원소들의 원상의 개수를 각각 $a_1, a_2, \cdots, a_n$개라고 하면 구하는 수는 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=r$인 양의 정수해의 개수와 같으므로 ${}_nH_{r-n} = {}_{r-1}C_{n-1}$ (개)

수련문제 21. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 A로의 함수 f에 대하여 다음을 구하라.

(1) A의 모든 원소 a에 대하여 $f(a) \geqq a$인 f의 개수

(2) A의 모든 원소 a에 대하여 $(f \circ f)(a)=a$인 f의 개수

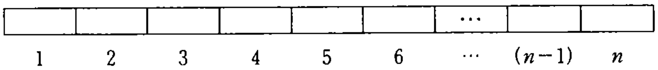
(3) A의 모든 원소 a에 대하여 $(f \circ f \circ f)(a)=a$인 f의 개수

답 (1) 120개 (2) 26개 (3) 21개

〔해답 ⇨ p.213〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 다음 그림과 같이 n개의 칸이 있다. 여기에 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 $(n-3)$개를 1개씩 놓는데, 검은 돌이 이웃하지 않도록 놓는 방법의 수를 구하라.



□□ **2.** 감 3개와 사과 7개가 있다. 이것을 한 사람에게 1개씩 줄 때 다섯 사람에게 줄 수 있는 방법은 몇 가지인가?

□□ **3.** 다음을 구하라.

(1) $x+y+z^2=15$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수

(2) $x+y+z^2\leqq 15$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수

□□ **4.** 정구각형의 세 꼭지점을 묶어서 만들어지는 삼각형에 대하여 다음을 구하라.

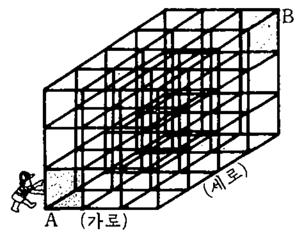
(1) 삼각형의 총 개수

(2) 정구각형과 한 변을 공유하는 삼각형의 개수

(3) 정구각형과 한 변도 공유하지 않은 삼각형의 개수

(4) 정삼각형의 개수

□□ **5.** 놀이터에 오른쪽 그림과 같은 정글놀이기구가 있다. 가로, 세로, 높이는 모두 같은 간격의 철봉으로 되어 있다. 다음을 구하라.



(1) 구멍 A로 들어가서 구멍 B로 나오기로 할 때, 최단 거리로 통과하는 경우의 수

(2) 가로 2번째, 세로 2번째, 위로 2번째 칸은 사방이 막혀서 지날 수 없다고 한다. 이 때 구멍 A에서 구멍 B로 나오는 최단 거리의 통로의 수

□□ **6.** n이 짝수일 때, $(1+x)^n$을 x의 오름차순으로 전개하기로 한다. 다음을 구하라.

(1) 제5항, 제6항, 제 7항의 계수가 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값

(2) (1)에서 구한 n에 대하여 계수가 최대인 항

□□ **7.** n이 $0\leqq n\leqq 9$인 정수일 때, $(1-x)^n(1+x)^{9-n}$의 전개식에서 x와 x^2의 계수가 모두 음이 되는 n의 값을 구하라.

□□ ***8.*** 두 개의 동심원 중 큰 원 위에 6개, 작은 원 위에 3개의 서로 다른 점이 있다. 이 9개의 점으로 이루어지는 직선의 개수의 최대값과 최소값을 구하라.

□□ ***9.*** 한 개의 주사위를 다섯 번 던져서 k번째 나온 눈을 $a_k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라고 한다. 다음을 구하라.

(1) $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$인 경우의 수

(2) $a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4\leqq a_5$인 경우의 수

(3) $a_1\leqq a_2<a_3\leqq a_4<a_5$인 경우의 수

□□ ***10.*** 12개의 의자가 일렬로 놓여 있다. 이 의자에 A, B, C, D의 4명이 앉을 때, 어느 두 사람도 인접하지 않는 경우의 수를 구하라.

□□ ***11.*** 다음 물음에 답하라.

(1) 항등식 $x(x+1)(x+2)(x+3)-(x-1)x(x+1)(x+2)=4x(x+1)(x+2)$를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$를 구하라.

(2) 음이 아닌 임의의 정수 r에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+r)$를 구하라.

(3) 임의의 자연수 n에 대하여

$$x^n=a_1x+\frac{a_2}{2\,!}x(x-1)+\cdots+\frac{a_n}{n\,!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

이 항등식이 되도록 상수 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$을 택했을 때,

$$1^n+2^n+\cdots+n^n={}_{n+1}C_2\,a_1+{}_{n+1}C_3\,a_2+\cdots+{}_{n+1}C_{n+1}\,a_n$$

임을 보여라.

〔94. 포항공대〕

3. 확률의 정의

핵심 정리

1 수학적확률

어떤 시행의 결과 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n가지이고 그들의 어느 두 가지 경우도 동시에 일어나지 않고, 각각이 일어날 기대 정도가 같다고 한다. 이 n가지 경우 중 어떤 사건 E가 일어나는 경우의 수가 a가지일 때, 사건 E가 일어날 수학적확률은

$$\mathrm{P}(E)=\frac{a}{n} \quad (\text{단, } 0 \leqq \mathrm{P}(E) \leqq 1)$$

2 통계적확률

동일한 시행을 n번 반복하였을 때, 사건 E가 r번 일어났다고 하자. n을 충분히 크게할 때, 상대도수 $\frac{r}{n}$가 일정한 값 p에 수렴하면 사건 E가 일어날 통계적확률은

$$\mathrm{P}(E)=\lim_{n \to \infty} \frac{r}{n}=p \quad (\text{단, } 0 \leqq p \leqq 1)$$

3 기하학적 확률

어떤 시행의 결과 얻어진 표본공간 S가 무한집합일 때, $E \subset S$인 사건 E의 기하학적 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\frac{m(E)}{m(S)} \quad (\text{단, } m(S),\ m(E)\text{는 영역 } S,\ E\text{의 크기})$$

(확 률 (1))

필수예제 26. 다음을 구하라.

(1) 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나타나는 눈의 차가 3 이상이 될 확률

(2) 주머니 속에 흰 공 3개, 검은 공 5개가 들어 있다. 이 중에서 4개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 1개 포함될 확률

풀이 (1) 모든 경우의 수는 $6 \times 6=36$(가지)

두 눈의 차가 3 이상이 되는 경우의 수는

(6, 3), (6, 2), (6, 1), (5, 2), (5, 1), (4, 1),
(3, 6), (2, 5), (2, 6), (1, 4), (1, 5), (1, 6)

의 12가지이므로 구하는 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

(2) 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_4$가지

흰 공이 1개이면 검은 공이 3개이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_3$ 가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{3}{7}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 어떤 시행에서 일어날 수 있는 근원사건 전체의 집합을 **표본공간**이라고 한다.

▶ 필수예제 **26**의 (2)에서 주머니 속의 공 8개를 모두 다른 것으로 보고 경우의 수를 구한다. 그 까닭은 각각이 일어날 기대 정도가 같도록 표본공간을 정해야 하기 때문이다.

수련문제 22. 주사위 한 개를 3번 던질 때 나오는 눈의 합이 5일 확률을 구하라. 답 $\frac{1}{36}$

수련문제 23. illusion에 들어 있는 문자 전부를 일렬로 늘어 놓을 때, 같은 문자가 이웃할 확률을 구하라. 답 $\frac{1}{14}$

(통계적확률)

필수예제 27. 수산 시험장에서 어떤 물고기의 알을 인공 부화를 하고 있는데 알 10000개에 대하여 8513개가 부화된다고 한다.
(1) 이 어란의 부화의 확률을 구하라.
(2) 알 30000개로는 몇 개나 부화된다고 생각할 수 있는가?
(3) 5000개가 부화되려면 알이 몇 개나 필요하겠는가?

풀이 (1) 상대도수를 부화의 확률로 보면 되므로 $\frac{8513}{10000} \fallingdotseq \mathbf{0.85}$

(2) n개가 부화된다고 하면 $\frac{n}{30000}$은 부화의 확률과 같아진다고 생각할 수 있으므로 (1)의 결과를 이용하여

$$\frac{n}{30000}=0.85 \qquad \therefore\ \boldsymbol{n=25500}\,\textbf{(개)}$$

(3) 필요한 알의 개수를 N이라고 하면 $\frac{5000}{N}$은 부화의 확률과 같아진다고 생각할 수 있으므로

$$\frac{5000}{N}=0.85 \qquad \therefore\ N=5882.3\cdots \qquad \therefore\ \boldsymbol{N \fallingdotseq 5900}\,\textbf{(개)}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **큰수의 법칙**

자료의 수가 충분히 많을 때, 즉 N이 충분히 클 때, 상대도수 $\frac{r}{N}$를 확률로 쓸 수 있다. 이것을 큰수의 법칙이라고 한다.

또, $\frac{r}{N}=\mathrm{P}(E)$에서

$r=N\cdot\mathrm{P}(E)$

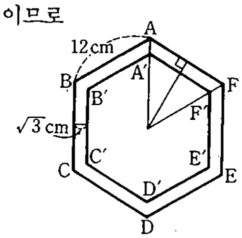
이 r의 값을 사건 E의 N에 대한 **기대값**이라고 한다.

(기하학적 확률)

필수예제 28. 한 변의 길이가 12 cm인 정육각형의 타일이 빈틈없이 깔린 현관이 있다. 이 현관 바닥에 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ cm인 원판을 떨어뜨렸을 때, 다음을 구하라.
(1) 이 원판이 한장의 타일에 완전히 포함될 확률 P_1
(2) 이 원판이 3장의 타일에 걸쳐 놓이게 될 확률 P_2

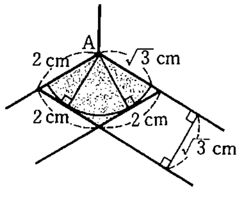
풀이 한 변이 12 cm인 정삼각형의 높이는 $6\sqrt{3}$ cm이므로

(1) 오른쪽 그림에서 두 육각형의 닮음비가 6 : 5이므로



$$\mathrm{P}_1=\frac{(\text{육각형 A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{E}'\text{F}'\text{의 넓이})}{(\text{육각형 ABCDEF의 넓이})}=\left(\frac{5}{6}\right)^2=\mathbf{\frac{25}{36}}$$

(2) 한 꼭지점 A에서 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ cm인 원을 그리면 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 원판의 중심이 놓일 때, 3장의 타일에 원판이 걸치게 된다.



$$\therefore\ \mathrm{P}_2=\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})\times 6}{(\text{정육각형 ABCDEF의 넓이})}=\frac{\left(\frac{1}{2}\pi+\sqrt{3}\right)\times 6}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2\right)\times 6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\,\pi+6}{216}}$$

▶ 원판이 놓이는 위치는 원판의 중심에 의하여 결정된다.

▶ 기하학적 확률은 표본공간 S를 일의적으로 결정하여 생각한다. 이 경우는 한 장의 타일을 표본공간 S로 생각하면 된다.

수련문제 24. 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax-b^2+1\geq 0$이 성립하도록 실수 a, b를 택할 때, x의 방정식 $x^2-2ax+3b^2=0$이 실근을 가질 확률을 구하라. 답 $\frac{1}{3}$

(확 률 (2))

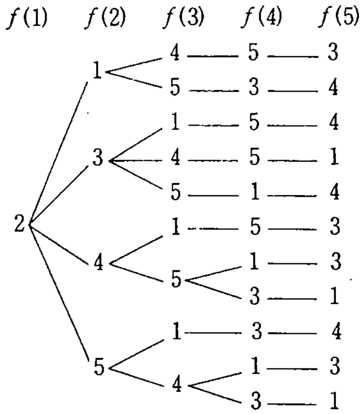
필수예제 29. 다음을 구하라.

(1) 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 A로의 일대일 함수 f 중에서 모든 A의 원소 x에 대하여 $f(x)\neq x$인 함수 f의 개수

(2) 1에서 9까지 번호가 붙은 공 9개와 상자 9개가 있다. 이 공을 상자에 1개씩 무심히 넣을 때, 공의 번호와 상자의 번호가 일치하는 것이 꼭 4개일 확률

풀이 (1) $f(1)$이 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 5의 네 가지이다.

$f(1)=2$인 경우에 대하여 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$가 될 수 있는 수를 수형도를 써서 차례로 조사하면 다음과 같이



의 11가지이다.

$f(1)=3$, 4, 5일 때에도 마찬가지이므로 구하는 함수의 개수는

$11\times4=$ **44(개)**

(2) 공 9개를 9개의 상자에 1개씩 넣는 방법은 $9!$가지

번호가 일치하는 것은 ${}_9C_4$가지

나머지 공 5개와 상자 5개는 번호가 일치하지 않으므로 그 경우의 수는 (1)을 참고하면 44가지

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_9C_4\times44}{9!}=\mathbf{\dfrac{11}{720}}$

《다른 풀이》 어느 네 번호가 일치할 확률은 ${}_9C_4\times\dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{6}$

남은 5개의 번호가 일치하지 않을 확률은 $\dfrac{44}{5!}$

따라서 구하는 확률은 $\left({}_9C_4\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{44}{5!}=\dfrac{11}{720}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 가능한 경우를 수형도로 구한다.

▶ **완전순열**

1에서 n까지의 번호가 적힌 공과 상자가 각각 n개 있다. 공을 각 상자에 무심히 넣을 때, 공과 상자의 번호가 일치한 것이 하나도 없으면 이것은 완전순열이 되어 있다고 한다. n개의 대상으로 된 완전순열의 수를 $f(n)$이라고 하면

$f(n)=(n-1)\times\{f(n-1)+f(n-2)\}$

$\left(\text{단, } n\geq3,\ f(1)=0,\ f(2)=1\right)$

여기서 **필수예제 29**의 (1)은 $f(5)$이므로

$f(3)=2(0+1)=2$

$f(4)=3(1+2)=9$

$\therefore f(5)=4(2+9)=44$

수련문제 25. 5명의 학생이 각각 같은 크기의 카드에 자기 이름을 한 장씩 써서 내었다. 이것을 잘 섞은 뒤에 다시 한 장씩 카드를 집기로 하였다. 다음을 구하라.

(1) 꼭 1명만 자기 이름이 쓰인 카드를 집을 확률

(2) 5명 모두 자기 이름이 쓰이지 않은 카드를 집을 확률

답 (1) $\dfrac{3}{8}$ (2) $\dfrac{11}{30}$

(확 률 (3))

필수예제 30. 다음을 구하라.

(1) A, B, C의 3명이 가위바위보를 한 번 할 때

① 승부가 나지 않을 확률 P_1 ② A가 이길 확률 P_2

(2) A, B, C, D의 4명이 가위바위보를 한 번 할 때

① 승부가 나지 않을 확률 P_1 ② A가 이길 확률 P_2

풀이 (1) 모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=27$(가지)

① 승부가 나지 않을 경우는 3명 모두 같은 손을 내거나 모두 다른 손을 내는 경우이므로 $3+3!=9$(가지)

$\therefore\ P_1=\frac{9}{27}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

② A가 가위일 때, B, C가 각각 (보, 보), (가위, 보), (보, 가위)이면 A가 이긴다. A가 바위, 보일 때도 마찬가지로 3가지씩 있다.

$\therefore\ P_2=\frac{3\times3}{27}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

(2) 모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$(가지)

① 승부가 나지 않을 경우는

4명이 모두 같은 손을 낼 경우 3가지

4명 중 어느 2명은 같은 손이고, 다른 2명이 다른 손일 경우

${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\times3!=36$(가지)

$\therefore\ P_1=\frac{3+36}{81}=\mathbf{\frac{13}{27}}$

② A가 가위일 때, 다른 3명이 (보, 보, 보), (보, 보, 가위), (보, 가위, 보), (가위, 보, 보), (보, 가위, 가위), (가위, 보, 가위), (가위, 가위, 보)이면 A가 이긴다.

A가 바위나 보를 낼 때도 마찬가지로 7가지씩 있다.

$\therefore\ P_2=\frac{7\times3}{81}=\mathbf{\frac{7}{27}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **필수예제 30.** (2)의 ①의 경우 중 가위, 바위, 보가 모두 나오는 경우의 수는 $X=\{A, B, C, D\}$에서 $Y=\{$가위, 바위, 보$\}$로의 함수 f 중에서 $f(X)=Y$인 함수 f의 개수와 같으므로

$3^4-{}_3C_1\cdot2^4+{}_3C_2\cdot1^4$
$=81-48+3$
$=36$ (가지)

수련문제 26. n명이 가위바위보를 꼭 한 번 하였을 때, 승부가 나지 않을 확률을 $P(n)$이라고 하자. (단, $n\geq2$)

(1) $P(n)$을 n으로 나타내라. (2) $\lim_{n\to\infty}P(n)$을 구하라.

답 (1) $P(n)=\frac{3^n-3\times2^n+6}{3^n}$ (2) 1

수련문제 27. 주머니 속에 1에서 n까지의 번호가 하나씩 쓰여진 n개의 공이 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 번호를 확인한 다음 다시 주머니 속에 넣는다고 한다. 이와 같은 시행을 n번 반복할 때, 다음을 구하라.

(1) 모든 번호의 공이 한 번씩 나올 확률

(2) 2에서 n까지의 공은 모두 나오고, 1인 공만 나오지 않을 확률

(3) 번호가 1인 공이 적어도 한 번 나올 확률

답 (1) $\frac{n!}{n^n}$ (2) $\frac{(n-1)\cdot n!}{2n^n}$ (3) $1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

〔해답 ⇨ p.215〕

실력강화문제

□□ **1.** 주머니 속에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 이 주머니 속에서 임의로 2장의 카드를 꺼낼 때, 다음을 구하라.

(1) 나타나는 모든 경우의 수

(2) $\boxed{1}\boxed{1}$이 나올 확률 P_1과 $\boxed{1}\boxed{4}$가 나올 확률 P_2

□□ **2.** 두 자리의 양의 정수의 집합에서 임의로 택한 양의 정수를 M이라고 할 때, $\log_2 M$이 정수가 될 확률을 구하라. 〔94. 성균관대 응용〕

□□ **3.** 1, 2, 3, …, $2n$의 숫자를 하나씩 적은 같은 크기의 카드가 $2n$장이 섞여 있다. 이 중에서 두 장을 꺼내어 적힌 숫자의 차가 n 이상이 될 확률을 P_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} P_n$의 값을 구하라.

□□ **4.** 주머니 속에 흰 공과 검은 공을 합쳐 10개가 들어 있다. 이 중에서 두 개를 꺼내어 보고 다시 넣는 일을 되풀이하여 보니 3회에 1회 꼴로 두 개 모두 흰 공이었다고 할 때, 흰 공이 몇 개 있다고 추측할 수 있는가?

□□ **5.** $a \geqq 2$인 실수 a에 대하여 두 실수 p, q를

$$0 \leqq p \leqq a^2, \qquad 0 \leqq q \leqq a^2$$

이 되도록 뽑을 때, x에 관한 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$이 실근을 가질 확률 $p(a)$를 구하고, $\lim_{a\to\infty} p(a)$의 값을 구하라. 〔94. 서강대 응용〕

□□ **6.** 2개의 주머니에 각각 n개의 공이 들어 있다. 각 주머니의 각각의 공에는 1, 2, 3, 4, …, n이 하나씩 씌어 있고, 한 주머니에 같은 번호의 공은 없다고 한다. 이 두 개의 주머니에서 공을 1개씩 꺼낼 때, 2개의 공의 번호가 일치할 확률은 $\boxed{\ (1)\ }$이고, 2개의 공의 숫자의 차이가 $i(1 \leqq i \leqq n-1)$가 될 확률은 $\boxed{\ (2)\ }$이다.

□□ **7.** 한 개의 주사위를 n번 던져서 나온 눈의 최대값이 x일 확률을 $\mathrm{P}_n(x)$라고 할 때

(1) $\mathrm{P}_n(1)$, $\mathrm{P}_n(2)$를 구하라.

(2) $\mathrm{P}_n(x)$를 구하고, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n(x)$를 구하라.

□□ **8.** 흰 공 4개와 빨간 공 6개가 들어 있는 주머니에서 먼저 A가 4개의 공을 꺼내고 다음에 B가 3개의 공을 꺼낼 때, A, B 두 사람이 꺼낸 공 중에서 흰 공의 개수가 같을 확률을 구하라.

〔연세대〕

□□ **9.** n명의 학생이 한 줄로 나란히 서서 카드 섹션을 한다. 모든 학생은 흑과 백 각각 한 장씩의 카드를 가지고 있다. 어느 순간에 모두 흑색의 카드를 들어야 하는데 각 학생이 실수로 백색 카드를 들 확률은 0.1이라고 한다. 그런데 양쪽 끝이 흑색이고, 두 백색 카드가 이웃하지만 않는다면 본부석에서 볼 때 실수가 눈에 띄지 않는다고 한다.(예 : $n=4$일 때 ■□■■는 성공적으로 간주되나 □■■■나 ■□□■의 경우는 그렇지 않다.) 이 카드 섹션의 실수가 본부석에서 눈에 띄지 않을 확률을 P_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하라. 〔과기대〕

(1) P_3, P_4는?

(2) $n\geqq 2$일 때 P_{n+1}, P_n, P_{n-1} 사이의 관계식을 구하라.

(3) 두 벡터 $\begin{pmatrix}\mathrm{P}_{n+1}\\ \mathrm{P}_n\end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix}\mathrm{P}_n\\ \mathrm{P}_{n-1}\end{pmatrix}$ 사이의 관계식을 행렬을 이용하여 나타내라.

(4) $\begin{pmatrix}\mathrm{P}_n\\ \mathrm{P}_{n-1}\end{pmatrix}$을 행렬의 곱으로 나타내라.

□□ **10.** 1, 2, 3, …, 9의 숫자가 각각 적힌 9장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 다음을 구하라.

(1) 모두 꺼내어 9자리의 수를 만들 때, 9개의 숫자 중 짝수는 왼쪽에서 오른쪽으로 갈수록 차례로 크게, 홀수는 차례로 작게 될 확률

(2) 임의의 2장의 카드를 꺼낼 때, 이 숫자의 곱이 짝수일 확률

(3) 임의의 2장의 카드를 꺼내어 이들 숫자를 a, b라고 할 때, $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{a}{b}$ 중 어느 것도 정수가 되지 않을 확률

□□ **11.** 상자 속에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 적힌 5개의 공이 있다. 이들 중 임의의 한 개를 꺼내어 그 번호를 기록한 다음, 도로 상자에 넣는다. 이러한 시행을 n회 반복하였을 때 기록한 숫자의 합이 짝수가 될 확률을 $\mathrm{P}_n(n=1, 2, 3, \cdots)$이라고 한다.

(1) P_1, P_2, P_3을 구하라.

(2) P_n을 P_{n-1}로 나타내라.

(3) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n$을 구하라.

4. 확률에 대한 정리

핵심 정리

1 확률의 덧셈정리

(1) 덧셈정리 : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

(2) $A\cap B=\phi$, 즉 A, B가 서로 배반이면 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ($\because$ $P(A\cap B)=0$)

2 조건부확률

사건 A가 일어났다는 조건 하에서 사건 B가 일어날 조건부확률은

$$P(B\mid A)=P_A(B)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

3 확률의 곱셈정리

(1) A, B가 종속일 때 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)=P(B)\cdot P(A\mid B)$

(2) A, B가 독립일 때 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

4 독립시행의 확률

1회의 시행에서 $P(A)=p$, $P(A^c)=q$라 하고 이 시행을 독립으로 n번 반복시행할 때, 사건 A가 일어난 횟수가 꼭 r번일 확률 P_r는

$$P_r={}_nC_r\,p^rq^{n-r}\ (\text{단, } p+q=1,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(조건부확률 (1))

필수예제 31. 주머니 속에 모양과 크기가 똑같은 빨간 공이 2개, 흰 공이 1개 들어 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 그 공과 같은 색깔의 공 1개를 더하여 꺼낸 공과 같이 주머니 속에 넣는다. 이러한 시행을 되풀이할 때, 다음을 구하라.

(1) 세 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률

(2) 세 번째 꺼낸 공이 흰 공일 때, 첫번째 꺼낸 공이 흰 공이었을 확률

풀이 K번째 흰 공을 꺼낼 사건을 E_K ($K=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)라고 하면

(1) $P(E_3)=P(E_1\cap E_2\cap E_3)+P(E_1\cap E_2{}^c\cap E_3)+P(E_1{}^c\cap E_2\cap E_3)$
$+P(E_1{}^c\cap E_2{}^c\cap E_3)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) $$P(E_1\mid E_3)=\frac{P(E_1\cap E_3)}{P(E_3)}=\frac{P(E_1\cap E_2\cap E_3)+P(E_1\cap E_2{}^c\cap E_3)}{P(E_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 순차적으로 일어나는 시행이므로 뒤의 사건은 먼저 일어난 사건에 종속이다.

▶ $E_2=(E_1\cap E_2)\cup(E_1{}^c\cap E_2)$인데 $E_1\cap E_2$와 $E_1{}^c\cap E_2$는 서로 배반이므로
$P(E_2)=P(E_1\cap E_2)$
$+P(E_1{}^c\cap E_2)$

▶ 사건 $E_K{}^c$는 K번째 꺼낸 공이 빨간색일 사건이다.

수련문제 28. 10개의 제비 중 당첨 제비가 3개 있다. 갑, 을 두 사람이 이 순서대로 제비를 한 개씩 뽑기로 한다. 두 번째 뽑은 을이 당첨되었을 때, 갑도 당첨되었을 확률을 구하라.

답 $\frac{2}{9}$

(조건부확률 (2))

필수예제 32. 양의 정수값만을 취하는 확률변수 X 에 대하여 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}$ 이고, 조건부확률에 관한 등식

$$\mathrm{P}(X>m+n \mid X>m)=\mathrm{P}(X>n)$$

이 모든 양의 정수 m, n 에 대하여 성립한다고 하자.
다음을 구하라.

(1) $\mathrm{P}(X>1)$ (2) $\mathrm{P}(X=m)$

풀이 (1) $\mathrm{P}(X>1)=1-\mathrm{P}(X=1)=1-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

(2) $\mathrm{P}(X>m+n \mid X>m)=\dfrac{\mathrm{P}(X>m+n,\ X>m)}{\mathrm{P}(X>m)}$

$=\dfrac{\mathrm{P}(X>m+n)}{\mathrm{P}(X>m)}=\mathrm{P}(X>n)$

$\therefore\ \mathrm{P}(X>m+n)=\mathrm{P}(X>m)\cdot\mathrm{P}(X>n)$ ……㉠

㉠에 $m=1$을 대입하면

$\mathrm{P}(X>n+1)=\mathrm{P}(X>1)\cdot\mathrm{P}(X>n)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(X>n)$

$\therefore\ \mathrm{P}(X>n)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=m)=\mathrm{P}(X>m-1)-\mathrm{P}(X>m)$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{m}=\mathbf{\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\mathrm{P}(X=m)$
$=\mathrm{P}(X>m-1)-\mathrm{P}(X>m)$

▶ $\mathrm{P}(F \mid E)=\dfrac{\mathrm{P}(F\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$

▶ $a_{n+1}=ra_n$(n 은 자연수) 이면 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. (단, r 는 상수)

(독립사건 · 종속사건)

필수예제 33. 1개의 동전을 n 번 던질 때, 두 사건 A, B 를

A : 앞면과 뒷면이 1회 이상 나오는 사건
B : 앞면이 0번 또는 1번 나오는 사건

이라고 하자. 이 때 다음 각 경우에 대하여 두 사건 A, B 의 독립·종속을 확인하라.

(1) $n=2$일 때 (2) $n=3$일 때

풀이 (1) $n=2$, 즉 동전을 2번 던질 때

$\mathrm{P}(A)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^c)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

또, 사건 $A\cap B$ 는 앞면이 1번, 뒷면이 1번 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$ 이므로 A, B 는 **종속**

(2) $n=3$, 즉 동전을 3번 던질 때

$\mathrm{P}(A)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(B)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

또, 사건 $A\cap B$ 는 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$이므로 A, B 는 **독립**

▶ ① 사건 B 가 A 에 종속이면 $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$
② 사건 A, B 가 독립이면
$\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(B)$
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$

(독립사건)

필수예제 **34.** 두 사건 A, B가 독립일 때, 다음이 독립임을 증명하라.

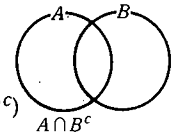
(1) A와 B^C (2) A^C와 B^C

♣ 해법 연구 ♣

▶ A, B가 독립이면
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

풀이 (1) A, B가 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$\therefore P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$
$=P(A)-P(A)\times P(B)$
$=P(A)(1-P(B))=P(A)\cdot P(B^C)$



따라서 A와 B^C는 독립이다.

(2) $P(A^C\cap B^C)=1-P(A\cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$
$=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)$
$=(1-P(A))\cdot(1-P(B))=P(A^C)\cdot P(B^C)$

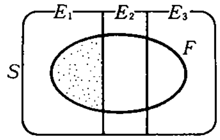
따라서 A^C와 B^C는 서로 독립이다.

(조건부확률 (3))

필수예제 **35.** 상자 A, B, C에 오른쪽 표와 같이 흰 공과 검은 공이 들어 있다. 임의로 상자 하나를 택하고, 그 상자에서 2개의 공을 꺼냈더니 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나왔다. 택하여진 상자가 B이었을 확률을 구하라.

상자 \ 공	흰 공	검은 공
A	2	4
B	1	2
C	3	2

▶



$F=(F\cap E_1)\cup(F\cap E_2)\cup(F\cap E_3)$

풀이 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나온 사건을 F, 택한 상자가 A, B, C일 사건을 각각 E_A, E_B, E_C라고 하면

$$P(F\cap E_A)=P(E_A)P(F\mid E_A)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{45}$$

$$P(F\cap E_B)=P(E_B)P(F\mid E_B)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_3C_2}=\frac{2}{9}$$

$$P(F\cap E_C)=P(E_C)P(F\mid E_C)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$$

$$\therefore P(E_B\mid F)=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{45}+\frac{2}{9}+\frac{1}{5}}=\mathbf{\frac{10}{27}}$$

수련문제 **29.** 두 사건 A, B가 독립이고, $P(A\cap B^C)=\frac{1}{2}$, $P(A^C\cap B^C)=\frac{1}{6}$일 때, $P(A)$, $P(B)$를 구하라.

답 $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{1}{3}$

수련문제 **30.** 세 번 중에 한 번의 비율로 모자를 잃어버리는 버릇이 있는 사람이 차례로 A, B, C의 세 집을 방문하고 돌아왔을 때, 다음을 구하라. 〔고려대〕

(1) 모자를 잃어버리지 않고 돌아왔을 확률

(2) 모자를 잃어버리고 돌아왔을 때, 그 모자를 C의 집에서 잃어버렸을 확률

답 (1) $\frac{8}{27}$ (2) $\frac{4}{19}$

(확 률)

필수예제 36. 어떤 제품 10개가 있다. 이 중에 2개의 불량품이 섞여 있는 것은 알려져 있으나 겉에서 보아서 알 수 없다. 지금 이 중에서 1개씩 꺼내어 조사를 하여 불량품 전부를 발견했을 때, 이 검사를 그치는 것으로 한다. 다음을 구하라. (단, $2 \leq n \leq 7$)

(1) 꼭 5개째에서 검사가 끝날 확률

(2) 꼭 n개째에서 검사가 끝날 확률

(3) n개째까지 검사가 끝날 확률

풀이 (1) 4회까지에 1개의 불량품이 나오고 5회째에 다시 불량품이 나올 확률이므로 $\dfrac{{}_2C_1 \times {}_8C_3}{{}_{10}C_4} \times \dfrac{1}{{}_6C_1} = \mathbf{\dfrac{4}{45}}$

(2) $(n-1)$회까지에 1개의 불량품이 나오고 n회째에 다시 불량품이 나올 확률이므로

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_8C_{n-2}}{{}_{10}C_{n-1}} \times \frac{1}{{}_{10-(n-1)}C_1} = \frac{2 \times 8! \times (n-1)!\,(11-n)!}{(n-2)!\,(10-n)!\,10!\,(11-n)}$$
$$= \mathbf{\frac{n-1}{45}}$$

(3) (2)에서 꼭 k회째에 검사가 끝날 확률은 $\dfrac{k-1}{45}$이므로, n회까지에 검사가 끝날 확률은 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{45} = \frac{1}{45}\{1+2+\cdots+(n-1)\} = \mathbf{\frac{n(n-1)}{90}}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **필수예제 36**의 (3)에서 $n=10$이라고 하면 확률은 1이 되어 당연하다.
또 이 문제에서 시행의 결과는 순열로 나타내지지만 문제에서의 사건은 조합만으로도 정해진다는 것과 각 순열에 대한 확률이 같은(동등한 확실성) 것에서 조합으로 계산해도 좋다. 순열로 계산하면 복잡하게 된다.

(독립시행의 확률)

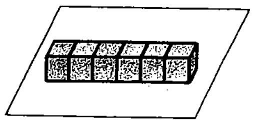
필수예제 37. 자연수 n, r가 $r<n$이라고 한다. $0<p<1$인 실수 p에 대하여 매회 일어날 확률이 p인 사건을 n회 독립시행하여 꼭 r회 일어날 확률을 $f(p)$로 표시할 때, $f(p)$의 값이 최대가 되는 p의 값을 구하라. 〔서울대〕

풀이 $f(p) = {}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r}$이므로 $f(p)$의 증감을 조사하면

$$f'(p) = {}_nC_r\{r p^{r-1}(1-p)^{n-r} + p^r (n-r)(1-p)^{n-r-1} \cdot (-1)\}$$
$$= {}_nC_r\, p^{r-1}(1-p)^{n-r-1}(r-np)$$

그런데 $0<p<1$이므로 $f'(p)=0$에서 $p=\dfrac{r}{n}$이고, 이 때 $f(p)$는 극대이고 최대이다. 따라서 $f(p)$가 최대가 되는 p의 값은 $\mathbf{\dfrac{r}{n}}$

수련문제 31. 주사위 6개를 오른쪽 그림과 같이 붙여 놓은 다음 전, 후, 좌, 우 그리고 위에서 보았을 때, 1을 나타내는 주사위 면이 3개 보일 확률을 구하라. 〔94. 포항공대〕



답 $\dfrac{11}{36}$

수련문제 32. 주사위를 100번 던질 때, 1의 눈이 몇 번 나오는 것이 가장 일어나기 쉬운가?

답 16번

〔해답 ⇨ p.217〕

실력 강화 문제

□□ ***1.*** 주사위 1개를 3회 던질 때, 같은 눈이 연속해서 2번 이상 나올 확률을 구하라.

□□ ***2.*** 세 점 X_1, X_2, X_3이 X_1 — X_2 — X_3 과 같이 놓여 있을 때, 다음과 같은 게임을 하기로 한다. X_1을 출발점으로 하여 동전을 던져서 앞면이 나오면 인접한 오른쪽 점으로 이동하고, 뒷면이 나오면 인접한 왼쪽 점으로 이동한다. 단, X_1에서 동전을 던져서 뒷면이 나오면 이동하지 않는다. 그리고 X_3에 도착하면 어느 경우에도 이동하지 않는다. 동전을 6번 던져서 X_1에 있을 확률을 구하라. 〔과기대〕

□□ ***3.*** n개의 수의 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$에서 동시에 3개의 수를 꺼낼 때, 다음을 구하라.

(1) 꺼낸 3개의 수가 연속될 확률

(2) 꺼낸 3개의 수 중 어느 두 수만이 연속될 확률

(3) 꺼낸 3개의 수 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률 〔연세대〕

□□ ***4.*** A, B 2개의 상자가 있다. 상자 A에는 1에서 6까지의 번호가 적힌 6개의 공이 들어 있고, 상자 B는 비어있다고 한다. 지금 주사위를 던져서 나온 눈의 수와 같은 번호의 공을 그것이 들어 있는 상자에서 꺼내어 다른 상자로 옮기는 시행을 하기로 한다. 다음을 구하라.

(1) 주사위를 2번 던졌을 때, 상자 B가 비어 있을 확률

(2) 주사위를 3번 던졌을 때, 상자 B에 공이 1개 들어 있을 확률

□□ ***5.*** 1부터 6까지 하나씩 번호가 붙은 6개의 상자가 있다. 각 상자마다 6개의 공이 들어 있고, 그 중 흰 공의 개수는 상자의 번호와 같다. 먼저 주사위를 던져 나타나는 눈의 수와 같은 번호의 상자를 택한 후 그 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸다.

(1) 꺼낸 공이 흰 공일 확률을 구하라.

(2) 꺼낸 공이 흰 공일 때, 이것이 홀수 번호의 상자에서 나왔을 확률을 구하라.

〔94. 연세대 응용〕

□□ **6.** 한 양궁 선수가 계속해서 활을 쏘는데, 과녁에 명중시킨 뒤에 다시 명중시킬 확률은 $\frac{7}{8}$, 명중시키지 못한 후에 또 명중시키지 못할 확률이 $\frac{1}{4}$이라고 한다. 이 선수가 n회째에 명중시킬 확률을 P_n이라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) P_n, P_{n-1} 사이의 관계식(단, $n=2, 3, \cdots$)

(2) $P_1=\frac{1}{2}$이라고 할 때, P_n

(3) $\lim_{n\to\infty} P_n$의 값

□□ **7.** 5개의 같은 공을 서로 다른 상자 A, B, C에 임의로 넣는 실험에서 꼭 한 개의 빈 상자가 생기는 경우를 성공이라고 하자.

(1) 이 실험이 성공할 확률을 구하라.

(2) 이 실험을 여러 번 독립적으로 반복할 때, n회째 실험에서 처음으로 성공할 확률을 구하라.

〔연세대〕

□□ **8.** 동점 P는 수직선 위의 원점에서 출발하여 동전을 던져서 앞면이 나오면 양의 방향으로 1만큼 나아가고, 뒷면이 나오면 음의 방향으로 1만큼 나아간다. 이것을 $2n$회 반복했을 때 점 P의 좌표가 2일 확률을 p_n으로 한다. 또, $(2n-1)$회째에 점 P의 좌표가 1이고 $2n$회째에 P의 좌표가 2일 확률을 q_n으로 한다. 다음을 구하라.

(1) p_n, q_n

(2) $\sum_{n=2}^{8} \log_2 \frac{p_n}{p_n-q_n}$

□□ **9.** 주머니 A에는 모양과 크기가 같은 흰 공 2개, 주머니 B에는 빨간 공이 2개 들어 있다. 지금 각 주머니에서 공을 1개씩 꺼내어 교환하는 시행을 반복하고 있다.

(1) 이 시행을 2번 하였을 때, A에 흰 공이 2개일 확률을 구하라.

(2) 이 시행을 3번 하였을 때, A에 흰 공이 1개, 빨간 공이 1개일 확률을 구하라.

(3) 이 시행을 n회 반복하였을 때, A에 흰 공이 2개일 확률을 p_n, A에 흰 공이 1개, 빨간 공이 1개일 확률을 q_n이라고 하자. 이 때 q_n, q_{n-1} 사이에 성립하는 관계식을 구하고 이것을 이용하여 p_n을 구하라. (단, $n=1, 2, 3, 4, \cdots$)

(4) $\lim_{n\to\infty} p_n$, $\lim_{n\to\infty} q_n$을 구하라.

〔해답 ⇨ p. 219〕

고 급 문 제 (IV)

1. 1에서 n까지의 숫자가 적힌 카드가 각각 한 장씩 있다.

(1) 이 중에서 동시에 2장의 카드를 택하여 카드에 적힌 수를 x, $y(x<y)$라고 할 때, $x+y<n+1$인 경우의 수를 구하라.

(2) 이 중에서 동시에 3장의 카드를 택하여 카드에 적힌 수를 x, y, $z(x<y<z)$라고 할 때 x, y, z가 이 순서대로 등차수열이 되는 경우의 수를 구하라.

2. 한 평면 위에 n개의 원이 있다. 이 원들은 어느 두 원도 서로 다른 두 점에서 만나고, 또 동일한 점에서 3개 이상의 원이 만나지 않는다고 한다. 이들 n개의 원이 분할한 평면의 개수를 $f(n)$이라고 하자.

(1) $f(2)-f(1)$, $f(3)-f(2)$를 구하라.

(2) $f(n)-f(n-1)$을 n의 식으로 나타내라.

(3) $f(n)$을 n의 식으로 나타내라.

3. 1에서 12까지의 숫자에서 3개를 택하여 a, b, c라고 할 때, $a-b\geqq2$, $b-c\geqq3$인 경우의 수를 다음과 같이 구하려고 한다.

(방법 I) c가 될 수 있는 수는 1에서 $\boxed{(1)}$ 까지이므로 $c=k$일 때 $b\geqq\boxed{(2)}$이고 $b\leqq a-2$이다. 이것을 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $\boxed{(3)}$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $\boxed{(4)}$이다.

(방법 II) 1에서 12까지의 정수 중 c보다 작은 정수의 개수를 x개, c보다 크고 b보다 작은 정수의 개수를 y개, b보다 크고 a보다 작은 정수의 개수를 z개, a보다 큰 정수의 개수를 u개라고 하면, $x\geqq0$, $y\geqq\boxed{(1)}$, $z\geqq\boxed{(2)}$, $u\geqq0$이고, $x+y+z+u=\boxed{(3)}$이므로 이것을 만족하는 정수해 (x, y, z, u)의 개수를 구하면 $\boxed{(4)}$이다.
이 정수해의 각 경우마다 순서쌍 (a, b, c)가 결정되므로 구하는 경우의 수는 $\boxed{(5)}$이다.

4. 7단의 계단이 있다. 이 계단을 올라가는 데 한꺼번에 1단, 2단, 혹은 3단까지 올라갈 수 있다고 한다.

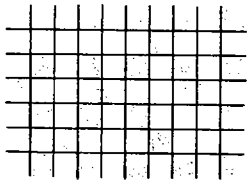
(1) 이 계단을 오르는 방법은 몇 가지인가?

(2) 또 한 번에 1단, 2단, 3단을 오르는 데 소요되는 시간의 비가 3 : 4 : 5라고 하면 가장 빠른 시간에 오르도록 하려면 어떻게 올라가야 하는가?

5. 주사위 1개를 던져서 나온 눈의 수를 A, 동전 6개를 던져서 앞면이 나온 동전의 개수를 B 라고 할 때, $A=B$ 일 확률을 구하라.

6. 기계를 상대로 하는 게임이 있다. 이 게임을 한 번 할 때 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이고 질 확률이 $\frac{2}{3}$이다. 또 이기면 칩을 2개 얻고, 지면 칩을 1개 내준다고 한다. 처음에 칩을 2개 가지고 게임을 시작하여 꼭 10회째에 처음으로 칩의 개수가 10개가 될 확률을 구하라.(단, 칩을 모두 잃으면 게임은 중단되는 것으로 하고, 게임 도중에 칩의 개수가 10개를 넘는 경우는 없는 것으로 한다.)

7. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 12 cm 인 정사각형 모양의 흰색 타일과 검은 색 타일이 빈틈없이 붙여진 바닥이 있다. 여기에 반지름의 길이가 1 cm 인 동전을 1개 던졌을 때, 흰색 타일에 동전이 얹힐 확률 P_1과 검은색 타일에 얹힐 확률 P_2를 구하라.



8. 주머니 A, B, C에 흰 공과 검은 공이 각각 (2개, 5개), (3개, 4개), (4개, 3개)가 들어 있다. 지금 임의로 한 개의 주머니를 택하여 공을 3개 꺼냈더니 흰 공이 1개, 검은 공이 2개이었다. 어느 주머니에서 나왔을 확률이 가장 큰가?

9. A는 빨간 구슬, 흰 구슬, 파란 구슬을 x개, y개, z개($x\geq0$, $y\geq0$, $z\geq0$, $x+y+z=6$)가 든 상자를 갖고 있고, B는 빨간 구슬, 흰 구슬, 파란 구슬이 각각 3개, 2개, 1개가 든 상자를 갖고 있다. 각자가 자기 상자에서 아무 생각없이 한 개의 구슬을 꺼내어 그것이 같은 색일 때에는 A가 이기고 다른 색이면 B가 이기기로 하였다. 또 A가 빨간 구슬, 흰 구슬, 파란 구슬로 이길 때의 득점을 각각 1점, 2점, 2점이라고 한다.

(1) A가 이길 확률을 x, y, z로 표시하라.

(2) A가 이길 확률이 $\frac{4}{9}$ 이상일 때의 A의 득점의 기대값을 최대로 하는 x, y, z를 구하라.

1. 이산확률분포

핵심 정리

1 확률분포의 성질

이산확률변수 X 의 확률분포가 $P(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 일 때

(1) $0 \leqq p_i \leqq 1$　　(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

(3) $P(x_i \leqq X \leqq x_j)=p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j$

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

2 이산확률분포의 평균, 분산, 표준편차

(1) 평 균 : $m=E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

(2) 분 산 : $\sigma^2=V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-m^2$

(3) 표준편차 : $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-m^2}$.

3 평균, 분산, 표준편차의 성질

(1) $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$　　(2) $E(aX+b)=aE(X)+b$ (a, b 는 상수)

(3) $V(aX+b)=a^2V(X)$　　(4) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

4 이항분포의 평균, 분산

확률변수 X 가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때 $(p+q=1)$

(1) $P(X=r)={}_nC_r p^r q^{n-r}$　　(2) 평 균 : $m=np$　　(3) 분 산 : $\sigma^2=npq$

(도수분포표)

필수예제 1. 다음 도수분포표에서 키의 평균 m과 표준편차 σ를 구하라.

키	150~155	155~160	160~165	165~170	170~175	175~180
사람 수	1	5	11	13	9	1

♣ 해법 연구 ♣

▶ 가평균을 A 라고 하면

① $m=A+\dfrac{\Sigma(x_i-A)f_i}{\Sigma f_i}$

② $\sigma^2=\dfrac{\Sigma(x_i-A)^2 f_i}{\Sigma f_i}-\left\{\dfrac{\Sigma(x_i-A)f_i}{\Sigma f_i}\right\}^2$

풀이 가평균을 167.5라고 하면

$m=167.5+\dfrac{-65}{40}$

$\fallingdotseq$ **165.9**

$\sigma^2=\dfrac{1325}{40}-\left(\dfrac{-65}{40}\right)^2$

$\fallingdotseq 30.5$

$\therefore$ **$\sigma \fallingdotseq 5.5$**

계급값(x)	도수(f)	$x-A$	$(x-A)f$	$(x-A)^2f$
152.5	1	−15	−15	225
157.5	5	−10	−50	500
162.5	11	−5	−55	275
167.5	13	0	0	0
172.5	9	5	45	225
177.5	1	10	10	100
합 계	40		−65	1325

수련문제 1. 변량 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n에 대한 도수가 각각 f_1, f_2, $\cdots$, f_n이다. 표준편차가 4이고 $\sum_{i=1}^{n} f_i=8$, $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i=16$일 때, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i$의 값을 구하라.　　답 160

(대 표 값)

필수예제 **2.** n개의 측정값 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 평균값을 m, 표준편차를 σ, 또 c를 상수라고 한다. c, m, σ를 써서 다음 값을 나타내라.

(1) x_1+c, x_2+c, $\cdots$, x_n+c의 평균값 및 표준편차

(2) cx_1, cx_2, $\cdots$, cx_n의 평균값 및 표준편차

(3) cx_1^2, cx_2^2, $\cdots$, cx_n^2의 평균값

풀이 (1) 평균 : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+c)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+cn\right)=m+c$

분산 : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i+c)-(m+c)\}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=\sigma^2$

∴ **평균값 $m+c$, 표준편차 σ**

(2) 평균 : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}cx_i=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=cm$

분산 : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(cx_i-cm)^2=c^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=c^2\sigma^2$

∴ **평균값 cm, 표준편차 $|c|\sigma$**

(3) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)=0$에서 평균값은

평균 : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}cx_i^2=\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-m)+m\}^2$

$=\frac{c}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2+2m\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)+m^2n\right\}$

$=c\sigma^2+cm^2=\mathbf{c(m^2+\sigma^2)}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 평균 : $m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

분산 : $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$

(이산확률분포(1))

필수예제 **3.** 흰 공이 4개, 검은 공이 2개가 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼낼 때, 흰 공의 개수의 기대값과 분산을 구하라.

풀이 흰 공의 개수를 확률변수 X라 하면, X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_0}{{}_6C_2}=\frac{6}{15}$

X	0	1	2	합
$P(X)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

기대값 : $E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{6}{15}=\mathbf{\frac{4}{3}}$

분 산 : $V(X)=\left(0^2\times\frac{1}{15}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{6}{15}\right)-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{16}{45}}$

수련문제 **2.** 확률변수 X의 기대값 $E(X)=1$, 표준편차 $\sigma(X)=2$일 때, X^2의 평균 $E(X^2)$, $-2X+3$의 표준편차 $\sigma(-2X+3)$의 값을 구하라.

답 5, 4

수련문제 **3.** 1, 1, 2, 2, 3, 4가 각각 적혀 있는 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수의 평균과 분산을 구하라.

답 평균 $\frac{13}{6}$, 분산 $\frac{41}{36}$

(이산확률분포(2))

필수예제 **4.** 확률변수 X 의 분포가 오른쪽 표와 같고, 확률변수 Y 가 $Y=\dfrac{X-175}{10}$ 의 관계를 만족할 때, 다음 물음에 답하라.

X	155	165	175	185
$P(X)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$

(1) Y 의 확률분포표를 작성하고 기대값 $E(Y)$, 분산 $V(Y)$ 를 구하라.

(2) $E(Y)$, $V(Y)$를 이용하여 $E(X)$, $V(X)$를 구하라.

♣ 해법 연구 ♣

▶ 확률변수 $Y=aX+b$ 에서

① $E(Y)=E(aX+b)$
$=aE(X)+b$

② $V(Y)=V(aX+b)$
$=a^2V(X)$

③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

④ $V(c)=0$

(단, a, b, c 는 상수)

▶ $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

풀이 (1) $y_i=\dfrac{x_i-175}{10}$ 에 $x_i=155$, 165, 175, 185를 대입하면 $y_i=-2$, -1, 0, 1 이고, 대응하는 확률은 변하지 않는다.

Y	-2	-1	0	1
$P(Y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(Y)=(-2)\times\frac{1}{10}+(-1)\times\frac{3}{10}+0\times\frac{5}{10}+1\times\frac{1}{10}=\mathbf{-0.4}$$

$$V(Y)=\left\{(-2)^2\times\frac{1}{10}+(-1)^2\times\frac{3}{10}+0^2\times\frac{5}{10}+1^2\times\frac{1}{10}\right\}-(-0.4)^2$$
$$=\mathbf{0.64}$$

(2) $Y=\dfrac{X-175}{10}$ 에서 $X=10Y+175$

$$E(X)=E(10Y+175)=10E(Y)+175=\mathbf{171}$$
$$V(X)=V(10Y+175)=10^2V(Y)=\mathbf{64}$$

(이항분포)

필수예제 **5.** 확률변수 X 에 대하여 $X=r$ 인 확률이
$P(X=r)={}_nC_r\,p^rq^{n-r}$ ($r=0$, 1, 2, $\cdots$, n)일 때,
$E(X)=np$, $V(X)=npq$ 임을 증명하라. (단, $p+q=1$)

▶ 확률변수 X 가 이항분포 $B(n,\ p)$에 따르면
$E(X)=np$
$V(X)=npq$
(단, $q=1-p$)

▶ 항등식
$(pt+q)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rp^rq^{n-r}t^r$
을 이용하여 증명할 수도 있다.

증명
$$E(X)=\sum_{r=0}^{n}r\cdot{}_nC_rp^rq^{n-r}=\sum_{r=1}^{n}r\cdot{}_nC_rp^rq^{n-r}=\sum_{r=1}^{n}r\cdot\frac{n!}{r!\,(n-r)!}p^rq^{n-r}$$
$$=\sum_{r=1}^{n}r\cdot\frac{n}{r}\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}p^rq^{n-r}=\sum_{r=1}^{n}n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}p^rq^{n-r}$$
$$=np\sum_{r=1}^{n}{}_{n-1}C_{r-1}p^{r-1}q^{n-r}=np\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_kp^kq^{n-1-k}$$
$$=np(p+q)^{n-1}=np$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\sum_{r=0}^{n}r^2{}_nC_rp^rq^{n-r}-(np)^2$$
$$=\sum_{r=0}^{n}r(r-1){}_nC_rp^rq^{n-r}+\sum_{r=0}^{n}r\cdot{}_nC_rp^rq^{n-r}-n^2p^2$$
$$=\sum_{r=2}^{n}r(r-1)\frac{n!}{r!\,(n-r)!}p^rq^{n-r}+np-n^2p^2$$
$$=n(n-1)p^2\sum_{r=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(r-2)!\,(n-r)!}p^{r-2}q^{n-r}+np-n^2p^2$$
$$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np-n^2p^2$$
$$=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq$$

수련문제 **4.** 주사위 2개를 던지는 시행을 60번 독립적으로 반복할 때, 합이 4 이하인 횟수를 확률변수 X 라고 한다. 이 때 X 의 분포를 구하고, 평균 $E(X)$, 분산 $V(X)$를 구하라.

답 $B\left(60,\ \frac{1}{6}\right)$, $E(X)=10$, $V(X)=\frac{50}{6}$

(체비쇼프의 부등식)

필수예제 6. n개의 변량 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_n$이 있다. 이들 변량의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하고 n개의 변량 중에서 $|x_i-m|\geqq k\sigma$의 범위에 있는 개수를 p개라고 하면 $p\leqq\dfrac{n}{k^2}$이 성립함을 증명하라. (단, $k>1$)

증명 n개의 변량 x_i에서 $|x_i-m|\geqq k\sigma$를 만족하는 x_i의 개수가 p개라고 하면 $|x_i-m|<k\sigma$를 만족하는 x_i의 개수는 $(n-p)$개이다.

$$\therefore\ \sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{p}(x_i-m)^2+\sum_{i=p+1}^{n}(x_i-m)^2\right\}$$
$$\geqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}(x_i-m)^2\ (\because\ |x_i-m|\geqq k\sigma)$$
$$\geqq\frac{1}{n}(k^2\sigma^2+k^2\sigma^2+\cdots+k^2\sigma^2)$$
$$=\frac{k^2\sigma^2}{n}\times p$$
$$\therefore\ p\leqq\frac{n}{k^2}\ (\text{단, } k>1)$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ **체비쇼프의 부등식**
변량 x_i의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하고 변량 x_i의 총 개수를 N개, $|x_i-m|\leqq k\sigma$인 x_i의 개수를 n개라고 하면
$$n\geqq N\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\ (\text{단, } k>1)$$

▶ 체비쇼프의 부등식은 변량 x_i의 분포가 정규분포인지 알 수 없을 때, 어느 범위에 있는 변량의 개수를 구하는 데 이용한다.

(큰수의 법칙)

필수예제 7. 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 한다. 이 시행을 n번 독립으로 반복할 때, A가 일어나는 횟수를 X라고 하면, 임의의 양수 α에 대하여 다음 식이 성립함을 증명하라.

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\alpha\right)=1$$

증명 A가 일어나는 횟수 X는 이항분포를 따르고, 그 평균값과 표준편차는

$$m=\mathrm{E}(X)=np,\ \sigma=\sigma(X)=\sqrt{npq}\ (q=1-p)$$

이것을 $\mathrm{P}(|X-m|<k\sigma)\geqq1-\dfrac{1}{k^2}$에 대입하면

$$\mathrm{P}(|X-np|<k\sqrt{npq})\geqq1-\frac{1}{k^2},\ \text{즉 } \mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<k\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\geqq1-\frac{1}{k^2}$$

여기서 $k\sqrt{\dfrac{pq}{n}}=\alpha\ (>0)$라고 하면 $1-\dfrac{pq}{\alpha^2 n}\leqq\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X}{n}-p\right|<\alpha\right)\leqq1$

$p,\ q,\ \alpha$는 일정하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{pq}{\alpha^2 n}=0$ $\quad\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\alpha\right)=1$

▶ **큰수의 법칙**
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\alpha\right)=1$에서 $\alpha\fallingdotseq0$으로 보면
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\frac{X}{n}\fallingdotseq p\right)=1$$
즉, 충분히 큰 n에 대하여 상대도수 $\dfrac{X}{n}$는 수학적확률 p에 가까워진다.
이를 **큰수의 법칙**이라고 한다.

수련문제 5. 다음 물음에 답하라.

(1) 한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률을 p라고 하면 $pq\leqq\dfrac{1}{4}\ (q=1-p)$임을 증명하라.

(2) 확률변수 X가 $\mathrm{B}(n,\ p)$에 따르고 $n=100$일 때, $\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X}{n}-p\right|<0.1\right)\geqq0.75$임을 보여라.

답 풀이 참조

〔해답 ⇨ p.221〕

실력 강화 문제

□□ *1.* 부모와 3명의 자녀들이 한 줄로 설 때, 부모 사이에 서는 자녀의 수를 X 라고 하자. 이 때 X 의 분산을 구하라.

□□ *2.* 확률변수 X 가 확률분포 $\mathrm{P}(X=x)=kx(x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$를 이룰 때, 상수 k 의 값은 $\boxed{(1)}$ 이고 확률변수 X 의 기대값은 $\boxed{(2)}$ 이다.

□□ *3.* 확률변수 X 가 취할 수 있는 값이 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n(n\geqq 2)$이고 $\mathrm{P}(X=r)=a+br$, $\mathrm{E}(X)=\dfrac{n+2}{3}$ 일 때, $\dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하라.

□□ *4.* 동전 한 개를 3번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 X 라고 하자. $(X-a)^2$의 평균을 $f(a)$ 라고 할 때, $f(a)$의 최소값은 $\boxed{(1)}$ 이고, 그 때의 a 의 값은 $\boxed{(2)}$ 이다.

□□ *5.* 한 개의 주사위를 9번 던질 때, 3의 배수가 나오는 횟수와 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수의 차이의 제곱을 X 라고 하자. 이 때 X 의 기대값 $\mathrm{E}(X)$를 구하라.

□□ *6.* 확률변수 X 는 이항분포에 따르고,

$$\mathrm{P}(X=0)>0,\ \ \mathrm{P}(X=1)=6\,\mathrm{P}(X=0),\ \ \mathrm{P}(X=2)=2\,\mathrm{P}(X=1)$$

이다. 이 때 확률 $\mathrm{P}(X=2)$를 구하라. 〔94. 성균관대 응용〕

□□ **7.** 자루 안에 들어 있는 n장(n은 2보다 큰 짝수)의 카드에 각각 $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\cdots$, $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{n}$이 되는 수가 적혀 있다. 이들의 카드는 어느 것도 같은 확률로 뽑혀진다고 하고, 처음에 뽑은 1장의 수의 값을 X_1, 두 번째 뽑은 1장의 수의 값을 X_2라고 한다. 다음 물음에 답하라.

(1) $X_1>\frac{1}{2}$이 되는 사건과 $X_2>\frac{1}{2}$이 되는 사건은 독립인지 아닌지를 말하고, 그 이유를 써라.

(2) X_1의 기대값을 구하라.

(3) X_1의 표준편차를 구하라.

□□ **8.** 다음 물음에 답하라.

(1) 자연수 l, m, n에 대하여 $n\leq l$, $n\leq m$일 때,

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{l}C_{k}\cdot{}_{m}C_{n-k}={}_{l+m}C_{n}$$

임을 증명하라.

(2) 어떤 제품이 $3M$개 들어 있는 상자 속에 불량품이 M개 들어 있다. 이 상자에서 동시에 n개의 제품을 임의추출할 때, 추출된 불량품의 개수를 X라고 하자. 이 때 $\mathrm{P}(X=k)$를 P_k라고 하면

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{E}(X)+\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathrm{P}_k$$

이다. (단, $1\leq n\leq M$)

① X의 기대값 $\mathrm{E}(X)$를 구하라.

② X의 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하라. 〔94. 서울대〕

□□ **9.** 동전 11개를 앞면이 위에 있도록 나열하고 이 중에서 4개를 무작위로 골라 뒤집어 놓는다고 한다. 또 다시 그 11개 중 4개를 무작위로 골라 뒤집어 놓을 때 앞면이 위에 있는 동전의 개수를 X라고 하자. 다음 물음에 답하라.

(1) $X=9$일 확률을 구하라.

(2) X의 확률분포를 구하라.

(3) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하라.

□□ **10.** 단추를 누르면 1에서 19까지의 자연수들 중 하나가 나타나는 장치가 있다. 이 장치에서 n이 나타날 확률은 $\frac{n}{190}$($n=1$, 2, $\cdots$, 19)이라고 한다. 한편, 고른 주사위를 한 번 던져서 나오는 주사위의 눈이 짝수이면 100점, 홀수이면 0점을 받는 놀이가 있다. 이제 단추를 한 번 눌러 나오는 수가 n이라면, 위의 놀이를 n번 독립적으로 반복하여 받은 점수를 확률변수 X라고 하자. X의 기대값을 구하라. 〔서울대〕

2. 연속확률분포

핵심 정리

1 연속확률변수의 확률분포

(1) **확률밀도함수** : 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 정의된 연속확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)\,dx \left(단,\ f(x) \geqq 0,\ \int_\alpha^\beta f(x)\,dx=1\right) \Longleftrightarrow f(x) : X 의\ 확률밀도함수$$

(2) **평균** : $\mathrm{E}(X)=\int_\alpha^\beta xf(x)\,dx=m$

분산 : $\mathrm{V}(X)=\int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta x^2 f(x)\,dx-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

2 정규분포와 표준정규분포

(1) **정규분포** : $(-\infty,\ \infty)$에서 정의된 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ (단,\ m=\mathrm{E}(X),\ \sigma=\sigma(X) \Longleftrightarrow X : \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$$

(2) **표준정규분포** : $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z의 확률밀도함수 $\varphi(z)$는

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \Longleftrightarrow Z : \mathrm{N}(0,\ 1^2)$$

3 이항분포와 정규분포

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$에 따른다. (라플라스의 정리)

(연속확률분포 (1))

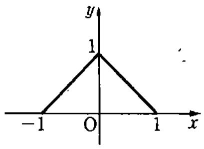
필수예제 8. 확률변수 X에 대한 확률밀도함수가

$$f(x)=\begin{cases}1+x & (-1 \leqq x<0) \\ 1-x & (0 \leqq x \leqq 1)\end{cases}$$

일 때, 다음을 구하라.

(1) $\mathrm{P}\left(|X|<\frac{1}{3}\right)$

(2) X의 평균과 표준편차



♣ 해법 연구 ♣

풀이 (1) $\mathrm{P}\left(|X|<\frac{1}{3}\right)=2\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx=2\int_0^{\frac{1}{3}}(1-x)\,dx=\mathbf{\frac{5}{9}}$

(2) $\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_{-1}^0 x(1+x)\,dx+\int_0^1 x(1-x)\,dx=\mathbf{0}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\int_{-1}^0 x^2(1+x)\,dx+\int_0^1 x^2(1-x)\,dx-0^2=\mathbf{\frac{1}{6}}$

수련문제 6. 구간 $[0,\ 2]$에서 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax^3$이고 $\mathrm{P}(X \leqq k)=\dfrac{1}{256}$일 때, 다음을 구하라.

(1) 상수 $a,\ k$의 값　　(2) $\mathrm{E}(X)$

답 (1) $a=\frac{1}{4},\ k=\frac{1}{2}$　(2) $\mathrm{E}(X)=\frac{8}{5}$

(연속확률분포 (2))

필수예제 9. 어떤 버스 정류장의 발차 시각은 매시 0분, 15분, 35분의 3회이다. 버스의 발차 시각을 전혀 모르는 사람이 이 정류장에 갔을 때, 버스를 기다리는 시간을 확률변수 X라고 하자. 다음을 구하라.

(1) X의 확률밀도함수 $f(x)$

(2) X의 평균

♣ 해법 연구 ♣

▶ $0 \leqq x \leqq 15$일 때 기다리는 시간 X가 $0 \leqq X \leqq x$인 확률은 기하학적 확률에서 $\mathrm{P}(0 \leqq X \leqq x)=\frac{3x}{60}$이다.

풀이 (1) X의 범위는 $0 \leqq X \leqq 25$이므로

(i) $0 \leqq x \leqq 15$일 때

$$\mathrm{P}(0 \leqq X \leqq x)=\int_0^x f(t)\,dt=\frac{3x}{60}$$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=\frac{1}{20}$

(ii) $15 < x \leqq 20$일 때

$$\mathrm{P}(0 \leqq X \leqq x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{15} f(t)\,dt+\int_{15}^x f(t)\,dt$$

$$=\frac{45}{60}+\frac{2(x-15)}{60} \qquad \therefore f(x)=\frac{1}{30}$$

(iii) $20 < x \leqq 25$일 때

$$\mathrm{P}(0 \leqq X \leqq x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{15} f(t)\,dt+\int_{15}^{20} f(t)\,dt+\int_{20}^x f(t)\,dt$$

$$=\frac{55}{60}+\frac{x-20}{60} \qquad \therefore f(x)=\frac{1}{60}$$

$$\therefore \boldsymbol{f(x)=\begin{cases} \frac{1}{20} & (0 \leqq x \leqq 15) \\ \frac{1}{30} & (15 < x \leqq 20) \\ \frac{1}{60} & (20 < x \leqq 25) \end{cases}}$$

(2) $$\mathrm{E}(X)=\int_0^{25} x f(x)\,dx=\int_0^{15} x\cdot\frac{1}{20}dx+\int_{15}^{20} x\cdot\frac{1}{30}dx+\int_{20}^{25} x\cdot\frac{1}{60}dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{125}{12}}\text{ (분)}$$

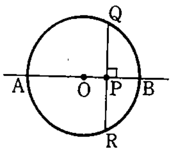
수련문제 7. 10분 간격으로 출발하는 지하철이 있다. 임의의 시각에 역에 갈 때 기다리는 시간의 평균과 표준편차를 구하라.

답 평균 5, 표준편차 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

수련문제 8. 반지름의 길이가 a인 원 O의 지름 AB 위의 임의의 점 P를 지나 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수직인 현 QR를 긋는다. 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위의 어느 점이 될 확률이 모두 같다고 할 때, 다음을 구하라.

(1) $\overline{\mathrm{QR}}$의 길이가 반지름의 길이보다 클 확률

(2) $\overline{\mathrm{QR}}$의 길이의 평균값



답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\pi}{2}a$

(정규분포 (1))

필수예제 10. 어느 고등 학교 1학년 학생 1000명에 대한 키의 분포는 평균이 164cm, 표준편차가 5cm인 정규분포를 이룬다고 한다. 다음 물음에 답하라.

(1) 키가 160cm 이상 170cm 이하인 학생은 전체의 몇 %인가?

(2) 키가 169cm 이상인 학생은 약 몇 명인가?

z	$P(0 \leqq Z \leqq z)$
0.8	0.2881
0.1	0.3413
1.2	0.3849

♣ 해법 연구 ♣

▶ 표준측도

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

풀이 $m=164$, $\sigma=5$이므로 $Z=\dfrac{X-164}{5}$

(1) $P(160 \leqq X \leqq 170)=P(-0.8 \leqq Z \leqq 1.2)$

$=P(0 \leqq Z \leqq 0.8)+P(0 \leqq Z \leqq 1.2)$

$=0.2881+0.3849=0.673$　　$\therefore$ **67.3%**

(2) $P(X \geqq 169)=P(Z \geqq 1)=0.5-P(0 \leqq Z \leqq 1)=0.5-0.3413=0.1587$

$\therefore$ $1000 \times 0.1587=158.7$　　$\therefore$ **약 159명**

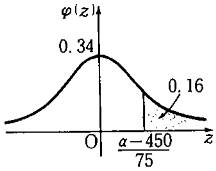
(정규분포(2))

필수예제 11. 어느 대학의 입학 시험은 1000점 만점이고, 전체 지원자 2000명의 득점 분포는 평균이 450점, 표준편차가 75점인 정규분포를 이룬다고 한다. 합격자가 320명이었다고 할 때, 합격자의 최저 점수는 약 몇 점인가?

(단, 정규분포에서 $P(m \leqq X \leqq m+\sigma)=0.34$)

▶ 합격생의 수가 2000명 중 320명이므로, 합격할 확률은 상대도수 $\dfrac{320}{2000}=0.16$

풀이 각 개인의 점수를 X라 하고, 합격자의 최저 점수를 α라고 하면



$$P(X \geqq \alpha)=\frac{320}{2000}=0.16$$

이어야 하므로

$$P(X \geqq \alpha)=P\left(Z \geqq \frac{\alpha-450}{75}\right)=0.16$$

$$0.5-P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\alpha-450}{75}\right)=0.16$$

$$\therefore\ P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\alpha-450}{75}\right)=0.34$$

그런데 $P(m \leqq X \leqq m+\sigma)=P(0 \leqq z \leqq 1)=0.34$이므로

$\dfrac{\alpha-450}{75}=1$　　$\therefore$ $\alpha=525$　　$\therefore$ **약 525점**

수련문제 9. 어느 고등 학교 3학년 1000명에 대한 수학 성적이 정규분포 $N(70,\ 7.5^2)$을 따를 때, 55점 이상 85점 이하인 학생 수를 구하라.　　답 약 954명

수련문제 10. 어떤 학교 학생 300명의 성적이 평균 65점, 표준편차 15점인 정규분포를 따른다고 할 때, 상위 30% 이내에 들려면 몇 점 이상 받아야 하는가?　　답 약 73점 이상

(정규분포(3))

필수예제 12. 한 환자에게 어떤 약을 투약했을 때 치유될 확률은 0.6이다. 150명의 환자에게 이 약을 투약했을 때 102명 이상이 치유될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하라.

z	$P(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

풀이 각 환자에게 투약하여 치유되는 것은 독립시행이므로, 치유된 환자의 수 X는 이항분포 $B(150,\ 0.6)$을 따른다.

$\therefore\ m=np=150\times0.6=90,\ \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{150\times0.6\times0.4}=6$

그런데 $n=150$은 충분히 크므로 X는 정규분포 $N(90,\ 6^2)$을 따른다고 볼 수 있다.

$Z=\dfrac{X-90}{6}$이라 하면

$P(X\geq102)=P(Z\geq2)=0.5-P(0\leq Z\leq2)=\mathbf{0.0228}$

♣ 해법 연구 ♣

▶ n이 충분히 클 때 X가 $B(n,\ p)$를 따르면 X는 근사적으로 $N(np,\ npq)$를 따른다.

(연속확률분포 (3))

필수예제 13. 어느 대학의 입학 시험 결과 응시자의 성적은 평균 210점, 표준편차 20점인 정규분포를 따르고, 최저 합격 점수는 250점이라고 한다. 이 대학의 응시자 중 400명을 임의로 추출했을 때 합격자가 15명 이상 포함되어 있을 확률을 구하라.

z	$P(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

풀이 성적을 X라 하면 X의 확률분포는 $N(210,\ 20^2)$을 따르므로 어느 한 학생이 합격할 확률은

$P(X\geq250)=P(Z\geq2)=0.5-0.48=0.02$

따라서 400명 중 합격자의 수를 확률변수 Y라고 하면, Y의 확률분포는 이항분포 $B(400,\ 0.02)$를 따른다.

$\therefore\ E(Y)=400\times0.02=8,\ V(Y)=400\times0.02\times0.98=\left(\dfrac{14}{5}\right)^2$

그런데 $n=400$은 충분히 크므로 Y는 정규분포 $N\left(8,\ \left(\dfrac{14}{5}\right)^2\right)$에 따른다고 볼 수 있다.

따라서 구하는 확률은

$P(Y\geq15)=P(Z\geq2.5)=0.5-0.49=\mathbf{0.01}$

▶ 응시자 중 어느 한 학생의 합격·불합격의 여부는 독립적으로 결정되므로, 400명 중에 포함된 합격자의 수 Y는 이항분포를 따르게 된다.

수련문제 11. 한 개의 주사위를 720회 던질 때 1의 눈이 나온 횟수가 100 이상 150 이하일 확률을 구하라.

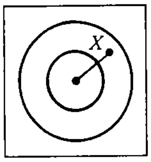
답 0.9759

수련문제 12. 동전 2개를 던지는 시행을 300번 반복하여 동시에 앞면이 나온 횟수를 X라고 할 때, $P(60\leq X\leq k)\leq0.9544$를 만족하는 정수 k의 최대값을 구하라.

답 90

(정규분포(4))

필수예제 14. 오른쪽 그림과 같이 색칠한 원의 반지름의 길이가 10 cm인 사격 연습용 표적이 있다. 이 원의 중심에서 탄착점까지의 거리를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$가



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}-ax & (0\leq x\leq 20)\\ 0 & (x>20)\end{cases}$$

k	$P(0\leq Z\leq k)$
0.97	0.334
1.15	0.375
1.53	0.437

이라고 한다. 다음 물음에 답하라.

(1) 탄환이 색칠한 부분에 적중할 확률을 구하라.

(2) 이 표적에 100발을 사격하였을 때, 80발 이상이 색칠한 부분에 적중할 확률을 구하라.
(단, $\sqrt{3}=1.73$으로 하고, 소수의 계산은 소수 셋째 자리에서 반올림한다.)

♣ 해법 연구 ♣

▶ 확률밀도함수의 정의에서
$$\int_0^{20} f(x)\,dx=1$$

▶ 탄환이 적중하느냐 빗나가느냐는 독립적으로 결정되므로 적중한 탄환의 개수의 확률분포는 이항분포이다.

풀이 (1) 확률밀도함수의 정의에 의하여

$$\int_0^{20} f(x)\,dx=\int_0^{20}\left(\frac{1}{10}-ax\right)dx=2-200a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{200}$$

따라서 탄환 1발이 적중할 확률 p는

$$p=\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^{10}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{200}x\right)dx=\frac{3}{4}$$

(2) 100발 중에 적중한 탄환의 개수를 Y개라고 하면, Y는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$E(Y)=100\times\frac{3}{4}=75,\quad V(Y)=100\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{75}{4}$$

그런데 $n=100$은 충분히 크므로, Y는 정규분포 $N\left(75,\ \frac{75}{4}\right)$에 따른다고 볼 수 있다.

$$\therefore\ P(Y\geq 80)=P\left(Z\geq\frac{80-75}{\frac{\sqrt{75}}{2}}\right)\fallingdotseq P(Z\geq 1.15)$$
$$=0.5-0.375=0.125\fallingdotseq \mathbf{0.13}$$

수련문제 13. 0과 1 사이의 임의의 난수를 만들어내는 프로그램이 설치된 컴퓨터가 있다. 이 난수를 확률변수 R라고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $[10R]=7$일 확률을 구하라. (단, $[t]$는 t를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

(2) 이 컴퓨터로 만들어낸 400개의 난수 중에 $[10R]=7$인 것의 개수의 평균, 표준편차를 구하라.

(3) (2)에서 $[10R]=7$인 것의 개수가 34개보다 적을 확률을 구하라.
(단, $P(0\leq Z\leq 1)=0.34$)

답 (1) 0.1 (2) 평균 40, 표준편차 6 (3) 0.16

〔해답 ⇨ p. 223〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 구간 [0, 1]의 모든 값을 취하는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(x)=ax(1-x)$로 주어질 때, 다음을 구하라.

(1) 상수 a의 값

(2) $\mathrm{P}(0.3 \leqq X \leqq 0.7)$

(3) X의 평균과 분산

□□ **2.** 구간 [0, 2]에서 정의된 확률밀도함수 $f(x)=ax$가 있다. 이 구간에서 임의로 세 수 x_1, x_2, x_3을 택할 때, 그 중에서 2개만 1보다 작을 확률을 구하라.

□□ **3.** 어떤 공장에서 생산되는 파이프의 지름은 평균 100 mm, 표준편차 2 mm인 정규분포를 이룬다고 한다. 파이프의 지름이 97 mm에서 103 mm까지이면 합격품이 된다고 한다. 이 공장의 제품 중에 포함되어 있는 불량품의 비율을 구하라. $\left(\text{단, } \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{1.5} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0.4332\right)$

□□ **4.** 어느 학급의 영어, 수학, 국어 시험의 성적이 오른쪽 표와 같다. 상규의 성적을 학급 전체와 비교하였을 때, 성적이 좋은 과목의 순서로 나열하라. (단, 성적은 정규분포를 이룬다.)

과 목	영어	수학	국어
평 균	51	62	50
표 준 편 차	16	14	18
상규의 성적	70	78	68

□□ **5.** 40명의 직원을 채용하기 위하여 어떤 회사에서 공개 채용 시험을 보았더니 응시자 1600명의 성적이 $\mathrm{N}(65, 10^2)$인 정규분포를 이루었다고 한다. 합격하기 위한 최저 점수를 구하라. (단, 표준정규분포에서 $\mathrm{P}(Z \leqq 1.96)=0.975$)

□□ **6.** $\overline{\mathrm{AB}}=2a$인 선분 AB를 지름으로 하고 원점 O를 중심으로 하는 반원 위에 점 P가 있다. 이 때 $\angle\mathrm{POA}=\theta$라고 하면 θ는 확률변수이고, 확률밀도함수가 $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$라고 한다. 현 AP의 길이가 a보다 크게 될 확률을 구하라.

〔94. 고려대 응용〕

□□ *7*. y에 관한 이차방정식 $y^2+xy+1=0$에서 x는 확률변수이고 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 1^2)$을 따른다고 한다. 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 확률을 구하라.

z	$\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq z)$
1.0	0.3413
2.0	0.4772
3.0	0.4987

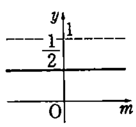
□□ *8*. 동전 2개를 300번 던질 때 동시에 앞면이 나오는 횟수가 60 이하일 확률을 구하라.

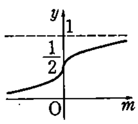
□□ *9*. 어떤 나이의 사람들의 1년간 사망률은 10%라고 한다. 그 나이의 사람 10000명을 피보험자로 가진 생명 보험 회사는 그 해에 약 몇 사람의 보험금을 준비해야 하는가? (단, 판단 착오는 1% 이내이다.)

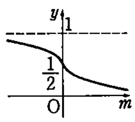
① 1000명　② 1070명　③ 1150명
④ 1230명　⑤ 1300명

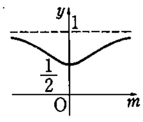
z	$\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq z)$
1.90	0.47
2.11	0.48
2.33	0.49

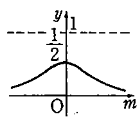
□□ *10*. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따를 때, $\mathrm{P}(X\leqq 0)=f(m)$이라고 하자. 다음 중 m에 관한 함수 $y=f(m)$의 그래프의 개형은?

①


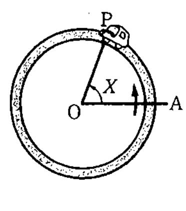
②


③


④


⑤


□□ *11*. 오른쪽 그림과 같은 모형 무선 자동차 주행 테스트 코스가 있다. 모형 자동차 P가 A를 출발해서 화살표 방향으로 회전한 각을 확률변수 X라고 할 때, $\mathrm{P}(0\leqq X\leqq \theta)=\int_0^{\theta}\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6\pi)^2}{8\pi^2}}\,dx$라고 한다. 다음을 구하라. (단, $\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 1)=0.34$, $\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 2)=0.47$)



(1) X의 평균과 표준편차

(2) 모형 자동차가 4바퀴 이상 돌 확률

(3) 이러한 주행을 40번 반복할 때, 4바퀴 이상 돈 횟수가 11회이면 무선 주행 테스트에 합격하는 것이라고 한다. 합격할 확률

3. 추정과 검정

핵심 정리

[1] 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포

모평균 m, 모표준편차 σ인 모집단에서 크기 n인 표본을 복원추출할 때

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{n}\mathrm{V}(X)$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) X의 분포가 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$이면, n의 크기에 관계없이 $\overline{X}$의 분포는 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(3) X의 분포가 정규분포가 아닐 때에도 n이 충분히 크면 $\overline{X}$의 분포는 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

[2] 추 정

(1) 모표준편차가 σ이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면, 모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같다.

신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

신뢰도 99%의 신뢰구간은 $\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율을 $\overline{p}$라고 하면, 모비율 p의 신뢰구간은 다음과 같다. (단, $\overline{q}=1-\overline{p}$)

신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\overline{p}-1.96\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\leqq p\leqq\overline{p}+1.96\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$

신뢰도 99%의 신뢰구간은 $\overline{p}-2.58\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\leqq p\leqq\overline{p}+2.58\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$

[3] 모평균 m의 검정

크기 n인 표본의 평균을 $\overline{X}$, 표본표준편차(또는 모표준편차)를 σ라고 하면 다음 순서로 검정한다.

(1) 가설 $m=m_0$을 세운다.

(2) $Z=\dfrac{\overline{X}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$을 계산한다.

(3) 유의수준 5%일 때, $|Z|\geqq1.96$이면 가설을 기각한다.
유의수준 1%일 때, $|Z|\geqq2.58$이면 가설을 기각한다.

〈참고〉 n이 충분히 클 때

① 신뢰도는 확률 $\mathrm{P}\left(m-k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\overline{X}\leqq m+k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$를 말한다.
(단, k는 신뢰도에 따라 결정되는 표준측도)

② 신뢰도에 따라 계산한 $k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$를 정밀도, 오차의 한계라 부른다.

③ 유의수준(위험률)은 확률 $\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\geqq k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$를 말한다.

④ 가설 '$m=m_0$'에 의하여 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 $\mathrm{N}\left(m_0,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$이 된다.

(표본평균의 분포에서의 확률 (1))

필수예제 15. 어떤 공장에서 생산되고 있는 통조림의 무게는 평균 200 g, 표준편차 5 g인 정규분포에 따른다고 한다. 이 중에서 100개의 통조림을 임의로 추출하는 경우, 표본 100개의 평균 무게가 199.0 g 이상 200.5 g 이하일 확률을 구하라.

z	$P(0\leq Z\leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

풀이 모집단은 정규분포 $N(200,\ 5^2)$을 따르고 $n=100$이므로

$$E(\overline{X})=m=200,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{5}{\sqrt{100}}=0.5$$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(200,\ 0.5^2)$을 따른다.

$$\therefore\ P(199.0\leq\overline{X}\leq200.5)=P(-2\leq Z\leq1)\ \left(\Leftarrow Z=\frac{\overline{X}-200}{0.5}\right)$$

$$=P(0\leq Z\leq2)+P(0\leq Z\leq1)=\mathbf{0.8185}$$

♣ 해법 연구 ♣

▶ 모집단이 $N(m,\ \sigma^2)$일 때 크기 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$이다.

(표본평균의 분포에서의 확률 (2))

필수예제 16. 구간 $[0,\ 2]$에서 임의로 25개의 실수를 택하여 그 평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) $\overline{X}$의 분포

(2) $P\left(\frac{5\sqrt{3}-1}{5\sqrt{3}}\leq\overline{X}\leq\frac{5\sqrt{3}+2}{5\sqrt{3}}\right)$

풀이 (1) 구간 $[0,\ 2]$의 실수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라고 하면

$$P(0\leq X\leq x)=\int_0^x f(t)\,dt=\frac{x}{2}\qquad\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ E(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}dx=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^2=1$$

$$V(X)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}dx-1^2=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2-1=\frac{1}{3}$$

$n=25$인 표본의 평균 $\overline{X}$에서

$$E(\overline{X})=E(X)=1,\ V(\overline{X})=\frac{V(X)}{25}=\frac{1}{75}\qquad\therefore\ \overline{\boldsymbol{X}}:\mathbf{N}\left(\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{75}}\right)$$

(2) $$P\left(\frac{5\sqrt{3}-1}{5\sqrt{3}}\leq\overline{X}\leq\frac{5\sqrt{3}+2}{5\sqrt{3}}\right)=P(-1\leq Z\leq2)$$

$$=P(0\leq Z\leq1)+P(0\leq Z\leq2)$$

$$=0.3413+0.4772=\mathbf{0.8185}$$

▶ **중심 극한 정리**

모집단의 평균이 m, 표준편차가 σ일 때, 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$에 근사한다.

수련문제 14. 모평균이 10, 모표준편차가 5인 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하였을 때, 표본평균을 $\overline{X}$라고 한다. 이 때 확률변수 $5-3\overline{X}$의 표준편차를 구하라.

〔94. 성균관대 응용〕

답 1.5

수련문제 15. 주머니 속에 1, 2, 3, …, 10의 숫자가 적힌 카드가 각각 1장씩 있다. 이 주머니에서 복원추출로 크기 100인 표본을 만들 때, 그 평균 $\overline{X}$의 분포를 구하라.

답 $N\left(\frac{11}{2},\ \frac{33}{400}\right)$

(표본평균의 분포)

필수예제 17. 모평균이 m, 모표준편차가 2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출할 때, 그 표본평균 $\overline{X}$에 대한 확률

$P\left(\overline{X} \leq 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$를 $f(m)$이라고 하자. 이 때

$f(0)+f(0.9) \leq 1.025$를 만족시키는 n의 최소값을 구하라.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.64	0.450
1.96	0.475

풀이 $\overline{X}$의 확률분포는 $N\left(m, \frac{4}{n}\right)$이므로

$$f(0)=P\left(\overline{X} \leq 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \left(\Leftarrow 8=(X-0)\Big/\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)$$
$$=P(Z \leq 1.96)=0.975$$
$$f(0.9)=P\left(\overline{X} \leq 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \left(\Leftarrow Z=(X-0.9)\Big/\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)$$
$$=P\left(Z \leq 1.96-\frac{0.9\sqrt{n}}{2}\right)$$

에서 $f(0)+f(0.9)=0.975+P\left(Z \leq 1.96-\frac{0.9\sqrt{n}}{2}\right) \leq 1.025$

$$\therefore P\left(Z \leq 1.96-\frac{0.9\sqrt{n}}{2}\right) \leq 0.05=P(Z \leq -1.64)$$
$$\therefore 1.96-\frac{0.9\sqrt{n}}{2} \leq -1.64 \qquad \therefore n \geq 64$$

따라서 n의 최소값은 **64**

♣ 해법 연구 ♣

▶ $\overline{X} : N\left(m, \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$이므로

$P\left(\overline{X} \leq 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

$=P\left(Z \leq 1.96-\frac{m\sqrt{n}}{2}\right)$

에서 이 확률은 m에 따라 변하게 되므로, m의 함수 $f(m)$이다.

(이항분포)

필수예제 18. 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, 확률변수 P를 $P=\frac{X}{n}$라 정의한다. 다음 물음에 답하라.

(1) $E(P)=P$, $V(P)=\frac{pq}{n}$ $(p+q=1)$임을 보여라.

(2) n이 충분히 클 때 확률변수 P의 분포를 구하라.

풀이 (1) $E(P)=E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}(n \times p)=p$

$$V(P)=V\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V(X)=\frac{1}{n^2}(npq)=\frac{pq}{n}$$

(2) n이 충분히 크면 X의 분포는 정규분포에 근사하므로, P의 분포도 정규분포에 따른다.

따라서 (1)의 결과에서 P의 분포는 $\mathbf{N\left(p, \frac{pq}{n}\right)}$

▶ $E(aX+b)=aE(X)+b$
$V(aX+b)=a^2V(X)$

수련문제 16. 모평균이 100, 모표준편차가 10인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대한 확률 $P(\overline{X} \geq k)=f_n(k)$라고 하자. 이 때 $f_{400}(k) \leq 0.05$를 만족하는 k의 최소값을 구하라.

답 100.82

(모평균의 추정)

필수예제 19. 전국 고등 학교 3학년 학생들을 대상으로 수학 학력 고사를 실시하였다. 이 중 100명의 답안을 임의추출하여 채점한 결과 평균이 60점, 표준편차가 10점이었다. 다음 물음에 답하라.

(1) 전국 고등 학교 3학년 학생 전체의 평균을 신뢰도 95%로 추정하라.

(2) 전국 고등 학교 3학년 학생 전체의 평균을 신뢰도 99%로 추정하려고 할 때, 신뢰구간의 길이를 4 이하로 추정하려면 최소 몇 명 이상의 점수의 평균을 구하여야 하는가?

풀이 (1) $\overline{X}=60$, $\sigma \fallingdotseq s=10$, $n=100$이므로

$$60-1.96\times\frac{10}{\sqrt{100}}\leqq m\leqq 60+1.96\times\frac{10}{\sqrt{100}} \quad \therefore\ 58.04\leqq m\leqq 61.96$$

$\therefore$ **58점 이상 62점 이하**

(2) 99%의 신뢰구간의 길이는 $\left(2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}\right)\times 2$이므로

$$2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}\times 2\leqq 4, \quad \sqrt{n}\geqq 12.9 \quad \therefore\ n\geqq 166.41$$ $\therefore$ **167명 이상**

♣ 해법 연구 ♣

▶ **신뢰도 α**

$\alpha=P(|Z|\leqq k)$

$=P\left(|\overline{X}-m|\leqq k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

따라서 신뢰도 α의

① 신뢰구간은

$$\overline{X}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq \overline{X}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$$

② 정밀도(오차의 한계) ε은

$$\varepsilon=k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

③ 신뢰구간의 폭(길이)은

$$2\varepsilon=2\cdot k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(모비율의 추정)

필수예제 20. S시의 유권자를 임의로 추출한 2400명 중에 1440명이 A후보를 지지하였다. 다음 물음에 답하라.

(1) S시의 A후보에 대한 지지율을 신뢰도 95%로 추정하라.

(2) S시의 A후보에 대한 지지율을 신뢰도 99%로 추정하려고 할 때, 오차의 한계가 1% 이하가 되도록 하려면 적어도 몇 명 이상의 유권자를 조사해야 하는가?

풀이 (1) 표본비율 $\overline{p}=\frac{1440}{2400}=0.6$, $n=2400$이므로

$$0.6-1.96\times\sqrt{\frac{0.6\times 0.4}{2400}}\leqq p\leqq 0.6+1.96\times\sqrt{\frac{0.6\times 0.4}{2400}}$$

$\therefore\ 0.5804\leqq p\leqq 0.6196$ $\quad\therefore$ **58% 이상 62% 이하**

(2) 신뢰도 99%에서 $|p-\overline{p}|\leqq 2.58\times\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$이므로

$$2.58\times\sqrt{\frac{0.6\times 0.4}{n}}\leqq 0.01 \quad \therefore\ \sqrt{n}\geqq 258\times\sqrt{0.24}$$

$\therefore\ n\geqq 258^2\times 0.24\fallingdotseq 15975$ $\quad\therefore$ **약 16000명**

▶ 표본의 크기가 증가할수록 오차의 한계가 적어진다.

수련문제 17. 어느 고등 학교의 3학년 학생 중 36명의 앉은 키를 측정하여 평균 83.7 cm, 표준편차 3 cm를 얻었다. 신뢰도 95%로 이 고등 학교 3학년의 앉은 키의 평균을 추정하라.

답 82.7 cm 이상 84.7 cm 이하

수련문제 18. 어느 식당에서 달걀을 대량으로 사들였다. 이 중에서 50개를 골라 조사하였더니 5개가 상한 것이었다. 이 사실로부터 사들인 달걀 중 우량품의 비율을 신뢰도 95%로 추정하라.

답 81.7% 이상 98.3% 이하

(모평균의 검정)

필수예제 21. 전국의 고등 학교 3학년을 상대로 치른 모의 고사의 성적이 평균 58.3점, 표준편차 12.5점이었다. 이 모의고사를 친 어느 지방의 학생들 중 1600명의 성적을 임의추출하여 그 평균과 표준편차를 조사하였더니 각각 59.0점, 12.5점이었다. 이 지방의 학생 전체의 성적은 전국의 성적과 같다고 할 수 있는가를 유의수준 5%로 검정하라.

풀이 성적이 같다고 가정하여 모평균은 $m=58.3$이라는 가설을 세운다. 즉, 가설 '$m=58.3$'이다.
$n=1600$, $\overline{X}=58.3$, $\sigma=12.5$이므로

$$Z=\left|\frac{59.0-58.3}{\frac{12.5}{\sqrt{1600}}}\right|=(59.0-58.3)\times\frac{\sqrt{1600}}{12.5}=2.24\geqq 1.96$$

따라서 가설은 기각된다. 즉, **이 지방의 성적은 전국의 성적과 같다고 할 수 없다.**

♣ 해법 연구 ♣

▶ 가설 '$m=58.3$'에 의하여 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 $N\left(58.3,\ \frac{12.5^2}{1600}\right)$을 따른다.
이 분포에 따라 $\overline{X}=59.0$을 표준측도로 고쳐서 유의수준 α를 $\alpha=P(|z|>1.96)=5\%$인 1.96과 비교하여 가설의 기각 여부를 판정한다.

(모비율을 검정)

필수예제 22. 어떤 동전을 100회 던지는 시행에서 앞면이 45회 나왔다. 가설 '이 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.'를 유의수준 5%, 1%로 검정하라.

풀이 가설 '앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.'에 의하여 100회 중 앞면이 나온 횟수를 확률변수 $\overline{X}$라고 하면, $\overline{X}$의 분포는 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore\ E(\overline{X})=50,\ V(\overline{X})=5^2$

그런데 $n=100$은 충분히 크므로 $\overline{X}$의 분포는 $N(50,\ 5^2)$을 따른다고 볼 수 있다.

$\overline{X}=45$를 표준측도로 고치면 $Z=\frac{45-50}{5}=-1$

따라서 **유의수준 5%**로 검정하면 $|Z|=1<1.96$

$\therefore$ **가설을 기각할 수 없다.**

유의 수준 1%로 검정하면 $|Z|=1<2.58$

$\therefore$ **가설을 기각할 수 없다.**

▶ **단측검정**
① 유의수준 5% : $t<-1.65$ 또는 $t>1.65$ ⇨ 기각
② 유의수준 1% : $t<-2.33$ 또는 $t>2.33$ ⇨ 기각

수련문제 19. A 학생은 지금까지의 수학 성적이 평균 60점이었으나 이번 시험에서는 지금까지와 같은 수준의 문제에 대하여 5문제 중 4문제를 풀었다. 이 사실로부터 A 학생의 수학 실력이 향상되었다고 할 수 있겠는가? 유의수준 5%로 검정하라.

답 향상되었다고 할 수 없다.

수련문제 20. 어느 지방에서 400명의 신생아 중 212명이 남자였다. 이 400명을 임의표본으로 보고 남자와 여자의 출생률이 다르다고 판단할 수 있는가? 유의수준 5%로 검정하라.

답 다르다고 할 수 없다.

〔해답 ⇨ p.225〕

실력 강화 문제

□□ **1.** 모집단 $S=\{1, 3, 5, 7, 9\}$에서 복원추출한 크기 2인 표본의 평균을 $\overline{X}$ 라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) $\overline{X}$ 의 확률분포

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})$, $\mathrm{V}(\overline{X})$

□□ **2.** 두 이산확률변수 X, Y 가 서로 독립이고, $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i(i=1, 2, \cdots, n)$, $\mathrm{P}(Y=y_j)=q_j(j=1, 2, \cdots, m)$이라고 할 때, 다음을 증명하라.

(1) $\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$　　(2) $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)$

(3) $\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)$

□□ **3.** 구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속확률변수 T 의 확률밀도함수를 $f(t)=at$ 라고 한다. 이 구간 $[0, 1]$에서 임의로 100개의 실수를 택하여 그 중에 $\frac{1}{2}$보다 작은 실수의 개수를 확률변수 X 라고 할 때, 다음을 구하라.

(1) T 의 평균, 분산

(2) X 의 평균, 분산

□□ **4.** 한 고궁의 큰 기둥의 둘레를 20명이 측정하여 다음 표를 얻었다. 이 기둥의 둘레를 신뢰도 95%로 추정하라.

둘레(cm)	120	121	122	123	124	합계
사람 수(명)	2	5	8	4	1	20

□□ **5.** 어떤 도시의 유권자 중에서 100명을 임의추출하여 어떤 후보에 대한 지지자를 조사하였더니 지지자가 80명이었다. 이 때 이 도시 유권자 전체의 지지율의 최소값은 $\square$ %로 추정된다. (단, 신뢰도는 95%로 한다.)

□□ **6.** A 고등 학교 3학년의 모의 학력 고사의 평균점은 275점, 표준편차는 22.5점이었다. 같은 문제로 시험을 치른 B 고등 학교 3학년 중 임의로 추출한 9명의 평균점은 289점이다. B 고등 학교 3학년의 학력은 A 고등 학교 3학년의 학력보다 높은지 아니면 같은지를 유의수준 5%와 1%로 각각 판정하라. (단, 이 시험 성적은 정규분포를 따른다고 한다.)

□□ **7.** 흰 공과 검은 공이 많이 들어 있는 상자에서 임의로 12개의 공을 꺼내어 보았더니, 흰 공이 2개뿐이었다. 이 결과에서 상자 안에 검은 공이 더 많이 들어있다고 판단할 수 있는가? 유의수준 5%로 검정하라.

□□ **8.** 어떤 과수원에서 생산된 사과의 비중이 정규분포를 이룬다고 한다. 이 사과를 검사하기 위하여 물에 넣었더니 전체의 10%가 물에 뜬다고 한다. 이 사과를 4개씩 묶어서 물에 띄우면, 묶은 것 중 ☐ %가 물에 뜬다.(단, 물의 비중을 1로 하고, 끈의 무게는 생각하지 않는다.)

t	$P(0 \leqq Z \leqq t)$
1.28	0.400
2.33	0.490
2.56	0.495

□□ **9.** 어떤 회사에서 하루에 10만 개의 비누를 생산한다. 생산되는 비누 한 개의 무게의 평균은 100 g이고, 표준편차는 2 g이며, 비누의 무게는 정규분포에 가까운 분포를 나타낸다고 한다. 다음 물음에 답하라.

(1) 제품 검사에서 무게가 98 g 미만인 비누를 불량품으로 판정한다면 하루에 평균 몇 개의 불량품이 생기는가?

(2) 비누 4개를 한 상자에 넣어서 판매한다고 하자. 제품 검사에서 한 상자의 무게가 392 g 미만인 것을 불량품으로 판정한다면 하루에 평균 몇 상자의 불량품이 생기는가?(단, 상자의 무게는 생각하지 않기로 한다.)

〔서울대〕

□□ **10.** 표준편차가 200인 정규분포를 따르는 모집단의 평균 m에 대하여 $m=1152.8$이라는 가설을 유의수준 α로 검정하려고 한다. 크기 400인 표본을 추출하여 관측한 결과 표본평균이 1130.4이었다. 이 자료에 의하여 $m \neq 1152.8$이라고 할 수 있을 유의수준 α의 최소값은 ☐ %이다.

z	$P(0 \leqq Z \leqq z)$
1.96	0.4750
2.17	0.4850
2.24	0.4875
2.58	0.4951

□□ **11.** 부화한 지 3주 되는 병아리의 몸무게는 평균 400 g, 표준편차 30 g인 정규분포를 따른다고 한다. 부화하고 3주 동안 특별히 배합된 사료로 키운 후 9마리를 뽑아 몸무게를 달아보니 그 평균이 419.6 g이었다. 이 사실로부터 특별히 배합된 사료가 효과가 있었다고 할 수 있을 유의수준의 최소값을 구하라.

k	$P(0 \leqq Z \leqq k)$
1.65	0.450
1.96	0.475
2.33	0.490
2.58	0.495

□□ **12.** 주사위가 정상인지 여부를 유의수준 r%로 검정하려고 한다. 이 주사위를 180회 던진 결과 1의 눈이 40회, 2의 눈이 39회 나왔다. 이 결과로 1의 눈은 정상적인 주사위보다 잘 나오고 2의 눈은 그렇지 않은 것으로 판정되었다면 정수 r의 값은 얼마인가? $\left(\text{단, 정상인 주사위란 각 눈이 나올 확률이 } \frac{1}{6}\text{인 주사위를 말한다.}\right)$

z	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
1.8	0.4641
1.9	0.4713
2.0	0.4772
2.1	0.4821

□□ **13.** 모평균이 100, 모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출된 크기 25인 표본평균 $\overline{X}$가 c 이상이면 가설 '모평균은 100이다.'를 기각하려고 한다. 이 가설이 옳은데도 기각될 확률이 0.05 이하일 때, c의 최소값을 구하라.

k	$P(0 \leqq Z \leqq k)$
1.44	0.425
1.65	0.450
1.96	0.475
2.58	0.495

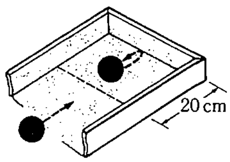
〔해답 ⇨ p. 227〕

고급 문제(V)

1. 주머니 속에 500원짜리 동전이 1개, 100원짜리 동전이 4개, 50원짜리 동전이 1개가 있다. 여기서 2개의 동전을 꺼내어 그 금액의 합을 확률변수 X 라고 할 때, 다음 물음에 답하라.
(1) X 의 확률분포표를 만들어라.
(2) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하라.

2. 세 상자에 똑같은 크기의 공 5개를 임의로 던져 넣는 놀이를 하고 있다. 공 5개를 모두 던져 넣었을 때, 비어 있는 상자의 수를 확률변수 X 라고 한다. 다음 물음에 답하라. (단, 던져진 공은 어느 상자에던지 반드시 들어가도록 되어 있다고 한다.)
(1) $X=1$ 일 확률을 구하라.
(2) X 의 확률분포표를 만들어라.
(3) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하라.

3. 오른쪽 그림과 같이 가만히 공을 굴려 벽에 부딪친 후 멈추었을 때, 공이 바닥에 닿은 점부터 벽까지의 거리를 재기로 하였다. 이 시행을 세 번 하여서 잰 거리 중 가장 긴 것을 확률변수 X 라고 한다. 다음 물음에 답하라. (단, 공의 반지름의 길이는 무시하고, 튀어 나온 거리가 20 cm를 벗어날 때는 다시 공을 굴리기로 한다.)



(1) X 의 확률밀도함수 $f(x)$를 구하라.
(2) $X \leqq 10\,\mathrm{cm}$ 일 확률을 구하라.
(3) $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하라.

4. 가로의 길이가 8 cm, 세로의 길이가 6 cm인 직사각형의 타일을 한 꼭지점에 4장씩 모이도록 빈틈없이 깔아놓은 바닥이 있다. 여기에 반지름의 길이가 1 cm인 동전을 던지는 시행을 독립적으로 반복하기로 한다. 다음 물음에 답하라.
(1) 이 동전이 금에 걸리지 않을 확률을 구하라.
(2) 이 시행을 10번 하였을 때 동전이 금에 걸리지 않은 횟수를 확률변수 X 라고 할 때, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구하라.
(3) 이 시행을 한 번하여 동전이 금에 걸리지 않으면 상금이 없고, 2장에 걸치면 100원, 3장 또는 4장에 걸치면 300원의 상금을 받기로 하였다. 이 시행을 4번하여 얻을 상금의 기대 금액을 구하라.

5. 12개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 X 라고 한다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 모두 흰 색이면 가설 H : '$X=3$이다.'를 기각하고자 한다. 이 때 유의수준 α의 범위를 구하라.

〔94. 서강대 응용〕

6. 어떤 공장에서 생산하는 나사못의 길이는 정규분포를 이루는 것으로 알려져 있다. 이 나사못을 사용하여 제품을 만드는 회사는 납품 기준이 크기가 100개인 임의표본으로부터 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 폭이 0.8mm 이하로 정해져 있다. 다음 물음에 답하라.

(1) 이 회사에 납품 가능한 나사못의 길이의 표준편차의 최대값을 구하라.

(2) 이 공장에서 생산된 나사못을 임의로 100개를 뽑아서 그 표준편차를 구해보니 2.4mm가 되었다. 이 나사못들을 납품 가능하게 하는 표본의 크기의 최소값을 구하라.

(단, $P(|Z|\leqq 2)=0.95$)

7. 어떤 프로 야구단에서는 새로 선수를 뽑기 위한 테스트를 하고 있다. 구단측은 프리배팅으로 4할 이상의 타력을 가진 선수를 선발하기로 하였다. 이 테스트에 갑이 24타석에서 14안타를 쳤다. 갑이 이 테스트에 합격하였을까를 유의수준 5%로 검정하라. (단, $P(0\leqq Z\leqq 1.65)=0.45$)

8. 어떤 비누 공장이 있다. 이 공장에서 생산되는 비누의 무게의 평균 m에 대하여 가설 '$m=100$g이다.'를 유의수준 5%로 검정하기 위하여 크기가 49개인 임의표본으로부터 표본평균 101.66g, 표준편차 1.82g을 구하였다. 다음 $\boxed{}$에 적당한 수를 넣어서 문장을 완성하라.

(단, $P(0\leqq Z\leqq 2)=0.475$)

> 유의수준 5%의 기각역을 다음과 같이 구한다.
> 가설에 의하여 $n=49$인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$의 확률분포는 $N(100,\ \boxed{(1)})$이고, 유의수준의 정의에 따라 $P(|Z|>2)=\boxed{(2)}$이다.
> 또, $Z=\dfrac{\overline{X}-100}{\boxed{(3)}}$이므로 $|Z|>2$에서 유의수준 5%의 기각역은
> $$\overline{X}<100-\boxed{(4)} \text{ 또는 } \overline{X}>100+\boxed{(4)}$$
> 이다.
> 그런데 임의표본에서 얻은 표본평균 $\overline{X}=101.66$g은 이 기각역에 속하므로 제시한 가설을 기각한다. 따라서 이 표본의 결과로부터 $m=100$g이라고 할 수 없다.

실력 강화 문제 풀이

I. 극　　한

p. 10

1. $a_n=3a_{n-1}+(-2)^n$에서 양변을 3^n으로 나누면

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$\frac{a_n}{3^n}=b_n$이라고 하면

$$b_1=\frac{a_1}{3}=\frac{1}{3},\quad b_n=b_{n-1}+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

즉, $b_1=\frac{1}{3},\ b_{n+1}=b_n+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

$$\therefore\ b_n=\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k+1}\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\mathbf{\frac{3}{5}}\ \Leftarrow \text{답}$$

2. $\left(\frac{a_n}{2}\right)^3=\left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^4$에서 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$3(\log_2 a_n-1)=4(\log_2 a_{n-1}-1)$$

$$\log_2 a_n-1=\frac{4}{3}(\log_2 a_{n-1}-1)$$

$$\therefore\ \log_2 a_n-1=(\log_2 a_1-1)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

즉, $\log_2 a_n=(\log_2 a_1-1)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+1$

그런데 $0<a_1<2$이므로 $\log_2 a_1-1<0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\log_2 a_n=-\infty\qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}\mathbf{a_n=0}\ \Leftarrow \text{답}$$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\sqrt{S_{n+1}}}}{3^{\sqrt{S_n}}}=\lim_{n\to\infty}3^{\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}}$이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1)$에서

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{n(n+1)})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$$

$\therefore$ (준식) $=\mathbf{3}\ \Leftarrow$ 답

4. 주어진 부등식에서 $n+1>0$이므로

$$\frac{2n+1}{n+1}<a_n<\frac{2n+3}{n+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\leqq\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{a_n=2}\ \Leftarrow \text{답}$$

5. $\begin{cases} x\geqq 2\text{일 때}\quad f(x)=\frac{1}{2}x+5 \\ x<2\text{일 때}\quad f(x)=\frac{3}{2}x+3 \end{cases}$

에서 $f(x)$는 모든 실수에서 증가함수이고 $x_0=3$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x+5$이다.

$x_n=f(x_{n-1})$이므로 $x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}+5$에서

$$x_n-10=\frac{1}{2}(x_{n-1}-10)\ (n=1,\ 2,\cdots)$$

$$\therefore\ x_n-10=(x_1-10)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x_0+5-10\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=(x_0-10)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore\ x_n=-7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+10$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\mathbf{x_n=10}\ \Leftarrow \text{답}$$

6. (1) $|a_{n+1}-5|=|\sqrt{3a_n+10}-5|$

$$=\left|\frac{3a_n-15}{\sqrt{3a_n+10}+5}\right|$$

$$=\left|\frac{3(a_n-5)}{\sqrt{3a_n+10}+5}\right|$$

에서 $\sqrt{3a_n+10}+5>5$이므로

$$\left|\frac{3(a_n-5)}{\sqrt{3a_n+10}+5}\right|<\frac{3}{5}|a_n-5|$$

$$\therefore\ |a_{n+1}-5|<\frac{3}{5}|a_n-5|$$

(2) $|a_{n+1}-5|<\frac{3}{5}|a_n-5|<\left(\frac{3}{5}\right)^2|a_{n-1}-5|<\cdots$

$$<\left(\frac{3}{5}\right)^n|a_1-5|$$

즉, $0\leqq|a_n-5|<\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}|a_1-5|$이므로

$$0 \le \lim_{n\to\infty}|a_n-5| \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}|a_1-5|=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}|a_n-5|=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=5$$ ⇦ 답

7. (1) $a_n=\dfrac{-a_{n-1}+8}{a_{n-1}-3}$ 에서 $x=\dfrac{-x+8}{x-3}$ 이라고 하면

$x^2-2x-8=0$ 에서 $x=-2,\ 4$

(i) $a_n+2=\dfrac{-a_{n-1}+8}{a_{n-1}-3}+2$

$$=\frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}-3}$$

(ii) $a_n-4=\dfrac{-a_{n-1}+8}{a_{n-1}-3}-4$

$$=\frac{-5(a_{n-1}-4)}{a_{n-1}-3}$$

$$\therefore \frac{a_n+2}{a_n-4}=-\frac{1}{5}\left(\frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}-4}\right),\quad a_1=1$$

$$\therefore \frac{a_n+2}{a_n-4}=\frac{a_1+2}{a_1-4}\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$=-\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{4\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}-2}{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}+1}$$ ⇦ 답

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=-2$ ⇦ 답

p. 16~17

1. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 라고 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 의 첫째항은 a^2, 공비는 r^2 이고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 의 첫째항은 a^3, 공비는 r^3 이다.

$$\frac{a}{1-r}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{a^3}{1-r^3}=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $a=1-r$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$(2r+1)(r+2)=0$$

$|r|<1$ 이므로 $r=-\dfrac{1}{2}$

㉠에서 $a=\dfrac{3}{2}$

$$\therefore \frac{a^2}{1-r^2}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=3$$ ⇦ 답

2. (1) $\dfrac{k!}{(k+4)!}=\dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right\}$$

$$\therefore (\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}$$

$$=\frac{1}{72}$$ ⇦ 답

(2) $a_n=\dfrac{2n+4}{(n+1)^2(n+3)^2}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}$$

$$\therefore (\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+3)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$

$$=\frac{13}{72}$$ ⇦ 답

(3) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ 에서

$\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}>\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ 이므로

$$(\text{준식})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\{-2(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{-2(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{-2(1-\sqrt{n+1})\}=\infty$$

즉, $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\infty$ 이므로 이 급수는 발산하고, **합은 없다.** ⇦ 답

3. $b_{n+1}=cb_n$ 에서 $b_n=b_0c^n$

그런데 $b_0\ne0$ 이므로 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴할 조건은

$-1<c\le1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 때 $a_{n+1}=a_n+b_n=a_n+b_0c^n$

따라서 $n\ge1$ 일 때 $a_n=a_0+\sum_{k=0}^{n-1}b_0c^k$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴할 조건은

$-1<c<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 조건은

$-1<c<1$ ⇦ 답

4. (1) (i) $\log_{10}x=0$, 즉 $x=1$일 때 이 급수의 모든 항이 0이므로 이 급수는 0에 수렴한다.

(ii) $\log_{10}x\neq 0$, 즉 $x\neq 1$일 때, 이 급수는 공비가 $r=\dfrac{1}{1+\log_{10}x}$인 무한등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면 $|r|<1$

즉, $\left|\dfrac{1}{1+\log_{10}x}\right|<1$에서 $|1+\log_{10}x|>1$

$1+\log_{10}x<-1$ 또는 $1+\log_{10}x>1$

즉, $\log_{10}x<-2$ 또는 $\log_{10}x>0$에서

$0<x<\dfrac{1}{100}$ 또는 $x>1$

(i), (ii)에서 이 급수가 수렴할 조건은

$\mathbf{0<x<\dfrac{1}{100}}$ **또는** $\mathbf{x\geqq 1}$ ⇦ 답

(2) (i) $x=1$일 때 $S=0$

(ii) $0<x<\dfrac{1}{100}$ 또는 $x>1$일 때

$$S=\frac{\log_{10}x}{1-\dfrac{1}{1+\log_{10}x}}=1+\log_{10}x$$

답 $S=\begin{cases}\mathbf{1+\log_{10}x} & \left(\mathbf{0<x<\dfrac{1}{100}} \text{ 또는 } \mathbf{x>1}\right)\\ \mathbf{0} & \mathbf{(x=1)}\end{cases}$

5. (1) $a_n=a_{n-1}+2n$에서 $a_n-a_{n-1}=2n$ $(n\geqq 2)$

$\therefore a_{n+1}-a_n=2(n+1)=2n+2$ $(n\geqq 1)$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$$

$$=2+2\times\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)$$

$$=n^2+n$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$=\mathbf{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$ ⇦ 답

(2) $(\text{준식})=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\mathbf{\frac{3}{4}}$$ ⇦ 답

6. (1) $S_n=3+3r+3r^2+\cdots+3r^{n-1}$

$T_n=9+9r^2+9r^4+\cdots+9(r^2)^{n-1}$

에서 수열 $\{S_n\}$이 수렴하므로 $|r|<1$이고,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{1-r}$$

또, $|r^2|<1$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{9}{1-r^2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\frac{\dfrac{9}{1-r^2}}{\dfrac{3}{1-r}}=\mathbf{\frac{3}{1+r}}$$ ⇦ 답

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{1-r}=2$에서 $r=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}T_n=\frac{9}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\mathbf{12}$$ ⇦ 답

7. 수열 $\left\{\sin\dfrac{n}{2}\pi\right\}$는 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, …이므로 주어진 급수는

$$\tan\theta-\tan^3\theta+\tan^5\theta-\tan^7\theta+\cdots$$

이다. 그런데 $-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $|\tan\theta|<1$이므로

$|-\tan^2\theta|<1$

$$\therefore (\text{준식})=\frac{\tan\theta}{1-(-\tan^2\theta)}$$

$$=\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}$$

$$=\tan\theta\times\cos^2\theta$$

$$=\mathbf{\sin\theta\cos\theta}$$ ⇦ 답

8. $3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$에서

$3(a_{n+2}-a_{n+1})=2(a_{n+1}-a_n)$

$$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$$

또, $a_2-a_1=\beta-\alpha$이므로

$$a_{n+1}-a_n=(\beta-\alpha)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(\beta-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$=\alpha+\frac{(\beta-\alpha)\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\dfrac{2}{3}}$$

$$=\alpha+3(\beta-\alpha)-3(\beta-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$=(3\beta-2\alpha)-3(\beta-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

그런데 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore 3\beta-2\alpha=0$ ……㉠

이 때 $a_n=-3(\beta-\alpha)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{-3(\beta-\alpha)}{1-\frac{2}{3}}=-9(\beta-\alpha)=9$$

$\therefore\ \beta-\alpha=-1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=3,\ \beta=2$ ⇦ 답

9. $S_1(\theta)=1+\cos\theta$

$S_2(\theta)=(1+\cos\theta)(1+\cos^2\theta)$

$=1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cos^3\theta$

$S_3(\theta)=(1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cos^3\theta)(1+\cos^4\theta)$

$=1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cdots+\cos^7\theta$

이와 같이 하면

$S_n(\theta)=1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cdots+\cos^{2^n-1}\theta$ ……㉠

㉠을 수학적귀납법을 써서 증명하면

(i) $n=1$일 때, $S_1(\theta)=1+\cos\theta$이므로 이 등식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 이 등식이 성립한다고 가정하면

$S_k(\theta)=1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cdots+\cos^{2^k-1}\theta$

$\therefore\ S_{k+1}(\theta)=S_k(\theta)\cdot(1+\cos^{2^k}\theta)$

$=(1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cdots+\cos^{2^k-1}\theta)(1+\cos^{2^k}\theta)$

$=1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cdots+\cos^{2^k-1}\theta+\cos^{2^k}\theta+\cdots+\cos^{2^k-1+2^k}\theta$

$=1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cdots+\cos^{2^{(k+1)}-1}\theta$

따라서 $n=k+1$일 때에도 이 등식은 성립한다.

(i), (ii)에서 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

그런데 $0<\theta<2\pi$이므로 $-1\leqq\cos\theta<1$

$\cos\theta=-1$, 즉 $\theta=\pi$일 때 ㉠에서 $S_n(\theta)$의 항수는 항상 짝수 개이므로 $S_n(\theta)=0$

또, $\cos\theta\neq-1$, 즉 $\theta\neq\pi$일 때 $-1<\cos\theta<1$

$$\therefore\ f(\theta)=\lim_{n\to\infty}S_n(\theta)=\frac{1}{1-\cos\theta}$$

답 $\begin{cases}\theta=\pi\text{일 때 } f(\theta)=0\\ \theta\neq\pi\text{일 때 } f(\theta)=\dfrac{1}{1-\cos\theta}\end{cases}$

10. 문제의 조건에서

$S_1=1-\frac{1}{4}\pi\cdot1^2=\frac{1}{4}(4-\pi)$ ……㉠

$$\overline{OA_{n+1}}=\overline{OB_{n+1}}\cos\frac{\pi}{4}=\overline{OA_n}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OA_n}$$

$\therefore\ S_{n+1}:S_n=\overline{OA_{n+1}}^2:\overline{OA_n}^2=1:2$

즉, $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}(4-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(4-\pi)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(4-\pi)\ ⇦\ 답$$

11. $\lim_{n\to\infty}P_n=(x,\ y)$라고 하면

$x=\overline{OP_1}\cos45°+\overline{P_1P_2}\cos45°-\overline{P_2P_3}\cos45°-\overline{P_3P_4}\cos45°+\cdots$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cdots\right\}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{4}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$y=\overline{OP_1}\sin45°-\overline{P_1P_2}\sin45°-\overline{P_2P_3}\sin45°+\overline{P_3P_4}\sin45°+\overline{P_4P_5}\sin45°-\cdots$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cdots\right\}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}P_n=\left(\frac{3\sqrt{2}}{5},\ \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\ ⇦\ 답$$

12. $S_1=a_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$에서

$2a_1=a_1+\frac{1}{a_1}\quad\therefore\ a_1^2=1$

$a_n>0$이므로 $a_1=1$

$n\geqq2$일 때 $S_n=S_{n-1}+a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$

$\therefore\ S_{n-1}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)$

$$\therefore\ S_n^2-S_{n-1}^2=\frac{1}{4}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2-\frac{1}{4}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)^2=1$$

$\{S_n^2\}$은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이므로

$S_n^2=1+(n-1)=n$

$S_n>0$이므로 $S_n=\sqrt{n}$

$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}(S_n-S_{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}(n-n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\mathbf{\frac{1}{2}}\ \Leftarrow \text{답}$$

p. 23~24

1. (1) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(2+x)-2}{\sqrt{2}x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{2}x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=\mathbf{\frac{1}{4}}\ \Leftarrow \text{답}$$

(2) $x=-t$로 놓으면, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2-2t}-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-2t}+t}{-2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1}{-2}=\mathbf{-1}\ \Leftarrow \text{답}$$

2. (1) $(\text{준식})=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{2x+1}{2x}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=\frac{1}{2}\ln e$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}}\ \Leftarrow \text{답}$$

(2) $x-1=t$로 놓으면, $x\to1$일 때 $t\to0$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{t\to0}\frac{(t+1)^3-e^t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t^3+3t^2+3t+1-e^t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}(t^2+3t+3)-\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}$$
$$=(0+0+3)-1=\mathbf{2}\ \Leftarrow \text{답}$$

3. (1) $x-1=t$로 놓으면, $x\to1$일 때 $t\to0$

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}{1-(t+1)^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{-t(t+2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{t+2}$$
$$=1\times\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\mathbf{\frac{\pi}{4}}\ \Leftarrow \text{답}$$

(2) $2\sin^2\theta=1-\cos2\theta$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(1-\cos2x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(2\sin^2x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(2\sin^2x)}{2\sin^2x}\cdot2\cdot\frac{\sin^2x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(2\sin^2x)}{2\sin^2x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot2$$
$$=1\cdot1^2\cdot2=\mathbf{2}\ \Leftarrow \text{답}$$

4. ① $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq1$에서 $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$

$$\therefore\ 0\leqq\lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq\lim_{x\to0}|x|=0$$
$$\therefore\ \lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$$
$$\therefore\ \lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

② $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq1$에서 $\left|\sin x\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|\sin x|$

$$\therefore\ 0\leqq\lim_{x\to0}\left|\sin x\cos\frac{1}{x}\right|\leqq\lim_{x\to0}|\sin x|=0$$
$$\therefore\ \lim_{x\to0}\left|\sin x\cos\frac{1}{x}\right|=0$$
$$\therefore\ \lim_{x\to0}\sin x\cos\frac{1}{x}=0$$

③ $\lim_{x\to0}\cos x=1$, $\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$의 값은 없으므로

$\lim_{x\to0}\cos x\sin\frac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x\to4+0}[x]=4$

$$\lim_{x\to4+0}\frac{[x]-4}{x-4}=\lim_{x\to4+0}\frac{0}{x-4}=0$$

⑤ $\lim_{x\to+0}2^{-\frac{1}{x}}=2^{-\infty}=0$, $\lim_{x\to-0}2^{-\frac{1}{x}}=2^{\infty}=\infty$

따라서 $\lim_{x\to0}2^{-\frac{1}{x}}$의 값은 존재하지 않는다.

답 ③, ⑤

5. (1) 유한확정이고 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(a\sqrt{x^2+5}-b)=0$에서 $b=3a$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x^2+5}-3a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{a(x^2+5-9)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{a(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}a$$

$\therefore\ \frac{2}{3}a=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{a=1,\ b=3}$ ⇦ 답

(2) 유한확정이고 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(ax+b)=0$에서 $a=b$

$x+1=t$로 놓으면, $x\to-1$일 때 $t\to0$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{t\to0}\frac{at}{\sin(\pi t-\pi)}$$

$$=-\frac{a}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}=-\frac{a}{\pi}$$

$\therefore\ -\frac{a}{\pi}=\frac{1}{\pi}$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{a=-1,\ b=-1}$ ⇦ 답

6. $(\text{준식})=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\{3f(x)-2g(x)\}+7f(x)}{-3\{3f(x)-2g(x)\}+7f(x)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cdot\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)}+7}{-3\cdot\frac{3f(x)-2g(x)}{f(x)}+7}=\boldsymbol{1}$$ ⇦ 답

7. 주어진 조건에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$, $\lim_{x\to2}(x-2)=0$ 이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$, $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)Q(x)=-Q(1)=1$$

$\therefore\ Q(1)=-1$ ……㉠

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)Q(x)$$

$=Q(2)=5$ ……㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 다항식 $Q(x)$ 중에서 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로

$Q(x)=ax+b$라고 하면 $a+b=-1$, $2a+b=5$

$\therefore\ a=6,\ b=-7$ $\quad\therefore\ Q(x)=6x-7$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x-2)(6x-7)$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(6-\frac{7}{x}\right)$$

$=\boldsymbol{6}$ ⇦ 답

8. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 제1사분면에 있는 점이므로 $y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$

점근선은 $y=\frac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$

쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$에서 직선 $3x-4y=0$에 내린 수선의 길이 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{1}{5}\left|3x-4\cdot\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}\right|$$

$$=\frac{3(x-\sqrt{x^2-16})}{5}$$

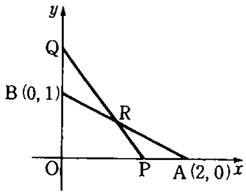
$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}xf(x)=\frac{3}{5}\lim_{x\to\infty}x(x-\sqrt{x^2-16})$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to\infty}\frac{16x}{x+\sqrt{x^2-16}}$$

$$=\frac{48}{5}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{16}{x^2}}}$$

$$=\frac{48}{5}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{24}{5}}$$ ⇦ 답

9. $\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OAB}$에서



$\frac{1}{2}ts=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$

$\therefore\ s=\frac{2}{t}$

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+y=1$ ……㉠

직선 PQ의 방정식은

$\frac{x}{t}+\frac{y}{s}=1$ ……㉡

㉠−㉡×s를 하면 $\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{t}\right)x=1-s$

$\therefore\ x=\frac{2t(1-s)}{t-2s}$

그런데 $s=\frac{2}{t}$이므로 $x=\frac{2t(t-2)}{t^2-4}\ (t\neq2)$

$$\therefore\ \lim_{t\to2}x=\lim_{t\to2}\frac{2t(t-2)}{(t+2)(t-2)}=\lim_{t\to2}\frac{2t}{t+2}=1$$

또, ㉠에서 $y=1-\frac{x}{2}$이므로

$$\lim_{t\to2}y=\lim_{x\to1}\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 두 직선 ㉠, ㉡의 교점 R는 $t\to2$일 때, 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에 한없이 가까워진다.

답 $\boldsymbol{\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}$

10. $|\vec{a}+x\vec{b}|^2=(\vec{a}+x\vec{b})\cdot(\vec{a}+x\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+2x(\vec{a}\cdot\vec{b})+x^2|\vec{b}|^2$

$=1+x^2+2x|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos45°$

$=x^2+\sqrt{2}x+1$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1}+1)}$$

$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ⇦ 답

11. △ABC와 △A'B'C'은 닮은꼴이고, 그 닮음비는 내접원의 반지름의 길이의 비와 같다.

즉, $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{r+x}{r}$

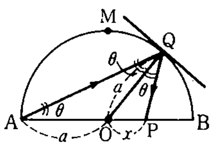
또, $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times r\times l$ 이므로

$$f(x)=\triangle A'B'C'=\frac{rl}{2}\times\left(\frac{r+x}{r}\right)^2=\frac{l(r+x)^2}{2r}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{l(x^2+2rx+r^2)}{2rx^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{l}{2r}}$$ ⇦ 답

12. 원의 중심을 O, $\angle OAQ=\theta$, $\overline{OP}=x$ 라고 하면



$\angle OPQ=\pi-3\theta$

△OPQ에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{x}{\sin\theta}=\frac{a}{\sin(\pi-3\theta)}\qquad \therefore\ x=\frac{a\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0}x=a\lim_{\theta\to0}\frac{1}{3}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}=\frac{a}{3}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0}\overline{\mathbf{BP}}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$$ ⇦ 답

13. B에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{AH}=3\cos\theta$, $\overline{BH}=3\sin\theta$,

$\overline{CH}=\sqrt{16-9\sin^2\theta}$

$\overline{CD}=7-3\cos\theta-\sqrt{16-9\sin^2\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0}\frac{\overline{CD}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{7-3\cos\theta-\sqrt{16-9\sin^2\theta}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{(7-3\cos\theta)^2-(\sqrt{16-9\sin^2\theta})^2}{\theta^2(7-3\cos\theta+\sqrt{16-9\sin^2\theta})}$$

$$=\lim_{\theta\to0}42\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos\theta)(7-3\cos\theta+\sqrt{16-9\sin^2\theta})}$$

$$=42\cdot1^2\times\frac{1}{2(7-3+4)}=\boldsymbol{\frac{21}{8}}$$ ⇦ 답

p. 28

1. ① $-1\le x<0$ 일 때 $f(x)=-x$

$0\le x<1$ 일 때 $f(x)=0$

$\lim_{x\to-0}f(x)=0$, $\lim_{x\to+0}f(x)=0$, $f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

② $f(x)=\operatorname{cosec}x=\dfrac{1}{\sin x}$ 이므로 $f(0)$의 값이 정의되지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

③ $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\cdots$

(i) $x=0$일 때 $f(0)=0$

(ii) $x\ne0$일 때 $0<\dfrac{x^2}{1+x^2}<1$ 이므로

$$f(x)=\frac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}=x^2$$

$$\therefore \lim_{x\to0}x^2=f(0)=0$$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

④ $0\le\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$,

$$0\le\lim_{x\to0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right|\le\lim_{x\to0}|x|$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=0\qquad\therefore \lim_{x\to0}f(x)=0$$

또, 정의에서 $f(0)=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

⑤ $x\ne0$일 때 $\lim_{x\to0}\dfrac{x(x-2)}{x(x+1)}=-2$

$$\therefore \lim_{x\to0}f(x)\ne f(0)$$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

답 ②, ⑤

2. 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & (x\ne0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 에서

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$ 이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, $x\ne0$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(\sin x)$는 $\sin x=0$인 점에서 불연속이다.

$\therefore\ x=n\pi$ (n은 정수)

그런데 $-5<x<5$이므로 불연속인 점은 $x=-\pi$, 0, π의 3개이다.

답 **3개**

3. (i) $|x|>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ 이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{a}{x^{2n-1}}+\dfrac{b}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x$$

(ii) $|x|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ 이므로

$$f(x)=\frac{0+ax+b}{0+1}=ax+b$$

(iii) $|x|=1$일 때 $f(1)=\dfrac{1+a+b}{1+1}=\dfrac{a+b+1}{2}$

$$f(-1)=\frac{-1-a+b}{1+1}=\frac{-a+b-1}{2}$$

$x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1-0}(ax+b)=\lim_{x\to1+0}x=\frac{a+b+1}{2}$$

$\therefore\ a+b=1$ ……㉠

$x=-1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to-1-0}x=\lim_{x\to-1+0}(ax+b)=\frac{-a+b-1}{2}$$

$\therefore\ -a+b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\boldsymbol{a=1,\ b=0}$ ⇦ 답

4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=f(0)$

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[3]{1+x})^3-(\sqrt[3]{1-x})^3}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

$$=\frac{2}{1+1+1}=a$$

$\therefore\ \boldsymbol{a=\dfrac{2}{3}}$ ⇦ 답

5. $f(x)=\sin x-x\cos x$로 놓으면

$\pi\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\sin x$, x, $\cos x$는 연속이므로

$f(x)$는 연속함수이고,

$$f(\pi)=\pi>0,\quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-1<0$$

따라서 $f(x)=0$, 즉 $\sin x-x\cos x=0$은 구간 $\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

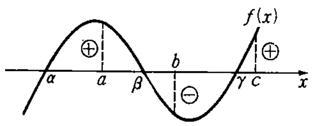
6. $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)$
$\qquad+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$

로 놓으면 $f(x)$는 연속함수이다.

또, $f(a)=(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$



$\therefore\ \boldsymbol{\alpha<a<\beta<b<\gamma<c}$ ⇦ 답

7. (i) $\sin x=\pm1$일 때 $\cos x=0$이므로

$f(x)=0$

(ii) $\sin x\neq\pm1$일 때 $|\sin x|<1$이므로

$$f(x)=\frac{\cos^2x\cdot\sin^3x}{1-\sin^3x}=\frac{(1+\sin x)\sin^3x}{1+\sin x+\sin^2x}$$

따라서 $\sin x=-1$일 때 $f(x)=0$,

$\sin x=1$일 때 $f(x)=\dfrac{2}{3}\neq0$이다.

즉, $f(x)$가 불연속인 점은 $\sin x=1$일 때이다.

그런데 $0\leqq x\leqq2\pi$이므로 $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2}}$ ⇦ 답

8. (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{x^n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^n}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1+\cos x+\cos^2x}{1+\cos x}$$

에서 $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)$가 유한확정값에 수렴하려면 $n\leqq2$이어야 한다.

따라서 자연수 n의 최대값은 2이다. 답 **2**

(2) (1)에서 $n=2$일 때

$a=f(0)=\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$ ⇦ 답

p. 29~30 (고급 문제)

1. $a_1=5^{\frac{1}{2}}$, $a_2=\sqrt{5\cdot5^{\frac{1}{2}}}=\left(5^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$,

$$a_3=\sqrt{5\cdot5^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\left(5^{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

……………………………………………

$$\therefore\ a_n=5^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=5^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}5^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\boldsymbol{5}\ ⇦ 답$$

《다른 풀이》 $a_{n+1}=\sqrt{5a_n}$ $\quad\therefore\ (a_{n+1})^2=5a_n$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1})^2=\lim_{n\to\infty}5a_n$$

$$(\lim_{n\to\infty}a_{n+1})^2=5\lim_{n\to\infty}a_n$$

그런데 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이므로

$\alpha^2=5\alpha$ $\quad\therefore\ \alpha=0$ 또는 $\alpha=5$

한편, $a_n>a_1=\sqrt{5}$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=5$

2. $a_k=\dfrac{1}{k(k+1)(k+3)}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$\therefore\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{36}$ ⇦ 답

3. $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=S_n$으로 놓으면

$S_n=n^2(n+1)$

$n\geq 2$일 때 $na_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2(n+1)-(n-1)^2n$

$=n(3n-1)$

$\therefore a_n=3n-1$

또, $a_1=S_1=2$이므로 $a_n=3n-1$ $(n\geq 1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ ⇦ 답

4. 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$r_n=\overline{OO_n}\sin\alpha$

$\therefore r_n-r_{n+1}=\overline{OO_n}\sin\alpha-\overline{OO_{n+1}}\sin\alpha$

$=\overline{O_nO_{n+1}}\sin\alpha$

$=r_n\sin\alpha$

$\therefore r_{n+1}=r_n(1-\sin\alpha)$

또, 원 O_n의 넓이를 S_n이라고 하면

$S_n=\pi r_n^2$

$S_{n+1}=\pi r_{n+1}^2=\pi r_n^2(1-\sin\alpha)^2$

$=S_n(1-\sin\alpha)^2$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=\pi\cdot 1^2=\pi$이고, 공비가 $(1-\sin\alpha)^2$인 등비수열이다.

$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$이므로 $0<(1-\sin\alpha)^2<1$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-(1-\sin\alpha)^2}$

$=\frac{\pi}{(2-\sin\alpha)\sin\alpha}$ ⇦ 답

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=1$ ……㉠

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$ ……㉡

㉠에서 $f(x)-x^3=x^2+ax+b$

$\therefore f(x)=x^3+x^2+ax+b$

㉡에서 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$

$\therefore b=-a-2$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+ax-a-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2+a)}{x-1}$

$=5+a=1$

$\therefore a=-4,\ b=-a-2=2$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-4x+2$ ⇦ 답

6. (1) $a\leq 0$이면 극한이 ∞이므로 조건에 맞지 않는다. $\therefore a>0$

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-ax-1)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+1-a^2x^2-2ax-1}{\sqrt{x^2+4x+1}+ax+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(4-2a)x}{\sqrt{x^2+4x+1}+ax+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x+(4-2a)}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{1}{x}}=b$ (유한확정)

$\therefore 1-a^2=0,\quad \frac{4-2a}{1+a}=b$

$a>0$이므로 $a=1,\ b=\frac{4-2}{1+1}=1$

답 $a=1,\ b=1$

(2) $x\to\frac{\pi}{6}$일 때, $2\sin x-1\to 0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sqrt{a+\cos^2 x}+a)=\sqrt{a+\frac{3}{4}}+a=0$

$\therefore \sqrt{a+\frac{3}{4}}=-a$ ……㉠

$\therefore 4a^2-4a-3=0,\quad (2a-3)(2a+1)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}$

그런데 $a=\frac{3}{2}$은 ㉠을 만족하지 않으므로

$a=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ (준식)

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}-\sin^2 x}-\frac{1}{2}}{2\sin x-1}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\left(\frac{1}{2}-\sin^2 x\right)-\frac{1}{4}}{(2\sin x-1)\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\sin^2 x}+\frac{1}{2}\right)}$

$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1+2\sin x}{\sqrt{\frac{1}{2}-\sin^2 x}+\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}=b$

답 $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

7. $x-\frac{1}{4}=t$로 놓으면 $1-4x=-4t$

또, $x\to\frac{1}{4}$일 때 $t\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-4^{x-\frac{1}{4}}}{1-4x}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-4^t}{-4t}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{4^t-1}{t}=\frac{1}{4}\ln 4$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2 \Leftarrow \text{답}$$

8. $2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta$를 이용하면

$$1-\cos(1-\cos 2x)=1-\cos(2\sin^2 x)$$
$$=2\sin^2(\sin^2 x)$$
$$\therefore (\text{준식})=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\sin^2 x)}{2^m x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin^2 x)}{2^{m-1}\cdot x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin^2 x)}{(\sin^2 x)^2}\cdot\frac{\sin^4 x}{x^n}\cdot\frac{1}{2^{m-1}}$$

여기서 0이 아닌 극한값을 가지므로 $n=4$이어야 한다.

$$\therefore (\text{준식})=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(\sin^2 x)}{\sin^2 x}\right\}^2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4\cdot\frac{1}{2^{m-1}}$$
$$=1^2\cdot 1^4\cdot\frac{1}{2^{m-1}}=\frac{1}{2^{m-1}}=\alpha$$

m, α가 자연수이므로 $m=1$, $\alpha=1$

답 $\boldsymbol{m=1,\ n=4,\ \alpha=1}$

9. (1) $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$에서

$$\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{1}{2}al\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}bl\sin\frac{\theta}{2}$$
$$\therefore l=\frac{ab\sin\theta}{(a+b)\sin\frac{\theta}{2}}=\boldsymbol{\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\theta}{2}} \Leftarrow \text{답}$$

(2) $\boldsymbol{\lim_{\theta\to 0} l=\frac{2ab}{a+b}} \Leftarrow$ 답

10. (i) $0\leq x<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$

$\therefore f(x)=1$ (연속)

(ii) $x>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$

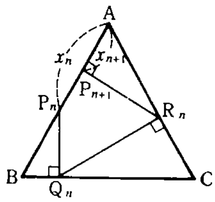
$$\therefore f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{a-1}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}{1-\frac{a}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}=x \text{ (연속)}$$

(iii) $f(1)=\frac{1-a}{a}$

따라서 $f(x)$가 $x\geq 0$에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$$
$$\therefore 1=\frac{1-a}{a} \qquad \therefore \boldsymbol{a=\frac{1}{2}} \Leftarrow \text{답}$$

11. $\overline{AP_n}=x_n(n=1, 2, \cdots)$



이라고 하면

$$\overline{BQ_n}=\overline{BP_n}\cos 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}(a-x_n)$$
$$\overline{CR_n}=\overline{CQ_n}\cos 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\left\{a-\frac{1}{2}(a-x_n)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(a+x_n)$$
$$\overline{AP_{n+1}}=\overline{AR_n}\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\left\{a-\frac{1}{4}(a+x_n)\right\}$$
$$=\frac{1}{8}(3a-x_n)$$
$$\therefore x_{n+1}=\frac{1}{8}(3a-x_n)$$
$$\therefore x_{n+1}-\frac{a}{3}=-\frac{1}{8}\left(x_n-\frac{a}{3}\right)$$

따라서 수열 $\left\{x_n-\frac{a}{3}\right\}$는 첫째항이 $x_1-\frac{a}{3}$, 공비가 $-\frac{1}{8}$인 등비수열이므로

$$x_n-\frac{a}{3}=\left(x_1-\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{a}{3}\right)=0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{a}{3}$$

답 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\overline{AP_n}=\frac{a}{3}}$

12. $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$에서

$$x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n,\quad y_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}y_n$$
$$\therefore x_{n+1}+y_{n+1}=x_n+y_n,\quad x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n-y_n)$$
$$\therefore x_n+y_n=x_{n-1}+y_{n-1}=\cdots=x_1+y_1=1+0=1$$
$$x_n-y_n=(x_1-y_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$\therefore x_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\},\quad y_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2}$이므로

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}P_n=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)} \Leftarrow \text{답}$$

13. $\triangle ABP_k$에서 제이코사인법칙을 이용하면

$$\overline{AP_k}^2=\overline{AB}^2+\overline{BP_k}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BP_k}\cdot\cos B$$
$$=c^2+\left(\frac{a}{n}k\right)^2-2c\cdot\frac{a}{n}k\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=c^2+\frac{a^2}{n^2}\cdot k^2-\frac{c^2+a^2-b^2}{n}\cdot k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{AP}_k}^2 = c^2n + \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{c^2+a^2-b^2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{AP}_k}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{c^2+\frac{a^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - \frac{c^2+a^2-b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

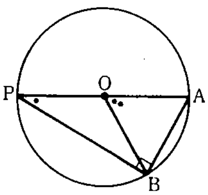
$$= c^2+\frac{a^2}{3}-\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2 \ ⇦ \text{답}$$

14. 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r라고 하면

호 AB의 중심각은 $\frac{a}{r}$, 호 BC의 중심각은 $\frac{2a}{r}$

$\overline{\mathrm{AO}}$의 연장선이 원과 만나는 점을 P라고 하면



$$\angle \mathrm{ABP} = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB} = \frac{a}{2r}$$

$$\overline{\mathrm{AP}} = 2r$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}} = 2r\sin\frac{a}{2r} = b$$

같은 방법으로 생각하면 $\overline{\mathrm{BC}} = 2r\sin\frac{a}{r} = c$

$$\therefore \lim_{a\to0}\frac{b+c}{a} = \lim_{a\to0}\frac{2r\sin\frac{a}{2r}+2r\sin\frac{a}{r}}{a}$$

$$= \lim_{a\to0}\left(\frac{\sin\frac{a}{2r}}{\frac{a}{2r}}+2\cdot\frac{\sin\frac{a}{r}}{\frac{a}{r}}\right) = 3 \ ⇦ \text{답}$$

II. 미 분 법

p. 35

1. (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$

$$= \frac{(q^2+4q+5)-(p^2+4p+5)}{q-p}$$

$$= \frac{(q+p)(q-p)+4(q-p)}{q-p}$$

$$= \boldsymbol{q+p+4} \ ⇦ \text{답}$$

(2) $f'(x)=2x+4$에서 $\boldsymbol{f'(m)=2m+4}$ ⇦ 답

(3) $2m+4=q+p+4$에서 $\boldsymbol{m=\frac{p+q}{2}}$ ⇦ 답

2. ① $x=2$에서 $f(x)$는 증가상태이므로 $f'(2)>0$

② $\lim_{x\to3-0}f(x)=\lim_{x\to3+0}f(x)$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$가 존재한다.

③ $x=3$, 5에서 $f(x)$는 불연속이므로 불연속점은 2개이다.

④ $x=1$, 3, 5에서 $f(x)$는 미분불가능하므로 미분가능하지 않는 점은 3개이다.

⑤ $f(x)$는 $x=0$의 부근에서 연속이고 $-1<x<0$에서 증가, $0<x<1$에서 감소하므로 $x=0$에서 $f'(x)=0$이다.

답 ⑤

3. $\frac{2}{n}=h$라고 하면, $n\to\infty$일 때 $h\to0$

$$\therefore (\text{준식}) = \lim_{h\to0}\left(\frac{2}{h}\right)^2\{f(1+h)-f(1)\}^2$$

$$= \lim_{h\to0}4\times\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right\}^2$$

$$= 4\times\{f'(1)\}^2$$

$f'(x)=2x+1$에서 $f'(1)=3$

$$\therefore (\text{준식}) = 4\times3^2 = \mathbf{36} \ ⇦ \text{답}$$

4. $f(x)=x^n-3x^2-x+3$이라고 하면

$f(1)=0$이므로

$$(\text{준식}) = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$f'(x)=nx^{n-1}-6x-1$이므로

$$f'(1)=n-7=2 \quad \therefore \boldsymbol{n=9} \ ⇦ \text{답}$$

5. $f'(x) = \frac{1\cdot\{g(x)+2\}-xg'(x)}{\{g(x)+2\}^2}$

$$= \frac{g(x)+2-xg'(x)}{\{g(x)+2\}^2}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{g(0)+2-0\times g'(0)}{\{g(0)+2\}^2}$$

$g(0)=1$이므로

$$f'(0) = \frac{1+2}{(1+2)^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \ ⇦ \text{답}$$

6. (1) 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=2f(0)\cdot f(0)$$

그런데 문제의 조건에서 $f(0)>0$이므로

$$1=2f(0)\text{에서 } \boldsymbol{f(0)=\frac{1}{2}} \ ⇦ \text{답}$$

(2) $f'(0) = \lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h} = a$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2f(x)f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2f(x)\left\{f(h)-\frac{1}{2}\right\}}{h}$$
$$=2f(x)\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}$$
$$=2f(x)\cdot f'(0)$$
$$=\mathbf{2af(x)}$$ ⇦ 답

7. $(\text{준식})=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)-2x^3+f(1)}{x^2-1}$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\frac{x^3-1}{x^2-1}+\lim_{x\to1}\frac{-2(x^3-1)}{x^2-1}\quad(\because f(1)=2)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\frac{x^2+x+1}{x+1}-2\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}$$
$$=\frac{3}{2}f'(1)-2\times\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}-3\ (\because f'(1)=1)$$
$$=-\frac{3}{2}$$ ⇦ 답

8. $f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$
$$\therefore\begin{cases}f'(a)=(a-b)(a-c)\\f'(b)=(b-a)(b-c)\\f'(c)=(c-a)(c-b)\end{cases}$$
$$\therefore(\text{준식})=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\mathbf{a+b+c}$$ ⇦ 답

p. 41~42

1. (1) $f(x)=x^{10}+x^5+3=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ 라고 하면

$f(-1)=3=-a+b$ ······㉠

또, $f'(x)=10x^9+5x^4=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

$\therefore f'(-1)=-5=a$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $a=-5,\ b=-2$

따라서 구하는 나머지는 $\mathbf{-5x-2}$ ⇦ 답

(2) $f(x)=ax^4+bx^3+1=(x-1)^2Q(x)$라고 하면

$f(1)=a+b+1=0$ ······㉠

또, $f'(x)=4ax^3+3bx^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

$\therefore f'(1)=4a+3b=0$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\mathbf{a=3,\ b=-4}$ ⇦ 답

(3) $f(x)=x^{10}+x^3+ax^2+bx+c=(x-1)^3Q(x)$라고 하면

$f(1)=a+b+c+2=0$ ······㉠

$f'(x)=10x^9+3x^2+2ax+b=3(x-1)^2Q(x)+(x-1)^3Q'(x)$

$\therefore f'(1)=2a+b+13=0$ ······㉡

$f''(x)=90x^8+6x+2a=6(x-1)Q(x)+3(x-1)^2Q'(x)+3(x-1)^2Q'(x)+(x-1)^3Q''(x)$

$\therefore f''(1)=2a+96=0$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\mathbf{a=-48,\ b=83,\ c=-37}$ ⇦ 답

2. $f'(x)=10(x+\sqrt{1+x^2})^9(x+\sqrt{1+x^2})'$
$$=10(x+\sqrt{1+x^2})^9\times\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$=10(x+\sqrt{1+x^2})^9\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$\therefore f'(1)\times f'(-1)$
$$=10(1+\sqrt2)^9\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)\times10(\sqrt2-1)^9\left(1-\frac{1}{\sqrt2}\right)$$
$$=100\{(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)\}^9\times\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt2}\right)$$
$$=100\times1^9\times\frac{1}{2}=50$$ 답 ④

3. $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{h}=0$$
또, $x\neq0$일 때
$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$
$$\therefore\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(-\cos\frac{1}{x}\right)$$
따라서 $\lim_{x\to0}f'(x)$의 값은 존재하지 않는다.

즉, $f'(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

답 ④

4. $f(2x+\sin x)=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(2x+\sin x)\times(2x+\sin x)'=1$$

$$\therefore\ f'(2x+\sin x)=\frac{1}{2+\cos x}$$

$x=0$이면 $\boldsymbol{f'(0)=\frac{1}{3}}$ 답 ③

5. $\lim_{x\to0}\frac{f(9+x)-f(9-x)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(9+x)-f(9)-f(9-x)+f(9)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(9+x)-f(9)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f(9-x)-f(9)}{-x}$$

$$=f'(9)+f'(9)=2f'(9)$$

그런데 $f(x)=(1+\sqrt{1+\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}\times(1+\sqrt{1+\sqrt{x}})'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}\times\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\times(1+\sqrt{x})'$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\sqrt{1+\sqrt{x}}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$$

$$\therefore\ f'(9)=\frac{1}{8\sqrt{9}\sqrt{1+\sqrt{9}}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{9}}}}$$

$$=\frac{1}{8\times3\times\sqrt{4}\times\sqrt{1+\sqrt{4}}}$$

$$=\frac{1}{8\times3\times2\times\sqrt{3}}=\frac{1}{48\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ (\text{준식})=2f'(9)=\frac{1}{24\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{72}} \Leftarrow \text{답}$$

6. $\frac{dx}{dt}=t^2-9,\ \frac{dy}{dt}=t^2-t-6$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{t^2-t-6}{t^2-9}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to3}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to3}\frac{(t+2)(t-3)}{(t+3)(t-3)}$$

$$=\lim_{t\to3}\frac{t+2}{t+3}=\boldsymbol{\frac{5}{6}} \Leftarrow \text{답}$$

7. $f'(x)=\frac{1}{\sec x+\tan x}\times(\sec x+\tan x)'$

$$=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=\sec x$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sec\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{2} \Leftarrow \text{답}$$

8. (i) $\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)$ 에서

$$a+1=\ln b$$

(ii) $f'(x)=\begin{cases}2ax & (x<1)\\ \frac{1}{x} & (x\geqq1)\end{cases}$ 이므로

$\lim_{x\to1-0}f'(x)=\lim_{x\to1+0}f'(x)$에서 $2a=1$

(i), (ii)에서 $\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=e^{\frac{3}{2}}} \Leftarrow$ 답

9. $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$$

$$f''(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$$

따라서 주어진 방정식은

$$x^2\ln x+2x\ln x+x-4(2\ln x+3)=x-12$$

즉, $(x^2+2x-8)\ln x=0,\ (x+4)(x-2)\ln x=0$

$x>0$이므로 $\boldsymbol{x=1,\ 2} \Leftarrow$ 답

10. $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})$으로 놓으면

$f(0)=\ln n$이므로

$$(\text{준식})=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

그런데 $f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$

$$\therefore\ f'(0)=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}} \Leftarrow \text{답}$$

11. $f'(x)=\frac{xe^{x-1}-e^{x-1}}{x^2}=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}}{x^2(x+1)}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \Leftarrow \text{답}$$

12. $g(x)=f^{-1}(x)=y$라고 하면

$x=f(y)=\tan y$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=\sec^2 y\times\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{\tan^2 y+1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{x^2+1}} \Leftarrow \text{답}$$

13. $\frac{dx}{dt}=e^t+e^{-t},\ \frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$$=\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^3}$

답 $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^3}}$

14. (준식) $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin 8x)-f(0)-f(\tan x)+f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{f(\sin 8x)-f(0)}{\sin 8x}\times\dfrac{\sin 8x}{8x}\times 8\right\}$

$-\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{f(\tan x)-f(0)}{\tan x}\times\dfrac{\tan x}{x}\right\}$

$=f'(0)\times1\times8-f'(0)\times1$

$=\boldsymbol{7f'(0)}$ ⇦ 답

15. $x^2+2xy-y^2=1$에서 양변을 x에 대하여 미분하면 $2x+2y+2x\cdot y'-2y\cdot y'=0$

즉, $(x+y)+(x-y)y'=0$ ……㉠

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$1+y'+(1-y')y'+(x-y)y''=0$

$\therefore 1+2y'-(y')^2+(x-y)y''=0$

㉠에서 $y'=-\dfrac{x+y}{x-y}$이므로

$1-2\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)-\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2+(x-y)y''=0$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}=y''=\boldsymbol{\dfrac{2(x^2+2xy-y^2)}{(x-y)^3}}$ ⇦ 답

16. $e^y+\ln\cos x=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^y\times\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=0$

즉, $e^y\times\dfrac{dy}{dx}-\tan x=0$에서 $\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}\tan x$

또, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(e^{-y}\tan x)$

$=-e^{-y}\times\dfrac{dy}{dx}\times\tan x+e^{-y}\times\sec^2 x$

$=-e^{-y}\tan x\,(e^{-y}\tan x)+e^{-y}\sec^2 x$

$=-e^{-2y}\tan^2 x+e^{-y}\sec^2 x$

답 $\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}\tan x}\\ \boldsymbol{\dfrac{d^2y}{dx^2}=-e^{-2y}\tan^2 x+e^{-y}\sec^2 x}\end{cases}$

p. 47~48

1. $y=x^3$에서 $y'=3x^2$

따라서 점 $(a,\ a^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$

즉, $y=3a^2x-2a^3$이므로 y절편은 $g(a)=-2a^3$

$\therefore$ (준식) $=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{-2a^3+2(\sqrt{a^2+a}\,)^3}{a^2}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{2\{(a+1)\sqrt{a^2+a}-a^2\}}{a}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{2\{(a+1)^2a(a+1)-a^4\}}{a\{(a+1)\sqrt{a^2+a}+a^2\}}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{6a^2+6a+2}{(a+1)\sqrt{a^2+a}+a^2}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{6+\dfrac{6}{a}+\dfrac{2}{a^2}}{\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}+1}$

$=\mathbf{3}$ 답 ③

2. (1) 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2\times\dfrac{dy}{dx}\times e^x+2ye^x+3y^2\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+2ye^x}{2e^x+3y^2}$

따라서 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=0\\y=1}}=-\dfrac{2}{5}$

구하는 접선의 방정식은

$y-1=-\dfrac{2}{5}(x-0)$

$\therefore \boldsymbol{y=-\dfrac{2}{5}x+1}$ ⇦ 답

(2) $y'=\dfrac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$[y']_{x=1}=\dfrac{1}{2}$

따라서 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$, 즉 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}}$ ⇦ 답

3. $f(x)=\ln x+1=y$라고 하면

$x=e^{y-1}=f^{-1}(y)$에서 $f^{-1}(x)=e^{x-1}=g(x)$라 하고 곡선 $y=g(x)$의 접선의 접점을 $(t,\ e^{t-1})$이라고 하면, $g'(t)=e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{t-1}=e^{t-1}(x-t)$

$x=0,\ y=0$을 대입하면 $-e^{t-1}=-t\,e^{t-1}$

$e^{t-1}\neq0$이므로 $t=1$

따라서 접선의 기울기는 $g'(1)=e^0=\mathbf{1}$

답 ①

4. P의 좌표를 $(k,\ k^2)$이라고 하면

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 법선의 기울기는

$\left[-\dfrac{1}{y'}\right]_{x=k}=-\dfrac{1}{2k}$

따라서 법선의 방정식은

$y-k^2=-\dfrac{1}{2k}(x-k)$

즉, $y=-\dfrac{1}{2k}x+\left(k^2+\dfrac{1}{2}\right)$

따라서 Q의 좌표는 $\left(0,\ k^2+\frac{1}{2}\right)$이고 P가 원점 O에 한없이 접근하면 $k\to 0$이므로

$$\lim_{k\to 0}\left(k^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 점 Q는 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에 접근한다.

답 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

5. 주어진 곡선이 x축과 접하는 점을 $(t,\ 0)$이라고 하면

(i) $x=t$이면 $y=e^{at}-t=0$ ……㉠

(ii) $y'=ae^{ax}-1$에서 $x=t$이면

$y'=ae^{at}-1=0$ ……㉡

㉡의 $e^{at}=\frac{1}{a}$을 ㉠에 대입하면 $t=\frac{1}{a}$

따라서 $at=1$이므로 $\mathbf{a=\frac{1}{e}}$ ⇦ 답

6. $y=e^{-x^2}$에서 $y'=-2xe^{-x^2}$

접점을 $(t,\ e^{-t^2})$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(x-t)$

이고 이 접선이 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(a-t)$

$e^{-t^2}\neq 0$이므로 $1=2t(a-t)$

즉, t에 대한 이차방정식 $2t^2-2at+1=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-2>0$

$\therefore$ $\mathbf{a<-\sqrt{2}}$ 또는 $\mathbf{a>\sqrt{2}}$ ⇦ 답

7. $f(x)=\ln x$, $g(x)=ax+\frac{b}{x}$라 하고

x축 위의 접점을 $(t,\ 0)$이라고 하면

(i) $f(t)=g(t)=0$에서 $\ln t=0$, $at+\frac{b}{t}=0$

$\therefore$ $t=1$, $a+b=0$ ……㉠

(ii) $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$이고

$f'(t)=g'(t)$이므로 $\frac{1}{t}=a-\frac{b}{t^2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $t=1$, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

답 $\mathbf{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}}$

8. 곡선 $y=e^{ax}(a>0)$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선이 접하면 그 접점은 직선 $y=x$ 위에 있게 된다.

따라서 접점을 $(t,\ t)$라고 하면

(i) $e^{at}=t$ ……㉠

(ii) $y'=ae^{ax}$에서 $ae^{at}=1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $t=\frac{1}{a}$ $\therefore$ $\mathbf{a=\frac{1}{e}}$ ⇦ 답

9. $f(x)=\ln(2x+1)$, $g(x)=-\ln x^3+k$라 하고 교점의 x좌표를 t라고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서

$\ln(2t+1)=-\ln t^3+k$ ……㉠

(ii) $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$, $g'(x)=-\frac{3x^2}{x^3}=-\frac{3}{x}$에서

$f'(t)\times g'(t)=-1$이므로

$\frac{2}{2t+1}\times\left(-\frac{3}{t}\right)=-1$

$\therefore$ $t(2t+1)=6$, $t=-2,\ \frac{3}{2}$

그런데 $t>0$이므로 $t=\frac{3}{2}$

㉠에서 $k=\ln(2t+1)+\ln t^3$

$=\ln t^3(2t+1)=\mathbf{\ln\frac{27}{2}}$ ⇦ 답

10. (i) $a<b<c$인 모든 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$가 성립할 때, $x_1<x_2$인 모든 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<a<b<c<x_2$인 실수 $a,\ b,\ c$가 존재하고

$\frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\therefore$ $\lim_{a\to x_1}\frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}\leqq\lim_{a\to x_1}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

즉, $f'(x_1)\leqq\frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}$ ……㉠

또, $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}<\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}=\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}$

$\therefore$ $\lim_{c\to x_2}\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\leqq\lim_{c\to x_2}\frac{f(c)-f(x_2)}{c-x_2}$

즉, $\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}\leqq f'(x_2)$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x_1<b<x_2$이므로

$\frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}<\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}$

$\therefore$ $f'(x_1)<f'(x_2)$

(ii) $x_1<x_2$인 모든 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f'(x_1)<f'(x_2)$가 성립할 때, $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 평균값의 정리에 의하여 $a<b<c$인 모든 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$ $(a<x_1<b)$

$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(x_2)$ $(b<x_2<c)$

인 실수 $x_1,\ x_2$가 존재하고 $x_1<x_2$이므로

$f'(x_1)<f'(x_2)$

$\therefore$ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

11. $f(x)=\sin x$라고 하면 $f(x)$는 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이고 미분가능하다.

따라서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c)\ (\sin x<c<x)$$

인 c가 존재한다.

그런데 $x\to 0$이면 $c\to 0$이고 $f'(x)=\cos x$이므로 $f'(c)=\cos c$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{c\to 0}\cos c=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=1$$ ⇦ 답

12. $f(x)=e^{-x}\sin x=0$에서 $\sin x=0$

$x>0$이므로 $x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots,\ n\pi,\ \cdots$

$\therefore x_n=n\pi\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$\therefore f'(n\pi)=e^{-n\pi}\cdot\cos n\pi=(-1)^n\cdot e^{-n\pi}$

따라서 점 $(x_n,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=(-1)^n e^{-n\pi}(x-n\pi)$

y절편이 y_n이므로

$y_n=(-1)^{n+1}n\pi e^{-n\pi}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\pi e^{-n\pi}$$

$$=\frac{\pi e^{-\pi}}{1+(e^{-\pi})}$$

$$=\frac{\pi}{e^{\pi}+1}$$ ⇦ 답

13. $0\leqq a<b\leqq\pi$라고 하면 함수 $f(x)$는 폐구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이고, 개구간 $(0,\ \pi)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$t=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \ (a<c<b)$$

인 실수 c가 존재한다.

$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

에서 $t=f'(c)=e^{-c}(\cos c-\sin c)$ (단, $0<c<\pi$)

$\therefore t'=f''(c)=-e^{-c}(\cos c-\sin c)$

$+e^{-c}(-\sin c-\cos c)$

$=-2e^{-c}\cos c=0$

에서 $c=\frac{\pi}{2}$

c	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
t'		$-$	0	$+$	
t	1	↘	$-e^{-\frac{\pi}{2}}$	↗	$-e^{-\pi}$

$\therefore\ -e^{-\frac{\pi}{2}}<t<1$ ⇦ 답

p. 53~54

1. $F(x)=f(x)-g(x)$라고 하면

$F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이므로 $F(x)$는 증가함수이고 $F(0)=f(0)-g(0)=0$에서

$F(-2)<0,\ F(2)>0$

$\therefore\ f(-2)<g(-2),\ f(2)>g(2)$

답 ③

2. (1) $f(x)=ax^3-2ax^2+4x(a\neq 0)$가 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가함수가 되려면, 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3ax^2-4ax+4\geqq 0$

이어야 한다.

$\therefore\ a>0,\ \frac{D}{4}=4a^2-12a\leqq 0$

$\therefore\ 0<a\leqq 3$ ⇦ 답

(2) $f(x)$가 $x=b,\ c$에서 극값을 가지려면

$f'(x)=3ax^2-4ax+4=0$

의 두 근이 $b,\ c$이어야 한다.

$\therefore\ b+c=\frac{4a}{3a}=\frac{4}{3}$ ⇦ 답

3. $$f'(x)=\frac{(x^2-x-2)-(x+a)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$=\frac{-x^2-2ax+a-2}{(x^2-x-2)^2}$$

$x^2+2ax-a+2=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2+a-2\leqq 0$

$(a+2)(a-1)\leqq 0$

$\therefore\ -2\leqq a\leqq 1$ ⇦ 답

4. $F(x)=\frac{f(x)}{x}$라고 하면 $x>0$에서 $F(x)$는 연속이고 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 $0<x_1<x_2$일 때

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}=F'(c)\ (x_1<c<x_2)\ \cdots\cdots ㉠$$

인 실수 c가 존재한다.

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)-\frac{f(x)}{x}}{x}$$ 에서

$$F'(c)=\frac{f'(c)-\frac{f(c)}{c}}{c}\ \cdots\cdots ㉡$$

또, $f(x)$가 연속이고 $f(0)=0$이므로

$$\frac{f(c)}{c}=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(k)\ (0<k<c)\ \cdots\cdots ㉢$$

인 실수 k가 존재한다.

㉡, ㉢에서 $F'(c)=\dfrac{f'(c)-f'(k)}{c}$

$0<k<c$ 이고 $f'(x)$는 증가함수이므로

$f'(c)>f'(k)$ $\quad\therefore\ F'(c)>0$

㉠에서 $0<x_1<x_2$이면 $F(x_1)<F(x_2)$이므로

$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$는 증가함수이다.

5. $f'(x)=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$

$f''(x)=\dfrac{(2-2x)e^x-(2x-x^2)e^x}{(e^x)^2}$

$=\dfrac{x^2-4x+2}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0,\ 2$

$f''(0)>0,\ f''(2)<0$이므로

극대값은 $f(2)=\dfrac{4}{e^2}$

극소값은 $f(0)=0$

$f''(x)=0$에서 $x=2\pm\sqrt{2}$

즉, 변곡점의 x좌표는 $2\pm\sqrt{2}$

답 $\begin{cases}\textbf{극대값 } \dfrac{4}{e^2},\ \textbf{극소값 } 0\\ \textbf{변곡점의 } x\textbf{좌표 } 2\pm\sqrt{2}\end{cases}$

6. $f(x)=a\sin 2x+b\cos x$에서

$f'(x)=2a\cos 2x-b\sin x$

$f(x)$는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$에서 극대값 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$을 가지므로

$f'\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=a+\dfrac{1}{2}b=0$

$\therefore\ 2a+b=0$ ······㉠

$f\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ a-b=3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 **$a=1,\ b=-2$** ⇦ 답

7. $f'(x)=3x^2-4ax=x(3x-4a)=0$이면

$x=0,\ \dfrac{4}{3}a$

$f(x)$가 $0<x<1$에서 극소값을 가지므로

$0<\dfrac{4}{3}a<1$

$\therefore$ **$0<a<\dfrac{3}{4}$** ⇦ 답

8. $f'(x)=3x^2+4ax-4a^2=0$은 $-1<\alpha<1<\beta$인 두 실근 $\alpha,\ \beta$를 가져야 하므로

$f'(-1)=-4a^2-4a+3$

$=-(2a+3)(2a-1)>0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ ······㉠

$f'(1)=-4a^2+4a+3$

$=-(2a-3)(2a+1)<0$

$\therefore\ a<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a>\dfrac{3}{2}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 **$-\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$** ⇦ 답

9. $f'(x)=2e^{2x}+ae^x+2=0$에서 $e^x=t\,(t>0)$라고 하면

$2t^2+at+2=0$ ······㉠

조건에서 극대값, 극소값을 가지므로 ㉠은 서로 다른 두 양근 $k_1,\ k_2$를 갖는다.

$\therefore\ \left.\begin{cases}D=a^2-16>0\\ k_1+k_2=-\dfrac{a}{2}>0\\ k_1k_2=1>0\end{cases}\right\}$ ⇨ $a<-4$

$k_1=e^\alpha,\ k_2=e^\beta$이라고 하면

$k_1+k_2=e^\alpha+e^\beta=-\dfrac{a}{2}$

$k_1k_2=e^\alpha\times e^\beta=e^{\alpha+\beta}=1\quad\therefore\ \alpha+\beta=0$

또, (극대값)+(극소값)

$=f(\alpha)+f(\beta)$

$=(e^{2\alpha}+ae^\alpha+2\alpha)+(e^{2\beta}+ae^\beta+2\beta)$

$=(e^\alpha+e^\beta)^2-2e^{\alpha+\beta}+a(e^\alpha+e^\beta)+2(\alpha+\beta)$

$=\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2-2+a\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}-2=-11$

$\therefore\ -\dfrac{a^2}{4}=-9,\ a^2=36$

그런데 $a<-4$이므로 **$a=-6$** ⇦ 답

10. $y'=e^{-2x^2}(-4x)$

$y''=e^{-2x^2}(-4x)^2+e^{-2x^2}(-4)=4(4x^2-1)e^{-2x^2}$

$\therefore\ y''=0$에서 $x=\pm\dfrac{1}{2}$

$x<-\dfrac{1}{2},\ x>\dfrac{1}{2}$일 때 $y''>0$

$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$일 때 $y''<0$

따라서 변곡점은 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}\right),\ \mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$

$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times1\times e^{-\frac{1}{2}}=$ **$\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$** ⇦ 답

11. (1) $f(x)=ax^2-x^3$에서 $f'(x)=2ax-3x^2$

$f'(x)=0$이면 $x=0,\ \dfrac{2}{3}a$

$a>0$이므로 $f(x)$의 극대값은

$f\left(\dfrac{2}{3}a\right)=\dfrac{4}{9}a^3-\dfrac{8}{27}a^3$

$=\dfrac{4}{27}a^3$ ⇦ 답

(2) 극대점은 $\left(\dfrac{2}{3}a,\ \dfrac{4}{27}a^3\right)$이므로

$x=\frac{2}{3}a,\ y=\frac{4}{27}a^3$에서 a를 소거하면

$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x^3\ (x>0)}$ ⇦ 답

12. $f(x)=(2x+a)e^{-bx}$에서

$$f'(x)=2\cdot e^{-bx}-b(2x+a)e^{-bx}$$
$$=(-2bx-ab+2)e^{-bx}$$
$$f''(x)=-2be^{-bx}-b(-2bx-ab+2)e^{-bx}$$
$$=-be^{-bx}(-2bx-ab+4)$$

$f(x)$는 $x=-2$에서 극값을 가지므로

$$f'(-2)=e^{2b}(4b-ab+2)=0$$

$e^{2b}\neq 0$이므로 $4b-ab+2=0$ ……㉠

$(-1,\ f(-1))$이 변곡점이므로

$$f''(-1)=-be^{b}(2b-ab+4)=0$$

$e^{b}\neq 0$이고 ㉠에서 $b\neq 0$이므로

$2b-ab+4=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\boldsymbol{a=6,\ b=1}$ ⇦ 답

13. $f(x)=e^x(ax^2+2bx+1)$에서

$$f'(x)=e^x(ax^2+2bx+1)+e^x(2ax+2b)$$
$$=e^x\{ax^2+2(a+b)x+(2b+1)\}$$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으므로 $f'(x)=0$이 허근 또는 중근을 가져야 한다.

즉, $ax^2+2(a+b)x+(2b+1)=0$에서

$$\frac{D}{4}=(a+b)^2-a(2b+1)\leq 0$$
$$a^2-a+b^2\leq 0$$
$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2\leq\frac{1}{4}$$

따라서 점 $(a,\ b)$가 존재하는 영역의 넓이는

$\boldsymbol{\frac{1}{4}\pi}$ ⇦ 답

14. $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$$=e^{-x}(\cos x-\sin x)=0$$

에서

$$\cos x=\sin x,\ \tan x=1$$
$$\therefore\ x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \cdots$$

즉, $x_n=n\pi-\frac{3}{4}\pi$ (n은 자연수)

$$\therefore\ |f(x_n)|=\left|e^{-n\pi+\frac{3}{4}\pi}\cdot\sin\left(n\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\right|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot(e^{-\pi})^n$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{\pi}-1)}}\ ⇦\ 답$$

p. 59~60

1. 곡선의 점근선을 $y=mx+n$이라고 하면

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}=1$$
$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\{\sqrt[3]{x^2(x-3)}-x\}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}x\left\{\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}-1\right\}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\times\left(-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}+1}=-1$$

따라서 점근선의 방정식은 $\boldsymbol{y=x-1}$

답 ②

2. $y'=12x^5-20x^3$

$$y''=60x^4-60x^2=60x^2(x+1)(x-1)$$

$y''=0$이면 $x=0,\ -1,\ 1$

x	…	-1	…	0	…	1	…
y''	+	0	−	0	−	0	+
		(변곡)				(변곡)	

따라서 변곡점의 x좌표는 **−1, 1**

답 ④

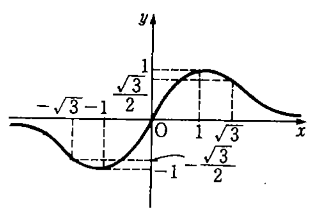
3. (1) $y'=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$$y''=\frac{-4x(x^2+1)^2+2(x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$에서 $x=\pm 1$, $y''=0$에서 $x=0,\ \pm\sqrt{3}$

x	…	$-\sqrt{3}$	…	-1	…	0	…	1	…	$\sqrt{3}$	…
y'	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
y''	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
y	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$이므로 y의 증감에 따라 곡선의 개형을 그리면 다음과 같다.



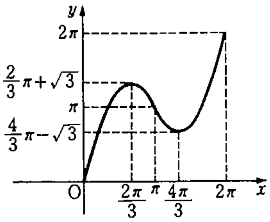
(2) $y'=1+2\cos x=0$에서 $x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

$y''=-2\sin x=0$에서 $x=0,\ \pi,\ 2\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		+	0	−	−	−	0	+	+
y''	0	−	−	−	0	+	+	+	0
y	0	↗	$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$	↘	π	↘	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	↗	2π

(극대)　(변곡)　(극소)

y의 증감표에 따라 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



4. (1) $f(x)=\sin x+2\sin x\cos^2 x$

$=\sin x+2\sin x(1-\sin^2 x)$

$=-2\sin^3 x+3\sin x$

$\sin x=t$, $f(x)=g(t)$라고 하면

$g(t)=-2t^3+3t\ (0\leqq t\leqq 1)$

$g'(t)=-6t^2+3=0$이면　$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

답 $\begin{cases}\textbf{최대값 } \sqrt{2} \\ \textbf{최소값 } 0\end{cases}$

(2) $\sin x+\cos x=t$라고 하면

$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$에서 $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

또, $t^2=1+2\sin x\cos x$에서

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)$

따라서 $f(x)=g(t)$라고 하면

$g(t)=t^3-3t\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)-3\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)$

$=-\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}$

$g'(t)=-\frac{3}{2}(t^2+2t-1)=0$이면

$t=-1+\sqrt{2}$

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	$\frac{-3-\sqrt{2}}{2}$	↗	$-1+2\sqrt{2}$	↘	$\frac{-3+\sqrt{2}}{2}$

답 **최대값 $-1+2\sqrt{2}$, 최소값 $\frac{-3-\sqrt{2}}{2}$**

(3) $\sin x+\cos x=t$, $f(t)=g(t)$라고 하면

$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$에서　$1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2(\sin x\cos x)^2$

$=1-2\times\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2$

$=\frac{-t^4+2t^2+1}{2}$

$g(t)=\frac{2t}{-t^4+2t^2+1}$

$g'(t)=\frac{2(-t^4+2t^2+1)-2t(-4t^3+4t)}{(-t^4+2t^2+1)^2}$

$=\frac{2(3t^4-2t^2+1)}{(-t^4+2t^2+1)^2}=\frac{6\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}{(-t^4+2t^2+1)^2}$

$g'(t)>0$이므로 $g(t)$는 단조증가함수이다.

답 $\begin{cases}(\text{최대값})=g(\sqrt{2})=\mathbf{2\sqrt{2}} \\ (\text{최소값})=g(1)=\mathbf{1}\end{cases}$

(4) $f(x)=\dfrac{x^2+1+\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}$에서

$x+\frac{1}{x}=t\,(x>0)$라고 하면　$t\geqq 2$

$f(x)=g(t)$라고 하면　$g(t)=\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t}$

$g'(t)=1+\frac{1}{t^2}$

$g'(t)>0$이므로 $g(t)$는 증가함수

$\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$

답 $\begin{cases}(\text{최소값})=g(2)=\mathbf{\frac{3}{2}} \\ \textbf{최대값은 없다.}\end{cases}$

5. 상자의 부피를 $f(x)$라고 하면, 상자의 밑면은 가로의 길이가 $(16-2x)$cm이고 세로의 길이가 $(6-2x)$cm인 직사각형이므로

$f(x)=x(16-2x)(6-2x)$

$=4x^3-44x^2+96x\ (0<x<3)$

$\therefore\ f'(x)=12x^2-88x+96$

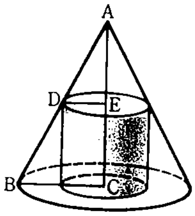
$=4(x-6)(3x-4)$

$f'(x)=0$이면 $x=\frac{4}{3}$ ($\because\ 0<x<3$)

따라서 $f'(x)$의 부호의 변화에 따라 $f(x)$는 $x=\frac{4}{3}$에서 극대이면서 최대이다.

$\therefore$ (최대값)$=f\left(\frac{4}{3}\right)=\mathbf{\frac{1600}{27}}$ **(cm³)** ⇦ 답

6. 오른쪽 그림에서
$\overline{DE}=x$, $\overline{AC}=h$라고 하면
$\overline{BC}=r$ 이므로



$$\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{AC}$$

에서

$$\overline{AE}=\frac{h}{r}x$$

$$\therefore\ \overline{EC}=h-\frac{h}{r}x=h\left(1-\frac{x}{r}\right)$$

따라서 직원기둥의 부피를 V라고 하면

$$V=\pi x^2\times h\left(1-\frac{x}{r}\right)$$

$$=\frac{\pi h}{r}(-x^3+rx^2)\quad(0<x<r)$$

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\pi h}{r}(-3x^2+2rx)$$

$\frac{dV}{dx}=0$이면 $x=\frac{2}{3}r$ ($\because$ $0<x<r$)

따라서 $\frac{dV}{dx}$의 부호의 변화에 따라 V는 $x=\frac{2}{3}r$ 일 때 극대이면서 최대이다.

답 $\boldsymbol{\frac{2}{3}r}$

7. (원기둥의 겉넓이)$=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi a^2$ (a는 일정) 이라고 놓으면 $h=\frac{1}{r}(a^2-r^2)$

따라서 부피를 V라고 하면

$$V=\pi r^2h=\pi r(a^2-r^2)$$

$$\therefore\ \frac{dV}{dr}=-3\pi r^2+\pi a^2$$

$\frac{dV}{dr}=0$이면 $r=\frac{1}{\sqrt{3}}a$ ($\because$ $0<r<a$)

따라서 $\frac{dV}{dr}$의 부호의 변화에서 V는 $r=\frac{1}{\sqrt{3}}a$ 일 때 극대이면서 최대이다.

이 때 $h=\frac{2}{\sqrt{3}}a$이므로 $\boldsymbol{r:h=1:2}$ ⇦ 답

8. $y'=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$이므로 곡선 위의 점$(x_1,\ y_1)$에서의 접선과 법선의 방정식은 각각

$$y=\frac{x_1}{x_1+1}(x-x_1)+y_1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$y=-\frac{x_1+1}{x_1}(x-x_1)+y_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$(x_1,\ y_1)$은 곡선 위의 점이므로

$$y_1=x_1-\ln(x_1+1) \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢에서 $x=0$이면

$$y=-\frac{{x_1}^2}{x_1+1}+x_1-\ln(x_1+1)$$

$$=\frac{x_1}{x_1+1}-\ln(x_1+1)$$

㉡, ㉢에서 $x=0$이면

$$y=(x_1+1)+x_1-\ln(x_1+1)=2x_1+1-\ln(x_1+1)$$

$$\therefore\ \begin{cases}A\left(0,\ \frac{x_1}{x_1+1}-\ln(x_1+1)\right)\\ B(0,\ 2x_1+1-\ln(x_1+1))\end{cases}$$

$$\overline{AB}=\left|\frac{x_1}{x_1+1}-2x_1-1\right|=\left|\frac{-1}{x_1+1}-2x_1\right|$$

$$=\left|\frac{1}{x_1+1}+2x_1\right|$$

$$=\left|\frac{1}{x_1+1}+2(x_1+1)-2\right|\geqq|2\sqrt{2}-2|$$

$$=2\sqrt{2}-2$$

즉, ($\overline{AB}$의 최소값)$=\boldsymbol{2\sqrt{2}-2}$ ⇦ 답

9. (1) $f'(x)=3x^2+(a^2-4a+2)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$a^2-4a+2<0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}} \text{ ⇦ 답}$$

(2) $f'(x)=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta=\frac{1}{3}(a^2-4a+2)$$

$$\therefore\ g(a)=f(\alpha)+f(\beta)$$

$$=\alpha^3+\beta^3+(a^2-4a+2)(\alpha+\beta)$$

$$+2(a^3-6a^2+9a-1)$$

$$=2(a^3-6a^2+9a-1)\quad(\because\ \alpha+\beta=0)$$

$$g'(a)=6(a^2-4a+3)$$

$$=6(a-1)(a-3)$$

$g'(a)=0$이면 $a=1,\ 3$

a	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$
$g'(a)$		+	0	−	0	+	
$g(a)$	$2+2\sqrt{2}$	↗	6	↘	−2	↗	$2-2\sqrt{2}$

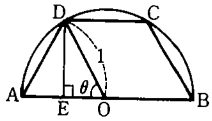
$\therefore$ 최대값 : 6, 최소값 : −2

답 $\begin{cases}\boldsymbol{g(a)=2(a^3-6a^2+9a-1)}\\ \textbf{최대값 6, 최소값 } \boldsymbol{-2}\end{cases}$

10. D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, 선분 AB의 중점을 O라 하고, $\angle AOD=\theta$라고 하면

$\overline{DE}=\sin\theta$, $\overline{OE}=\cos\theta$

따라서 사다리꼴의 넓이 S는



$$S=\frac{1}{2}(2+2\cos\theta)\sin\theta$$

$$=\sin\theta(1+\cos\theta)$$

$$\frac{dS}{d\theta}=\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta(-\sin\theta)$$

$$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$$

$$=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{dS}{d\theta}=0$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이고

$\frac{dS}{d\theta}$의 부호의 변화에 따라 S는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 극대이면서 최대이다.

$\therefore$ (S의 최대값) $=\sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ ⇦ 답

11. $y'=2x\ln ax+x=x(2\ln ax+1)$

$y''=(2\ln ax+1)+2=2\ln ax+3$

$y''=0$이면 $x=\frac{1}{a}e^{-\frac{3}{2}}$이고, 이 값의 좌우에서 y''의 부호가 변하므로 변곡점은

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{a}e^{-\frac{3}{2}},\ -\frac{3}{2a^2}e^{-3}\right)$

$x=\frac{1}{a}e^{-\frac{3}{2}},\ y=-\frac{3}{2a^2}e^{-3}$에서

$\boldsymbol{y=-\frac{3}{2}x^2}$ $(x>0)$ ⇦ 답

12. $n\geqq1,\ f(n)>0$이므로 $\ln f(n)=\frac{\ln n}{n}$

$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x\geqq1)$라고 하면

$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$g'(x)=0$이면 $x=e$

x	1	…	e	…	∞
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

따라서 $g(x)$는 $x=1$일 때 최소, $x=e$일 때 최대이고, $f(n)$도 $n=1$일 때 최소, $n=e$일 때 최대이다.

그런데 n은 정수이고 $e=2.7\times\times\times$이므로

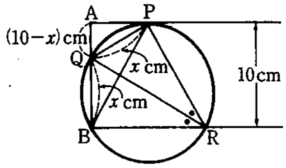
$f(2)=\sqrt{2},\ f(3)=\sqrt[3]{3}$에서

$\{f(2)\}^6=2^3=8,\ \{f(3)\}^6=3^2=9$

$\therefore f(2)<f(3)$

답 $\begin{cases}(\text{최대값})=f(3)=\sqrt[3]{3}\\(\text{최소값})=f(1)=1\end{cases}$

13. $\overline{\mathrm{PQ}}=x$ cm라고 하면



$\overline{\mathrm{AQ}}=(10-x)$ cm

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}$

$=\sqrt{x^2-(10-x)^2}$

$=\sqrt{20(x-5)}$ (cm)

또, 네 점 P, Q, B, R는 한 원 위에 있으므로

$\angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{QRP}=\angle\mathrm{BRQ}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABP}\backsim\triangle\mathrm{BRQ}$

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BQ}}$

$\therefore \overline{\mathrm{BR}}=\frac{10x}{\sqrt{20(x-5)}}$

$\therefore \overline{\mathrm{QR}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2+\overline{\mathrm{BR}}^2=x^2+\frac{5x^2}{x-5}$

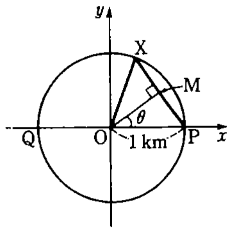
$f(x)=x^2+\frac{5x^2}{x-5}$이라고 하면

$f'(x)=\frac{x^2(2x-15)}{(x-5)^2}$ $(5<x\leqq10)$

따라서 $f'(x)=0$이면 $x=\frac{15}{2}$이고, $f'(x)$의 부호의 변화에 따라서 $f(x)$는 $x=\frac{15}{2}$일 때 극소이면서 최소로 된다. 이 때

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{20\left(\frac{15}{2}-5\right)}=\mathbf{5\sqrt{2}\ (cm)}$ ⇦ 답

14. O에서 현 PX에 내린 수선의 발을 M이라 하고 $\angle\mathrm{POX}=2\theta$라고 하면



$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

$\overline{\mathrm{PM}}=\sin\theta$에서

$\overline{\mathrm{PX}}=2\sin\theta,$

$\overset{\frown}{\mathrm{QX}}=\pi-2\theta$

이므로 전체 소요 시간을 $f(\theta)$라고 하면

$f(\theta)=\sin\theta+\frac{\pi-2\theta}{4}=\sin\theta-\frac{1}{2}\theta+\frac{\pi}{4}$

$f'(\theta)=\cos\theta-\frac{1}{2}=0$이면 $\theta=\frac{\pi}{3}$

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	+	+	0	−	−
$f(\theta)$	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$	↘	1
	(최소)		(최대)		

답 $\begin{cases}\mathbf{(최대값)=\frac{6\sqrt{3}+\pi}{12}\ (시간)}\\\mathbf{(최소값)=\frac{\pi}{4}\ (시간)}\end{cases}$

p. 65

1. $f(x)=(x^2-3x+1)e^x+1$이라고 하면

$f'(x)=(x+1)(x-2)e^x$

$f'(x)=0$이면 $x=-1,\ 2$

$f'(x)$의 부호의 변화에 의하여 $f(x)$의 극값은

극대값 : $f(-1)=\frac{5}{e}+1>0$

극소값 : $f(2)=-e^2+1<0$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

따라서 $y=f(x)$는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 **3개**이다. 답 ④

2. 직선 AB의 방정식은 $y=3x-4$

따라서 $x^3+3x^2-6x+k=3x-4$

즉, $x^3+3x^2-9x+4=-k$가 $-1\leqq x\leqq 2$에서 적어도 하나의 실근을 가져야 한다.

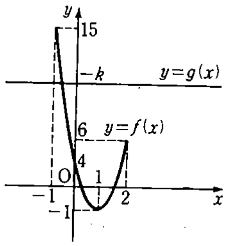
$f(x)=x^3+3x^2-9x+4$, $g(x)=-k$라고 하면

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3,\ 1$

$$\therefore \begin{cases}(\text{극대값})=f(-3)=31\\(\text{극소값})=f(1)=-1\end{cases}$$

또, $f(-1)=15$, $f(2)=6$



따라서 오른쪽 그림에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 적어도 하나의 공유점을 가지려면

$-1\leqq -k\leqq 15$ $\therefore$ **$-15\leqq k\leqq 1$** ⇦ 답

3. (1) $f(x)=\ln(1+x)^2-2x+x^2(x>0)$이라고 하면

$$f'(x)=\frac{2}{1+x}-2+2x=\frac{2x^2}{1+x}>0$$

따라서 $f(x)$는 증가함수이고 $f(0)=0$이므로

$x>0$일 때 $f(x)>0$

$\therefore \ln(1+x)^2>2x-x^2$ ……㉠

$g(x)=\ln(1+x)^2-2x(x>0)$라고 하면

$$g'(x)=\frac{2}{1+x}-2=\frac{-2x}{1+x}<0$$

따라서 $g(x)$는 감소함수이고 $g(0)=0$이므로

$x>0$일 때 $g(x)<0$

$\ln(1+x)^2<2x$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2x-x^2<\ln(1+x)^2<2x$

(2) $f(x)=x-\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$f'(x)=1-\cos x>0$

이므로 $f(x)$는 증가함수이고 $f(0)=0$이므로

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f(x)>0$

$\therefore x>\sin x$ ……㉠

$g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$이라고 하면

$$g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\ g''(x)=-\sin x+x$$

$g'(x)$는 증가함수이고 $g'(0)=0$이므로

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $g'(x)>0$

따라서 $g(x)$는 증가함수이고 $g(0)=0$이므로

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $g(x)>0$

$\therefore \sin x>x-\frac{x^3}{6}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$$

4. (1) $f(x)=2\ln(\cos x)+x^2$이라고 하면

$$f'(x)=\frac{-2\sin x}{\cos x}+2x=-2(\tan x-x)$$

$$f''(x)=-2(\sec^2 x-1)=-2\tan^2 x\leqq 0$$

따라서 $f'(x)$는 감소함수이다. 그런데 $f'(0)=0$이므로 $0\leqq x\leqq 1$일 때 $f'(x)\leqq 0$

따라서 구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)$는 감소함수이다. 그런데 $f(0)=0$이므로 구간 $[0,\ 1]$에서 방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=0$ 하나 뿐이다.

(2) (1)에서 $0<x\leqq 1$일 때 $f(x)$가 감소함수이고, $f(0)=0$이므로 $f(x)<0$이다.

즉, $-2\ln(\cos x)>x^2>0\ (0<x\leqq 1)$

$\therefore |2\ln(\cos x)|>x^2\ (0<x\leqq 1)$

$x=\frac{1}{n}$이면 $\left|2\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right|>\frac{1}{n^2}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

즉, $2n\left|\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right|>\frac{1}{n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}2n\left|\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right|\geqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

따라서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left|\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right|$은 발산한다.

5. $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$F(x)=4x^3-3x^2-6x+3-a\ (-1<x<2)$

$F'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$F'(x)=0$이면 $x=-\frac{1}{2},\ 1$

따라서 $F(x)$의 극대값은 $F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{4}-a$

극소값은 $F(1)=-2-a$

또, $F(-1)=2-a$, $F(2)=11-a$이므로 $-1<x<2$에서 $F(x)$의 최소값은 $F(1)=-2-a$이다. 따라서 $-1<x<2$에서 항상 $F(x)>0$이려면

$F(1)=-2-a>0$, 즉 **$a<-2$** ⇦ 답

6. 주어진 방정식 $(3x+1)a=-x^3+3x^2+2$에서

$3x+1\neq 0$이므로 $a=\frac{-x^3+3x^2+2}{3x+1}$

$f(x)=\frac{-x^3+3x^2+2}{3x+1}$라고 하면

$$f'(x)=\frac{(-3x^2+6x)(3x+1)-3(-x^3+3x^2+2)}{(3x+1)^2}$$

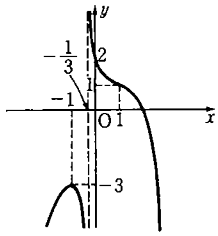
$$=\frac{-6(x+1)(x-1)^2}{(3x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ 이면 $x=-1,\ 1$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$		$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$	0	$-$	
$f(x)$		↗	-3	↘	$-\infty$	∞	↘	1	↘	$-\infty$

(극대) (불연속) (변곡)

따라서 $f(x)=a$ 의 실근의 개수는 오른쪽 그래프에서



답 $\begin{cases} a<-3 \text{일 때 } 3\text{개} \\ a=-3 \text{일 때 } 2\text{개} \\ a>-3 \text{일 때 } 1\text{개} \end{cases}$

7. (1) $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x\,(x>0)$ 라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$f'(x)=0$ 이면 $x=1$

$f'(x)$의 부호의 변화에서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 최소이다.

$\therefore\ f(x)\geqq f(1)=2>0$

즉, $x>0$일 때 $\dfrac{2}{\sqrt{x}}>\dfrac{\ln x}{x}>0$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}\geqq\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\geqq 0$$

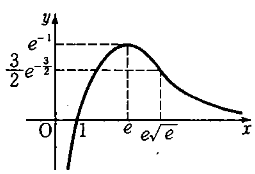
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ 이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ⇦ 답

(2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 에서 $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ 이면 $x=e$

$y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}=0$ 이면 $x=e\sqrt{e}$

y의 증감표에 따라 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘



(3) $a>0$일 때 $a^x=x^a$에서 양변에 자연로그를 취하면 $x\ln a=a\ln x$, 즉 $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln a}{a}$

이 방정식의 실근의 개수는 (2)의 곡선과 직선 $y=\dfrac{\ln a}{a}$ 의 교점을 조사하면 된다.

$0<a\leqq 1$ 일 때, $\dfrac{\ln a}{a}\leqq 0$ 이므로 교점은 1개,

$1<a<e,\ a>e$ 일 때, $0<\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{1}{e}$ 이므로 교점은 2개, $a=e$ 일 때, $y=\dfrac{1}{e}$ 이므로 교점은 1개

답 $\begin{cases} 0<a\leqq 1,\ a=e \text{ 일 때 } 1\text{개} \\ 1<a<e,\ a>e \text{ 일 때 } 2\text{개} \end{cases}$

p. 70

1. t분 후의 M의 위치 x는

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=t^3-6t^2+9t$$

(1) M의 속도를 v라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+9$$

$t=2$일 때 $v=-3$

(2) $v=3(t-1)(t-3)=0$에서 $t=1,\ 3$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
v		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	0	↗	4	↘	0	↗	20

$\therefore$ (운동 거리) $=|4-0|+|0-4|+|20-0|$
$=28$

답 (1) -3 (2) 28

2. 시각 t에서의 P, Q의 좌표가

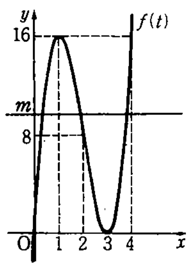
$x_1=t^4-8t^3+18t^2,\ x_2=mt$

이므로 P, Q의 속도가 같으면

$4t^3-24t^2+36t=m$

$f(t)=4t^3-24t^2+36t$ 라고 하면

$f'(t)=12t^2-48t+36$
$=12(t-1)(t-3)$



$f'(x)=0$에서 $t=1,\ 3$이고

$f(1)=16,\ f(3)=0$ 이므로 $f(t)=m$의 해가 서로 다른 세 실근이 되려면

$0<m<16$ ⇦ 답

3. t초 후의 속도를 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$라고 하면

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=0 \text{이므로}$$

$$\frac{dx}{dt}=3t^2-10t-4a=0 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{dy}{dt}=3t^2+2t+(8a-72)=0 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠×2+㉡을 하면 $9t^2-18t-72=0$

즉, $9(t+2)(t-4)=0$에서 $t=4$ ($\because t\geq 0$)

㉠에서 $3\cdot 4^2-10\cdot 4-4a=0$

$\therefore$ **$a=2$** ⇦ 답

4. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ 에서

$$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t\{(\cos t-\sin t)+(-\sin t-\cos t)\}$$
$$=-2e^t\sin t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t\{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)\}$$
$$=2e^t\cos t$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{x^2+y^2}=e^t$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{2}\,e^t$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=2e^t$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=x\cdot\frac{dx}{dt}+y\cdot\frac{dy}{dt}=e^{2t}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=2e^{2t}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{\alpha}=x\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+y\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

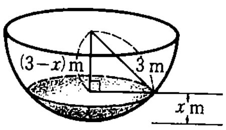
(1) $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\cos\beta=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{v}||\vec{\alpha}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\therefore\ \beta=\dfrac{\pi}{4}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{\alpha}=0$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{\alpha}$ $\quad\therefore\ \gamma=\dfrac{\pi}{2}$

답 (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}$ (3) $\dfrac{\pi}{2}$

5. 오른쪽 그림과 같이 수면의 높이가 xm일 때, 수면의 반지름의 길이는



$$\sqrt{3^2-(3-x)^2}=\sqrt{6x-x^2}$$

따라서 수면의 넓이를 S라고 하면

$$S=\pi(\sqrt{6x-x^2})^2=\pi(6x-x^2)$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=\pi(6-2x)\times\frac{dx}{dt}$$

그런데 $\dfrac{dx}{dt}=1$ (m/분)이므로

t분 후의 높이는 $x=t$

$\therefore$ **$\dfrac{dS}{dt}=\pi(6-2t)$(m²/분)** ⇦ 답

6. 미끄러지기 시작하여 t초 후에 $\overline{\mathrm{AB}}=x$m, $\overline{\mathrm{BC}}=y$m가 된다고 하면

$$x^2+y^2=5^2$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$2x\cdot\frac{dx}{dt}+2y\cdot\frac{dy}{dt}=0$$

그런데 $x=3$이면 $y=4$이고 $\dfrac{dy}{dt}=0.12$이므로

$$6\times\frac{dx}{dt}+8\times 0.12=0$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=-0.16$$

따라서 미끄러져 내려오는 속도는

0.16 (m/sec) ⇦ 답

p. 71~72 (고급 문제)

1. (준식)

$$=\lim_{x\to a}\frac{af(x)-af(a)-xf(a)+af(a)}{ag(x)-ag(a)-xg(a)+ag(a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a\times\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)}{a\times\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}-g(a)}$$

$$=\frac{af'(a)-f(a)}{ag'(a)-g(a)}=\mathbf{\frac{2a-1}{4a-3}}$$ ⇦ 답

2. (좌변)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$$
$$+\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$$

$$=f'(a)+\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2$$
$$+\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3$$

$$=f'(a)+2f'(a)+3f'(a)$$
$$=6f'(a)=12$$

$\therefore$ **$f'(a)=2$** ⇦ 답

3. $f(xy)=f(x)+f(y)$에서 $x=1$, $y=1$이면

$$f(1)=f(1)+f(1)\qquad\therefore\ f(1)=0$$

$$\therefore\ f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=a$$

$$\therefore\ f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(3\left(1+\frac{h}{3}\right)\right)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)+f\left(1+\frac{h}{3}\right)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{3}\right)}{\frac{h}{3}}\times\frac{1}{3}=\frac{a}{3} \Leftarrow \text{답}$$

4. (1) $x^{10}=(x-1)^3Q(x)+px^2+qx+r$ ……㉠

이라 하고 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9=3(x-1)^2Q(x)$
$\quad+(x-1)^3Q'(x)+2px+q$ ……㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$90x^8=6(x-1)Q(x)+3(x-1)^2Q'(x)$
$\quad+3(x-1)^2Q'(x)+(x-1)^3Q''(x)+2p$
$\quad=6(x-1)Q(x)+6(x-1)^2Q'(x)$
$\quad+(x-1)^3Q''(x)+2p$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $x=1$일 때

$p+q+r=1$
$2p+q=10$
$2p=90$

$\therefore\ p=45,\ q=-80,\ r=36$

따라서 구하는 나머지는 **$45x^2-80x+36$** ⇦ 답

(2) $f(x)=2x^{10}+ax^5+bx+c=(x+1)^3Q(x)$라고 하면

$f'(x)=20x^9+5ax^4+b$
$\quad=3(x+1)^2Q(x)+(x+1)^3Q'(x)$

$f''(x)=180x^8+20ax^3$
$\quad=6(x+1)Q(x)$
$\quad+6(x+1)^2Q'(x)+(x+1)^3Q''(x)$

$f(-1)=2-a-b+c=0$
$f'(-1)=-20+5a+b=0$
$f''(-1)=180-20a=0$

$\therefore$ **$a=9,\ b=-25,\ c=-18$** ⇦ 답

5. (1) $y=\frac{1}{x}$에서 $y'=-\frac{1}{x^2}$

$P\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$에서의 법선의 방정식은

$y-\frac{1}{a}=a^2(x-a)$ 즉, $y=a^2x-a^3+\frac{1}{a}$

이 법선과 직선 $y=x$의 교점을 구하면

$(1-a^2)x=\frac{1}{a}-a^3$

$a\neq1$이므로 $x=\frac{1-a^4}{a(1-a^2)}=\frac{1+a^2}{a}$

따라서 Q의 좌표는 $\left(a+\frac{1}{a},\ a+\frac{1}{a}\right)$

$\therefore\ \overline{\mathbf{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+a^2}$ ⇦ 답

(2) $P\left(a,\ \frac{1}{a}\right)\to(1,\ 1)$이면 $a\to1$이므로

$\lim_{a\to1}Q=\lim_{a\to1}\left(a+\frac{1}{a},\ a+\frac{1}{a}\right)$
$\quad=$**(2, 2)** ⇦ 답

6. $f'(x)=\frac{(ax-2)(x-2a)}{(x^2-4)^2}\ (x\neq2)$

에서 $f'(x)=0$이면 $x=\frac{2}{a},\ 2a\ (a>0)$

(i) $\frac{2}{a}=2a$, 즉 $a=1$일 때 극값은 없다.

(ii) $\frac{2}{a}>2a$, 즉 $0<a<1$일 때

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{2}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘	$-\frac{a^2}{4}$	↗
				(불연속)		(극소)	

$\therefore$ 극소값 $f\left(\frac{2}{a}\right)=-\frac{a^2}{4}$

(iii) $\frac{2}{a}<2a$, 즉 $a>1$일 때 같은 방법으로 조사하면, 극소값은

$f(2a)=-\frac{1}{4}$

답 **$a=1$일 때, 극값은 없다.**
$0<a<1$일 때, 극소값 $-\frac{a^2}{4}\ \left(x=\frac{2}{a}\right)$
$a>1$일 때, 극소값 $-\frac{1}{4}\ (x=2a)$

7. $\frac{bx+1}{x^2+ax}=-1,\ \frac{bx+1}{x^2+ax}=-4$에서

$x^2+(a+b)x+1=0$ ……㉠
$4x^2+(4a+b)x+1=0$ ……㉡

㉠, ㉡이 각각 중근을 가져야 $-1,\ -4$가 주어진 함수의 극값이 될 수 있다.

㉠에서 $(a+b)^2-4=0$
㉡에서 $(4a+b)^2-16=0$

$a>0,\ b>0$이므로 $a+b=2,\ 4a+b=4$

$\therefore\ a=\frac{2}{3},\ b=\frac{4}{3}$

$\therefore\ f(x)=\frac{4x+3}{3x^2+2x}$

$f'(x)=\frac{-6(2x+1)(x+1)}{(3x^2+2x)^2}\left(x\neq0,\ -\frac{2}{3}\right)$

$f'(x)$의 부호를 조사하면

극소값 $f(-1)=-1$

극대값 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$

이므로 2개의 극값을 갖는다.

따라서 구하는 값은 **$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{4}{3}$** ⇦ 답

8. $f(x)=\frac{2\cos x-\sin x}{1-\sin x}$에서

$$f'(x)=\frac{2-2\sin x-\cos x}{(1-\sin x)^2}=\frac{2-\sqrt{5}\sin(x+\alpha)}{(1-\sin x)^2}$$

$\left(단,\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}\right)$

$f'(x)=0$일 때 $\sin(x+\alpha)=\frac{2}{\sqrt{5}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

즉, $x=\frac{\pi}{2}-2\alpha$

$$\begin{cases} x<\frac{\pi}{2}-2\alpha \text{ 일 때 } f'(x)>0 \\ x>\frac{\pi}{2}-2\alpha \text{ 일 때 } f'(x)<0 \end{cases}$$

이므로 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}-2\alpha$에서 극대이고 최대이다. 즉, (최대값)$=f\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$

그런데 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$

$\therefore$ (최대값)$=f\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$

$$=\frac{2\times\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$

$$=\mathbf{\frac{5}{2}}$$ ⇦ 답

9. (1) $y=e^{-2x}$에서 $y'=-2e^{-2x}$

이므로 $\mathrm{T}(t,\ e^{-2t})$에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-2t}=-2e^{-2t}(x-t)$

$\therefore$ (y절편)$=e^{-2t}(2t+1)$

(x절편)$=t+\frac{1}{2}$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)(2t+1)e^{-2t}$

$=\mathbf{\frac{1}{4}(2t+1)^2e^{-2t}}$ ⇦ 답

(2) $\frac{dS}{dt}=(2t+1)e^{-2t}-\frac{1}{2}(2t+1)^2e^{-2t}$

$=-\frac{1}{2}(2t+1)(2t-1)e^{-2t}$

$t>0$이므로 $\frac{dS}{dt}=0$이면 $t=\frac{1}{2}$

$0<t<\frac{1}{2}$에서 $\frac{dS}{dt}>0$

$t>\frac{1}{2}$에서 $\frac{dS}{dt}<0$

이므로 S는 $t=\frac{1}{2}$에서 극대이고 최대이다.

$\therefore$ **(최대값)$=\mathbf{\frac{1}{e}}$** ⇦ 답

10. $(x,\ y)=(4\cos t,\ \sin 2t)$에서

시각 t에서의 속도 $\vec{v}$는

$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(-4\sin t,\ 2\cos 2t)$

$\therefore\ |\vec{v}|^2=(-4\sin t)^2+(2\cos 2t)^2$

$=16\sin^2 t+4\cos^2 2t$

$=16\sin^2 t+4(1-2\sin^2 t)^2$

$=16\sin^4 t+4\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$

$-1\leqq\sin t\leqq 1$이므로 $0\leqq\sin^4 t\leqq 1$

$\therefore\ 4\leqq|\vec{v}|^2\leqq 20$

$2\leqq|\vec{v}|\leqq 2\sqrt{5}$

답 **최대값 $\mathbf{2\sqrt{5}}$, 최소값 2**

11. (1) $f(x)=ax+e^{-x}\sin x$에서

$g(x)=f'(x)=a-e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$g'(x)=f''(x)=-2e^{-x}\cos x$

$g'(x)=0$이면 $0<x<2\pi$에서 $x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

x	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{3}{2}\pi$	…	2π
$g'(x)$		−	0	+	0	−	
$g(x)$	$a+1$	↘	$a-e^{-\frac{\pi}{2}}$	↗	$a+e^{-\frac{3}{2}\pi}$	↘	$a+e^{-2\pi}$
			(극소)		(극대)		

답 **극소값 $\mathbf{a-e^{-\frac{\pi}{2}}}$, 극대값 $\mathbf{a+e^{-\frac{3}{2}\pi}}$**

(2) (1)의 증감표에서

$a-e^{-\frac{\pi}{2}}<a+e^{-2\pi}<a+e^{-\frac{3}{2}\pi}<a+1$

이고 $f(x)$의 극대값과 극소값이 꼭 한 개씩 존재하려면 $f'(x)=0$, 즉 $g(x)=0$이 $0<x<2\pi$에서 서로 부호가 다른 2개의 실근을 가져야 하므로

$a-e^{-\frac{\pi}{2}}<0,\ a+e^{-2\pi}\geqq 0$

$\therefore\ \mathbf{-e^{-2\pi}\leqq a<e^{-\frac{\pi}{2}}}$ ⇦ 답

12. (1) $f(x)=\frac{tx+1}{x^2+t^2}=y$라고 하면

$yx^2-tx+(t^2y-1)=0$

x가 실수이므로

$D=t^2-4y(t^2y-1)\geqq 0$

$4t^2y^2-4y-t^2\leqq 0\ (t>0)$

$\therefore\ \frac{1-\sqrt{1+t^4}}{2t^2}\leqq y\leqq\frac{1+\sqrt{1+t^4}}{2t^2}$

$\therefore\ \mathbf{g(t)=\frac{1-\sqrt{1+t^4}}{2t^2}}$ ⇦ 답

(2) $$g'(t)=\frac{-\frac{4t^3\cdot 2t^2}{2\sqrt{1+t^4}}-4t(1-\sqrt{1+t^4})}{4t^4}$$

$$=\frac{-t^4-\sqrt{1+t^4}(1-\sqrt{1+t^4})}{t^3\sqrt{1+t^4}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{1+t^4}}{t^3\sqrt{1+t^4}}<0\ (\because\ t>0)$$

따라서 **$g(t)$는 감소한다.** ⇦ 답

(3) $\lim_{t\to+0} g(t)=\lim_{t\to+0}\frac{-t^2}{2(1+\sqrt{1+t^4})}=0$

$\lim_{t\to\infty} g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^2}-\sqrt{\frac{1}{t^4}+1}}{2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \boldsymbol{-\frac{1}{2}<g(t)<0}$ ⇦ 답

13. (1) $y=\cos x$에서 $y'=-\sin x$이므로

$\mathrm{T}(t,\ \cos t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\cos t=-\sin t(x-t)$

즉, $x\sin t+y-(t\sin t+\cos t)=0$

따라서 원점에서 이 접선 l까지의 거리 d는

$\boldsymbol{d=\frac{|t\sin t+\cos t|}{\sqrt{1+\sin^2 t}}}$ ⇦ 답

(2) $d^2=\frac{(t\sin t+\cos t)^2}{1+\sin^2 t}=f(t)$라고 하면

$f'(t)=\frac{2\cos t(t\sin t+\cos t)(t-\sin t\cos t)}{(1+\sin^2 t)^2}$

$2(t-\sin t\cos t)=2t-\sin 2t\geqq 0\ (\because\ t\geqq 0)$

$g(t)=t\sin t+\cos t\,(0\leqq t\leqq\pi)$라고 하면

$g'(t)=t\cos t=0$에서 $t=0,\ \frac{\pi}{2}$

t	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π
$g'(t)$	0	+	0	−	
$g(t)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	−1

따라서 $\frac{\pi}{2}<t<\pi$에서 $g(t)=0$의 해가 존재한다.

이 해를 $t=\alpha$라고 하면

$f'(t)=0$의 해는 $t=0,\ \frac{\pi}{2},\ \alpha$

t	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	α	…	π
$f'(t)$	0	+	0	−	0	+	
$f(t)$	1	↗	$\frac{\pi^2}{8}$	↘	0	↗	1

$\therefore\ f(t)\leqq\frac{\pi^2}{8}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ d\leqq\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

즉, d의 최대값은 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}$ ⇦ 답

14. (1) $\triangle\mathrm{ABC},\ \triangle\mathrm{ACD}$에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2=a^2+b^2-2ab\cos x$

$=c^2+d^2-2cd\cos y$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2ab\sin x=2cd\sin y\times\frac{dy}{dx}$

$\therefore\ \boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{ab\sin x}{cd\sin y}}$ ⇦ 답

(2) $S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$=\frac{1}{2}ab\sin x+\frac{1}{2}cd\sin y$

$\therefore\ \frac{dS}{dx}=\frac{1}{2}ab\cos x+\frac{1}{2}cd\cos y\times\frac{dy}{dx}$

$\boldsymbol{=\frac{ab\sin(x+y)}{2\sin y}}$ ⇦ 답

(3) $\sin y>0$이므로 $\frac{dS}{dx}=0$이면

$\sin(x+y)=0$

이므로 $x+y=\pi$

$\begin{cases} 0<x+y<\pi\text{일 때 } \frac{dS}{dt}>0 \\ \pi<x+y<2\pi\text{일 때 } \frac{dS}{dt}<0 \end{cases}$

이므로 S는 $x+y=\pi$일 때 극대이고 최대이다.

답 $\boldsymbol{x+y=\pi}$

III. 적 분 법

p. 76

1. (1) (준식)$=\int\left(2x^2-4x-1+\frac{2}{x}\right)dx$

$\boldsymbol{=\frac{2}{3}x^3-2x^2-x+2\ln|x|+C}$ ⇦ 답

(2) (준식)$=\int\frac{(x^4+2x^2+1)}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

$=\int(x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}})\,dx$

$\boldsymbol{=\frac{2}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C}$ ⇦ 답

(3) (준식)$\boldsymbol{=\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x+\frac{1}{3}x^3+C}$ ⇦ 답

(4) (준식)$=\int(3\cos x+2\sin x)\,dx$

$\boldsymbol{=3\sin x-2\cos x+C}$ ⇦ 답

(5) (준식)$=\int\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx$

$=\int(1-\sin x)\,dx$

$\boldsymbol{=x+\cos x+C}$ ⇦ 답

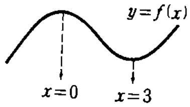
(6) (준식)$=\int\left(\frac{1}{\sec^2 x}+\frac{1}{\mathrm{cosec}^2 x}\right)dx$

$=\int(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$

$$=\int dx$$

$$=x+C$$ ⇦ 답

2. 포물선의 x절편이 0, 3이므로
$f'(x)=ax(x-3)\,(a>0)$
이라고 하면



$$f(x)=\int ax(x-3)\,dx$$

$$=\int(ax^2-3ax)\,dx=\frac{1}{3}ax^3-\frac{3}{2}ax^2+C$$

그런데 $f'(x)=ax(x-3)=0$에서 $x=0,\ 3$이므로

$$(f(x)\text{의 극대값})=f(0)=C=4$$

$$(f(x)\text{의 극소값})=f(3)=9a-\frac{27}{2}a+C$$

$$=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\ a=1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4}$$ ⇦ 답

3. $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 $3t^2-t$
즉, $f'(t)=3t^2-t$이므로

$$f(t)=\int(3t^2-t)\,dt=t^3-\frac{1}{2}t^2+C$$

이것이 원점을 지나므로 $f(0)=C=0$

$$\therefore\ f(t)=t^3-\frac{1}{2}t^2$$

따라서 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

$$=xf'(t)-tf'(t)+f(t)$$

이므로

$$g(t)=-tf'(t)+f(t)$$

$$=-t(3t^2-t)+t^3-\frac{1}{2}t^2$$

$$=\boldsymbol{-2t^3+\frac{1}{2}t^2}$$ ⇦ 답

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$에서 $f(0)=0$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$$

$f''(x)=\sin x$에서

$$f'(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C_1$$

$$f'(0)=-1+C_1=1\qquad\therefore\ C_1=2$$

$$\therefore\ f(x)=\int(-\cos x+2)\,dx$$

$$=-\sin x+2x+C_2$$

$$f(0)=C_2=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=-\sin x+2x}$$ ⇦ 답

5. $f'(x)=\begin{cases}4x^3 & (|x|>1)\\ 3x^2-2x & (|x|<1)\end{cases}$ 에서

$$f(x)=\begin{cases}x^4+C_1 & (x<-1)\\ x^3-x^2+C_2 & (-1<x<1)\\ x^4+C_3 & (x>1)\end{cases}$$

이라고 하면

$$f(-2)=(-2)^4+C_1=10$$

$$\therefore\ C_1=-6$$

$x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}f(x)$$

$$1+C_1=-1-1+C_2\qquad\therefore\ C_2=-3$$

$x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)$$

$$1-1+C_2=1+C_3\qquad\therefore\ C_3=-4$$

$$\therefore\ f(2)=2^4+C_3=\boldsymbol{12}$$ ⇦ 답

6. $(x^3-1)f'(x)+3x^2f(x)$

$$=(x^3-1)f'(x)+(x^3-1)'f(x)$$

$$=\{(x^3-1)f(x)\}'$$

이므로 주어진 등식은 $\{(x^3-1)f(x)\}'=2x+1$

$$\therefore\ (x^3-1)f(x)$$

$$=\int(2x+1)\,dx=x^2+x+C$$

여기서 $x=1$을 대입하면

$$0=1+1+C\qquad\therefore\ C=-2$$

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

따라서 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=2$에서

$$2x^2+x=0\qquad\therefore\ \boldsymbol{x=0,\ -\frac{1}{2}}$$ ⇦ 답

7. (1) $f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=2\ (\because\ f(1)=0)$$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{h}{x}f(x)+xf\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}$$

$$=\frac{f(x)}{x}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$$=\frac{f(x)}{x}+2$$

(2) (1)에서 $xf'(x)-f(x)=2x$이므로 양변을 x에

대하여 미분하면

$$f'(x)+xf''(x)-f'(x)=2$$

$$\therefore\ f''(x)=\frac{2}{x}$$

$$\therefore\ f'(x)=\int\frac{2}{x}\,dx=2\ln|x|+C_1$$

$f'(1)=2$이므로 $C_1=2$

$x>0$이므로 $f'(x)=2\ln x+2$

$$\therefore\ f(x)=\int(2\ln x+2)\,dx$$

$$=2x\ln x-\int 2x\cdot\frac{1}{x}dx+2x$$

$$=2x\ln x-2x+2x+C_2$$

$$=2x\ln x+C_2$$

$f(1)=0$이므로 $C_2=0$

$$\therefore\ f(x)=2x\ln x$$

답 $\boldsymbol{f''(x)=\frac{2}{x},\ f'(x)=2\ln x+2,\ f(x)=2x\ln x}$

p. 81~82

1. (1) (준식) $=\int\frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}dx$

$$=\int\sqrt{x-1}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1}+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

(2) (준식) $=\int(x+2-2)(x+2)^4dx$

$$=\int(x+2)^5dx-\int 2(x+2)^4dx$$

$$=\frac{1}{6}(x+2)^6-\frac{2}{5}(x+2)^5+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{30}(5x-2)(x+2)^5+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

(3) (준식) $=\int(x-1+1)\sqrt{x-1}\,dx$

$$=\int(x-1)^{\frac{3}{2}}dx+\int(x-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{x-1}+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

2. (1) (준식) $=\int\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)\,dx$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

(2) (준식) $=\int(\sec^2x-1)\,dx$

$$=\boldsymbol{\tan x-x+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

(3) $\tan^4x=(\sec^2x-1)\tan^2x$이므로

$$(\text{준식})=\int\tan^2x\sec^2x\,dx-\int\tan^2x\,dx$$

$\tan x=t$ 라고 하면, $\sec^2x\,dx=dt$ 이므로

$$(\text{준식})=\int t^2\,dt-\int(\sec^2x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}t^3-\tan x+x+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

3. (1) $\sqrt{x}=t$ 라고 하면 $x=t^2$에서 $dx=2t\,dt$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int\frac{2t}{t+1}dt=\int\left(2-\frac{2}{t+1}\right)dt$$

$$=2t-2\ln|t+1|+C$$

$$=\boldsymbol{2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

(2) $e^x=t$ 라고 하면 $dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int\frac{1}{t(t+1)}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln|t|-\ln|t+1|+C$$

$$=\ln e^x-\ln|e^x+1|+C$$

$$=\boldsymbol{x-\ln(e^x+1)+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

(3) $e^x=t$ 라고 하면 $dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int\frac{1}{t-\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{1}{t^2-1}dt$$

$$=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|t+1|)+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C}\ \Leftarrow\text{답}$$

4. $xf'(x)=\ln x$에서 $f'(x)=\frac{\ln x}{x}$

$$\therefore\ f(x)=\int\frac{\ln x}{x}dx$$

$\ln x=t$ 라고 하면 $\frac{1}{x}dx=dt$ 이므로

$$f(x)=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

그런데 $f(1)=\frac{9}{2}$이므로 $C=\frac{9}{2}$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{9}{2}$$

따라서 주어진 방정식은 $\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{9}{2}-3\ln x=0$

즉, $(\ln x)^2-6\ln x+9=0$

$\therefore\ (\ln x-3)^2=0,\quad \ln x=3$

$\therefore\ \boldsymbol{x=e^3}$ 답 ③

5. $\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{ax+b}{x^2}+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$ 이면

$x^3+x^2+1=(a+c)x^3+(b+d)x^2+ax+b$

에서 $a+c=1,\ b+d=1,\ a=0,\ b=1$

$\therefore\ a=0,\ b=1,\ c=1,\ d=0$

$$\therefore\ f(x)=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$f(1)=-1+\dfrac{1}{2}\ln 2+C=\dfrac{1}{2}\ln 2$ 이므로 $\quad C=1$

$$\therefore\ f(2)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 5+1$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(1+\ln 5)}$$ 답 ④

6. 주어진 등식의 양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-(2x\sin x+x^2\cos x)$ 이므로

$f'(x)=2\sin x+x\cos x$

$$\therefore\ f(x)=\int(2\sin x+x\cos x)\,dx$$
$$=-2\cos x+(\sin x)\cdot x-\int(\sin x)\cdot 1dx$$
$$=-2\cos x+x\sin x+\cos x+C$$
$$=x\sin x-\cos x+C$$

그런데 $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+1$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+C$ 이므로 $\quad C=1$

$\therefore\ f(\pi)=\pi\sin\pi-\cos\pi+1=\mathbf{2}$ ⇦ 답

7. $f'(x)=x\ln x$ 이므로

$$f(x)=\int x\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

$f(1)=-\dfrac{1}{4}+C=2$ 이므로 $\quad C=\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ k=f(\sqrt{e})$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{e})^2\ln\sqrt{e}-\frac{1}{4}(\sqrt{e})^2+\frac{9}{4}$$
$$=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$ ⇦ 답

8. $f(x)=\int(x^2+1)e^x dx$

$$=(x^2+1)e^x-\int 2xe^x dx$$
$$=(x^2+1)e^x-\left[2xe^x-\int 2e^x dx\right]$$
$$=(x^2+1)e^x-2xe^x+2e^x+C$$
$$=e^x(x^2-2x+3)+C$$

$\therefore\ \boldsymbol{f(1)-f(0)=2e-3}$ ⇦ 답

9. (1) $f(x+y)=2f(x)f(y)$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)f(0)$

$f(0)>0$ 이므로 $f(0)\neq 0\qquad \therefore\ f(0)=\dfrac{1}{2}$

(2) $f'(0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}=a$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2f(x)f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{2f(x)\times\frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h}\right\}=2af(x)$$

(3) (2)에서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2a$

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2a\,dx$ 에서 $\ln|f(x)|=2ax+C$

$f(x)>0$ 이고 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $C=\ln\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=e^{2ax+\ln\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{2ax}}$ ⇦ 답

10. $\sqrt{x+1}=t$ 라고 하면 $x=t^2-1$ 이고 $dx=2t\,dt$

$$\therefore\ f(x)=\int\frac{2t}{(t^2-1)t}dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$x=1$일 때 $t=\sqrt{2}$ 이므로

$$f(1)=\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|+C=\ln(3-2\sqrt{2})+C$$
$$=\ln(3-2\sqrt{2})$$

$\therefore\ C=0$

$x=2$일 때 $t=\sqrt{3}$ 이므로

$f(2)=\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|=\boldsymbol{\ln(2-\sqrt{3})}$ ⇦ 답

11. (1) $\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{c}{\sqrt{x}}$ 에서

$x\sqrt{x}-1=ax\sqrt{x}+(b+c)\sqrt{x}-c$

$\therefore\ a=1,\ b+c=0,\ c=1$

즉, $\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=1}$ ⇦ 답

(2) (준식) $=\int\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$=\int(\sqrt{x}+1+x^{-\frac{1}{2}})\,dx$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}+C$ ⇦ 답

12. (1) $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\tan x\cos^2 x$

$=\frac{2\tan x}{\sec^2 x}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{2t}{1+t^2}$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1=\frac{2}{\sec^2 x}-1$

$=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

답 $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(2) $\tan x=t$ 라고 하면 $\sec^2 x\,dx=dt$ 이므로

$dx=\frac{dt}{\sec^2 x}=\frac{dt}{1+t^2}$

$\therefore \int\frac{dx}{1+\sin 2x}=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{dt}{1+t^2}$

$=\int\frac{1}{(1+t)^2}dt=-\frac{1}{1+t}+C$

$=-\frac{1}{1+\tan x}+C$ ⇦ 답

$\therefore \int\frac{dx}{1-\cos 2x}=\int\frac{1}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{dt}{1+t^2}$

$=\int\frac{1}{2t^2}dt=-\frac{1}{2t}+C$

$=-\frac{1}{2\tan x}+C$ ⇦ 답

13. $I_n=\int x^n e^x dx=x^n e^x-\int nx^{n-1}e^x dx$

$=x^n e^x-nI_{n-1}$

$=x^n e^x-n\{x^{n-1}e^x-(n-1)I_{n-2}\}$

$=x^n e^x-nx^{n-1}e^x+n(n-1)I_{n-2}$

$=e^x(x^n-nx^{n-1})$

$+n(n-1)\{x^{n-2}e^x-(n-2)I_{n-3}\}$

....

$=e^x\{x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}\cdots$

$+(-1)^{n-1}n!\,x\}+(-1)^n n!\,I_0$ ⇦ 답

14. $\{\ln(x+\sqrt{x^2+1})\}'$

$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore f(x)=\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$

$=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

에서 $\sqrt{x^2+1}=t$ 라고 하면 $x^2+1=t^2$

$2x\,dx=2t\,dt$ 이므로 $x\,dx=t\,dt$

$\therefore \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\frac{1}{t}\times t\,dt=\int dt=t+C'$

$=\sqrt{x^2+1}+C'$

$\therefore f(x)=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C$

그런데 $f(0)=-1+C=-1$ $\therefore C=0$

$\therefore f(1)+\sqrt{2}=\ln(1+\sqrt{2})$ ⇦ 답

15. $f(x)+g(x)=\int xe^x dx$

$=xe^x-\int 1\cdot e^x dx$

$=(x-1)e^x+C_1$

그런데 $f(0)+g(0)=-1+C_1=-1$ $\therefore C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=(x-1)e^x$

$=xe^x+(-e^x)$ ……㉠

또, $f(x)g(x)=\int-(2x+1)e^{2x}\,dx$

$=-(2x+1)e^{2x}\cdot\frac{1}{2}+\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2dx$

$=-(2x+1)e^{2x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}+C_2$

$=\frac{1}{2}e^{2x}(-2x)+C_2=-xe^{2x}+C_2$

그런데 $f(0)g(0)=C_2=0$ $\therefore C_2=0$

$\therefore f(x)g(x)=-xe^{2x}$ ……㉡

한편, $f'(0)=-1$ 이므로

$f(x)=-e^x$, $g(x)=xe^x$ 이라고 하면

㉠, ㉡을 만족한다.

$\therefore g(3)=3e^3$ ⇦ 답

p. 89~90

1. (1) $\int_0^{\pi}(\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1-\cos 2x})\,dx$

$=\int_0^{\pi}(\sqrt{2\cos^2 x}-\sqrt{2\sin^2 x})\,dx$

$=\int_0^{\pi}(\sqrt{2}\,|\cos x|-\sqrt{2}\,|\sin x|)\,dx$

$=\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx-\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right\}$

$=\sqrt{2}\left\{\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}\right\}$

$=\sqrt{2}\left\{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0-\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi-\cos 0\right\}$

$=0$ ⇦ 답

(2) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore \text{(준식)}=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$=\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left(-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)dx\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}+\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5}{4}\pi-\cos\pi\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right\}$$

$$=\mathbf{2\sqrt{2}} \Leftarrow \text{답}$$

2. (1) $\sqrt{x-1}=t$ 라고 하면 $x-1=t^2$

$x=t^2+1,\ dx=2t\,dt$

또, $x=2$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=2$

$$\therefore \text{(준식)}=\int_1^2\frac{t^2+1}{t}\times 2t\,dt$$

$$=2\int_1^2(t^2+1)\,dt=2\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_1^2$$

$$=\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}} \Leftarrow \text{답}$$

(2) $$\text{(준식)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\times\cos^2 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x(1-\sin^2 x)\,dx$$

에서 $\sin x=t$ 라고 하면 $\cos x\,dx=dt$

또, $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \text{(준식)}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-t^2)\,dt=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{8}} \Leftarrow \text{답}$$

3. (1) $$\text{(준식)}=\left[\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=0+\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \Leftarrow \text{답}$$

(2) $\sqrt{x}=t$ 라고 하면 $x=t^2$ $\quad\therefore dx=2t\,dt$

또, $x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$

$$\therefore \text{(준식)}=\int_0^1 e^t\cdot 2t\,dt=\left[e^t\cdot 2t\right]_0^1-\int_0^1 e^t\cdot 2\,dt$$

$$=2e-\left[2e^t\right]_0^1=\mathbf{2} \Leftarrow \text{답}$$

(3) $e^{-1}<x<1$일 때 $\ln x<0$

$1\leqq x<e$일 때 $\ln x\geqq 0$

$$\therefore \text{(준식)}=\int_{\frac{1}{e}}^1(-\ln x)\,dx+\int_1^e(\ln x)\,dx$$

그런데 $\int\ln x\,dx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=x\ln x-x+C$$

$$\therefore \text{(준식)}=\left[-x\ln x+x\right]_{\frac{1}{e}}^1+\left[x\ln x-x\right]_1^e$$

$$=1-(e^{-1}+e^{-1})+(e-e)+1$$

$$=\mathbf{2-\frac{2}{e}} \Leftarrow \text{답}$$

(4) $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x^2-2x+1)}=\sqrt{1-(x-1)^2}$

여기서 $x-1=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$dx=\cos\theta\,d\theta$

$\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$

또, $x=0$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{2}$, $x=1$일 때 $\theta=0$

$$\therefore \text{(준식)}=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0$$

$$=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} \Leftarrow \text{답}$$

4. $\int_0^a|x-b|\,dx$

$=\int_0^a(-x+b)\,dx \quad (\Leftarrow 0<x<a<b)$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+bx\right]_0^a=-\frac{1}{2}a^2+ab$

$\int_0^b|x-a|\,dx$

$=\int_0^a(-x+a)\,dx+\int_a^b(x-a)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^b$

$=\left(-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)+\left(\frac{1}{2}b^2-ab\right)-\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)$

$=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-ab+\frac{1}{2}a^2=a^2-ab+\frac{1}{2}b^2$

$\therefore -\frac{1}{2}a^2+ab=a^2-ab+\frac{1}{2}b^2$

$-a^2+2ab=2a^2-2ab+b^2$

즉, $3a^2-4ab+b^2=0$

$(a-b)(3a-b)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $3a=b$

그런데 $0<a<b$ 이므로 $b=3a$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{3a}{a}=3$ ⇦ 답

5. $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$라고 하면

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\int_0^1(ax^2+c)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}ax^3+cx\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}a+2c=-8$$

$\therefore\ a+3c=-12$ ……㉠

$$\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=2\int_0^1 bx^2dx=2\left[\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}b=0$$

$\therefore\ b=0$ ……㉡

$$\int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx=2\int_0^1(ax^4+cx^2)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{5}ax^5+\frac{1}{3}cx^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}c=0$$

$\therefore\ 3a+5c=0$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=15,\ b=0,\ c=-9$

따라서 $f(x)=15x^2-9$에서

$\boldsymbol{f(2)=51}$ ⇦ 답

6. $0\leq x<1$이면 $\lim\limits_{x\to\infty}x^n=0$

$\therefore\ f(x)=x(2-x)=2x-x^2$

$1<x\leq 2$이면 $\lim\limits_{x\to\infty}x^n=\infty$

$$\therefore\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-x)\left(\dfrac{1}{x^{n-1}}+1\right)}{\dfrac{1}{x^n}+1}$$
$$=2-x$$

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1(2x-x^2)\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx$$
$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{7}{6}}$$ ⇦ 답

7. $A=m\left[\dfrac{x^{m+n}}{m+n}\right]_0^a+n\left[\dfrac{y^{m+n}}{m+n}\right]_0^b$

$$=\frac{m}{m+n}a^{m+n}+\frac{n}{m+n}b^{m+n}$$

에서 $a>0,\ b>0,\ m,\ n$은 자연수이므로 $A>0$, $B>0$이다.

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{m}{m+n}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+\dfrac{n}{m+n}\left(\dfrac{b}{a}\right)^m$에서 $\dfrac{a}{b}=t(t>0)$

라 하고 $\dfrac{A}{B}=f(t)$라고 하면

$$f(t)=\frac{m}{m+n}t^n+\frac{n}{m+n}t^{-m}$$
$$\therefore\ f'(t)=\frac{mn}{m+n}t^{n-1}-\frac{mn}{m+n}t^{-m-1}$$
$$=\frac{mn(t^{m-n}-1)}{(m+n)t^{m+1}}$$

$t>0$이므로 $f'(t)=0$이면 $t=1$

$t>0$일 때, $f(t)$는 $t=1$에서 극소이고 최소이다.

즉, $f(t)\geq f(1)=1$

즉, $\dfrac{A}{B}\geq 1$에서 $\boldsymbol{A\geq B}$ ⇦ 답

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

8. $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_n^{n+1}t\,dt\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$에서

$$a_2-a_1=\int_1^2 t\,dt$$
$$a_3-a_2=\int_2^3 t\,dt$$
$$a_4-a_3=\int_3^4 t\,dt$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n-a_{n-1}=\int_{n-1}^{n}t\,dt$$
$$a_n-a_1=\int_1^n t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^n=\frac{1}{2}(n^2-1)$$
$$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}(n^2-1)+a_1=\frac{1}{2}(n^2-1)+1$$
$$=\frac{1}{2}(n^2+1)$$

답 $\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}(n^2+1)}$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$에서

$x=-t$이면 $dx=-dt$

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$

$$\therefore\ \int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_1^0 f(-t)\cdot(-1)\,dt+\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(-t)\,dt+\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(-x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1\{f(x)+f(-x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1(x^2-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1$$
$$=\boldsymbol{-\frac{2}{3}}$$ ⇦ 답

10. (1) (준식)$=\left[\dfrac{-1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$$=-\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\pi$$
$$+\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2n-1}}$$ ⇦ 답

(2) (준식) $=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k+1}\right\}dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(2k-1)x\,dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big[-\cos(2k-1)x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$ ⇦ 답

11. (1) 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(\text{단, } a<c<b)$$

인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

(2) $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n$ 이라 하고 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 라고 하면

$$F(x)=c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{3}x^3+\cdots+\frac{c_{n-1}}{n}x^n+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

에서 $F(0)=0$

$$F(1)=c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$$

또, $F(x)$는 폐구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 개구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=F'(c)\ (\text{단, } 0<c<1)$$

인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.
그런데 $F'(x)=f(x)$, $F(1)-F(0)=0$이므로
$F'(c)=f(c)=0\,(0<c<1)$인 실수 c가 존재하고 이 실수 c가 주어진 방정식 $f(x)=0$의 근이 된다.

12. (1) $a_n=\int_0^1 xe^{\frac{x}{n}}dx+\int_0^1(n-1)e^{\frac{x}{n}}dx$

$$=\Big[nxe^{\frac{x}{n}}\Big]_0^1-\int_0^1 ne^{\frac{x}{n}}dx+\int_0^1(n-1)e^{\frac{x}{n}}dx$$
$$=ne^{\frac{1}{n}}-\int_0^1 e^{\frac{x}{n}}dx=ne^{\frac{1}{n}}-\Big[ne^{\frac{x}{n}}\Big]_0^1$$
$$=ne^{\frac{1}{n}}-ne^{\frac{1}{n}}+n=n$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$$ ⇦ 답

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\mathbf{2}$$ ⇦ 답

13. $1-x=t$ 라고 하면 $x=1-t$, $dx=-dt$
또, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$

$$\therefore f(n)=\int_1^0(1-t)^2t^n\times(-1)\,dt$$
$$=\int_0^1 t^n(1-2t+t^2)\,dt$$
$$=\int_0^1(t^n-2t^{n+1}+t^{n+2})\,dt$$
$$=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{2t^{n+2}}{n+2}+\frac{t^{n+3}}{n+3}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$$
$$\therefore f(n)=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$-\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$ ⇦ 답

14. (1) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sin^{n-1}x\,dx$

$$=\Big[(-\cos x)\sin^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\,dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2x)\sin^{n-2}x\,dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^nx)\,dx$$
$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

따라서 $nI_n=(n-1)I_{n-2}$에서 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

(2) $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$\therefore\ I_5=\dfrac{4}{5}I_3=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}I_1=\dfrac{8}{15}$

$\therefore\ I_6=\dfrac{5}{6}I_4=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{4}I_2=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{1}{2}I_0$

$=\dfrac{5}{16}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5}{32}\pi$

답 $I_5=\dfrac{8}{15}$, $I_6=\dfrac{5\pi}{32}$

p. 95~96

1. (1) (준식)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{4}{n}k\right)^3\cdot\frac{4}{n}\cdot\frac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^5 x^3dx=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^5$

$=\dfrac{1}{16}(5^4-1)=39$ ⇦ 답

(2) (준식)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2\times\sum_{k=1}^{n}k^4}{\sum_{k=1}^{n}k\times\sum_{k=1}^{n}k^5}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}\right\}}{\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\times\frac{1}{n}\right\}}$

$=\dfrac{\int_0^1x^2dx\times\int_0^1x^4dx}{\int_0^1x\,dx\times\int_0^1x^5dx}$

$=\dfrac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\times\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1}{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\times\left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1}$

$=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$ ⇦ 답

(3) (준식)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}$

$=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

에서 $1+x^2=t$라고 하면 $2x\,dx=dt$

$\therefore\ x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$

$\therefore$ (준식)$=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_1^2$

$=\dfrac{1}{2}\ln 2$ ⇦ 답

(4) 주어진 식을 P라고 하면

$\ln P=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\left\{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln 1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\displaystyle\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\int_1^2\ln t\,dt$

$=\Big[t\ln t-t\Big]_1^2=2\ln 2-1=\ln\dfrac{4}{e}$

$\therefore\ P=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\times\cdots\times(2n-1)}$

$=\dfrac{4}{e}$ ⇦ 답

2. 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x-1)f(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore\ f(x)=x^2+x+1$

$\int f(t)\,dt=F(t)+C$ 라고 하면

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)\,dt$

$=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}$

$=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)$

$=2F'(1)=2f(1)=6$ ⇦ 답

3. 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^2-1=0$

$f(1)>0$이므로 $f(1)=1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)f'(x)=f(x)\cdot\dfrac{1}{x}$

$\therefore\ f'(x)=\dfrac{1}{2x}$

$\therefore\ f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\ln|x|+C$

$x\geq1$, $f(1)=1$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x+1$

$\therefore\ \displaystyle\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}(x\ln x-x)+x\right]_1^e$

$=\left\{\dfrac{1}{2}(e-e)+e\right\}-\left\{\dfrac{1}{2}\cdot(-1)+1\right\}$

$=e-\dfrac{1}{2}$ ⇦ 답

4. $e^2\int_1^e f'(t)\ln t\,dt$는 상수이므로

$e^2\int_1^e f'(t)\ln t\,dt=k$라고 하면

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-kx$에서

$f'(x)=x-k$

$$\begin{aligned}\therefore\ k&=e^2\int_1^e (t-k)\ln t\,dt\\&=e^2\left[\left(\frac{t^2}{2}-kt\right)\ln t\right]_1^e\\&\quad-e^2\int_1^e\left(\frac{t^2}{2}-kt\right)\cdot\frac{1}{t}\,dt\\&=e^2\left(\frac{e^2}{2}-ke\right)-e^2\left[\frac{t^2}{4}-kt\right]_1^e\\&=e^2\left[\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-k\right]\end{aligned}$$

따라서 $(1+e^2)k=\frac{e^2}{4}(e^2+1)$에서 $k=\frac{e^2}{4}$

$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{e^2}{4}x}$ ⇦ 답

5. $-\int_1^e f(t)\,dt=k$로 놓으면 $f(x)=x^k$

(i) $k\neq-1$일 때

$$\begin{aligned}k&=-\int_1^e f(t)\,dt=-\int_1^e t^k dt\\&=-\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^e\\&=-\frac{e^{k+1}-1}{k+1}\end{aligned}$$

$\therefore\ e^{k+1}+k^2+k-1=0$ ……㉠

$g(k)=e^{k+1}+k^2+k-1$로 놓으면

$g'(k)=e^{k+1}+2k+1$,

$g''(k)=e^{k+1}+2>0$

이므로 $g'(k)$는 단조증가함수이다.

그런데 $g'(-1)=0$이므로

$k<-1$이면 $g'(k)<0$, $k>-1$이면 $g'(k)>0$

따라서 $g(k)$는 $k=-1$에서 극소이고 최소이다.

$g(-1)=0$이므로 $k\neq-1$일 때 $g(k)>0$

따라서 ㉠의 해는 존재하지 않는다.

(ii) $k=-1$일 때

$$\begin{aligned}k&=-\int_1^e f(t)\,dt\\&=-\int_1^e\frac{1}{t}\,dt\\&=-\Big[\ln t\Big]_1^e=-1\end{aligned}$$

따라서 주어진 조건을 만족한다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$이다.

6. 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$x^2f(x)=\frac{4}{3}x\int_0^x f(t)\,dt+\frac{2}{3}x^2f(x)$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}x^2f(x)=\frac{4}{3}x\int_0^x f(t)\,dt$$

즉, $xf(x)=4\int_0^x f(t)\,dt$

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$1\cdot f(x)+xf'(x)=4f(x)$

$\therefore\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x}$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln|f(x)|=3\ln|x|+C$ ……㉡

또, $f(1)=2$이므로 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\ln 2=C$

$$\begin{aligned}\therefore\ \ln|f(x)|&=3\ln|x|+\ln 2\\&=\ln|2x^3|\end{aligned}$$

$\therefore\ f(x)=\pm 2x^3$

그런데 $f(1)=2$에서

$\boldsymbol{f(x)=2x^3}$ ⇦ 답

7. (1) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_0^0 f(t)\,dt=q$이므로 $q=0$

$\therefore\ \int_{-x}^x f(t)\,dt=p\sin x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-f(-x)\cdot(-1)=p\cos x$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$p=2f(0)$, $f(0)=1$이므로 $p=2$

$\therefore\ \boldsymbol{p=2,\ q=0}$ ⇦ 답

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-x}^x F(t)\,dt&=\int_{-x}^x(f(t)-\cos t)\,dt\\&=\int_{-x}^x f(t)\,dt-\int_{-x}^x\cos t\,dt\\&=2\sin x-\Big[\sin t\Big]_{-x}^x\\&=2\sin x-\{\sin x-\sin(-x)\}\\&=2\sin x-2\sin x\\&=0\end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{-x}^x(t^2-k^4)\,dt\\&=2\int_0^x(t^2-k^4)\,dt\\&=2\left[\frac{1}{3}t^3-k^4t\right]_0^x\\&=\frac{2}{3}x^3-2k^4x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f'(x)&=2x^2-2k^4\\&=2(x+k^2)(x-k^2)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$이면 $x=-k^2,\ k^2$

따라서 $f(x)$의 극대값은 $a_k=f(-k^2)$

$\therefore\ a_k=\frac{2}{3}(-k^2)^3-2k^4(-k^2)$

$=-\frac{2}{3}k^6+2k^6=\frac{4}{3}k^6$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n^7}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{3}k^6\times\frac{1}{n^7}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{3}\left(\frac{k}{n}\right)^6\times\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{4}{3}x^6dx=\left[\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}x^7\right]_0^1$

$=\mathbf{\frac{4}{21}}$ ⇦ 답

9. $f(x)=x+\int_0^x tf'(x-t)\,dt$ 에서

$x-t=y$ 라고 하면 $t=x-y$, $dt=-dy$

$t=0$ 일 때 $y=x$, $t=x$ 일 때 $y=0$

$\therefore\ f(x)=x+\int_x^0(x-y)f'(y)(-1)\,dy$

$=x+\int_0^x(x-y)f'(y)\,dy$

$\therefore\ f(x)=x+x\int_0^x f'(y)\,dy$

$-\int_0^x yf'(y)\,dy$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1+\int_0^x f'(y)\,dy+xf'(x)-xf'(x)$

$=1+\Big[f(y)\Big]_0^x=1+f(x)-f(0)$

㉠에서 $f(0)=0$이므로 $f'(x)=1+f(x)$

즉, $f'(x)-f(x)=1$에서 양변에 e^{-x}를 곱하면

$f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=e^{-x}$

$\therefore\ \{f(x)e^{-x}\}'=e^{-x}$

$\therefore\ f(x)e^{-x}=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C$

$f(0)=0$이므로 $-1+C=0$에서 $C=1$

$\therefore\ \mathbf{f(x)=e^x-1}$ ⇦ 답

10. 임의의 실수 t에 대하여 $\{tf(x)+g(x)\}^2\geqq 0$

$\therefore\ \int_a^b\{tf(x)+g(x)\}^2dx\geqq 0$

$t^2\int_a^b\{f(x)\}^2dx+2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx+\int_a^b\{g(x)\}^2\geqq 0$

$\therefore\ \frac{D}{4}=\left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2$

$-\int_a^b\{f(x)\}^2dx\cdot\int_a^b\{g(x)\}^2dx\leqq 0$

즉, $\left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2\leqq\int_a^b\{f(x)\}^2dx\cdot\int_a^b\{g(x)\}^2dx$

11. $f_n'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)\sin nt\,dt$

$=\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^x\sin nt\,dt-\int_0^x t\sin nt\,dt\right\}$

$=\int_0^x\sin nt\,dt+x\sin nx-x\sin nx$

$=\int_0^x\sin nt\,dt=\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_0^x$

$=\frac{1}{n}(\cos 0-\cos nx)$

$=\frac{1}{n}(1-\cos nx)\geqq 0$

따라서 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f_n(x)$는 단조증가함수이므로 최대값은 $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$이다.

즉, $a_n=f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin nt\,dt$

$=\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left(-\frac{1}{n}\cos nt\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)\left(-\frac{1}{n}\cos nt\right)dt$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n^2}\sin nt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

$=\mathbf{\frac{\pi}{2}}$ ⇦ 답

12. $\int_0^1\sqrt{x}f(t\sqrt{x})\,dx=e^t$ 에서 $t\sqrt{x}=y$ 라고 하면

$x=\frac{y^2}{t^2}$ 에서 $dx=\frac{2y}{t^2}\,dy$, $\sqrt{x}=\frac{y}{t}$

또, $x=0$ 일 때 $y=0$, $x=1$ 일 때 $y=t$

따라서 주어진 등식은

$\int_0^t\frac{y}{t}f(y)\cdot\frac{2y}{t^2}\,dy=\frac{2}{t^3}\int_0^t y^2f(y)\,dy=e^t$

$\therefore\ \int_0^t y^2f(y)\,dy=\frac{1}{2}t^3e^t$

양변을 t에 대하여 미분하면

$t^2f(t)=\frac{3}{2}t^2e^t+\frac{1}{2}t^3e^t$

$\therefore\ f(t)=\frac{3}{2}e^t+\frac{1}{2}te^t$

$\therefore\ \mathbf{f(x)=\frac{1}{2}e^x(x+3)}$ ⇦ 답

13. (1) $y=e^x$에서 $y'=e^x$

따라서 점 $\left(\frac{k}{n},\ e^{\frac{k}{n}}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)$

$y=0$ 일 때 $x=-1+\frac{k}{n}$ (⬅ x절편)

$x=0$ 일 때 $y=e^{\frac{k}{n}}\left(1-\frac{k}{n}\right)$ (⬅ y절편)

$\therefore\ S_{n,k}=-e^{\frac{k}{n}}\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^2$ ⇦ 답

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}S_{n,k}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot(-e^{\frac{k}{n}})\left(1-\frac{k}{n}\right)^2$

$\displaystyle=\int_0^1(1-x)^2(-e^x)\,dx$

$\displaystyle=\Big[(1-x)^2\cdot(-e^x)\Big]_0^1-\int_0^1 2(1-x)\,e^x dx$

$\displaystyle=1-\Big[2(1-x)\,e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2e^x dx$

$\displaystyle=1+2-\Big[2e^x\Big]_0^1$

$=\mathbf{5-2e}$ ⇦ 답

14. C 에서 $\ln x=t$ 라고 하면 $x=e^t$

$\therefore\ dx=e^t dt$

또, $x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$

$\displaystyle\therefore\ C=\int_0^1 t^3(e^t)^2dt$

$\displaystyle=\int_0^1 x^3e^{2x}dx$

따라서 구간 $(0,\ 1)$에서 A, B, C 의 피적분함수의 대소를 비교하면

$e^{-x}<e^x<e^{2x}$

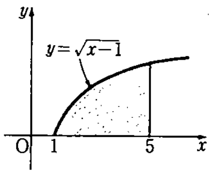
$\therefore\ x^3e^{-x}<x^3e^x<x^3e^{2x}$

$\displaystyle\therefore\ \int_0^1 x^3e^{-x}dx<\int_0^1 x^3e^x dx<\int_0^1 x^3e^{2x}dx$

즉, $\mathbf{B<A<C}$ ⇦ 답

p. 101~102

1. (1) $\displaystyle S=\int_1^5\sqrt{x-1}\,dx$

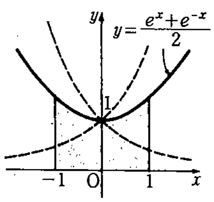


$\displaystyle=\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5$

$\displaystyle=\frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}}-0\right]$

$=\mathbf{\dfrac{16}{3}}$ ⇦ 답

(2) $\displaystyle S=\int_{-1}^1\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx$



$\displaystyle=\int_0^1(e^x+e^{-x})\,dx$

$\displaystyle=\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$

$=(e-e^{-1})-(e^0-e^0)$

$=\mathbf{e-\dfrac{1}{e}}$ ⇦ 답

(3) $\displaystyle S=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ 에서

$x=\tan\theta$ 라고 하면 $dx=\sec^2\theta\,d\theta$

$1+x^2=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

또, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\displaystyle\therefore\ S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\mathbf{\dfrac{\pi}{3}}$ ⇦ 답

(4) $0\leqq x\leqq\pi$에서 $e^x\sin x\geqq0$이고,

$x=0$, π에서 $e^x\sin x=0$

$\displaystyle\therefore\ S=\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

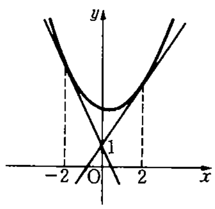
$\displaystyle=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$

$\displaystyle=0-\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x(-\sin x)\,dx$

$=e^{\pi}+1-S$

$\therefore\ \mathbf{S=\dfrac{1}{2}(e^{\pi}+1)}$ ⇦ 답

2. (1) 곡선 위의 점 $(t,\ t^2-2t+5)$에서의 접선의 방정식은



$y=(2t-2)(x-t)$
$\quad+t^2-2t+5$

여기에 $x=0$, $y=1$을 대입하면

$1=-t^2+5$

$\therefore\ t=\pm2$

따라서 접선의 방정식은 $y=-6x+1$, $y=2x+1$

구하는 넓이는

$\displaystyle\int_{-2}^0(x^2-2x+5+6x-1)\,dx$

$\displaystyle\quad+\int_0^2(x^2-2x+5-2x-1)\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_{-2}^0$

$\displaystyle\quad+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2$

$=\mathbf{\dfrac{16}{3}}$ ⇦ 답

(2) (1)에서 $\mathrm{A}(-2,\ 13)$, $\mathrm{B}(2,\ 5)$이므로 직선 AB의 방정식은 $y=-2x+9$

따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_{-2}^2\{(-2x+9)-(x^2-2x+5)\}\,dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^2-(x^2-4)\,dx$

$=\dfrac{1}{6}\cdot4^3$

$=\mathbf{\dfrac{32}{3}}$ ⇦ 답

3. (1) $C_1 : y=f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

$C_2 : y=g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

라고 하면

$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $f''(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$에서 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호의 변화를 조사하면

C_1의 극대점 $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$,

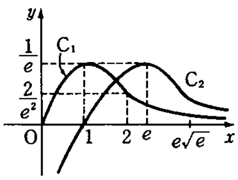
변곡점 $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ ⇦ 답

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $g''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$에서 $g'(x)$, $g''(x)$의 부호의 변화를 조사하면

C_2의 극대점 $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$,

변곡점 $\left(e\sqrt{e}, \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ ⇦ 답

이 때 C_1, C_2의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $l_1 : x=2$, $l_2 : x=e$ 에서 구하는 넓이는

$$S=\int_2^e\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{x}{e^x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}-\frac{x+1}{e^x}\right]_2^e$$

$$=\frac{1}{2}\{1-(\ln 2)^2\}+\frac{e+1}{e^e}-\frac{3}{e^2}$$ ⇦ 답

4. 점 (1, 2)를 지나는 직선을 $y=m(x-1)+2$라고 하면, 주어진 곡선과 이 직선의 교점의 x좌표 α, β $(\alpha<\beta)$는

$x^2=m(x-1)+2$

즉, $x^2-mx+(m-2)=0$의 두 근이므로

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m-2$

$$\therefore\ S=\int_\alpha^\beta\{m(x-1)+2-x^2\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta-\{x^2-mx+(m-2)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\therefore\ S$: 최소 $\Longleftrightarrow (\beta-\alpha)^3$: 최소

$\Longleftrightarrow (\beta-\alpha)^2$: 최소

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$

$=m^2-4(m-2)$

$=(m-2)^2+4$

에서 S가 최소일 때 $m=2$

답 2

5. (1) $\overrightarrow{OP}=(x, y)$에서 $\|\overrightarrow{OP}\|_1=|x|+|y|$

$\overrightarrow{PA}=(1-x, 1-y)$에서

$\|\overrightarrow{PA}\|_2=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

$\overrightarrow{PB}=(-1-x, 1-y)$에서

$\|\overrightarrow{PB}\|_2=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

$\|\overrightarrow{OP}\|_1\leqq\min(\|\overrightarrow{PA}\|_2, \|\overrightarrow{PB}\|_2)$에서

$|x|\leqq1$, $0\leqq y\leqq1$이므로

(i) $-1\leqq x\leqq0$일 때

$-x+y\leqq\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

$-x+y\geqq0$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$y\leqq-1-\dfrac{2}{x-1}$

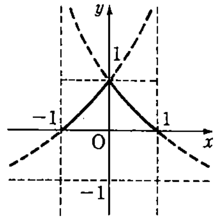
(ii) $0\leqq x\leqq1$일 때

$x+y\leqq\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

(i)과 같은 방법으로

$y\leqq-1+\dfrac{2}{x+1}$

따라서 점 P가 존재하는 영역 S는 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



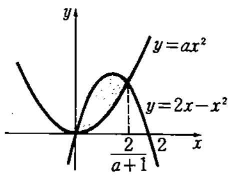
(2) (S의 넓이)

$$=2\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=2\Big[-x+2\ln|x+1|\Big]_0^1$$

$$=2(-1+2\ln 2)$$ ⇦ 답

6. 두 곡선 $y=2x-x^2$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라고 하면, 두 곡선의 교점의 x좌표가



$ax^2=2x-x^2$,

즉, $x\{(a+1)x-2\}=0$

에서 $x=0$, $\dfrac{2}{a+1}$

$$S_1=\int_0^{\frac{2}{a+1}}(2x-x^2-ax^2)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{2}{a+1}}-(a+1)x\left(x-\frac{2}{a+1}\right)dx$$

$$=-(a+1)\times\left(-\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{2}{a+1}\right)^3$$

$$=\frac{4}{3(a+1)^2}$$

또, 포물선 $y=2x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_0^2(2x-x^2)\,dx$$

$$=\int_0^2-x(x-2)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\times 2^3=\frac{4}{3}$$

그런데 $S_1=\frac{1}{2}S$이므로

$$\frac{4}{3(a+1)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=\sqrt{2}-1}$ ⇦ 답

7. 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^{-t})$에서의 접선은

$$y=-e^{-t}(x-t)+e^{-t}$$

이 접선의 x절편은 $y=t+1$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}_i(a_i,\ a^{-a_i})$에서의 접선의 x절편이 a_{i+1}이므로 $a_{i+1}=a_i+1(i=1,\ 2,\ \cdots)$이고, $a_1=a$

$\therefore$ $a_i=a+(i-1)(i=1,\ 2,\ \cdots)$

$$\therefore\ S(a)=\int_0^\infty e^{-x}dx-\frac{1}{2}(a+1)(a+1)e^{-a}-\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{2}(a_{i+1}-a_i)\cdot e^{-ai}$$

$$=\Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty-\frac{e^{-a}}{2}(a+1)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty}e^{1-a-i}$$

$$=1-\frac{e^{-a}}{2}(a+1)^2-\frac{1}{2}\cdot e^{-a}\cdot\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

$$=1-\frac{e^{-a}}{2}\left[(a+1)^2+\frac{1}{e-1}\right]\ (a>0)$$

$$\therefore\ S'(a)=\frac{e^{-a}}{2}\left[(a+1)^2+\frac{1}{e-1}\right]-\frac{e^{-a}}{2}\cdot 2(a+1)$$

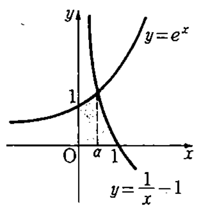
$$=\frac{e^{-a}}{2}\left(a^2-\frac{e-2}{e-1}\right)(a>0)\text{에서}$$

$S'(a)$의 부호의 변화를 조사하면 $S(a)$는

$a=\sqrt{\frac{e-2}{e-1}}$에서 최소이다.

답 $\boldsymbol{a=\sqrt{\frac{e-2}{e-1}}}$

8. (1)



$$S=\int_0^a e^x dx+\int_a^1\left(\frac{1}{x}-1\right)dx$$

$$=\Big[e^x\Big]_0^a+\Big[\ln x-x\Big]_a^1$$

$$=(e^a-1)+(-1-\ln a+a)$$

$$=\boldsymbol{e^a-2+a-\ln a}\text{ ⇦ 답}$$

(2) $g(x)=\frac{1}{x}-1$이라고 하면 $x>0$에서 $g(x)$는 단조감소함수이고,

$$e^a=\frac{1}{a}-1,\ \frac{2}{5}<a<\frac{1}{2}$$

따라서 $e^a=g(a)<g\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{2}$에서

$$e^a<\frac{3}{2}$$

또, $-\ln a<-\ln\frac{2}{5}=\ln\frac{5}{2}<\ln e=1$

$\therefore$ $-\ln a<1$

$\therefore$ $S=e^a-2+a-\ln a<\frac{3}{2}-2+\frac{1}{2}+1=1$

즉, $S<1$

9. (1) 곡선 $y=a\ln x-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ a\ln t-1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-a\ln t+1=\frac{a}{t}(x-t)$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$-a\ln t+1=-a$$

따라서 $\ln t=\frac{a+1}{a}$에서

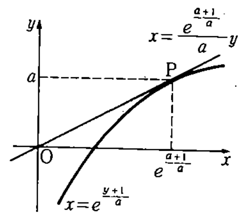
$$t=e^{\frac{a+1}{a}}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$\boldsymbol{y=\frac{a}{e^{\frac{a+1}{a}}}x}\text{ ⇦ 답}$$

(2) $y=a\ln x-1$에서 $x=e^{\frac{y+1}{a}}$

$y=\frac{a}{e^{\frac{a+1}{a}}}x$에서 $x=\frac{e^{\frac{a+1}{a}}}{a}y$



$$\therefore\ S=\int_0^a\left(e^{\frac{y+1}{a}}-\frac{e^{\frac{a+1}{a}}}{a}y\right)dy$$

$$=\left[ae^{\frac{y+1}{a}}-\frac{e^{\frac{a+1}{a}}}{2a}y^2\right]_0^a$$

$$=ae^{\frac{a+1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{2}ae^{\frac{a+1}{a}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}a(e-2)e^{\frac{1}{a}}}\text{ ⇦ 답}$$

(3) $S'(a)=\frac{1}{2}(e-2)e^{\frac{1}{a}}+\frac{1}{2}a(e-2)e^{\frac{1}{a}}\cdot\left(-\frac{1}{a^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}(e-2)e^{\frac{1}{a}}\left(1-\frac{1}{a}\right)=0$$

에서 $a=1$

$0<a<1$일 때 $S'(a)<0$

$a>1$일 때 $S'(a)>0$

이므로 $a=1$일 때 $S(a)$는 최소가 된다.

답 **1**

10. (1) $\int_0^1 g(x)\,dx=a$, $\int_0^1 f(x)\,dx=b$ (a, b는 상수) 라고 하면

$f(x)=-2x^2+3+a$,

$g(x)=2x-8+3b$

$a=\int_0^1 (2x-8+3b)\,dx=\left[x^2-8x+3bx\right]_0^1$

$\therefore\ a=3b-7$ ……㉠

$b=\int_0^1 (-2x^2+3+a)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x+ax\right]_0^1$

$\therefore\ b=a+\frac{7}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=0$, $b=\frac{7}{3}$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(x)=-2x^2+3}$, $\boldsymbol{g(x)=2x-1}$ ⇦ 답

(2) $-2x^2+3=2x-1$ 즉, $x^2+x-2=0$에서

$x=-2,\ 1$

$-2\leqq x\leqq 1$에서 $-2x^2+3\geqq 2x-1$

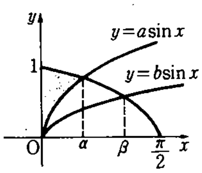
$\therefore\ S=\int_{-2}^1(-2x^2+3-2x+1)\,dx$

$=\int_{-2}^1 -2(x+2)(x-1)\,dx$

$=\frac{1}{3}\times 3^3$

$=\boldsymbol{9}$ ⇦ 답

11. $\cos x=a\sin x$의 근을 $x=\alpha$라 하고, $\cos x=b\sin x$의 근을 $x=\beta$라고 하면



$\tan\alpha=\frac{1}{a}$

$\tan\beta=\frac{1}{b}$

따라서 문제의 뜻에 의하여

$\int_0^{\alpha}(\cos x-a\sin x)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$\left[\sin x+a\cos x\right]_0^{\alpha}=\frac{1}{3}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\therefore\ \sin\alpha+a\cos\alpha-a=\frac{1}{3}$

$\tan\alpha=\frac{1}{a}$ 에서

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

따라서 $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{3}$에서

$a=\frac{4}{3}$

또, $\int_0^{\beta}(\cos x-b\sin x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$에서

$\left[\sin x+b\cos x\right]_0^{\beta}=\frac{2}{3}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\therefore\ \sin\beta+b\cos\beta-b=\frac{2}{3}$

$\tan\beta=\frac{1}{b}$ 에서

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}$, $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}$

따라서 $\sqrt{b^2+1}=b+\frac{2}{3}$ 에서

$b=\frac{5}{12}$

$\therefore$ $\boldsymbol{a=\frac{4}{3}}$, $\boldsymbol{b=\frac{5}{12}}$ ⇦ 답

p. 108~109

1. 밑면에 수직인 직선을 x축으로 잡으면 구하는 부피는

$\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx$

$=\pi^2+\left[2x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\sin x\,dx$

$=\pi^2+\left[2\cos x\right]_0^{\pi}$

$=\boldsymbol{\pi^2-4}$ ⇦ 답

2. (1) $\mathrm{P}(t,\ -1)$이라고 하면 P를 지나고 직선 OP에 수직인 직선은

$y+1=t(x-t)$

이 때 t가 실수이므로

$t^2-xt+(y+1)=0$

에서

$D=x^2-4(y+1)\geqq 0$

$\therefore\ y\leqq\frac{1}{4}x^2-1$

따라서 구하는 영역은

$\boldsymbol{\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y\leqq\frac{1}{4}x^2-1\right\}}$ ⇦ 답

(2) $y\leqq 0$, $y>\frac{1}{4}x^2-1$에서 구하는 부피는

$V=\int_{-1}^0\pi x^2\,dy$

$=4\pi\int_{-1}^0(y+1)\,dy$

$=\boldsymbol{2\pi}$ ⇦ 답

3. (1) $f(x)=ax^2$, $g(x)=\ln x$라 하고, 두 곡선이 접하는 점의 x좌표를 t라고 하면($t>0$)

$f(t)=g(t)$에서 $at^2=\ln t$ ……㉠

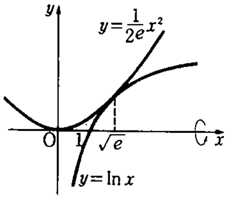
$f'(t)=g'(t)$에서 $2at=\dfrac{1}{t}$ ……㉡

㉡에서 $at^2=\dfrac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\ln t=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ t=\sqrt{e}$

$\therefore\ \boldsymbol{a=\dfrac{1}{2e}}$ ⇦ 답

(2) 구하는 부피를 V 라고 하면



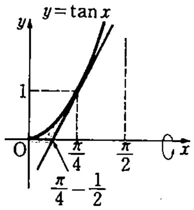
$$V=\int_0^{\sqrt{e}}\pi\left(\frac{1}{2e}x^2\right)^2dx-\int_1^{\sqrt{e}}\pi(\ln x)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{4e^2}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{e}}-\pi\Big[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x\Big]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\frac{\sqrt{e}\,\pi}{20}-\frac{5\sqrt{e}\,\pi}{4}+2\pi$$

$$=\boldsymbol{2\pi\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{e}\right)}\ ⇦\ 답$$

4. $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$에서의 접선의 방정식은



$$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ y=2x-\frac{\pi}{2}+1$$

이 접선의 x절편은

$$x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi\tan^2x\,dx-\frac{1}{3}\pi\times1^2\times\frac{1}{2}$$

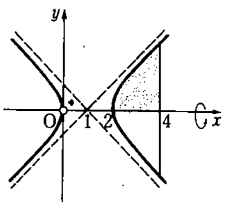
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-1+\sec^2x)\,dx-\frac{\pi}{6}$$

$$=\pi\Big[-x+\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{4}\pi^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}(10-3\pi)}\ ⇦\ 답$$

5. $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\dfrac{2t}{1-t^2}}{\dfrac{2}{1-t^2}}=t$



$$\therefore\ x=\frac{2}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\frac{2x^2}{x^2-y^2}$$

$x\neq0$이므로 $x^2-y^2=2x$

$$\therefore\ (x-1)^2-y^2=1$$

$0\leq t\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 $2\leq x\leq4$

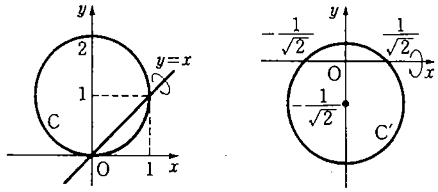
따라서 구하는 부피는

$$\int_2^4\pi y^2dx=\pi\int_2^4(x^2-2x)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^4$$

$$=\boldsymbol{\frac{20}{3}\pi}\ ⇦\ 답$$

6.



구하는 입체의 부피는 위의 그림 (1)의 색칠한 부분을 직선 $y=x$의 둘레로 회전시켜 얻어지는 입체의 부피이다. 그런데 이 부피는 주어진 도형을 적당히 회전이동하고 평행이동하여 위의 그림 (2)와 같이 옮긴 후 색칠한 부분을 x축 둘레로 회전시켜 얻어지는 입체의 부피와 같다.

이 때 곡선 C′의 방정식 $x^2+\left(y+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$에서 $y\geq0$이므로

$$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-x^2}$$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

에서 $x=\sin\theta$라고 하면

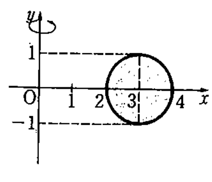
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{V=\frac{5\sqrt{2}\,\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{4}}\ ⇦\ 답$$

7. 오른쪽 그림에서 구하는 부피 V는 $x=3$의 오른쪽 반원



$$(x_1=3+\sqrt{1-y^2})$$

을 회전시킨 입체의 부피에서 왼쪽 반원

$$(x_2=3-\sqrt{1-y^2})$$

을 회전시킨 입체의 부피를 뺀 것이므로

$$V=\pi\int_{-1}^{1}x_1^2dy-\pi\int_{-1}^{1}x_2^2dy$$
$$=2\pi\int_0^1(x_1^2-x_2^2)\,dy$$
$$=2\pi\int_0^1 12\sqrt{1-y^2}\,dy$$
$$\left(\leftarrow y=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\cos\theta\,d\theta$$
$$=24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=12\pi\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\mathbf{6\pi^2}$$ ⇦ 답

《참고》 (환체의 부피)=(단면의 넓이)×(단면의 무게 중심의 이동 거리)임을 이용하면

$$V=\pi\times 6\pi=6\pi^2$$

과 같이 구할 수 있다.

8. $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}(\sin t+\cos t)+e^{-t}(\cos t-\sin t)$

$$=-2e^{-t}\sin t$$

$\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}(\sin t-\cos t)+e^{-t}(\cos t+\sin t)$

$$=2e^{-t}\cos t$$
$$\therefore\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4e^{-2t}$$
$$\therefore\ (\text{운동 거리})=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1 2e^{-t}dt=\left[-2e^{-t}\right]_0^1$$
$$=\mathbf{2\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$ ⇦ 답

9. $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin 3\theta-3\sin\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos 3\theta+3\cos\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$=18+18(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta)$$
$$=18(1+\cos 2\theta)=36\cos^2\theta$$
$$\therefore\ (\text{곡선의 길이})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\cos\theta\,d\theta$$
$$=\left[6\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{6}$$ ⇦ 답

10. 직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x-1}{-1}=y=z$

따라서 P(0, 0, t)를 지나 z축에 수직인 평면과 직선 AB의 교점은 Q($-t+1$, t, t)이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{(-t+1)^2+t^2}=\sqrt{2t^2-2t+1}$$

(단면의 넓이)$=\pi(2t^2-2t+1)$

$$\therefore\ (\text{부피})=\int_0^1\pi(2t^2-2t+1)\,dt$$
$$=\pi\left[\frac{2}{3}t^3-t^2+t\right]_0^1=\mathbf{\frac{2}{3}\pi}$$ ⇦ 답

11. 나누어지는 두 부분 중 y축의 일부를 끼고 있는 부분의 부피를 V_1, 다른 한 부분의 부피를 V_2라고 하면

$$V_1=\int_0^1\pi x^2dy=\pi\int_0^1 y^{\frac{2}{n}}\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{n}{n+2}y^{\frac{n+2}{n}}\right]_0^1$$
$$=\frac{n}{n+2}\pi$$

(원기둥의 부피)$=V=\pi\cdot1^2\cdot1=\pi$

$$V_2=V-V_1=\pi-\frac{n}{n+2}\pi=\frac{2}{n+2}\pi$$
$$\therefore\ \mathbf{V_1:V_2=n:2}$$ ⇦ 답

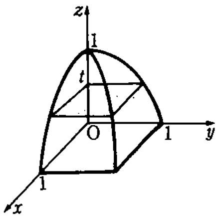
12. $z=t\,(-1\leq t\leq 1)$일 때

$y^2\leq 1-t^2$

$x^2\leq 1-t^2$

즉, $-\sqrt{1-t^2}\leq x\leq\sqrt{1-t^2}$

$-\sqrt{1-t^2}\leq y\leq\sqrt{1-t^2}$



이므로 단면은 한 변의 길이가 $2\sqrt{1-t^2}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=4(1-t^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\therefore\ 2\int_0^1 4(1-t^2)\,dt=8\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\mathbf{\frac{16}{3}}$$ ⇦ 답

13. $\dfrac{dx}{d\theta}=-e^{-\theta}\cos\theta-e^{-\theta}\sin\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=-e^{-\theta}\sin\theta+e^{-\theta}\cos\theta$

$$\therefore\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$=e^{-2\theta}(\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)$$
$$+e^{-2\theta}(\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=2e^{-2\theta}$$
$$\therefore\ \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{2}\,e^{-\theta}$$
$$\therefore\ l(a)=\int_0^a\sqrt{2}\,e^{-\theta}d\theta=\sqrt{2}\left[-e^{-\theta}\right]_0^a$$
$$=\sqrt{2}\,(1-e^{-a})$$
$$\therefore\ \lim_{a\to\infty}l(a)=\lim_{a\to\infty}\sqrt{2}\,(1-e^{-a})$$
$$=\mathbf{\sqrt{2}}$$ ⇦ 답

14. f를 나타내는 행렬을 A라고 하면

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t-\sin t & 3\sin t \\ 1-\cos t & 3\cos t \end{pmatrix}$에서

$A=\begin{pmatrix} t-\sin t & 3\sin t \\ 1-\cos t & 3\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix} t & \sin t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}$

$f:(1,\ 1) \longrightarrow (x,\ y)$라고 하면

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t & \sin t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t+\sin t \\ 1+\cos t \end{pmatrix}$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$이므로 구하는 곡선의 길이는

$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos t)^2+(-\sin t)^2}\,dt$

$=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$

$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt$

$=8\left[\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=8$ ⇦ 답

p. 110~111 (고급 문제)

1. (1) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-2x\sin x-x^2\cos x$

$F'(x)=f(x)$, $x>0$이므로

$\boldsymbol{f'(x)=2\sin x+x\cos x}$ ⇦ 답

(2) $f(x)=\int(2\sin x+x\cos x)\,dx$

$=-2\cos x+x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=-2\cos x+x\sin x+\cos x+C$

$=-\cos x+x\sin x+C$

주어진 조건에서

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}+C \qquad \therefore C=1$

$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=x\sin x-\cos x+1}$ ⇦ 답

2. $\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ -1)+t(-2,\ -3)$

$=(2-2t,\ -1-3t)$

$\therefore\ |\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2-2t)^2+(-1-3t)^2$

$=13t^2-2t+5$

$\therefore$ (준식) $=\int_0^1(13t^2-2t+5)\,dt$

$=\left[\frac{13}{3}t^3-t^2+5t\right]_0^1$

$=\frac{13}{3}-1+5=\boldsymbol{\frac{25}{3}}$ ⇦ 답

3. $-x^2=t$라고 하면 $x\,dx=-\frac{1}{2}dt$

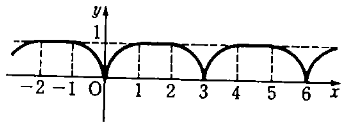
$x=0$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=-a^2$

$\therefore$ (준식) $=\lim_{a\to\infty}\int_0^{-a^2}e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

$=\lim_{a\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{-a^2}\right\}$

$=\lim_{a\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}(e^{-a^2}-1)\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ ⇦ 답

4.



(1) $f\left(\frac{20}{3}\right)=f\left(3\times6+\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ⇦ 답

(2) $\int_{-2}^{5}f(x)\,dx=4\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx+3$

$=4\left[\frac{-2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1+3$

$=\boldsymbol{\frac{8}{\pi}+3}$ ⇦ 답

5. (준식) $=I=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{x^2}{1+e^x}dx$

에서 $x=-t$이면 $dx=-dt$

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$

$\therefore\ I=\int_1^0\frac{t^2}{1+e^{-t}}\cdot(-1)\,dt+\int_0^1\frac{x^2}{1+e^x}dx$

$=\int_0^1\frac{t^2e^t}{1+e^t}dt+\int_0^1\frac{x^2}{1+e^x}dx$

$=\int_0^1\left(\frac{x^2e^x}{1+e^x}+\frac{x^2}{1+e^x}\right)dx$

$=\int_0^1x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ ⇦ 답

6. (1) $\int_0^{\pi}\cos^2nx\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ ⇦ 답

(2) $\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx\ (m\neq n)$

$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi}$

$=\boldsymbol{0}$ ⇦ 답

(3) (1), (2)에서

(준식) $=\int_0^{\pi}(\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 3x$

$$+\cdots+\cos^2 nx)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\times n=\frac{n\pi}{2} \text{ ⇦ 답}$$

7. (1) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (xe^x+a_n)\,dx$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx+\left[a_n x\right]_0^1\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{e-\left[e^x\right]_0^1+a_n\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(a_n+1)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}} \text{ ⇦ 답}$$

(2) (1)에서 $a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$
$$\therefore\ a_n-1=(a_1-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ ⇦ 답}$$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\mathbf{1}$ ⇦ 답

8. $f(x)=\int_0^x 2(2\cos t-1)(\cos t+1)\,dt$ 에서

$f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$ 이면

$x=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$ ($\because\ 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	변곡	↘	극소	↗	

$$f(x)=\int_0^x 2(2\cos^2 t+\cos t-1)\,dt$$
$$=\int_0^x 2(\cos 2t+\cos t)\,dt$$
$$=\sin 2x+2\sin x$$

$f(0)=f(2\pi)=0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

∴ **최대값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 최소값 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$** ⇦ 답

9. $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\cos x$

즉, $\{f(x)g(x)\}'=\cos x$ 에서

$f(x)g(x)=\sin x+C_1$

그런데 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+C_1=1$ 에서 $C_1=0$

$\therefore\ f(x)g(x)=\sin x$

또, $f(x)g'(x)=-\sin x$ 이므로

$\frac{g'(x)}{g(x)}=-1$ 에서 $\ln|g(x)|=-x+C_2$

$\therefore\ g(x)=Ae^{-x}$ (단, $A=\pm e^{C_2}$)

$\lim_{x\to 0} g(x)=A=-1$

$\therefore\ \boldsymbol{g(x)=-e^{-x},\ f(x)=-e^x\sin x}$ ⇦ 답

10. (1) $\int_0^\pi \sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2t)\,dt$
$$=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

$\int_0^\pi e^t\sin t\,dt=I$ 라고 하면
$$I=\left[e^t\sin t\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^t\cos t\,dt$$
$$=-\left[e^t\cos t\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^t\sin t\,dt$$
$$=e^\pi+1-I$$

$2I=e^\pi+1$ 에서 $I=\frac{1}{2}(e^\pi+1)$

답 $\boldsymbol{\int_0^\pi \sin^2 t\,dt=\frac{\pi}{2},\ \int_0^\pi e^t\sin t\,dt=\frac{1}{2}(e^\pi+1)}$

(2) $\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=k$($k$는 상수)라고 하면

$$\int_0^x f(t)\,dt=\cos x-ake^x \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=0$ 이면 $0=1-ak$ 에서 $ak=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\sin x-ake^x$ (⬅ $ak=1$)

$\therefore\ f(x)=-\sin x-e^x$
$$\therefore\ k=\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$$
$$=-\int_0^\pi(\sin^2 t+e^t\sin t)\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}(e^\pi+\pi+1)$$

$ak=1$ 에서 $a=-\frac{2}{e^\pi+\pi+1}$

답 $\boldsymbol{f(x)=-\sin x-e^x,\ a=-\frac{2}{e^\pi+\pi+1}}$

11. $\frac{d}{dx}f(x)=e^x\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt+1$ 에서

$\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt=k$ 라고 하면

$f'(x)=ke^x+1 \quad \therefore\ f(x)=ke^x+x+C$

그런데 $f(0)=k+C=0$ 에서 $C=-k$

즉, $f(x)=ke^x+x-k$
$$\therefore\ k=\int_0^1 e^{-t}(ke^t+t-k)\,dt$$
$$=\int_0^1(k+te^{-t}-ke^{-t})\,dt$$
$$=\left[kt-te^{-t}+ke^{-t}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-t}dt$$
$$=(k-e^{-1}+ke^{-1})-k-\left[e^{-t}\right]_0^1$$
$$=\frac{k-1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{k-2}{e}+1$$

즉, $(e-1)k=e-2$에서　$k=\dfrac{e-2}{e-1}$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=\frac{e-2}{e-1}(e^x-1)+x}$$ ⇦ 답

12. (1) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{e}{2}\ln x$라 하고, 두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

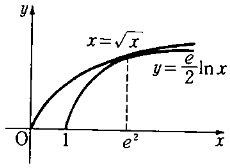
$f(t)=g(t)$에서　$\sqrt{t}=\dfrac{e}{2}\ln t$　　……㉠

$f'(t)=g'(t)$에서　$\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{e}{2t}$　　……㉡

㉡에서 $\sqrt{t}=e$　　$\therefore\ t=e^2$

$t=e^2$일 때 ㉠도 만족하므로 구하는 접점의 좌표는　$\boldsymbol{(e^2,\ e)}$ ⇦ 답

(2) $S=\displaystyle\int_0^{e^2}\sqrt{x}\,dx-\int_1^{e^2}\frac{e}{2}\ln x\,dx$

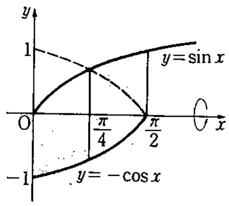


$=\left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{e^2}-\left[\dfrac{e}{2}(x\ln x-x)\right]_1^{e^2}$

$=\dfrac{2}{3}e^3-\dfrac{e}{2}(2e^2-e^2+1)$

$=\boldsymbol{\dfrac{e^3}{6}-\dfrac{e}{2}}$ ⇦ 답

13. 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분은 합동이므로 구하는 부피 V는



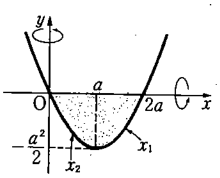
$V=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi(-\cos x)^2dx$

$=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$

$=\pi\left[x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\pi\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right]=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\pi(\pi+2)}$ ⇦ 답

14. (1) $y=\dfrac{1}{2}x^2-ax$



$=\dfrac{1}{2}x(x-2a)=0$

이면　$x=0,\ 2a$

$V_x=\displaystyle\int_0^{2a}\pi y^2dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^{2a}\left(\frac{x^4}{4}-ax^3+a^2x^2\right)dx$

$=\pi\left[\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{ax^4}{4}+\dfrac{a^2x^3}{3}\right]_0^{2a}$

$=\boldsymbol{\dfrac{4\pi a^5}{15}}$ ⇦ 답

(2) $2y=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$

$\therefore\ x=a\pm\sqrt{a^2+2y}$

에서 $x_1=a+\sqrt{a^2+2y}$, $x_2=a-\sqrt{a^2+2y}$

$V_y=\displaystyle\int_{-\frac{a^2}{2}}^{0}\pi(x_1^2-x_2^2)\,dy$

$=\displaystyle\int_{-\frac{a^2}{2}}^{0}4\pi a\sqrt{a^2+2y}\,dy$

$=4\pi a\cdot\left[\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}(a^2+2y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{a^2}{2}}^{0}$

$=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi a^4}$ ⇦ 답

(3) $\dfrac{4}{15}\pi a^5=\dfrac{4}{3}\pi a^4$

$\therefore\ \boldsymbol{a=5}$ ⇦ 답

15. x축 위의 점 $P(t,\ 0,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 평면이 주어진 직선과 만나는 점은 $Q(t,\ t,\ 1-t)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{t^2+(1-t)^2}=\sqrt{2t^2-2t+1}$

따라서 단면의 넓이는　$\pi(2t^2-2t+1)$

구하는 부피를 V라고 하면

$V=\displaystyle\int_0^1\pi(2t^2-2t+1)\,dt$

$=\pi\left[\dfrac{2}{3}t^3-t^2+t\right]_0^1$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$ ⇦ 답

IV. 확　률

p. 118~119

1. (1) 100원짜리 ⇨ 0개, 1개, 2개 (3가지)
50원짜리 ⇨ 0개, 1개, 2개, 3개 (4가지)
10원짜리 ⇨ 0개, 1개, 2개, 3개 (4가지)
모두 0인 경우는 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$3\times4\times4-1=$**47(가지)** ⇦ 답

(2) 100원짜리 2개는 50원짜리 4개로 보아 50원짜리 동전을 7개로 본다.

50원짜리 7개로 만들 수 있는 금액의 종류는 8가지, 10원짜리 동전 3개로 만들 수 있는 종류는 4가지, 0개씩 사용하는 경우는 제외해야 하므로

$8\times4-1=$**31(가지)** ⇦ 답

2. (1) 10원, 50원, 100원짜리 동전의 개수를 각각 $x,\ y,\ z$라고 하면

$10x+50y+100z=240$

$\therefore\ x+5y+10z=24$　　……㉠

또, $x\geqq0,\ y\geqq0,\ z\geqq0$이고, $x,\ y,\ z$는 정수

㉠에서 $10z\leqq24$이므로 $z=0,\ 1,\ 2$

(i) $z=0$일 때
$x+5y=24$
$5y \leqq 24$이므로
$y=0, 1, 2, 3, 4$

y	0	1	2	3	4
x	24	19	14	9	4

(ii) $z=1$일 때 $x+5y=14$
$5y \leqq 14$이므로
$y=0, 1, 2$

y	0	1	2
x	14	9	4

(iii) $z=2$일 때 $x+5y=4$
$5y \leqq 4$이므로 $y=0$

y	0
x	4

따라서 구하는 경우의 수는
$5+3+1=$**9(가지)** ⇦ 답

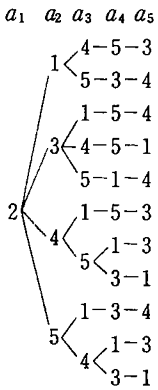
(2) $x+5y+10z=24$ ……㉠
$x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $z \geqq 1$이고 x, y, z는 정수……㉡
㉡에서 $x \geqq 1$, $y \geqq 1$이므로 $x+5y \geqq 6$ ……㉢
㉠, ㉢에서 $10z \leqq 18$ $\therefore z=1$
$z=1$일 때 $(x, y)=(9, 1), (4, 2)$
$\therefore$ **2가지** ⇦ 답

3. $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)(a_5-5) \neq 0$인 것은 $a_1 \neq 1$, $a_2 \neq 2$, $a_3 \neq 3$, $a_4 \neq 4$, $a_5 \neq 5$인 것을 뜻한다.

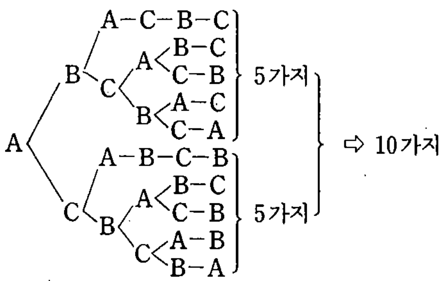
$a_1 \neq 1$이므로 $a_1=2, 3, 4, 5$인 경우에 따라서 조사한다.

$a_2 \neq 2$인 경우 $a_2=1, 3, 4, 5$의 네 가지 경우가 있으며, 오른쪽 수형도와 같이 조사해 보면 모두 11가지가 있다.

$a_1=3, 4, 5$인 경우도 마찬가지이므로 구하는 모든 경우의 수는
$4 \times 11=$**44(가지)** ⇦ 답



4. 맨 앞에 A나라의 사람이 서는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



여기에 같은 나라 사람들끼리 바꾸어 서는 방법이 2^3가지이므로 A나라 사람이 맨 앞에 설 때, 이들 6명이 일렬로 서는 방법의 수는 10×2^3가지가 된다.
맨 앞에 B나라 사람이 서는 경우나 C나라 사람이 서는 경우도 같으므로 구하는 방법의 수는
$10 \times 2^3 \times 3=$**240(가지)** ⇦ 답

5. (1) ${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

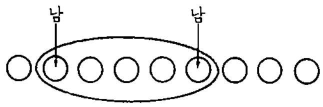
$$n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}=n \cdot \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$$
$$=\frac{n \cdot (n-1)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$
$$\therefore {}_nP_r=n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$$

(2) $$(n-r+1){}_nP_{r-1}=(n-r+1) \cdot \frac{n!}{(n-r+1)!}$$
$$=\frac{(n-r+1)n!}{(n-r+1) \cdot (n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$
$$\therefore (n-r+1){}_nP_{r-1}={}_nP_r$$

(3) $$(n+1)!-n!=(n+1)n!-n!$$
$$=n!\{(n+1)-1\}=n \cdot n!$$

(4) $$\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{n-1}{(n-1)!}$$
$$=\frac{n}{(n-1)!}=\frac{n^2}{n!}$$

6.

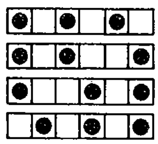


특정한 두 남자 사이에 세 여자를 뽑아 세우는 방법의 수는 ${}_5P_3$

이 5명이 이웃하므로 한 묶음으로 보고 다른 4명과 함께 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!$이고, 특정한 두 남자끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로

구하는 경우의 수는
${}_5P_3 \times 5! \times 2!=60 \times 120 \times 2$
$=$**14400(가지)** ⇦ 답

7. 어느 2명도 이웃하지 않게 앉는 방법은 4가지이고, 그 각각에 대하여 세 사람이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$
$\therefore 4 \times 3=24$(가지)



답 24

8. 9개의 위치에 8개를 놓아야 하므로 어느 한 곳을 빈 곳으로 해야 한다. 이 빈 곳을 정하는 방법이 9가지, 나머지 장소에 흰 돌, 검은 돌 4개씩을 배열하는 방법은 $\dfrac{8!}{4!4!}$가지므로

$9 \times \dfrac{8!}{4!4!}=$**630(가지)** 답 ⑤

9. (1) 회전해서 겹치는 경우가 없으므로
8!(가지) ⇦ 답

(2) $12! \times \frac{1}{4} = \mathbf{3 \times 11!}$ **(가지)** ⇦ 답

(3) $10! \times \frac{1}{2} = \mathbf{5 \times 9!}$ **(가지)** ⇦ 답

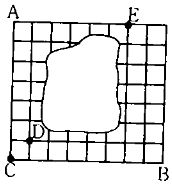
10. (1) 선거인 모두 2가지의 투표 방법이 있으므로 구하는 수는 ${}_2\Pi_6 = 2^6 = \mathbf{64}$ **(가지)** ⇦ 답

(2) 결과는 가위바위보의 3개에 중복을 허락하여 5개를 취하는 중복순열로 나타내어지므로 구하는 수는 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = \mathbf{243}$ **(가지)** ⇦ 답

(3) 각 물건에 대하여 각각 3가지의 선택 방법이 있으므로 구하는 수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = \mathbf{243}\text{ (가지)}$$ ⇦ 답

11. A→C→B로 가는 방법은 1가지



A→D→B로 가는 방법은

$$\frac{7!}{1!\,6!} \times \frac{8!}{1!\,7!} = 56\text{(가지)}$$

A→E→B로 가는 방법은

$$\frac{9!}{7!\,2!} = 36\text{(가지)}$$

$\therefore\ 1 + 56 + 36 = \mathbf{93}$ **(가지)** ⇦ 답

12. (1) ${}_2\Pi_5 = 2^5 = \mathbf{32}$ **(가지)** ⇦ 답

(2) $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = \mathbf{30}$ **(가지)** ⇦ 답

(3) 4개까지 사용한 부호의 수　　30

5개까지 사용한 부호의 수　　$30 + 32 = 62$

6개까지 사용한 부호의 수　　$62 + 64 = 126$

답 **6개**

13. x좌표가 4가 되려면 $\begin{cases} \text{(i) 1이 4번} \\ \text{(ii) 1과 3이 1번씩} \end{cases}$

y좌표가 4가 되려면 $\begin{cases} \text{(i) 2가 2번} \\ \text{(ii) 4가 1번} \end{cases}$

따라서 P가 점 (4, 4)에 도달하게 하는 눈의 형태는

(1, 1, 1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 1, 4),
(1, 3, 2, 2), (1, 3, 4)

의 4가지이므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!\,2!} + \frac{5!}{4!} + \frac{4!}{2!} + 3! = \mathbf{38}\text{ (가지)}$$ ⇦ 답

14. 10명에서 5명을 택하여 하나의 원탁에 앉히는 방법은 $\frac{{}_{10}P_5}{5}$ 가지

이것에 대하여 나머지 5명이 다른 하나의 원탁에 앉는 방법은 $4!$ 가지이므로 구하는 수는

$$\frac{{}_{10}P_5}{5} \times 4! = \mathbf{145152}\text{ (가지)}$$ ⇦ 답

15. (1) 일단 대칭성을 무시하고

윗면에 수를 기입하는 방법은　6가지

밑면에 수를 기입하는 방법은　5가지

옆면에 남은 네 수를 기입하는 방법은

$4! \times \frac{1}{2}$ (∵ 직사각형)

그런데 뒤집어 놓으면 겹치는 것이 2가지씩 생기므로 $6 \times 5 \times \left(4! \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \mathbf{180}$ **(가지)** ⇦ 답

(2) (1)과 마찬가지 방법으로 생각하면

$$6 \times 5 \times \left(4! \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2} = \mathbf{90}\text{ (가지)}$$ ⇦ 답

(3) $6 \times 5 \times \left(4! \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{6} = \mathbf{30}$ **(가지)** ⇦ 답

p. 128~129

1. 흰 바둑돌 사이와 양끝의 $\{(n-3)+1\}$의 자리에서 3군데를 택하여 검은 돌을 놓으면 되므로

$${}_{n-3+1}C_3 = \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$$ ⇦ 답

2. 감 3개와 사과 7개에서 5개를 택하는 방법은

감	3	2	1	0
사과	2	3	4	5

이므로 5명에게 주는 방법은

${}_5C_3 \times {}_2C_2 + {}_5C_2 \times {}_3C_3 + {}_5C_1 \times {}_4C_4 + {}_5C_5$
$= \mathbf{26}$ **(가지)** ⇦ 답

3. (1) $x + y + z^2 = 15$에서 $z^2 \leqq 15$이므로

$z = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

따라서 구하는 수는 $x + y = 15,\ 14,\ 11,\ 6$인 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_2H_{15} + {}_2H_{14} + {}_2H_{11} + {}_2H_6 = \mathbf{50}$ **(개)** ⇦ 답

(2) $x + y + z^2 \leqq 15$에서 $z^2 \leqq 15$이므로

$z = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

따라서 구하는 수는 $x + y \leqq 15,\ x + y \leqq 14,$
$x + y \leqq 11,\ x + y \leqq 6$인 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

$x + y \leqq 15$인 음이 아닌 정수해의 개수는
$x + y + d = 15$인 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_3H_{15}$

다른 세 경우도 마찬가지이므로 구하는 수는

${}_3H_{15} + {}_3H_{14} + {}_3H_{11} + {}_3H_6 = \mathbf{362}$ **(개)** ⇦ 답

4. (1) 9개의 꼭지점 중에서 세 점을 택하면 되므로 삼각형의 개수는 ${}_9C_3 = \mathbf{84}$ **(개)** ⇦ 답

(2) 한 변을 공유하면 변과 이웃한 두 꼭지점을 제외한 남은 5개의 점 중 1개를 택하여 삼각형을 그리면 되므로 $5 \times 9 = \mathbf{45}$ **(개)** ⇦ 답

(3) 두 변을 공유하는 삼각형의 개수는 9개이므로 한 변도 공유하지 않는 삼각형의 개수는

$84-(45+9)=\mathbf{30}$**(개)** ⇦ 답

(4) 9개의 꼭지점을 순서대로 A_1, A_2, $\cdots$, A_9라고 하면, 정삼각형이 되는 것은 $\triangle A_1A_4A_7$, $\triangle A_2A_5A_8$, $\triangle A_3A_6A_9$이므로 $\mathbf{3}$**(개)** ⇦ 답

5. (1) 가로로 2칸, 세로로 3칸, 위로 2칸 이동하면 되므로

$${}_7C_2\times{}_5C_3\times{}_2C_2=\frac{7!}{2!\,3!\,2!}$$
$$=\mathbf{210}\text{(가지)}$$ ⇦ 답

(2) 막힌 구멍을 P라고 하면

A에서 P에 이르는 최단 거리의 통로는

$3!=6$(가지)

P에서 B에 이르는 최단 거리의 통로는

$\frac{4!}{2!}=12$(가지)

따라서 $A\to P\to B$의 통로의 수는

$6\times12=72$(가지)

따라서 P를 지나지 못하는 통로의 수는

$210-72=\mathbf{138}$**(가지)** ⇦ 답

6. $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rx^r$에서

(1) 제5항, 제6항, 제7항의 계수는 각각 ${}_nC_4$, ${}_nC_5$, ${}_nC_6$이고 이 순서로 등차수열을 이루므로

${}_nC_4+{}_nC_6=2\times{}_nC_5$

$$\therefore \frac{n!}{4!\,(n-4)!}+\frac{n!}{6!\,(n-6)!}$$
$$=2\times\frac{n!}{5!\,(n-5)!}$$

정리하면 $30+(n-4)(n-5)=12(n-4)$

$\therefore n=7,\ 14$

그런데 n은 짝수이므로

$\mathbf{n=14}$ ⇦ 답

(2) $n=14$일 때, 계수가 최대인 항을 ${}_{14}C_kx^k$라고 하면 ${}_{14}C_{k-1}\leqq{}_{14}C_k$, ${}_{14}C_{k+1}\leqq{}_{14}C_k$이므로

$$\frac{14!}{(k-1)!\,(15-k)!}\leqq\frac{14!}{k!\,(14-k)!}$$
$$\frac{14!}{(k+1)!\,(13-k)!}\leqq\frac{14!}{k!\,(14-k)}$$

정리하면 $\frac{13}{2}\leqq k\leqq\frac{15}{2}$

$\therefore k=7$

따라서 계수가 최대인 항은

$\mathbf{{}_{14}C_7x^7}$ ⇦ 답

7. $(1-x)^n(1+x)^{9-n}$

$=(1-{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots)$

$\times(1+{}_{9-n}C_1x+{}_{9-n}C_2x^2+\cdots)$

$=1+({}_{9-n}C_1-{}_nC_1)x$

$+({}_nC_2-{}_nC_1\cdot{}_{9-n}C_1+{}_{9-n}C_2)x^2+\cdots$

x의 계수는

${}_{9-n}C_1-{}_nC_1=9-2n$

x^2의 계수는

${}_nC_2-{}_nC_1\cdot{}_{9-n}C_1+{}_{9-n}C_2$

$=2(n-3)(n-6)$

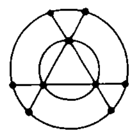
$\therefore 9-2n<0,\ 2(n-3)(n-6)<0$

$\therefore n>\frac{9}{2},\ 3<n<6$

$\therefore \mathbf{n=5}$ ⇦ 답

8. 최대의 개수는 어느 세 점도 일직선 위에 없으면 되므로

${}_9C_2=\mathbf{36}$ ⇦ 답



최소의 개수는 오른쪽 그림과 같은 경우이다.

$\therefore {}_9C_2-3\cdot{}_4C_2+3=\mathbf{21}$ ⇦ 답

9. (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 5개를 택하여 작은 수부터 크기 순으로 나열하면 되므로

${}_6C_5=\mathbf{6}$**(가지)** ⇦ 답

(2) 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 조합이 되므로

$\mathbf{{}_6H_5={}_{10}C_5}$**(가지)** ⇦ 답

(3) $a_1\leqq a_2=a_3\leqq a_4\leqq a_5$인 경우의 수는 ${}_6H_4$

$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4=a_5$인 경우의 수는 ${}_6H_4$

$a_1\leqq a_2=a_3\leqq a_4=a_5$인 경우의 수는 ${}_6H_3$

따라서 구하는 경우의 수는

$\mathbf{{}_6H_5-({}_6H_4+{}_6H_4-{}_6H_3)}$ ⇦ 답

10. 12개의 의자에 네 사람이 앉으므로 빈 의자는 8개

× × × × × × × ×

| | | | | | | | |

빈 의자 사이와 양 끝의 9자리에 네 사람을 배열하는 경우의 수와 같으므로

${}_9P_4=\mathbf{3024}$**(가지)** ⇦ 답

11. (1) 주어진 항등식에서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 더하고, 양변에 $\frac{1}{4}$을 곱하면

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$
$$=\mathbf{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)}$$ ⇦ 답

(2) 항등식

$x(x+1)\cdots(x+r+1)-(x-1)x\cdots(x+r)$

$=(r+2)x(x+1)\cdots(x+r)$

에서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 더하고, 양변에 $\frac{1}{r+2}$을 곱하면

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+r)$$
$$=\mathbf{\frac{1}{r+2}n(n+1)\cdots(n+r-1)}$$ ⇦ 답

(3) 주어진 항등식에서 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 더했을 때, $\frac{a_k}{k!}$를 포함하는 항은

$$\frac{a_k}{k!}\{k(k-1)\cdots1+(k+1)k\cdots2+\cdots+n(n+1)\cdots(n-k+1)\}$$
$$=\frac{a_k}{k!}\sum_{i=1}^{n-k+1} i(i+1)\cdots(i+k+1)$$
$$=\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+1)$$
$$=\frac{a_k}{(k+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-k)!}$$
$$={}_{n+1}C_{k+1}\,a_k$$

$\therefore\ 1^n+2^n+\cdots+n^n$
$$=\sum_{k=1}^{n}{}_{n+1}C_{k+1}\,a_k$$
$$={}_{n+1}C_2\,a_1+{}_{n+1}C_3\,a_2+\cdots+{}_{n+1}C_{n+1}\,a_n$$

p. 134~135

1. (1) 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 적힌 카드가 각각 2장씩이므로

2장의 카드가 같은 숫자인 경우 : 5가지

2장의 카드가 다른 숫자인 경우 : ${}_5C_2=10$(가지)

$\therefore$ 5+10=**15(가지)** ⇦ 답

(2) $P_1=\frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$, $P_2=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{4}{45}$

답 $\mathbf{P_1=\frac{1}{45},\ P_2=\frac{4}{45}}$

2. 두 자리의 양의 정수는 10, 11, 12, $\cdots$, 99의 90개이다. 또, $\log_2 M$이 정수가 되려면 $M=2^n$(n은 정수)꼴이 되어야 하고, 2^n의 꼴의 정수 중 두 자리의 정수는 2^4, 2^5, 2^6의 3개이므로, 구하는 확률은

$$P=\frac{{}_3C_1}{{}_{90}C_1}=\mathbf{\frac{1}{30}}\ ⇦\ 답$$

3. $2n$개에서 두 개를 꺼내는 방법은

${}_{2n}C_2$ 가지

이 때 큰 수를 x, 작은 수를 y라고 하면 조건에 적합한 경우는

$x-y\geqq n$, $1\leqq x$, $y\leqq 2n$

이 만족되는 경우이다.

$y=1$일 때	$x\geqq n+1$	$\therefore$ n가지
$y=2$일 때	$x\geqq n+2$	$\therefore$ $(n-1)$가지
…………	…………	…………
$y=n-1$일 때	$x\geqq 2n-1$	$\therefore$ 2가지
$y=n$일 때	$x\geqq 2n$	$\therefore$ 1가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)\text{(가지)}$$

$$\therefore\ P_n=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{{}_{2n}C_2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(2n-1)}$$
$$=\frac{n+1}{4n-2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n-2}$$
$$=\mathbf{\frac{1}{4}}\ ⇦\ 답$$

4. 구하는 흰 공의 개수를 n개라고 하면 이들 10개 중에서 두 개를 꺼낼 때, 두 개 모두 흰 공이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이라는 뜻이다. 따라서

$$\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3},\quad {}_nC_2=\frac{1}{3}\cdot{}_{10}C_2$$

즉, $\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{10\times9}{2}$

$n^2-n-30=0$, $(n-6)(n+5)=0$

$\therefore$ $n=6$ 또는 $n=-5$

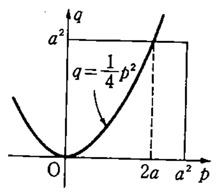
그런데 $n\geqq2$인 정수이어야 하므로 $n=6$

답 **6개**

5. 방정식 $x^2-px+q=0$이 실근을 가지려면

$D=p^2-4q\geqq0$

즉, $q\leqq\frac{1}{4}p^2$



$p=2a$일 때 $q=a^2$이고,

$a\geqq2$이므로 $a^2\geqq2a$이다.

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지는 점 $(p,\ q)$가 존재하는 영역은 위의 그림의 색칠한 부분이고 그 넓이 S는

$$S=\int_0^{2a}\frac{1}{4}p^2dp+a^2(a^2-2a)$$
$$=a^4-\frac{4}{3}a^3$$

$$\therefore\ p(a)=\frac{S}{a^4}=\mathbf{1-\frac{4}{3a}}\ ⇦\ 답$$

또, $\lim_{a\to\infty}p(a)=\mathbf{1}$ ⇦ 답

6. 모든 경우의 수는 $n\times n=n^2$(가지)

(1) 번호가 같은 경우는 n가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

(2) 차이가 i인 경우는 $(1,\ i+1)$, $(2,\ i+2)$, $\cdots$, $(n-i,\ n)$의 $(n-i)$가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2\times(n-i)}{n^2}$$

답 (1) $\frac{1}{n}$ (2) $\frac{2(n-i)}{n^2}$

7. (1) 최대값이 1일 때는 n번 모두 1이 나올 때 이므로 $P_n(1)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$

또, 최대값이 2인 경우는 2가 적어도 한 번 나오고, 그 외에는 1이 나오는 경우이므로

$$P_n(2)=P_n(x\leqq 2)-P_n(x=1)$$
$$=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{2^n-1}{6^n}$$

답 $\mathbf{P_n(1)=\left(\frac{1}{6}\right)^n,\ P_n(2)=\frac{2^n-1}{6^n}}$

(2) 최대값을 M이라고 하면

$$P_n(x)=P_n(M\leqq x)-P_n(M\leqq x-1)$$
$$=\left(\frac{x}{6}\right)^n-\left(\frac{x-1}{6}\right)^n$$

또, $1\leqq x\leqq 5$일 때 $\lim_{n\to\infty}P_n(x)=0$

$x=6$일 때

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)=1$$

답 $\begin{cases}\mathbf{P_n(x)=\left(\frac{x}{6}\right)^n-\left(\frac{x-1}{6}\right)^n}\\ \mathbf{\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\begin{cases}0 & (1\leqq x\leqq 5)\\ 1 & (x=6)\end{cases}}\end{cases}$

8. A, B가 꺼낸 흰 공의 개수가 1개일 때

즉, A : 흰 공 1개, 빨간 공 3개 / B : 흰 공 1개, 빨간 공 2개 일 확률은

$$\frac{{}_4C_1\times{}_6C_3}{{}_{10}C_4}\times\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{6}{35}$$

또, 흰 공의 개수가 2개 일 때

즉, A : 흰 공 2개, 빨간 공 2개 / B : 흰 공 2개, 빨간 공 1개 일 확률은

$$\frac{{}_4C_2\times{}_6C_2}{{}_{10}C_4}\times\frac{{}_2C_2\times{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{3}{35}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{35}+\frac{3}{35}=\mathbf{\frac{9}{35}}$ ⇦ 답

9. (1) $\mathbf{P_3=0.9^2}$ ⇦ 답

$P_4=0.9^2\times(1-0.01)$

$=\mathbf{0.9^2(0.9+0.09)}$ ⇦ 답

(2) $(n+1)$명으로 성공적으로 간주되는 경우는 n명으로 성공적으로 간주되는 경우의 한쪽 끝에 실수하지 않은 한 사람이 추가되는 경우와, $(n-1)$명으로 성공적으로 간주되는 경우의 한쪽 끝에 실수한 사람, 실수하지 않은 사람의 순으로 2명이 추가되는 경우의 합이다.

$\therefore$ $\mathbf{P_{n+1}=0.9\times P_n+0.1\times0.9\times P_{n-1}}$ ⇦ 답

(3) $\begin{pmatrix}\mathbf{P_{n+1}}\\ \mathbf{P_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0.9} & \mathbf{0.09}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P_n}\\ \mathbf{P_{n-1}}\end{pmatrix}$ ⇦ 답

(4) $\begin{pmatrix}P_{n+1}\\ P_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.9 & 0.09\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}P_3\\ P_2\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}P_n\\ P_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.9 & 0.09\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix}P_3\\ P_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{0.9} & \mathbf{0.09}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix}\mathbf{0.9^2}\\ \mathbf{0.9^2}\end{pmatrix}$ ⇦ 답

10. (1) 모든 경우의 수는 $9!$가지

9자리의 수의 9개의 숫자 중 4곳에 짝수를 정하면 나머지는 홀수로 정해지므로 늘어 놓는 방법의 수는 ${}_9C_4$가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_9C_4}{9!}=\mathbf{\frac{1}{2880}} \text{ ⇦ 답}$$

(2) 곱이 짝수일 사건은 곱이 홀수일 사건의 여사건이고 두 수의 곱이 홀수일 경우는 두 수가 홀수일 때이므로, 구하는 확률은

$$1-\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=1-\frac{5}{18}=\mathbf{\frac{13}{18}} \text{ ⇦ 답}$$

(3) 여사건, 즉 $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$ 중 어느 한 쪽이 정수인 사건을 생각하자. $a<b$라고 하면

$a=1$일 때, b는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 8가지

$a=2$일 때, b는 4, 6, 8의 3가지

$a=3$일 때, b는 6, 9의 2가지

$a=4$일 때, b는 8의 1가지

$\therefore$ (여사건의 경우의 수) $=14$ (가지)

따라서 구하는 경우의 수는

${}_9C_2-14=22$ (가지)

$\therefore$ (구하는 확률) $=\frac{22}{36}=\mathbf{\frac{11}{18}}$ ⇦ 답

11. (1) $\mathbf{P_1=\frac{2}{5}}$ ⇦ 답

$$P_2=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{13}{25}} \text{ ⇦ 답}$$

$$P_3=\frac{13}{25}\times\frac{2}{5}+\left(1-\frac{13}{25}\right)\times\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{62}{125}} \text{ ⇦ 답}$$

(2) n회까지의 숫자의 합이 짝수가 되는 것은

(i) $(n-1)$회째까지의 숫자의 합이 짝수이고, n회째에 짝수일 경우

(ii) $(n-1)$회째까지의 숫자의 합이 홀수이고 n회째에는 홀수일 경우

중 어느 하나가 된다.

$$\therefore P_n=P_{n-1}\times\frac{2}{5}+(1-P_{n-1})\times\frac{3}{5}$$
$$=\mathbf{-\frac{1}{5}P_{n-1}+\frac{3}{5}} \text{ ⇦ 답}$$

(3) (2)로부터

$$P_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(P_1-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ P_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} P_n=\frac{1}{2}$$ ⇦ 답

p. 140~141

1. (i) 2번 연속인 경우 ○○×, ×○○에서
$6\times5\times2=60$ (가지)
(ii) 3번 연속인 경우 ○○○에서 6가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{60+6}{6^3}=\frac{11}{36}$ ⇦ 답

2. 동전의 앞면과 뒷면을 각각 H, T라고 하자.
6번 던지는 모든 경우의 수는 $2^6=64$ (가지)
마지막에 점 X_1에 있으려면, 6번째는 반드시 T가 나와야 하므로 1회부터 5회까지 던지는 중에
(i) H가 나오지 않는 경우는 TTTTT의 1가지
(ii) H가 1번 나오는 경우는 $\frac{5!}{4!}=5$ (가지)
(iii) H가 2번 나오는 경우는 H가 연속될 수 없으므로 $\frac{5!}{2!\,3!}-\frac{4!}{3!}=10-4=6$ (가지)
(iv) H가 3번 나오는 경우는 H가 연속될 수 없으므로 HTHTH의 1가지
따라서 구하는 확률은 $\frac{1+5+6+1}{64}=\frac{13}{64}$ ⇦ 답

《다른 풀이》 동전을 n회 던져서 마지막에 X_1에 있을 경우의 수를 $f(n)$이라고 하면
$f(1)=1$ ($\because$ (T))
$f(2)=2$ ($\because$ (TT), (HT))
이고 $n\geq3$일 때는 $(n-1)$번째 시행 후 X_1에 있을 때 n번째 시행에서 T인 경우와, $(n-2)$번째 시행 후 X_1에 있을 때 (HT)인 경우의 수의 합과 같다.
$\therefore\ f(n)=f(n-1)+f(n-2)\ (n\geq3)$
따라서 수열 $\{f(n)\}$은 1, 2, 3, 5, 8, 13, …과 같으므로 구하는 확률은 $\frac{f(6)}{2^6}=\frac{13}{64}$

3. 모든 경우의 수는 ${}_nC_3$가지
(1) 연속된 3개의 정수를 k, $k+1$, $k+2$라고 하면 $k\geq1$이고, $k+2\leq n$에서 $1\leq k\leq n-2$
따라서 구하는 확률은 $\frac{n-2}{{}_nC_3}=\frac{6}{n(n-1)}$ ⇦ 답
(2) 연속된 두 개의 정수를 k, $k+1$이라 하고 나머지 한 개의 정수를 m이라고 할 때
(i) $m<k$인 경우
1에서 n까지의 정수 중 m보다 작은 정수의 개수를 x개, m보다 크고 k보다 작은 정수의 개수를 y개, $k+1$보다 큰 정수의 개수를 z개라고 하면
$x+y+z=n-3$
(단, $x\geq0$, $y\geq1$, $z\geq0$)
이것의 정수해의 개수는 ${}_3H_{n-4}={}_{n-2}C_2$
(ii) $m>k+1$일 때도 마찬가지이므로
구하는 확률은
$2\cdot\frac{{}_{n-2}C_2}{{}_nC_3}=\frac{6(n-3)}{n(n-1)}$ ⇦ 답
(3) (1), (2)의 여사건이므로
구하는 확률은
$1-\left(\frac{6}{n(n-1)}+\frac{6(n-3)}{n(n-1)}\right)$
$=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$ ⇦ 답

《다른 풀이》 택하여진 3개의 수를 일반성을 잃지 않고 $a<b<c$라고 할 수 있다.
1에서 n까지의 정수 중에서
a보다 작은 정수의 개수를 p개,
a보다 크고 b보다 작은 정수의 개수를 q개,
b보다 크고 c보다 작은 정수의 개수를 r개,
c보다 큰 정수의 개수를 s개라고 하면
$p+q+r+s=n-3$
(단, $p\geq0$, $q\geq1$, $r\geq1$, $s\geq0$)
이것을 만족하는 정수해의 개수는
${}_4H_{n-5}={}_{n-2}C_3$
따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_{n-2}C_3}{{}_nC_3}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$

4. (1) 상자 B가 비어 있으려면 2번 던져서 나온 주사위의 눈이 같아야 하므로 구하는 확률은
$\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$ ⇦ 답
(2) 주사위를 3번 던져서 상자 B에 공이 1개 들어 있는 경우는
(i) 3번 중 같은 눈이 2번 나올 때
${}_6C_2\times2\times\frac{3!}{2!}=90$(가지)
(ii) 같은 눈이 3번 나올 때 6가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{90+6}{6^3}=\frac{4}{9}$ ⇦ 답

5. (1) 흰 공이 나오는 사건을 E라고 하면
$P(E)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot\frac{k}{6}$

$=\frac{1}{36}(1+2+\cdots+6)$

$=\frac{7}{12}$ ⇦ 답

(2) 홀수 번호의 상자가 택해지는 사건을 F라고 하면

$$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}+\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{12}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(F\mid E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\mathbf{\frac{3}{7}}$$ ⇦ 답

6. (1) n회째 명중할 경우는
$(n-1)$회째 명중하고, n회째 명중하거나
$(n-1)$회째에는 명중하지 못하고 n회째 명중해야 하므로

$$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_{n-1}\times\frac{7}{8}+(1-\mathrm{P}_{n-1})\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{8}\mathrm{P}_{n-1}+\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \mathbf{P}_n=\frac{1}{8}\mathbf{P}_{n-1}+\frac{3}{4}\ (\text{단, } n=2,\ 3,\ \cdots)$$ ⇦ 답

(2) $\mathrm{P}_n=\frac{1}{8}\mathrm{P}_{n-1}+\frac{3}{4}$의 양변에서 $\frac{6}{7}$을 빼면

$$\mathrm{P}_n-\frac{6}{7}=\frac{1}{8}\left(\mathrm{P}_{n-1}-\frac{6}{7}\right)$$

따라서 수열 $\left\{\mathrm{P}_n-\frac{6}{7}\right\}$은 첫째항이 $\mathrm{P}_1-\frac{6}{7}=-\frac{5}{14}$ 이고 공비가 $\frac{1}{8}$인 등비수열이므로

$$\mathrm{P}_n-\frac{6}{7}=-\frac{5}{14}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \mathbf{P}_n=\frac{6}{7}-\frac{5}{14}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$ ⇦ 답

(3) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{7}-\frac{5}{14}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right)=\mathbf{\frac{6}{7}}$ ⇦ 답

7. (1) 5개의 공을 서로 다른 세 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_3\Pi_5=3^5$ (가지)

(《참고》 이것을 ${}_3\mathrm{H}_5$라고 하면 안 된다. 왜냐하면, A, B, C에 각각 (5개, 0개, 0개)씩인 경우와 (4개, 1개, 0개)씩인 경우는 일어날 기대 정도가 다르기 때문이다.)

또, 빈 상자가 1개인 경우는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$ (가지)
다른 두 상자에 공이 적어도 한 개 들어가는 경우는 ${}_2\Pi_5-2=30$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{3\times30}{3^5}=\mathbf{\frac{10}{27}}$ ⇦ 답

(2) $(n-1)$번째까지는 실패하고 n번째에 성공할 확률이므로 구하는 확률은

$$\left(1-\frac{10}{27}\right)^{n-1}\times\frac{10}{27}=\left(\frac{17}{27}\right)^{n-1}\cdot\frac{10}{27}$$ ⇦ 답

8. (1) p_n은 $2n$회 시행 중 앞면이 $(n+1)$회, 뒷면이 $(n-1)$회 나올 때의 확률이므로

$$p_n={}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{(2n)\,!}{(n+1)\,!\,(n-1)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$ ⇦ 답

다음 $(2n-1)$회째에 점 P가 1에 있으려면 앞면이 n회, 뒷면이 $(n-1)$회 나올 경우이므로 그 확률은

$${}_{2n-1}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\therefore\ q_n={}_{2n-1}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(2n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$ ⇦ 답

(2) 위의 결과에서

$$\frac{p_n}{p_n-q_n}=\frac{\dfrac{(2n)\,!}{(n+1)\,!\,(n-1)\,!}}{\dfrac{(2n)\,!}{(n+1)\,!\,(n-1)\,!}-\dfrac{(2n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)\,!}}$$

$$=\frac{2n}{n-1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{8}\log_2\frac{p_n}{p_n-q_n}$$

$$=\log_2\frac{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$$

$$=\log_2 2^{10}=\mathbf{10}$$ ⇦ 답

9. (1) 1회 시행하면 A에는 흰 공 1개, 빨간 공 1개가 남고, B에는 흰 공 1개, 빨간 공 1개가 남는다.

따라서 2회째에는 A에서 빨간 공을, B에서는 흰 공을 꺼내 교환해야 하므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$ ⇦ 답

(2) 3회 시행의 결과 A에 흰 공이 1개, 빨간 공이 1개인 경우는 다음 표와 같다.

횟수	1회		2회		3회		확률
주머니	A	B	A	B	A	B	
꺼내는 공의 색깔	W	R	W	W	W	W	$\frac{1}{16}$
	W	R	W	W	R	R	$\frac{1}{16}$
	W	R	W	R	R	W	$\frac{1}{4}$
	W	R	R	W	W	R	$\frac{1}{4}$
	W	R	R	R	W	W	$\frac{1}{16}$
	W	R	R	R	R	R	$\frac{1}{16}$

(단, W : 흰 공, R : 빨간 공)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{4} \Leftarrow \text{답}$$

(3) 당연히 $p_1=0$, $q_1=1$

n회째에 A에 흰 공이 1개, 빨간 공이 1개가 되는 경우는 $(n-1)$회째 A에 흰 공이 2개인 경우와, $(n-1)$회째 A에 흰 공이 1개, 빨간 공이 1개일 때 n회째 A, B에서 같은 색의 공을 교환하는 경우이고, $(n-1)$회째 A에 빨간 공이 2개일 때의 3가지 경우가 있으므로

$$q_n=p_{n-1}+q_{n-1}\times\frac{1}{4}\times 2+(1-p_{n-1}-q_{n-1})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{q_n=-\frac{1}{2}q_{n-1}+1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \Leftarrow \text{답}$$

$$\therefore\ q_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

또, n회째 A에 흰 공이 2개이려면 $(n-1)$회째 A에 흰 공이 1개, 빨간 공이 1개일 때 주머니 A, B에서 각각 빨간 공, 흰 공을 꺼내 교환해야 하므로

$$p_n=q_{n-1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

그리고 $n=1$일 때 $p_1=0$이므로 성립

$$\therefore\ \boldsymbol{p_n=\frac{1}{12}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}} \Leftarrow \text{답}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{12}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{6}} \Leftarrow \text{답}$$

$$\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\frac{2}{3}} \Leftarrow \text{답}$$

p. 142～143 (고급 문제)

1. (1) $x=k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이면 $k<y<n+1-k$이므로 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $(n-2k)$가지

(ⅰ) n이 홀수이면 구하는 경우의 수는

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k)=\boldsymbol{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\textbf{(가지)} \Leftarrow \text{답}$$

(ⅱ) n이 짝수이면 구하는 경우의 수는

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(n-2k)=\boldsymbol{\frac{n(n-2)}{4}}\textbf{(가지)} \Leftarrow \text{답}$$

(2) 공차를 $k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라고 하면

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1+k,\ 1+2k)$,
$(2,\ 2+k,\ 2+2k)$,
……………………
$(n-2k,\ n-k,\ n)$

이므로 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $(n-2k)$가지

따라서 (1)의 경우와 마찬가지로

답 $\begin{cases} n\text{이 홀수이면 } \left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2\text{가지} \\ n\text{이 짝수이면 } \left(\dfrac{n(n-2)}{4}\right)\text{가지} \end{cases}$

2. (1) $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=8$이므로

답 $\begin{cases} \boldsymbol{f(2)-f(1)=2} \\ \boldsymbol{f(3)-f(2)=4} \end{cases}$

(2) $(n-1)$개의 원으로 평면이 $f(n-1)$개로 분할되어 있다고 하면, 제 n번째 원을 그리면 늘어난 분할된 평면의 개수는 $2(n-1)$개이므로

$$\boldsymbol{f(n)-f(n-1)=2(n-1)}\ (n\geq 2) \Leftarrow \text{답}$$

(3) $f(n)=f(1)+\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$$=2+2\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)=\boldsymbol{n^2-n+2} \Leftarrow \text{답}$$

3. (방법 Ⅰ) $c\leq b-3\leq a-5$이므로 $1\leq c\leq 7$

$c=k$일 때, $b\geq k+3$, $b\leq a-2$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$1+2+\cdots+(8-k)=\frac{1}{2}(8-k)(9-k)$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{2}(8-k)(9-k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}i(i+1)=84$$

답 $\begin{cases} \text{(1) } \boldsymbol{7}\quad \text{(2) } \boldsymbol{k+3} \\ \text{(3) } \boldsymbol{\frac{1}{2}(8-k)(9-k)}\ \text{(4) } \boldsymbol{84} \end{cases}$

(방법 Ⅱ) 1에서 12까지의 정수 중 c보다 작은 수를 x개라고 하면 $x\geq 0$

c보다 크고 b보다 작은 정수의 개수를 y개라고 하면 $b\geq c+3$이므로 $y\geq 2$

b보다 크고 a보다 작은 정수의 개수를 z개라고 하면 $a\geq b+2$이므로 $z\geq 1$

따라서 a보다 큰 정수의 개수를 u개라고 하면 $u\geq 0$

따라서 $x+y+z+u=12-3=9$

즉, $x+u+z+u=9$이고

$x\geq 0$, $y\geq 2$, $z\geq 1$, $u\geq 0$인 정수해의 개수는

${}_4H_{9-3}={}_9C_6=84$

답 (1) **2** (2) **1** (3) **9** (4) **84** (5) **84**

4. (1) 1단씩 x번, 2단씩 y번, 3단씩 z번 오른다고 하면 $x+2y+3z=7$이므로

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 2)$, $(0,\ 2,\ 1)$,
$(2,\ 1,\ 1)$, $(4,\ 0,\ 1)$,
$(1,\ 3,\ 0)$, $(3,\ 2,\ 0)$,
$(5,\ 1,\ 0)$, $(7,\ 0,\ 0)$

따라서 오르는 방법은

$$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{5!}{4!}+\frac{4!}{3!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{6!}{5!}+1$$
$=3+3+12+5+4+10+6+1=$**44 (가지)** ⇦ 답

《다른 풀이》 n단의 계단을 오르는 방법을 $f(n)$가지 라고 하면

$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)$

(단, $n\geq 4$, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=4$)

$\therefore f(4)=7$

$f(5)=13$

$f(6)=24$

$\therefore f(7)=44$

(2) 한꺼번에 1단, 2단, 3단을 오르는 시간의 비가 3 : 4 : 5이므로 각 방법의 소요 시간을 $3t$, $4t$, $5t$라고 하면

2단씩 오를 때 한 단 오르는 시간은

$4t\times\frac{1}{2}=2t$

3단씩 오를 때 한 단 오르는 시간은

$5t\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}t$

즉, $3t>2t>\frac{5}{3}t$이므로 한 번에 3단씩 오르는 것이 시간이 가장 적게 걸리게 된다.

따라서 (1)의 경우 중에서

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 2)$일 때 소요 시간은

$5t\times 2+3t=13t$

$(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)$일 때 소요 시간은

$5t\times 1+4t\times 2=13t$

로서 가장 빠르다.

답 $\begin{cases}\textbf{3단 2번, 1단 1번}\\ \textbf{3단 1번, 2단 2번}\end{cases}$

5. $A=B=k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$일 때

$A=k$일 확률은 $\frac{1}{6}$

$B=k$일 확률은 ${}_6C_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{6-k}$

그런데 $A=k$일 사건과 $B=k$일 사건은 서로 독립이므로

$A=B=k$일 확률은 $\frac{1}{6}\times{}_6C_k\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{{}_6C_k}{6\times 2^6}$

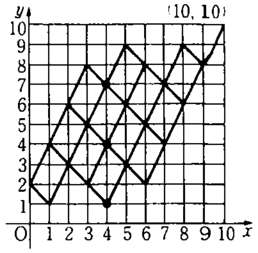
따라서 $A=B$일 확률은 $\sum_{k=1}^{6}\frac{{}_6C_k}{6\cdot 2^6}=\mathbf{\frac{2^6-1}{6\times 2^6}}$ ⇦ 답

6. 10회째에 처음 칩이 10개가 되어야 하므로, 9회째 게임의 결과 칩이 8개가 되고, 10회째에 이겨야 한다.

9회까지 a번 이겼다고 하면, 진 횟수는 $(9-a)$번이므로 칩의 개수는

$2+2\times a+(-1)(9-a)=8\quad\therefore a=5$

여기서 x회째 칩의 개수를 y개라고 하면 이 게임의 경과는 오른쪽 좌표평면에 그려진 실선을 따라 움직이는 최단 거리의 길잡이의 경우와 같다.



따라서 점(0, 2)에서 출발하여 점(9, 8)에 이르기까지

점(4, 7)을 지날 경우의 수는

$4\times(3\times 2+1)=28$ (가지)

점(4, 4)를 지날 경우의 수는

$(6-1)\times(10-1)=45$ (가지)

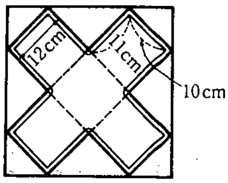
점(4, 1)을 지날 경우의 수는

$2\times 4=8$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$(28+45+8)\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{16}{729}}$ ⇦ 답

7. 오른쪽 그림과 같이 흑백의 무늬가 있는 한 변의 길이가 $24\sqrt{2}$ cm인 정사각형의 타일을 깐 바닥으로 생각해 보면



$P_1=\frac{(11\times 10)\times 4+12^2-\pi}{(24\sqrt{2})^2}$

$=\mathbf{\frac{584-\pi}{1152}}$ ⇦ 답

$P_2=\frac{25\times 4+50\times 4}{(24\sqrt{2})^2}=\mathbf{\frac{25}{96}}$ ⇦ 답

8. 사건 E를 흰 공이 1개, 검은 공이 2개가 나오는 사건이라 하고, 사건 E_A, E_B, E_C를 각각 주머니 A, B, C에서 나오는 사건이라고 하면

$P(E)=P(E_A\cap E)+P(E_B\cap E)+P(E_C+E)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_1\cdot{}_5C_2}{{}_7C_3}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_2}{{}_7C_3}$

$+\frac{1}{3}\cdot\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_2}{{}_7C_3}$

$=\frac{20+18+12}{105}=\frac{10}{21}$

$\therefore P(E_A\,|\,E)=\frac{2}{5}$, $P(E_B\,|\,E)=\frac{9}{25}$,

$P(E_C\,|\,E)=\frac{6}{25}$

따라서 A에서 나왔을 확률이 가장 크다.

답 **A**

9. (1) A가 빨간 구슬, 흰 구슬, 파란 구슬을 내어 이길 확률은 각각

$\frac{x}{6}\times\frac{3}{6}$, $\frac{y}{6}\times\frac{2}{6}$, $\frac{z}{6}\times\frac{1}{6}$

이므로 A가 이길 확률은

$\dfrac{3x+2y+z}{36}$ ⇦ 답

(2) A의 득점의 기대값을 E라고 하면

$$E=\frac{3x}{36}\times1+\frac{2y}{36}\times2+\frac{z}{36}\times2$$
$$=\frac{3x+4y+2z}{36}$$
$$=\frac{x+2y+12}{36}\ (\because\ x+y+z=6)$$

그런데 문제의 조건에서

$$\frac{3x+2y+z}{36}\geqq\frac{4}{9}$$

이므로 $z=6-x-y$를 대입하여 정리하면

$$2x+y\geqq10$$

또 $x\geqq0$, $y\geqq0$, $x+y\leqq6$이므로 이 부등식을 만족하는 정수 x, y는

$(x=4,\ y=2)$, $(x=5,\ y=0)$,
$(x=5,\ y=1)$, $(x=6,\ y=0)$

뿐이므로 기대값 E가 최대일 때는

$\boldsymbol{x=4,\ y=2,\ z=0}$ ⇦ 답

V. 통　계

p. 148~149

1. 부모 사이에 서는 자녀의 수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

$$P(X=0)=\frac{4!\times2}{5!}=\frac{2}{5}$$
$$P(X=1)=\frac{3\times3!\times2!}{5!}=\frac{3}{10}$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3P_2\times2!\times2!}{5!}=\frac{1}{5}$$
$$P(X=3)=\frac{3!\times2!}{5!}=\frac{1}{10}$$
$$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}=1$$
$$V(X)=\left(0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{10}\right)-1^2$$
$$=2-1=\mathbf{1}$$ ⇦ 답

2. $\sum_{x=1}^{n}P(X=x)=1$이므로 $\sum_{x=1}^{n}kx=1$

$$k\sum_{x=1}^{n}x=1,\qquad k\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=1$$
$$\therefore\ k=\frac{2}{n(n+1)}$$
$$E(X)=\sum_{x=1}^{n}x\cdot P(X=x)$$
$$=\sum_{x=1}^{n}x\cdot\frac{2}{n(n+1)}x=\sum_{x=1}^{n}\frac{2}{n(n+1)}x^2$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}x^2$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{2n+1}{3}$$

답 (1) $\boldsymbol{\dfrac{2}{n(n+1)}}$　(2) $\boldsymbol{\dfrac{2n+1}{3}}$

3. $\sum_{r=1}^{n}P(X=r)=1$이므로

$$\sum_{r=1}^{n}(a+br)=\sum_{r=1}^{n}a+b\sum_{r=1}^{n}r$$
$$=na+b\times\frac{n(n+1)}{2}=1$$
$$\therefore\ 2na+n(n+1)b=2\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$E(X)=\sum_{r=1}^{n}r\cdot P(X=r)=\dfrac{n+2}{3}$이므로

$$\sum_{r=1}^{n}r(a+br)=a\sum_{r=1}^{n}r+b\sum_{r=1}^{n}r^2=\frac{n+2}{3}$$
$$\therefore\ 3n(n+1)a+n(n+1)(2n+1)b$$
$$=2(n+2)\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠$\times(2n+1)-$㉡을 하면　$n(n-1)a=2(n-1)$

$n\geqq2$이므로　$a=\dfrac{2}{n}$

이것을 ㉠에 대입하면　$b=\dfrac{-2}{n(n+1)}$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{\frac{2}{n}}{\frac{-2}{n(n+2)}}=\boldsymbol{-(n+1)}$$ ⇦ 답

4. 확률변수 X는 이항분포 $B\left(3,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=np=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$
$$V(X)=npq=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3$$
$$\therefore\ f(a)=E((X-a)^2)$$
$$=E(X^2)-2aE(X)+a^2$$
$$=a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 $a=\dfrac{3}{2}$일 때, $f(a)$의 최소값은 $\dfrac{3}{4}$이다.

답 (1) $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$　(2) $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

5. 3의 배수가 나오는 횟수를 Y라고 하면 Y는 이항분포 $B\left(9,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ E(Y)=np=3,\ V(Y)=npq=2$$
$$\therefore\ E(Y^2)=V(Y)+\{E(Y)\}^2=11$$

3의 배수가　Y회 나오면 3의 배수가 아닌 눈은

$(9-Y)$회 나오므로 이들의 차의 제곱은

$$X=\{Y-(9-Y)\}^2=(2Y-9)^2$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}((2Y-9)^2)$$
$$=4\mathrm{E}(Y^2)-36\mathrm{E}(Y)+81$$
$$=4\times11-36\times3+81=\mathbf{17}$$ ⇦ 답

6. X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에 따르므로

$$\mathrm{P}(X=0)={}_n\mathrm{C}_0p^0(1-p)^n=(1-p)^n>0$$
$$\mathrm{P}(X=1)={}_n\mathrm{C}_1p(1-p)^{n-1}$$
$$\mathrm{P}(X=2)={}_n\mathrm{C}_2p^2(1-p)^{n-2}$$

${}_n\mathrm{C}_1p(1-p)^{n-1}=6(1-p)^n$에서

$np=6(1-p)$ ……㉠

${}_n\mathrm{C}_2p^2(1-p)^{n-2}=2{}_n\mathrm{C}_1p(1-p)^{n-1}$에서

$(n-1)p=4(1-p)$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $n=3,\ p=\dfrac{2}{3}$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{4}{9}}$$ ⇦ 답

7. (1) $X_1>\dfrac{1}{2}$인 사건을 A, $X_2>\dfrac{1}{2}$인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A^c)=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{n}{2}}{n-1}=\frac{1}{2}$$

또, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{n-2}{4(n-1)}\neq\dfrac{1}{4}=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$

따라서 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

(2) X_1의 확률분포는

$$\mathrm{P}\left(X_1=\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(X_1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\mathbf{\frac{n+1}{2n}}$$ ⇦ 답

(3) $\mathrm{V}(X_1)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{i^2}{n^2}-\{\mathrm{E}(X_1)\}^2=\frac{n^2-1}{12n^2}$

$$\therefore\ \sigma(X_1)=\mathbf{\frac{\sqrt{3(n^2-1)}}{6n}}$$ ⇦ 답

8. (1) $(1+x)^l=\displaystyle\sum_{k=0}^{l}{}_l\mathrm{C}_kx^k$

$$={}_l\mathrm{C}_0+{}_l\mathrm{C}_1x+{}_l\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_l\mathrm{C}_nx^n+\cdots+{}_l\mathrm{C}_lx^l$$

$(1+x)^m=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_kx^k$

$$={}_m\mathrm{C}_0+{}_m\mathrm{C}_1x+{}_m\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_nx^n+\cdots+{}_m\mathrm{C}_mx^m$$

위의 두 항등식의 우변의 곱에서 x^n의 계수를 구하면

$${}_l\mathrm{C}_0\cdot{}_m\mathrm{C}_n+{}_l\mathrm{C}_1\cdot{}_m\mathrm{C}_{n-1}+{}_l\mathrm{C}_2\cdot{}_m\mathrm{C}_{n-2}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_n\cdot{}_m\mathrm{C}_0$$

즉, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_l\mathrm{C}_k\cdot{}_m\mathrm{C}_{n-k}$이고 이것은 $(1+x)^{l+m}$의 전개식에서 x^n의 계수 ${}_{l+m}\mathrm{C}_n$과 일치한다.

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n}{}_l\mathrm{C}_k\cdot{}_m\mathrm{C}_{n-k}={}_{l+m}\mathrm{C}_n$$

(2) $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{{}_M\mathrm{C}_k\cdot{}_{2M}\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}$

(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

① $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\cdot p_k$

$$=\frac{1}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}\sum_{k=0}^{n}k\cdot{}_M\mathrm{C}_k\cdot{}_{2M}\mathrm{C}_{n-k}$$
$$=\frac{1}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{M}{k}\cdot{}_{M-1}\mathrm{C}_{k-1}\cdot{}_{2M}\mathrm{C}_{n-k}$$
$$=\frac{M}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}\sum_{k=0}^{n}{}_{M-1}\mathrm{C}_k\cdot{}_{2M}\mathrm{C}_{n-k-1}$$
$$=\frac{M\cdot{}_{3M-1}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}$$
$$=\frac{M\cdot{}_{3M-1}\mathrm{C}_{n-1}}{\frac{3M}{n}\cdot{}_{3M-1}\mathrm{C}_{n-1}}$$
$$=\mathbf{\frac{n}{3}}$$ ⇦ 답

② $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\mathrm{P}_k$

$$=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\cdot\frac{{}_M\mathrm{C}_k\cdot{}_{2M}\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}$$
$$=\frac{1}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\cdot\frac{M(M-1)}{k(k-1)}\cdot{}_{M-2}\mathrm{C}_{k-2}\cdot{}_{2M}\mathrm{C}_{n-k}$$
$$=\frac{M(M-1)}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}\sum_{k=0}^{n-2}{}_{M-2}\mathrm{C}_k\cdot{}_{2M}\mathrm{C}_{n-k-2}$$
$$=\frac{M(M-1)}{{}_{3M}\mathrm{C}_n}\cdot{}_{3M-2}\mathrm{C}_{n-2}$$
$$=\frac{M(M-1)\cdot{}_{3M-2}\mathrm{C}_{n-2}}{\frac{3M(3M-1)}{n(n-1)}\cdot{}_{3M-2}\mathrm{C}_{n-2}}$$
$$=\frac{(M-1)n(n-1)}{3(3M-1)}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\mathrm{E}(X)+\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\mathrm{P}_k-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{n}{3}+\frac{(M-1)n(n-1)}{3(3M-1)}-\left(\frac{n}{3}\right)^2$$
$$=\mathbf{\frac{2n(3M-n)}{9(3M-1)}}$$ ⇦ 답

9. 1회 시행을 한 결과 앞면이 위에 있는 것이 7개, 뒷면이 위에 있는 것이 4개이므로 2회째 앞면이 뒷면으로 바뀐 것을 a개, 뒷면이 앞면으로 바뀐 것을 b개라고 하면

(1) $\begin{cases} a+b=4 \\ X=7-a+b \ (\text{단, } 0\leqq a\leqq 4) \end{cases}$

따라서 $X=9$일 때 $a=1,\ b=3$

$$\therefore\ P(X=9)=\frac{{}_7C_1\times{}_4C_3}{{}_{11}C_4}$$
$$=\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{165}} ⇦ \text{답}$$

(2) (1)에서 $X=3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$이므로 확률분포는

$$P(X=3)=\frac{{}_7C_4}{{}_{11}C_4}=\frac{35}{330}$$
$$P(X=5)=\frac{{}_7C_3\cdot{}_4C_1}{{}_{11}C_4}=\frac{140}{330}$$
$$P(X=7)=\frac{{}_7C_2\cdot{}_4C_2}{{}_{11}C_4}=\frac{126}{330}$$
$$P(X=9)=\frac{{}_7C_1\cdot{}_4C_3}{{}_{11}C_4}=\frac{28}{330}$$
$$P(X=11)=\frac{{}_4C_4}{{}_{11}C_4}=\frac{1}{330}$$

따라서 X의 확률분포는 다음과 같다.

답

X	3	5	7	9	11	합
확률	$\frac{35}{330}$	$\frac{140}{330}$	$\frac{126}{330}$	$\frac{28}{330}$	$\frac{1}{330}$	1

(3) $$E(X)=3\times\frac{35}{330}+5\times\frac{140}{330}+7\times\frac{126}{330}$$
$$+9\times\frac{28}{330}+11\times\frac{1}{330}$$
$$=\frac{65}{11}\ (\text{개})$$

$$V(X)=3^2\times\frac{35}{330}+5^2\times\frac{140}{330}+7^2\times\frac{126}{330}$$
$$+9^2\times\frac{38}{330}+11^2\times\frac{1}{330}-\left(\frac{65}{11}\right)^2$$
$$=\frac{1568}{605}$$

답 $\mathbf{E(X)=\frac{65}{11},\ V(X)=\frac{1568}{605}}$

10. 숫자 n이 나타날 때, 주사위를 n회 던져서 짝수가 나온 횟수를 Y라고 하면 그 때의 득점은 $R=100Y$이고 Y의 확률분포는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(R)=E(100Y)=100E(Y)=100\times\left(n\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=50n\ (\text{단, } n=1,\ 2,\ \cdots,\ 19)$$
$$\therefore\ E(X)=\sum_{n=1}^{19}E(R)\times\frac{n}{190}$$
$$=\sum_{n=1}^{19}\left(50n\times\frac{n}{190}\right)$$
$$=\frac{5}{19}\times\frac{19\times20\times39}{6}$$
$$=\mathbf{650} ⇦ \text{답}$$

p. 155~156

1. (1) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 ax(1-x)\,dx=\frac{a}{6}=1$

$\therefore\ a=6$

(2) $P(0.3\leqq X\leqq 0.7)=\int_{0.3}^{0.7}6x(1-x)\,dx=0.568$

(3) $E(X)=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)\,dx=\frac{1}{2}$

$V(X)=\int_0^1 x^2\cdot 6x(1-x)\,dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{20}$

답 (1) **6** (2) **0.568** (3) $\mathbf{E(X)=\frac{1}{2},\ V(X)=\frac{1}{20}}$

2. $$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 ax\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^2=2a=1$$
$$\therefore\ a=\frac{1}{2}$$

$P(X\leqq 1)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{4}$이므로

3개 중 2개가 1보다 작을 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{64}} ⇦ \text{답}$$

3. 파이프의 지름을 X라고 하면, 확률변수 X는 $N(100,\ 2^2)$을 따르므로

합격품일 확률은

$$P(97\leqq X\leqq 103)=P(-1.5\leqq Z\leqq 1.5)$$
$$\left(\leftarrow Z=\frac{X-100}{2}\right)$$
$$=2\times P(0\leqq Z\leqq 1.5)$$
$$=0.8664$$

따라서 불량품의 비율은

$1-0.8664=\mathbf{0.1336}$ ⇦ 답

4. $Z=\frac{X-m}{\sigma}$을 비교한다.

영어 : $Z=\frac{70-51}{16}\fallingdotseq 1.19$

수학 : $Z=\frac{78-62}{14}\fallingdotseq 1.14$

국어 : $Z=\frac{68-50}{18}\fallingdotseq 1.00$

∴ **영어, 수학, 국어** ⇦ 답

5. 점수 X는 $N(65,\ 10^2)$을 따르므로 합격하기 위한 최저 점수를 k라고 하면

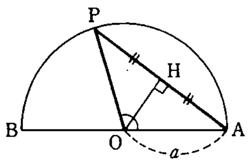
$$P(X\geqq k)=P\left(Z\geqq\frac{k-65}{10}\right)=\frac{40}{1600}$$
$$1-P\left(Z\leqq\frac{k-65}{10}\right)=0.025$$
$$\therefore\ P\left(Z\leqq\frac{k-65}{10}\right)=0.975$$

$\therefore \dfrac{k-65}{10}=1.96$

$\therefore k=84.6 \fallingdotseq \mathbf{85}$ **(점)**

답 ③

6. 오른쪽 그림과 같이 O 에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{AH}=\overline{PH}$

$\angle AOH=\dfrac{\theta}{2}$ 이므로

$\overline{AP}=2\overline{AH}=2a\sin\dfrac{\theta}{2}\geqq a$ 에서

$\sin\dfrac{\theta}{2}\geqq\dfrac{1}{2}\left(0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ 에서 $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\pi$

따라서 구하는 확률은

$$P(\overline{AP}\geqq a)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}}$$ ⇦ 답

7. 판별식 $D=x^2-4>0$에서 $x>2,\ x<-2$

$Z=\dfrac{X-1}{1}$로 놓으면

$P(X>2,\ X<-2)=P(Z>1,\ Z<-3)$

$=P(Z>1)+P(Z<-3)$

$=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1)+0.5-P(0\leqq Z\leqq 3)$

$=1-0.3413-0.4987$

$=\mathbf{0.16}$ ⇦ 답

8. 1회의 시행에서 동시에 앞면이 나올 확률은 $p=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$이고, 동시에 앞면이 나오는 횟수 X는 이항분포 $B\left(300,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르므로

$m=np=300\times\dfrac{1}{4}=75$

$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{300\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}}=7.5$

그런데 n이 충분히 크므로 X는 정규분포 $N(75,\ 7.5^2)$을 따른다고 볼 수 있다.

$\therefore P(X\leqq 60)=P\left(Z\leqq\dfrac{60-75}{7.5}\right)$

$=P(Z\leqq -2)$

$=0.5-P(0\leqq Z\leqq 2)$

$=0.5-0.4772$

$=\mathbf{0.0228}$ ⇦ 답

9. 사망자의 수를 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(10000,\ \dfrac{1}{10}\right)$을 따른다.

$E(X)=np=10000\times\dfrac{1}{10}=1000$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{10000\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}}=30$

그런데 $n=10000$이 충분히 크므로 X는 정규분포 $N(1000,\ 30^2)$을 따른다고 볼 수 있다.

$Z=\dfrac{X-1000}{30}$으로 표준화하면 Z는 $N(0,\ 1^2)$을 따른다. 준비해야 할 사람 수를 n명이라고 할 때 $X=n$에 대응하는 Z의 값을 k라고 하면

$P(X>n)=P(Z>k)$

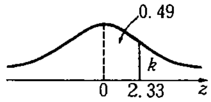
$=0.5-P(0\leqq Z\leqq k)\leqq 0.01$

$\therefore P(0\leqq Z\leqq k)\geqq 0.49$

$\therefore k\geqq 2.33$

$\therefore k=\dfrac{n-1000}{30}\geqq 2.33$

$\therefore n\geqq 1069.9$

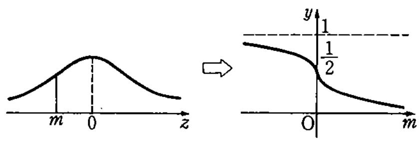


답 ②

《참고》 판단 착오일 확률은 준비한 사람 수 n보다 사망자가 많을 확률, 즉 $P(X>n)$이다.

10. $Z=\dfrac{X-m}{1}$이라고 하면, Z는 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X\leqq 0)=P(Z\leqq -m)=P(Z\geqq m)=f(m)$



$f(m)$은 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이이므로

$m\to-\infty$이면 $f(m)\to 1$

$m\to\infty$이면 $f(m)\to 0$

또 $m=0$이면 $f(m)=\dfrac{1}{2}$

m이 커짐에 따라 $f(m)$의 값은 줄어든다.

11. (1) X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$f(x)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6\pi)^2}{8\pi^2}}$ $(0\leqq x\leqq\infty)$이므로 X는 $E(X)=6\pi,\ \sigma(X)=2\pi$인 정규분포 $N(6\pi,\ 4\pi^2)$을 따른다.

답 $\mathbf{E(X)=6\pi,\ \sigma(X)=2\pi}$

(2) 4바퀴 이상 돌았을 때, 회전각 X는 8π 이상이므로 $Z=\dfrac{X-6\pi}{2\pi}$라고 하면

$P(X\geqq 8\pi)=P(Z\geqq 1)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1)$

$=\mathbf{0.16}$ ⇦ 답

(3) 40회 중 4바퀴 이상 돈 횟수를 Y 라고 하면 Y 는 이항분포 $B(40,\ 0.16)$에 따르므로

$E(Y)=40\times0.16=6.4$

$V(Y)=40\times0.16\times0.84=5.376$

그런데 $n=40$은 충분히 크므로 Y 는 정규분포 $N(6.4,\ 5.376)$에 따른다고 볼 수 있다.

따라서 합격할 확률은

$P(Y\geqq11)\fallingdotseq P(Z\geqq2)=0.5-P(0\leqq Z\leqq2)$

$=\mathbf{0.03}$ ⇦ 답

p. 162~163

1. (1) $S=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에서 복원추출한 크기 2인 표본의 개수는 ${}_5\Pi_2=25$개이고

$\overline{X}=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$이므로 $\overline{X}$ 의 확률분포는 다음 표와 같다.

답

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	합
$P(\overline{X})$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	1

(2) $E(X)=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{2}{25}+3\times\frac{3}{25}+4\times\frac{4}{25}$

$+5\times\frac{5}{25}+6\times\frac{4}{25}+7\times\frac{3}{25}$

$+8\times\frac{2}{25}+9\times\frac{1}{25}=5$

$V(X)=\left(1^2\times\frac{1}{25}+2^2\times\frac{2}{25}+3^2\times\frac{3}{25}\right.$

$+4^2\times\frac{4}{25}+5^2\times\frac{5}{25}+6^2\times\frac{4}{25}$

$\left.+7^2\times\frac{3}{25}+8^2\times\frac{2}{25}+9^2\times\frac{1}{25}\right)-5^2$

$=4$

답 $\mathbf{E(\overline{X})=5,\ V(\overline{X})=4}$

2. $X,\ Y$ 가 서로 독립이므로

$P(X+Y=x_i+y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$

$=p_i\times q_j$

(단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$)

(1) $E(X+Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_j)\times p_i\times q_j$

$=\sum_{j=1}^{m}\left\{q_j\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+y_jq_j\sum_{i=1}^{n}p_i\right\}$

$=\sum_{j=1}^{m}\{q_j\times E(X)+y_jq_j\}$

$=E(X)\sum_{j=1}^{m}q_j+\sum_{j=1}^{m}y_jq_j$

$=E(X)+E(Y)$

(2) $P(XY)=P(X)\cdot P(Y)=p_iq_j$이므로

$E(XY)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_j)(p_iq_j)$

$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_jq_j\right)$,

$=E(X)\cdot E(Y)$

(3) $V(X+Y)$

$=E((X+Y)^2)-\{E(X+Y)\}^2$

$=E(X^2+2XY+Y^2)-\{E(X)+E(Y)\}^2$

$=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)$

$-\{E(X)\}^2-2E(X)E(Y)-\{E(Y)\}^2$

(⬅ $E(XY)=E(X)E(Y)$)

$=E(X^2)-\{E(X)\}^2+E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

$=V(X)+V(Y)$

3. (1) $\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 at\,dt=\left[\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{a}{2}=1$

에서 $a=2$

$\therefore\ E(T)=\int_0^1 t\cdot2t\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$V(T)=\int_0^1 t^2\cdot2t\,dt-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left[\frac{1}{2}t^4\right]_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$

답 $\mathbf{E(T)=\frac{2}{3},\ V(T)=\frac{1}{18}}$

(2) $P\left(t<\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}2t\,dt=\left[t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$ 이므로 X 의 분포는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore\ E(X)=100\times\frac{1}{4}=25$

$V(X)=100\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$

답 $\mathbf{E(X)=25,\ V(X)=\frac{75}{4}}$

4. $n=20$인 표본이므로

$\overline{X}=122+\frac{(-2)\times2+(-1)\times5+0\times8+1\times4+2\times1}{20}$

$=122+\frac{-3}{20}\fallingdotseq121.9(\mathrm{cm})$

$s^2=\frac{1}{20}\{(-1.9)^2\times2+(-0.9)^2\times5+(0.1)^2\times8$

$+(1.1)^2\times4+(2.1)^2\times1\}$

$=\frac{1}{20}\times20.6=1.03$

$s\fallingdotseq1.01$

따라서 기둥의 둘레를 m 이라고 하면

$121.9-\frac{1.96\times1.01}{\sqrt{20}}\leqq m\leqq121.9+\frac{1.96\times1.01}{\sqrt{20}}$

$\therefore\ 121.5\leqq m\leqq122.3$

답 **121.3 cm 이상 122.3 cm 이하**

5. $\overline{p}=\frac{80}{100},\ n=100$이므로

$(\text{정밀도}) = 1.96\times\sqrt{\dfrac{0.8\times 0.2}{100}} = 0.0784$

∴ 모비율 $p = \bar{p} \pm 0.0784 = 0.8 \pm 0.0784$

∴ $0.7216 \le p \le 0.8784$

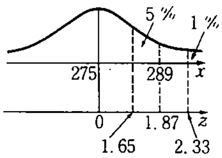
즉, 최소값은 72.2%

답 **72.2**

6. 가설 '$m=275$'

$m=275,\ \overline{X}=289,\ n=9,\ \sigma=22.5$

$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{289-275}{\frac{22.5}{\sqrt{9}}}=1.87$$



$m=275$인가, $m>275$인가를 검정하는 것이므로 단측검정을 한다.

단측검정에서 유의수준 5%, 1%에 대한 z의 값은 $P(Z \ge z_1)=0.05$, $P(Z \ge z_2)=0.01$에서 각각 $z_1=1.65$, $z_2=2.33$이다.

$z=1.87$이므로 $z>1.65$, $z<2.33$이다.

유의수준 5%로는 높다고 볼 수 있고, 유의수준 1%로는 같다고 볼 수 있다. ⇦ 답

7. 가설 H : '$X=3$이다.'라고 세울 때 이 가설에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 색이 될 확률은

$$P=\frac{{}_3C_2}{{}_{12}C_2}=\frac{1}{22}$$

따라서 가설 H가 기각되려면 유의수준은

$\alpha \ge \dfrac{1}{22}$ ⇦ 답

8. 사과 1개의 비중을 X라고 하면

$E(X)=m,\ \sigma(X)=\sigma$

X의 분포는 $N(m,\ \sigma^2)$를 따르므로 물에 뜰 확률은

$$P(X<1)=P\left(Z<\frac{1-m}{\sigma}\right)$$
$$=0.1=P(Z<-1.28)$$

$$\therefore\ \frac{1-m}{\sigma}=-1.28$$

이 사과를 4개씩 묶은 평균 비중을 $\overline{X}$라고 하면

$E(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sigma}{2}$이므로

$$P(\overline{X}<1)=P\left(Z<\frac{1-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$
$$=P(Z<-2.56)$$
$$=0.005$$

답 **0.5**

9. (1) 비누의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(100,\ 2^2)$에 따른다.

제품 1개가 불량일 확률은 $P(X<98)$이다.

$Z=\dfrac{X-100}{2}$은 정규분포 $N(0,\ 1^2)$에 따르므로

$$P(X<98)=P\left(\frac{X-100}{2}<-1\right)$$
$$=P(Z<-1)=\frac{1}{2}P(|Z|>1)$$
$$=\frac{1}{2}\{1-P(|Z|\le 1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(1-0.683)=0.1585$$

따라서 구하는 불량품의 개수는

$100000\times 0.1585=$ **15850 (개)** ⇦ 답

(2) 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$$E(\overline{X})=E(X)=100,\ V(\overline{X})=\frac{2^2}{4}=1^2$$

이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(100,\ 1^2)$을 따르고, 한 상자에서의 한 개의 제품의 무게가 평균 98 g(=392÷4) 미만일 때 그 상자는 불량이므로 한 상자가 불량품일 확률은 $P(\overline{X}<98)$이다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-100}{1}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$에 따르므로

$$P(\overline{X}<98)=P\left(\frac{\overline{X}-100}{1}<-2\right)$$
$$=P(Z<-2)=\frac{1}{2}P(|Z|>2)$$
$$=\frac{1}{2}\{1-P(|Z|\le 2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(1-0.954)=0.023$$

따라서 구하는 불량품의 상자 수는

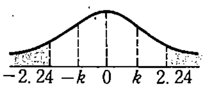
$\dfrac{100000}{4}\times 0.023=$ **575 (개)** ⇦ 답

10. 가설 '$m=1152.8$'

$\overline{X}$의 $|Z|$는

$$|Z|=\frac{|\overline{X}-m|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{|1130.4-1152.8|}{\frac{200}{\sqrt{400}}}$$
$$=2.24$$

기각역을 $|Z|\ge k$라고 하면



$\alpha=P(|Z|\ge k)$

$\ge P(|Z|\ge 2.24)$

$=2\times\{0.5-P(0\le Z\le 2.24)\}$

$=2\times(0.5-0.4875)=0.0250$

답 **2.5**

11. 병아리의 몸무게를 X라고 하면 X는 정규분포 $N(400,\ 30^2)$에 따르므로

가설 '새 사료가 효과가 없었다.'라고 하면, $n=9$인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(400,\ 10^2)$을 따른다.

여기서 유의수준 $\alpha=P(Z\ge k)$ (∵ 단측검정)라고 하

면, $\overline{X}=419.6$이므로

$$Z=\frac{419.6-400}{10}=1.96\geqq k$$

$$\therefore\ \alpha=\mathrm{P}(Z\geqq k)\geqq\mathrm{P}(Z\geqq1.96)=0.025$$

답 2.5 %

12. 가설 '$p=\frac{1}{6}$'이라고 하자.

1의 눈이 나올 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{1}{6}=30$$

$$\sigma(X)=\sqrt{180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=5$$

그런데 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$에 따른다고 볼 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\geqq40)&=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{40-30}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geqq2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\leqq\frac{r}{100}\end{aligned}$$

$\therefore\ r\geqq2.28$ ……㉠

2의 눈이 나올 횟수를 Y라 하고, 같은 방법으로 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\geqq39)&=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{39-30}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geqq1.8)\\&=0.5-0.4641\\&=0.0359>\frac{r}{100}\end{aligned}$$

$\therefore\ r<3.59$ ……㉡

따라서 ㉠, ㉡을 만족하는 정수 r의 값은 3이다.

답 3

13. $\mathrm{E}(\overline{X})=100,\ \sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\geqq c)&=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{c-100}{0.8}\right)\\&\leqq0.05=\mathrm{P}(Z\geqq1.65)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{c-100}{0.8}\geqq1.65$$

$\therefore\ c\geqq101.32$ 답 **101.32**

p. 164~165 (고급 문제)

1. (1) $X=150$(원), 200(원), 550(원), 600(원)이므로

$$\mathrm{P}(X=150)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$$

$$\mathrm{P}(X=200)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}$$

$$\mathrm{P}(X=550)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$$

$$\mathrm{P}(X=600)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$$

따라서 X의 확률분포표는

답

X	150	200	550	600	합
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	1

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=150\times\frac{4}{15}+200\times\frac{6}{15}+550\times\frac{1}{15}\\&\quad+600\times\frac{4}{15}\\&=\frac{950}{3}(\text{원})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=150^2\times\frac{4}{15}+200^2\times\frac{6}{15}+550^2\times\frac{1}{15}\\&\quad+600^2\times\frac{4}{15}-\left(\frac{950}{3}\right)^2\\&=\frac{341000}{9}\end{aligned}$$

답 **$\mathrm{E}(X)=\frac{950}{3}$원, $\mathrm{V}(X)=\frac{341000}{9}$**

2. 모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$

(1) $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times({}_2\Pi_5-2)}{243}=\frac{10}{27}$ ⇦ 답

(2) $\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times1}{243}=\frac{1}{81}$

$\mathrm{P}(X=0)=1-\frac{10}{27}-\frac{1}{81}=\frac{50}{81}$

따라서 X의 확률분포는

답

X	0	1	2	합
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{50}{81}$	$\frac{30}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

(3) $\mathrm{E}(X)=\frac{0\times50+1\times30+2\times1}{81}=\frac{32}{81}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\frac{0^2\times50+1^2\times30+2^2\times1}{81}-\left(\frac{32}{81}\right)^2\\&=\frac{1730}{6561}\end{aligned}$$

답 **$\mathrm{E}(X)=\frac{32}{81}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{1730}{6561}$**

3. (1) $\mathrm{P}(0\leqq X\leqq x)=\int_0^x f(x)\,dx=\left(\frac{x}{20}\right)^3$에서

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{3}{8000}x^2\ (0\leqq x\leqq20)$ ⇦ 답

(2) $P(X \leq 10)=\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^{10}\frac{3}{8000}x^2dx$

$$=\left[\frac{1}{8000}x^3\right]_0^{10}=\frac{1}{8}$$ ⇦ 답

(3) $E(X)=\int_0^{20} x\cdot\frac{3}{8000}x^2dx$

$$=\left[\frac{3}{8000}\times\frac{1}{4}x^4\right]_0^{20}=15\,(\text{cm})$$

$$V(X)=\int_0^{20} x^2\cdot\frac{3}{8000}x^2dx-15^2$$

$$=\left[\frac{3}{8000}\times\frac{1}{5}x^5\right]_0^{20}-225=15$$

답 **$E(X)=15$ cm, $V(X)=15$**

4. (1) 구하는 확률은 $\frac{6\times4}{8\times6}=\frac{1}{2}$ ⇦ 답

(2) X 의 분포는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$이므로

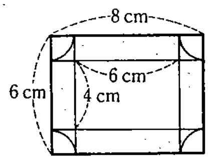
$$E(X)=10\times\frac{1}{2}=5$$

$$V(X)=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 **$E(X)=5$, $V(X)=\frac{5}{2}$**

(3) 2장에 걸칠 확률은

$$\frac{(6+4)\times2}{8\times6}=\frac{5}{12}$$



3장 또는 4장에 걸칠 확률은

$$\frac{1\times4}{8\times6}=\frac{1}{12}$$

1회 시행에서의 기대 금액을 E라고 하면

$$E=100\times\frac{5}{12}+300\times\frac{1}{12}=\frac{200}{3}\ (\text{원})$$

이 시행을 4번 시행하므로 그 기대값은

$$4E=\frac{200}{3}\times4=\mathbf{\frac{800}{3}}\ (\text{원})$$ ⇦ 답

5. 배터리의 전압을 X라고 하면 X의 확률분포는 $N(12,\ 2^2)$이므로 $n=4$인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 $N(12,\ 1^2)$을 따른다.

(1) 정상으로 작동하지 않을 때는 $\overline{X}<10$V이므로

$$P(\overline{X}<10)=P(Z<-2)\ \left(\Leftarrow Z=\frac{\overline{X}-12}{1}\right)$$

$$=0.5-P(0\leq Z\leq 2)=0.02$$

(2) 10000세트 중 정상으로 작동하지 않는 세트의 개수를 확률변수 Y라고 하면

Y의 확률분포는 $B(10000,\ 0.02)$이므로

$$E(Y)=10000\times0.02=200$$

$$V(Y)=10000\times0.02\times0.98=14^2$$

그런데 $n=10000$은 충분히 크므로 Y의 확률분포는 $N(200,\ 14^2)$을 따른다고 할 수 있다.

$$\therefore P(Y\leq172)=P(Z\leq-2)\ \left(\Leftarrow Z=\frac{Y-200}{14}\right)$$

$$=0.5-P(0\leq Z\leq2)=0.02$$

답 (1) **0.02** (2) **0.02**

6. (1) 나사못의 길이를 확률변수 X라 하고 $E(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$라고 하면 $n=100$인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 $N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{10}\right)^2\right)$이다.

따라서 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 폭은

$$2\times\left(2\times\frac{\sigma}{10}\right)\leq0.8 \qquad \therefore 0<\sigma\leq2$$

즉, σ의 최대값은 **2 mm** ⇦ 답

(2) 표본의 크기를 n이라고 하면, 95%의 신뢰도로 추정된 신뢰구간의 폭은 $2\times\left(2\times\frac{2.4}{\sqrt{n}}\right)$이므로

이 제품이 납품 가능하려면

$$2\times\left(2\times\frac{2.4}{\sqrt{n}}\right)\leq0.8 \qquad \therefore n\geq144$$

즉, n의 최소값은 **144개** ⇦ 답

7. 가설을 '갑의 평균 타율은 0.4이다.'라고 하면 24타석에서 친 안타의 수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률분포는 $B(24,\ 0.4)$이다.

$$\therefore E(X)=24\times0.4=9.6$$

$$V(X)=24\times0.4\times0.6=(2.4)^2$$

그런데 $n=24$는 충분히 큰 표본이라고 할 수 있으므로, X의 분포는 $N(9.6,\ 2.4^2)$에 따른다고 볼 수 있다.

따라서 $X=14$를 유의수준 5%로 검정하면

$$Z=\frac{14-9.6}{2.4}\fallingdotseq1.83>1.64$$

따라서 가설을 기각하게 되므로, 이 테스트 결과 갑의 평균 타율은 4할을 넘는다고 할 수 있다.

즉, **갑이 이 테스트의 결과 합격하였다고 할 수 있다.** ⇦ 답

8. 가설에 의하여 $n=49$인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 분포는

$$E(\overline{X})=100,\ V(\overline{X})=\frac{V(X)}{n}=0.26^2$$

이므로 $N(100,\ 0.26^2)$이다.

또, 유의수준 5%의 정의에 따라 $P(|Z|>2)=0.05$

$Z=\frac{\overline{X}-100}{0.26}$에서 $|Z|>2$이므로 $\left|\frac{\overline{X}-100}{0.26}\right|>2$

$$\therefore \overline{X}<100-0.52 \text{ 또는 } \overline{X}>100+0.52$$

즉, 유의수준 5%의 기각역은

$$\overline{X}<99.48 \text{ 또는 } \overline{X}>100.52$$

답 (1) **0.26^2** (2) **0.05** (3) **0.26** (4) **0.52**

수련문제풀이

Ⅰ. 극　한

수련문제 **1.** (1) 분자 4, 7, 10, 13, …은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이므로 제 n항은

$4+(n-1)\cdot 3=3n+1$

따라서 주어진 수열의 일반항은 $a_n=\dfrac{3n+1}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=\mathbf{3}\ \textbf{(수렴)}$$

(2) 주어진 수열은

$$-\frac{1}{2},\ \frac{3}{3},\ -\frac{5}{4},\ \frac{7}{5},\ -\frac{9}{6},\ \cdots$$

이므로 일반항은 $a_n=(-1)^n\times\dfrac{2n-1}{n+1}$

(i) n이 홀수일 때

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\times\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=-2$$

(ii) n이 짝수일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 진동하므로 **발산한다.**

(3) 주어진 수열은

$$\frac{6}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{6}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{6}{6},\ \cdots$$

이므로 일반항은 $a_n=\dfrac{6}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}=\mathbf{0}\ \textbf{(수렴)}$$

(4) 주어진 수열은

$1+\sqrt{1},\ 1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{4},\ 1+\sqrt{5},\ \cdots$

이므로 일반항은 $a_n=1+\sqrt{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{n})=\boldsymbol{\infty}\ \textbf{(발산)}$$

수련문제 **2.** (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\{\log_{10}(n+5)-\log_{10}(3n-1)\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{n+5}{3n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{1+\frac{5}{n}}{3-\frac{1}{n}}$$

$$=\log_{10}\frac{1}{3}$$

$$=\mathbf{-\log_{10}3}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2n-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2-\frac{1}{n}}=\sin\frac{\pi}{2}=\mathbf{1}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}}{3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{3}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

수련문제 **3.** (1) (준식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+4^n}{6^n+3^n+2^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$=\mathbf{0}$$

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $0<\sin\theta<\cos\theta$

$$\therefore\ 0<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<1$$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n+\cos\theta}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n-1}$$

$$=\mathbf{-\cos\theta}$$

수련문제 **4.** (i) $|r|>1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1+\frac{1}{r^n}}=\mathbf{1}$$

(ii) $|r|<1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r}{r^n+1}=\mathbf{-r}$$

(iii) $r=1$ 일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r}{r^n+1}=\mathbf{0}$$

답 $\begin{cases} |r|>1\text{일 때} & 1 \\ |r|<1\text{일 때} & -r \\ r=1\text{일 때} & 0 \end{cases}$

수련문제 **5.** (1) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ 에서

$a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$라고 하면

$\alpha-\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\alpha=1$ 에서 $\alpha=2$

즉, $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$에서

$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ $\mathbf{a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\mathbf{2}$

《다른 풀이》 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$에서 $\alpha=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$

수련문제 **6.** (준식)$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}+n\sin n}{n^2-e^{-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{\sin n}{n}}{1-\frac{1}{n^2e^n}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

수련문제 **7.** (1) (준식)$=\lim_{n\to\infty}\left(3\times\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)=\mathbf{0}$

(2) (준식)$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{\frac{n}{2^n}}=\infty$

(3) (준식)$=\lim_{n\to\infty}2^n\left(1-5\times\frac{n}{2^n}\right)=\infty$

수련문제 **8.** (준식)$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

$=\mathbf{\frac{1}{4}}$

수련문제 **9.** (준식)$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{\infty}-(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}-(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$=\lim_{n\to\infty}(-1+\sqrt{n+1})$

$=\infty$ **(발산)**

수련문제 **10.** (1) $\frac{-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{-\sqrt[3]{2}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

따라서 공비가 $r=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$인 무한등비급수이고

$|r|<1$이므로 수렴한다.

$\therefore$ (합)$=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}=\mathbf{\frac{2}{\sqrt[3]{2}+1}}$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+n\pi\right)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} & (n\text{은 짝수})\\ -\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2} & (n\text{은 홀수})\end{cases}$

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6}+n\pi\right)=(-1)^n\cdot\frac{1}{2}$

$\therefore$ (준식)$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{2}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

수련문제 **11.** $S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-r)^n$이 수렴하려면

$|-r|=|r|<1$ 에서 $-1<r<1$ ……㉠

이 때 $S=\frac{1}{1-(-r)}=\frac{1}{1+r}$

따라서 $T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{S^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(1+r)^n$이 수렴하려면

$-1<1+r<1$에서 $-2<r<0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\mathbf{-1<r<0}$

수련문제 **12.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=S_n$이라고 하면

$$\begin{array}{rl} S_n= & \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\\ -)\ \frac{1}{2}S_n= & \qquad\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\ \hline \frac{1}{2}S_n= & \frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\end{array}$$

에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^{n+1}}=0$이므로

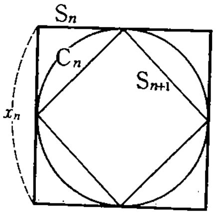
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+2\times\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}\times 2=\mathbf{3}$

수련문제 13. $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$이라고 하면

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1+0-\left(\frac{2}{3}\right)^2+0+\left(\frac{2}{3}\right)^4+0-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$$
$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{9}{13}$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n=0+\frac{2}{3}+0-\left(\frac{2}{3}\right)^3+0+\left(\frac{2}{3}\right)^5+0-\cdots$$
$$=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\cdots$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}$$
$$=\frac{6}{13}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n=\left(\frac{9}{13},\ \frac{6}{13}\right)$$

수련문제 14. (1) 정사각형 S_n의 한 변의 길이를 x_n이라고 하면 내접원 C_n의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}x_n$이고, 정사각형 S_{n+1}의 한 변의 길이는



$$x_{n+1}=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{\sqrt{2}}x_n$$
$$\therefore\ a_n=x_n{}^2-\frac{1}{4}\pi x_n{}^2=\frac{4-\pi}{4}x_n{}^2$$
$$a_{n+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_n\right)^2-\pi\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x_n\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left\{x_n{}^2-\frac{1}{4}\pi x_n{}^2\right\}=\frac{1}{2}a_n$$
$$a_1=2^2-\pi\cdot 1^2=4-\pi$$
$$\therefore\ a_n=(4-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

《다른 풀이》 정사각형 S_n의 한 변의 길이를 x_n, 그 내접원 C_n의 반지름의 길이를 y_n이라고 하면

$$x_1=2,\ \ y_1=1$$
$$x_2=\frac{1}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2},\ \ y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sin 45^\circ}=1,\ \ y_3=\frac{1}{2}$$

....

$$x_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},\ \ y_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=\left\{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2-\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2$$
$$=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=(4-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(4-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{4-\pi}{1-\frac{1}{2}}=2(4-\pi)$$

수련문제 15. (1) $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 높이가 $\frac{1}{2^{n-1}}$이므로

한 변의 길이는 $\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2^{n-1}}$이다.

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2^{n-1}}\right)\times\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot 4^{n-1}}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

수련문제 16. (1) $$(\text{준식})=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x-4)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2+x-4}=\frac{1}{2}$$

(2) (준식)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+\sqrt{3x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}=1$$

수련문제 17. (1) (준식)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=2$$

(2) $x=-t$라고 하면

$$(\text{준식})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$$

수련문제 **18.** (1) (준식)

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3\cos x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\times\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) $x-\frac{\pi}{2}=\theta$ 라고 하면 $x=\frac{\pi}{2}+\theta$

또, $x\to\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\theta\to0$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{\theta\to0}\theta\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0}\theta\cdot(-\cot\theta)$$

$$=\lim_{\theta\to0}(-\cos\theta)\times\frac{\theta}{\sin\theta}$$

$$=\mathbf{-1}$$

(3) $(\text{준식})=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{-2\sin 2x\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{-2\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{-\frac{1}{4}}$$

(4) $x-1=t$ 라고 하면 $x=t+1$

또, $x\to1$ 일 때 $t\to0$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+\pi t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{\pi t}\times\pi=\mathbf{-\pi}$$

수련문제 **19.** (1) $x=-t$ 라고 하면

$x\to-\infty$ 일 때 $t\to\infty$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}-2^{-t}}{3^{-t}+2^{-t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^t-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^t+1}=\mathbf{-1}$$

(2) $\lim_{x\to+0}(-x^{-2})=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to-0}(-x^{-2})=\lim_{x\to-0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{x\to0}2^{-x^{-2}}=2^{-\infty}=\mathbf{0}$$

수련문제 **20.** (1) $(\text{준식})=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot2x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) $(\text{준식})=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{2}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\times\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\times\frac{3}{2}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

(3) $x-1=t$ 라고 하면 $x=1+t$

$x\to1$ 일 때 $t\to0$ 이므로

$$(\text{준식})=\lim_{t\to0}\frac{\log_3(1+t)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to0}\{-\log_3(1+t)^{\frac{1}{t}}\}$$

$$=\mathbf{-\log_3 e}$$

(4) $(\text{준식})=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{x}{\tan x}\times3\right)=\mathbf{3}$

수련문제 **21.** $x\to2$ 일 때, (분모) $\to0$ 이므로 (분자) $\to0$ 이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

$\therefore\ b=-4-2a$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-4-2a}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+a+2)(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})}{x-(4-x)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+a+2)(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})}{2}$$

$$=(4+a)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$\therefore\ 4+a=5$

$\therefore\ \mathbf{a=1,\ b=-6}$

수련문제 **22.** $\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{AC}-\overline{AH}}{\theta^3}$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{a\tan\theta-a\sin\theta}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{a\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3\cos\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{a\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^3\cos\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{a}{\cos\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\mathbf{\frac{a}{2}}$$

수련문제 **23.** $0\leqq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq1$ 에서

$$0\leqq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$$

$$\therefore\ 0\leqq\lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq\lim_{x\to0}|x|=0$$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

수련문제 **24.** (i) $\frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$

즉, $x=2n\pi+\pi$ (n은 정수)일 때

$f(x)=\tan\frac{x}{2}$의 값이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 불연속이다.

(ii) $a\neq 2n\pi+\pi$ (n은 정수)일 때

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\tan\frac{x}{2}=\tan\frac{a}{2}=f(a)$이므로

$f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 $f(x)$는 $x\neq 2n\pi+\pi$ (n은 정수)인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(x)$가 연속인 구간은

$(\boldsymbol{2n\pi-\pi},\ \boldsymbol{2n\pi+\pi})$ (n은 정수)

수련문제 **25.** (i) $x\neq1$, $x>0$일 때, $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$이므로 $f(x)$는 $x\neq1$, $x>0$인 모든 실수에서 연속이다.

(ii) $x=1$에서 $f(x)$가 연속이어야 하므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}\quad(\Leftarrow x-1=t)$$
$$=\lim_{t\to0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$$
$$=\mathbf{1}$$

수련문제 **26.** (1) $f(x)=x^{10}-10^{x+1}$이라고 놓으면

$f(x)$는 폐구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=-99<0$, $f(2)=24>0$

이므로 중간값의 정리에 의하여

$f(c)=0\ (1<c<2)$

인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

이 실수 c가 방정식 $f(x)=0$의 근이므로 주어진 방정식 $x^{10}=10^{x+1}$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=\sqrt{x}\tan x-100$으로 놓으면

$f(x)$는 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이고

$f(0)=-100<0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sqrt{x}\tan x-100)=\infty>0$$

따라서 중간값의 정리에 의하여

$f(c)=0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

이 실수 c가 방정식 $f(x)=0$의 근이므로 주어진 방정식 $\sqrt{x}\tan x=100$은 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

II. 미 분 법

수련문제 **1.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}$

$$=\frac{(-1^3+k)-\{-(-3)^3-3k\}}{4}$$
$$=\frac{1}{4}(4k-28)=k-7=-5$$

$\therefore\ \boldsymbol{k=2}$

수련문제 **2.** (1) (준식)

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+7h)-f(a)-f(a-3h)+f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+7h)-f(a)}{7h}\times7$$
$$+\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times3$$
$$=7f'(a)+3f'(a)$$
$$=10f'(a)=\mathbf{550}$$

(2) (준식)

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^nf(a)-a^nf(a)-a^nf(x)+a^nf(a)}{x^n-a^n}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[f(a)-\frac{a^n\{f(x)-f(a)\}}{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})}\right]$$
$$=f(a)-\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{a^n}{x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}}\right\}$$
$$=f(a)-f'(a)\times\frac{a^n}{na^{n-1}}$$
$$=\boldsymbol{f(a)-\frac{a}{n}f'(a)}$$

수련문제 **3.** (i) $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq1$에서 $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|$

$$\therefore\ 0\leq\lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq\lim_{x\to0}|x|=0$$
$$\therefore\ \lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0,\ \lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 연속

(ii) $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\sin\frac{1}{h}$$

그런데 $\lim_{h\to0}\sin\frac{1}{h}$의 값이 존재하지 않으므로 $f'(0)$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore$ **$f(x)$는 $x=0$에서 미분불가능**

수련문제 **4.** 주어진 등식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

$\therefore f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=-2$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2h}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2=\mathbf{0}$

수련문제 5. $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{x-(x+h)}{hx(x+h)}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$

$\therefore \mathbf{f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'(1)=-1}$

수련문제 6. $f'(x)=\frac{2(x^2+x+1)-2x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\frac{-2x^2+2}{(x^2+x+1)^2}=0$

에서 $-2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore \mathbf{x=\pm1}$

수련문제 7. (i) $x=1$에서 연속이므로

$1=a+b \quad \cdots\cdots ㉠$

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=a$

$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3$

$3=a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\mathbf{a=3,\ b=-2}$

수련문제 8. $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{x}\times\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

$=\frac{1}{x}\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\mathbf{\frac{1}{x}}$

수련문제 9. (1) $f'(x)=\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}=\mathbf{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}$

(2) $f'(x)=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\mathbf{\cot x}$

수련문제 10. (1) $y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\times\frac{dy}{dx}=4 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$

$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}=\mathbf{\frac{2}{y_1}}$

(2) $3x^2+4y^2=12$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x+8y\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$

$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}=\mathbf{-\frac{3x_1}{4y_1}}$

수련문제 11. $f'(x)=\sqrt{2x-x^2}+x\cdot\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$

$=\sqrt{2x-x^2}+\frac{x(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

$\therefore \mathbf{f'(1)=1}$

수련문제 12. $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$

$\frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{t^2}=\frac{t^2+1}{t^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{t^2-1}{t^2}}=\frac{t^2+1}{t^2-1}$

또, $x=t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$에서

$2t^2-5t+2=(2t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=2,\ \frac{1}{2}$

$y=t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2}$에서

$2t^2-3t-2=(2t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2,\ -\frac{1}{2}$

따라서 점 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$은 $t=2$에 대응되는 점이다.

$\therefore$ (접선의 기울기)$=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=\frac{5}{2}\\y=\frac{3}{2}}}=\left[\frac{t^2+1}{t^2-1}\right]_{t=2}$

$=\mathbf{\frac{5}{3}}$

수련문제 13. $f'(x)=e^{\cos x}\cdot(\cos x)'=-\sin x\cdot e^{\cos x}$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\cos x}\right)$

$=\mathbf{-e}$

수련문제 14. (1) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\sin x\cdot\ln x\,(x>0)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln x+(\sin x)\cdot\frac{1}{x}$

$$\therefore\ y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=\boldsymbol{x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)}$$

(2) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\ln|x|-\ln|x+2|$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{-5x^2+2x+6}{3x(x-1)(x+2)}$$
$$\therefore\ y'=y\times\frac{-5x^2+2x+6}{3x(x-1)(x+2)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{(-5x^2+2x+6)\sqrt[3]{x-1}}{3x^2(x-1)(x+2)^2}}$$

수련문제 **15.** $g(x)=f^{-1}(x)=y$라고 하면

$$x=f(y)=y^3+3y-2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=(3y^2+3)\times\frac{dy}{dx}$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3(y^2+1)}$$

$g(2)=y$라고 하면 $f(y)=2$이므로

$$y^3+3y-2=2$$
$$(y-1)(y^2+y+4)=0\ (y\text{는 실수})$$
$$\therefore\ y=1$$
$$\therefore\ g'(2)=\left[\frac{1}{3(y^2+1)}\right]_{y=1}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

수련문제 **16.** $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$이므로

점 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{4}=\sin\frac{\pi}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

즉, $\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi}$

수련문제 **17.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\times\frac{dy}{dx}=0\qquad\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$$

따라서 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

즉, $a^2y_1(y-y_1)-b^2x_1(x-x_1)=0$

$$b^2x_1x-a^2y_1y=b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2$$

점 $(x_1,\ y_1)$이 주어진 쌍곡선 위의 점이므로

$$b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2=a^2b^2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$\boldsymbol{\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1}$$

수련문제 **18.** $y'=x^2-2x$에서 $[y']_{x=3}=3$

따라서 점 A에서의 법선의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-3)$$

즉, $y=-\frac{1}{3}x+3$이므로 y축과 만나는 점 B의 좌표는 (0, 3)이다.

$$\therefore\ \triangle OAB=\frac{1}{2}\times3\times3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

수련문제 **19.** $y=e^x$의 접선의 접점을 $B(t,\ e^t)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

여기에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$$-e^t=-te^t$$

에서 $e^t\neq0$이므로 $t=1$

즉, $B(1,\ e)$

한편, $y=\ln x$의 그래프는 $y=e^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $A(e,\ 1)$

$$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{(e-1)^2\times2}=\boldsymbol{\sqrt{2}(e-1)}$$

수련문제 **20.** $y=\frac{2}{x^2+1}$에서

$$y'=-\frac{2\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

접점을 $\left(t,\ \frac{2}{t^2+1}\right)$라고 하면 접선의 방정식은

$$y-\frac{2}{t^2+1}=\frac{-4t}{(t^2+1)^2}(x-t)$$

여기에 $x=0,\ y=1$을 대입하면

$$1-\frac{2}{t^2+1}=\frac{4t^2}{(t^2+1)^2}$$
$$\therefore\ (t^2+1)^2-2(t^2+1)=4t^2$$
$$t^4-4t^2-1=0$$

$t^2\geq0$이므로 $t^2=2+\sqrt{5}$

$\therefore\ t=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (두 개의 서로 다른 실근)

즉, 접점이 두 개 존재하므로 주어진 점을 지나는 접선은 **2개** 존재한다.

수련문제 **21.** $f(x)=mx+1,\ \ g(x)=x^3$이라 하고, 접점의 x좌표를 t라고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $mt+1=t^3$ ……㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $m=3t^2$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $2t^3+1=0$

t는 실수이므로 $t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$\therefore\ m=3\times\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}}$$

수련문제 **22.** (1) 함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

수련 문제 풀이

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (\text{단, } a<c<b)$$

인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

(2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$는 구간 $[-4,\ 4]$에서 연속이고, 구간 $(-4,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리를 만족한다.

$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$에서

$$f'(c)=\frac{e^c-e^{-c}}{2}=\frac{\dfrac{e^4+e^{-4}}{2}-\dfrac{e^{-4}+e^4}{2}}{4-(-4)}=0$$

$\therefore\ e^c-e^{-c}=0$, 즉 $e^{2c}=1$

$\therefore$ **$c=0$**

수련문제 **23.** $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$이므로 주어진 등식은

$$\frac{1}{a+h}=\frac{1}{a}+h\times\left\{-\frac{1}{(a+\theta h)^2}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{h}=-\frac{1}{(a+\theta h)^2}$$

$\therefore\ (a+\theta h)^2=a(a+h)$

$a>0$, $h>0$, $0<\theta<1$이므로 $\theta=\dfrac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h}$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\theta=\lim_{h\to0}\frac{a(a+h)-a^2}{h(\sqrt{a(a+h)}+a)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{a}{\sqrt{a(a+h)}+a}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

수련문제 **24.** $f(x)=\sin x$라고 하면 폐구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이고 개구간 $(0,\ \pi)$에서 미분가능하다. 따라서

$$\frac{\sin y-\sin x}{y-x}=f'(\alpha)=\cos\alpha \quad (x<\alpha<y)$$

$$\frac{\sin z-\sin y}{z-y}=f'(\beta)=\cos\beta \quad (y<\beta<z)$$

인 α, β가 존재한다.

그런데 $0<x<\alpha<y<\beta<z<\pi$이므로

$\cos\alpha>\cos\beta$

$$\therefore\ \frac{\sin y-\sin x}{y-x}>\frac{\sin z-\sin y}{z-y}$$

수련문제 **25.** $f'(x)=e^{x^2}+(x-k)\cdot2x\cdot e^{x^2}$

$\qquad=e^{x^2}(2x^2-2kx+1)$

$f(x)$가 단조증가이므로 $f'(x)\geqq0$

$e^{x^2}>0$이므로 $2x^2-2kx+1\geqq0$

즉, $\dfrac{D}{4}=k^2-2\leqq0$

$\therefore$ **$-\sqrt{2}\leqq k\leqq\sqrt{2}$**

수련문제 **26.** (1) $f'(x)=(4x+3)e^{-x}-(2x^2+3x)e^{-x}$

$\qquad=-e^{-x}(2x^2-x-3)$

$\qquad=-e^{-x}(x+1)(2x-3)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-e$	↗	$\frac{9}{e\sqrt{e}}$	↘

$\therefore$ **극소값 $-e$, 극대값 $\dfrac{9}{e\sqrt{e}}$**

(2) $x\geqq3$일 때 $f(x)=x^3-3x^2$에서

$\qquad f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x<3$일 때 $f(x)=-x^3+3x^2$에서

$\qquad f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$이면 $x=0$, 2이고, $x=3$에서 미분불가능하다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘	0	↗

$\therefore$ **극대값 4, 극소값 0**

수련문제 **27.** $f'(x)=1-\dfrac{a}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-a}{(x-1)^2}$

$$=\frac{(x-1+\sqrt{a})(x-1-\sqrt{a})}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1-\sqrt{a}$, $1+\sqrt{a}$

$f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 이들 값을 기준으로 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$1-\sqrt{a}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	(극대)	↘		↘	(극소)	↗

$\therefore$ (극대값)$=f(1-\sqrt{a})=1-\sqrt{a}+\dfrac{a}{-\sqrt{a}}$

$\qquad=1-2\sqrt{a}=-1$

$\therefore$ **$a=1$**

이 때 (극소값)$=f(2)=$**3**

수련문제 **28.** (1) $f'(x)=3x^2+2kx+3=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$\dfrac{D}{4}=k^2-9=(k+3)(k-3)>0$

$\therefore$ **$k<-3$ 또는 $k>3$**

(2) $f'(x)=k+\cos x=0$, 즉 $\cos x=-k$인 실근이 존재하고, 이 실근의 좌우의 부호가 변하려면 $|-k|<1$이어야 하므로 **$-1<k<1$**

수련문제 **29.** $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+4}+k$라고 하면

$$f'(x)=\frac{2(x^2+4)-2x(2x-3)}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+6x+8}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{-2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 4$

따라서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하려면 $f(x)$의 극값 중 0인 것이 있어야 하므로

$f(-1)=0$ 또는 $f(4)=0$

$f(-1)=-1+k=0$에서 $k=1$

$f(4)=\frac{1}{4}+k=0$에서 $k=-\frac{1}{4}$

$\therefore$ **$k=1$ 또는 $k=-\frac{1}{4}$**

$\boxed{\text{수련문제}}$ **30.** $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+1)^2+(x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm 1$

$f''(x)=0$에서 $x=0,\ \pm\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘

(변곡) (극소) (변곡) (극대) (변곡)

$\therefore$ $x<-\sqrt{3}$, $0<x<\sqrt{3}$에서 **위로 볼록**

$-\sqrt{3}<x<0$, $x>\sqrt{3}$에서 **아래로 볼록**

극소값 $-\frac{1}{2}$, 극대값 $\frac{1}{2}$

변곡점 $\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\boxed{\text{수련문제}}$ **31.** (1) $y'=1\cdot e^x+xe^x=e^x(x+1)$

$y''=e^x(x+1)+e^x\cdot 1=e^x(x+2)$

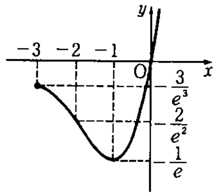
$y'=0$에서 $x=-1$, $y''=0$에서 $x=-2$

$x\geq -3$에서 y의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	∞
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$-\frac{3}{e^3}$	↘	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	∞

(변곡) (극소)

이 증감표에 따라 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



(2) $y'=(4x+3)e^{-x}-e^{-x}(2x^2+3x)$

$=-e^{-x}(2x^2-x-3)$

$=-e^{-x}(x+1)(2x-3)$

$y''=e^{-x}(2x^2-x-3)-e^{-x}(4x-1)$

$=e^{-x}(2x^2-5x-2)$

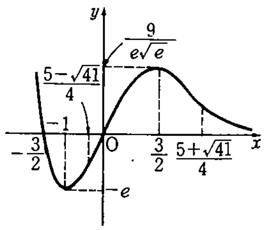
$y'=0$에서 $x=-1,\ \frac{3}{2}$

$y''=0$에서 $x=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{41}}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{41}}{4}$	$\cdots$	∞
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	∞	↘	$-e$	↗		↗	$\frac{9}{e\sqrt{e}}$	↘		↘	0

(극소) (변곡) (극대) (변곡)

y의 증감표에 따라 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



$\boxed{\text{수련문제}}$ **32.** (1) $f'(x)=1+2\sin x=0$이면

$\sin x=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ ($\because\ 0\leq x\leq 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	$\frac{7}{6}\pi+\sqrt{3}$	↘	$\frac{11}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	$2\pi-2$

$\therefore$ **최대값 $\frac{7}{6}\pi+\sqrt{3}$, 최소값 -2**

(2) $f'(x)=\dfrac{-(x^2+2)+2x(x-1)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$이면 $x=1\pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$	↘	$\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$	↗	0

$\therefore$ **최대값 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$, 최소값 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$**

(3) $2x-x^2=x(2-x)\geqq 0$에서 $0\leqq x\leqq 2$

$$f'(x)=\sqrt{2x-x^2}+x\cdot\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=\frac{-x(2x-3)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$f'(x)=0$이면 $x=\dfrac{3}{2}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

$\therefore \begin{cases} \textbf{최대값 } \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \\ \textbf{최소값 } 0 \end{cases}$

수련문제 33. $\sin x=t$, $f(x)=g(t)$라고 하면

$-1\leqq t\leqq 1$이고

$$g(t)=4t^3+3(1-t^2)-6t+a$$
$$=4t^3-3t^2-6t+(a+3)$$
$$g'(t)=12t^2-6t-6=6(t-1)(2t+1)$$

$g'(t)=0$이면 $t=-\dfrac{1}{2},\ 1$

t	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0
$g(t)$	$a+2$	↗	$a+\dfrac{19}{4}$	↘	$a-2$

$g(t)$의 최대값은 $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a+\dfrac{19}{4}=5$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{4}$

최소값은 $g(1)=a-2=-\dfrac{7}{4}$

따라서 $f(x)$의 최소값은 $\mathbf{-\dfrac{7}{4}}$

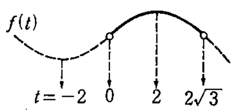
수련문제 34. 직사각형의 제 1 사분면의 꼭지점을 $\mathrm{A}(t,\ 12-t^2)$이라 하고, 이 직사각형의 넓이를 $f(t)$라고 하면 $0<t<2\sqrt{3}$이고

$$f(t)=2t(12-t^2)=-2t^3+24t$$
$$f'(t)=-6t^2+24$$

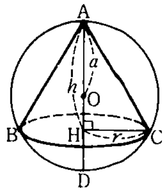
$f'(t)=0$이면 $t=2$

$\therefore$ (최대값)$=f(2)$

$=\mathbf{32}$



수련문제 35. 직원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라고 하면, 오른쪽 그림에서



$$\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{BH}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$
$$r^2=h(2a-h)$$

따라서 직원뿔의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi h^2(2a-h)$$
$$\therefore\ \frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi(-3h^2+4ah)$$
$$=\frac{1}{3}\pi h(-3h+4a)$$

$\dfrac{dV}{dh}=0$이면 $h=0,\ \dfrac{4}{3}a$

$0<h<2a$에서 V의 증감을 조사하면

$h=\dfrac{4}{3}a$일 때 부피는 최대가 된다.

$\therefore$ **(최대값)$=\dfrac{32}{81}\pi a^3$**

수련문제 36. $\angle\mathrm{C}$에 따라 $\overline{\mathrm{AB}}=c$도 변함으로 $P=f(c)$라고 놓자.

$$f(c)=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$$
$$=\frac{c^2+b^2-a^2}{2abc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2abc}$$
$$+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$$
$$=\frac{1}{2ab}\times\frac{c^2+a^2+b^2}{c}$$
$$f'(c)=\frac{1}{2ab}\times\frac{2c\cdot c-(c^2+a^2+b^2)}{c^2}$$
$$=\frac{1}{2ab}\times\frac{c^2-a^2-b^2}{c^2}$$

$f'(c)=0$이면 $c=\sqrt{a^2+b^2}$

c	$a-b$	$\cdots$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\cdots$	$a+b$
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$	$\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}$	↘	$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$	↗	$\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab(a+b)}$

$$f(a-b)-f(a+b)$$
$$=\frac{(a^3+b^3)-(a^3-b^3)}{ab(a+b)(a-b)}$$
$$=\frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}>0$$
$$\therefore\ f(a-b)>f(a+b)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\leqq P<\frac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}}$$

수련문제 37. $x\neq 0$이므로 주어진 방정식은

$$a=\frac{x^3+2}{x}$$

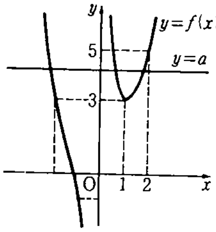
이다. $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}=x^2+\dfrac{2}{x}$ 라고 하면

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 이면 $x=1$

x	$-\infty$	$\cdots$	-0	0	$+0$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	$-\infty$		∞	↘	3	↗	∞
				(불연속)			(극소)		

또 $f(2)=5$ 이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 방정식 $a=\dfrac{x^3+2}{x}$ 가 서로 다른 세 실근을 가지고, 세 근 중 가장 큰 근이 1과 2 사이에 있으려면



$3<a<5$

수련문제 **38.** $x>0$ 이므로 주어진 방정식은

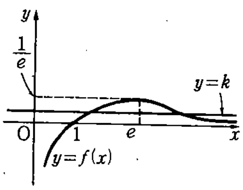
$$k=\frac{\ln x}{x}$$

이다. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 라고 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 이면 $x=e$

x	$+0$	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



$y=f(x)$와 $y=k$가 서로 다른 두 점을 공유하려면 **$0<k<\dfrac{1}{e}$**

수련문제 **39.** $y'=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

곡선 $y=xe^x$ 위의 점 $(t,\ te^t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-te^t=e^t(t+1)(x-t)$$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$을 지나므로

$$-te^t=e^t(t+1)(a-t)$$

$e^t>0$ 이므로 $-t=(t+1)(a-t)$

즉, $t^2-at-a=0$ ……㉠

㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D=a^2+4a=a(a+4)>0$

$a<-4$ 또는 $a>0$

수련문제 **40.** $f(x)=\tan x-x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$f'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x>0$

이므로 $f(x)$는 단조증가함수이다. 따라서

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $f(\alpha)<f(\beta)$

즉, $\tan\alpha-\alpha<\tan\beta-\beta$

$\therefore\ \tan\beta-\tan\alpha>\beta-\alpha$

수련문제 **41.** (1) $f(x)=x-\ln x\,(x>0)$로 놓으면

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}=0$ 에서 $x=1$

$0<x<1$ 일 때 $f'(x)<0$, $x>1$ 일 때 $f'(x)>0$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 최소이다.

$f(x)=x-\ln x\geqq f(1)=1>0$

$\therefore\ x>\ln x$

(2) $f(x)=e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2\,(x>0)$으로 놓으면

$f'(x)=e^x-1-x,\ f''(x)=e^x-1$

에서 $x>0$ 이면 $f''(x)>0$

따라서 $f'(x)$는 증가함수이고, $f'(0)=0$ 이므로

$x>0$ 이면 $f'(x)>0$

따라서 $f(x)$는 증가함수이고, $f(0)=0$ 이므로

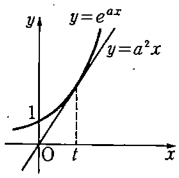
$x>0$ 이면 $f(x)>0$

$\therefore\ e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

수련문제 **42.** (i) $a>0$ 일 때

$f(x)=e^{ax},\quad g(x)=a^2x$

라 하고 접점의 x좌표를 t라고 하면



$f(t)=g(t)$

⇨ $e^{at}=a^2t$ ……㉠

$f'(t)=g'(t)$

⇨ $ae^{at}=a^2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=e,\ t=\dfrac{1}{e}$

$e^{ax}\geqq a^2x$ 이려면 $0<a\leqq e$

(ii) $a=0$ 일 때

$e^{ax}=e^0=1,\ a^2x=0$ 이므로 항상 성립

(iii) $a<0$ 일 때

$\lim\limits_{x\to\infty}e^{ax}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}a^2x=\infty$ 이므로 주어진 부등식이 항상 성립할 수는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$0\leqq a\leqq e$

수련문제 **43.** $(x,\ y)=(6t^2,\ t^3-12t)$ 이므로
시간 t 에서의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$ 라고 하면

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(12t,\ 3t^2-12)$$

$$\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(12,\ 6t)$$

$t=1$ 일 때 $\vec{v}=(12,\ -9)$, $\vec{a}=(12,\ 6)$

$$\therefore \begin{cases}|\vec{v}|=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\mathbf{15}\\ |\vec{a}|=\sqrt{12^2+6^2}=\mathbf{6\sqrt{5}}\end{cases}$$

수련문제 **44.** (1) 출발 후 t 초 후에는 $\angle POA=\omega t$ 이므로

$$x=r\cos\omega t,\ y=r\sin\omega t$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-r\omega\sin\omega t$, $\dfrac{dy}{dt}=r\omega\cos\omega t$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-r\omega^2\cos\omega t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-r\omega^2\sin\omega t$$

$$\therefore\ |\vec{v}|=\sqrt{(r\omega)^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}=\boldsymbol{r\omega}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(r\omega^2)^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}=\boldsymbol{r\omega^2}$$

(3) $\vec{v}\cdot\vec{a}=r^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t-r^2\omega^3\cos\omega t\sin\omega t$
즉, $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 에서 $\vec{v}\perp\vec{a}$
따라서 $\vec{v}$, $\vec{a}$ 가 이루는 각의 크기는 **90°**

수련문제 **45.** t 초 후의 고무풍선의 반지름의 길이를 r cm, 겉넓이를 $S\,\text{cm}^2$, 부피를 $V\,\text{cm}^3$ 라고 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\times\frac{dr}{dt}$$

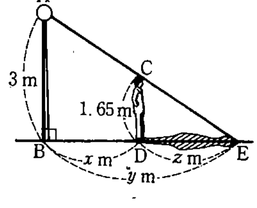
에서 $\dfrac{dV}{dt}=10$, $r=5$ 일 때 $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{10\pi}$ (cm/sec)
또, $S=4\pi r^2$ 에서 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=8\pi r\times\frac{dr}{dt}=8\pi\times5\times\frac{1}{10\pi}$$

$$=\mathbf{4\ (cm^2/sec)}$$

$\therefore$ **반지름의 길이의 변화율 $\dfrac{1}{10\pi}$ cm/sec**
겉넓이의 변화율 $4\ \text{cm}^2$/sec

수련문제 **46.**



그림에서 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{y}{y-x}=\dfrac{3}{1.65}$

$$\therefore\ y=\frac{20}{9}x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dt}=\frac{20}{9}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{20}{9}\times90=200(\text{m/분})$$

또, 그림자의 길이 z 는 $z=y-x=\dfrac{11}{9}x$

$$\therefore\ \frac{dz}{dt}=\frac{11}{9}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{11}{9}\times90=110(\text{m/분})$$

$\therefore$ **그림자의 끝의 속도 200 m/분**
그림자의 길이의 변화율 110 m/분

수련문제 **47.** 정육면체의 한 모서리의 길이가 x cm 일 때, 부피를 $V\,\text{cm}^3$, 겉넓이를 $S\,\text{cm}^2$ 라고 하면 $x=12$, $\dfrac{dx}{dt}=5$ 일 때 $V=x^3$ 에서

$$\frac{dV}{dt}=3x^2\cdot\frac{dx}{dt}=3\cdot12^2\cdot5=2160(\text{cm}^3/\text{sec})$$

또, $S=6x^2$ 에서

$$\frac{dS}{dt}=12x\cdot\frac{dx}{dt}=12\cdot12\cdot5$$

$$=720(\text{cm}^2/\text{sec})$$

$\therefore$ **부피의 변화율 2160 cm³/sec**
겉넓이의 변화율 720 cm²/sec

III. 적 분 법

수련문제 **1.** (1) (준식) $=\displaystyle\int\left(\frac{2}{x}-3x^{-3}\right)dx$

$$=2\ln|x|+\frac{3}{2}x^{-2}+C$$

$$=\mathbf{2\ln|x|+\frac{3}{2x^2}+C}$$

(2) (준식) $=\displaystyle\int\{(2^x)^2+2\cdot2^x\cdot3^x+(3^x)^2\}dx$

$$=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)\,dx$$

$$=\mathbf{\frac{4^x}{\ln4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C}$$

(3) (준식) $=\displaystyle\int\left(\cos x+\frac{1}{\cos^2x}\right)dx$

$$=\int(\cos x+\sec^2x)\,dx$$

$$=\mathbf{\sin x+\tan x+C}$$

수련문제 **2.** $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$ 이므로

$$f(x)=\int\left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx=e^x+\ln|x|+C$$

$x=1$, $y=e$ 를 대입하면
$e=e+C$ 에서 $C=0$
따라서 $x>0$ 일 때 $\boldsymbol{f(x)=e^x+\ln x}$

수련문제 **3.** (ii)에서 $x=y=0$이면

$f(0)=\{f(0)\}^2(f(0)>0) \quad \therefore f(0)=1$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$=f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=f(x)f'(1)=f(x)$$

따라서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$에서 $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=x+C$

$f(x)>0$이므로 $\ln f(x)=x+C$

$f(0)=1$에서 $C=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(x)=e^x}$

수련문제 **4.** $x>0$일 때

$$f(x)=\int\cos x\,dx=\sin x+C_1$$

$x<0$일 때

$$f(x)=\int k\sin x\,dx=-k\cos x+C_2$$

그런데 $f(\pi)=\sin\pi+C_1=C_1=1$,

$f(-\pi)=-k\cos(-\pi)+C_2=k+C_2=2$

또, $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)$$

$\sin 0°+C_1=-k\cos 0°+C_2$

$C_1=-k+C_2$

즉, $C_1=1$, $k+C_2=2$, $-k+C_2=C_1$에서

$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{2}}$

수련문제 **5.** 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+3x^2$

$\therefore f'(x)=-3x$

따라서 $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+C$에서 $f(2)=0$이므로

$C=6$

$\therefore f(1)=-\dfrac{3}{2}+6=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

수련문제 **6.** (1) $\displaystyle\int 2^{3x-1}dx=\frac{2^{3x-1}}{\ln 2}\times\frac{1}{3}+C$

$$=\boldsymbol{\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}+C}$$

(2) $\displaystyle\int\{\sin(1-2x)+\cos(3x-5)\}dx$

$$=-\cos(1-2x)\times\frac{1}{-2}+\sin(3x-5)\times\frac{1}{3}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\cos(1-2x)+\frac{1}{3}\sin(3x-5)+C}$$

수련문제 **7.** (1) $x^2+2x+3=t$로 놓으면

$(2x+2)dx=dt$

$\therefore (x+1)dx=\dfrac{1}{2}dt$

$$\therefore (\text{준식})=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\ln|t|+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C}$$

(2) $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$\cos x\,dx=dt$

$$\therefore (\text{준식})=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\ln|t|+C=\boldsymbol{\ln|\sin x|+C}$$

(3) $\dfrac{x^3-x-2}{x^3-x^2+x-1}=1+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

$$=\frac{x^3+(a+b-1)x^2+(-b+c+1)x+(a-c-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

에서

$a+b-1=0$, $-b+c+1=-1$, $a-c-1=-2$

$\therefore a=-1$, $b=2$, $c=0$

$$\therefore (\text{준식})=\int\left(1-\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=x-\ln|x-1|+\ln|x^2+1|+C$$

$$=\boldsymbol{x+\ln\left|\frac{x^2+1}{x-1}\right|+C}$$

(4) $\dfrac{1}{x(x+1)^3}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{d}{(x+1)^3}$

라고 하면

$1=a(x+1)^3+bx(x+1)^2+cx(x+1)+dx$에서

$a+b=0$, $3a+2b+c=0$,

$3a+b+c+d=0$, $a=1$

$\therefore a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=-1$

$\therefore$ (준식)

$$=\int\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right\}dx$$

$$=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

$$=\boldsymbol{\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C}$$

수련문제 **8.** (1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

$$=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-\int 2\cos x\,dx$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

$$=\boldsymbol{(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C}$$

(2) $\displaystyle\int(\ln x)^2dx$

$$=x(\ln x)^2-\int x\cdot(2\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$=x(\ln x)^2-2x\ln x+\int 2x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\mathbf{x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C}$

수련문제 **9.** $f'(x)=\begin{cases}\cos^3 x & (x>0)\\ \cos 3x\cos 2x & (x<0)\end{cases}$ 에서

(i) $x>0$ 일 때

$f(x)=\int\cos^3 x\,dx$

$=\int\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\,dx$

$=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+C_1$

$f(\pi)=C_1=0$

$\therefore\ f(x)=\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x$

(ii) $x<0$ 일 때

$f(x)=\int\cos 3x\cos 2x\,dx$

$=\int\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)\,dx$

$=\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C_2$

$x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)$

$\therefore\ C_1=C_2\quad\therefore\ C_2=0$

$\therefore\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{10}\sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right)+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\frac{1}{10}-\frac{1}{2}$

$=\mathbf{-\frac{3}{5}}$

수련문제 **10.** $I=\int e^x\cos x\,dx$라고 놓으면

$I=e^x\cos x-\int e^x\cdot(-\sin x)\,dx$

$=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$

$=e^x\cos x+e^x\sin x-I$

$2I=e^x\cos x+e^x\sin x$

$\therefore\ I=\int e^x\cos x\,dx$

$=\mathbf{\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C}$

수련문제 **11.** $f(x)=\int\operatorname{cosec}x\,dx=\int\frac{1}{\sin x}dx$

$=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$

에서 $\cos x=t$ 라고 하면 $-\sin x\,dx=dt$

$\therefore\ f(x)=\int\frac{-1}{1-t^2}\,dt$

$=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$

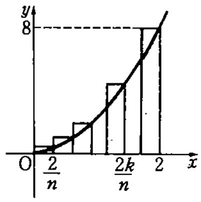
$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right|+C$

$=\ln|2-\sqrt{3}|+C=\ln(2-\sqrt{3})$

에서 $C=0$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\mathbf{-\frac{1}{2}\ln 3}$

수련문제 **12.** 오른쪽 그림과 같이 구간 [0, 2]를 n 등분하면 각 구간의 폭은 $\frac{2}{n}$이고 각 구간의 오른쪽 끝점에서의 함수값은 차례로



$\left(\frac{2}{n}\right)^3,\ \left(\frac{4}{n}\right)^3,\ \left(\frac{6}{n}\right)^3,\cdots,\left(\frac{2n}{n}\right)^3$

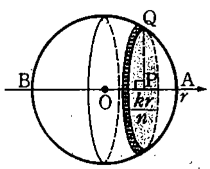
이므로 잘려진 각 소구간의 도형을 직사각형으로 보고 이들의 넓이의 합의 극한값을 구하면 구하는 도형의 넓이는

$S=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2n}{n}\right)^3\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$=\mathbf{4}$

수련문제 **13.** 주어진 구를 한 지름 AB에 수직인 평면으로 $2n$ 등분하면 각 소구간의 폭은 모두 $\frac{r}{n}$이다.



구의 중심 O에서 A쪽으로 k번째 소구간의 밑면의 반지름은

$\sqrt{r^2-\left(\frac{kr}{n}\right)^2}$

이므로 분할된 각 소구간을 원기둥으로 보고 이들의 부피의 합의 극한값을 구하면, 구하는 구의 부피는

$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\left\{r^2-\left(\frac{kr}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{r}{n}\cdot 2$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi r^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2)$

$$=2\pi r^3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{n^3-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

수련문제 14. (1) $|x^2-4|=\begin{cases}-x^2+4 & (0\leqq x\leqq 2)\\ x^2-4 & (2\leqq x\leqq 3)\end{cases}$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int_0^2(-x^2+4)\,dx+\int_2^3(x^2-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)+(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)$$
$$=\frac{23}{3}$$

(2) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{(x^2-1)+2}{(x-1)(x+1)}=1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int_2^3\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^3$$
$$=(3-2)+\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}$$
$$=1+\ln\frac{3}{2}$$

(3) $e^x=t$ 라고 놓으면 $e^xdx=dt$ 에서

$$dx=\frac{1}{e^x}dt=\frac{1}{t}dt$$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=e$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int_1^e\frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}dt$$
$$=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\Big[\ln|t|-\ln|t+1|\Big]_1^e$$
$$=\left[\ln\frac{t}{t+1}\right]_1^e$$
$$=\ln\frac{e}{e+1}-\ln\frac{1}{2}$$
$$=\ln\frac{e}{e+1}+\ln 2=\ln\frac{2e}{e+1}$$

(4) $\sin x=t$ 라고 놓으면 $\cos x\,dx=dt$

또, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int_0^1 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

수련문제 15. (1) $x=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 라고 하면

$$dx=\cos\theta\,d\theta$$
$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$$

또, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $x=\sqrt{2}\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 라고 하면

$$dx=\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$$
$$2+x^2=2(1+\tan^2\theta)=2\sec^2\theta$$

또, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{2}$ 일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

(3) $$\int_0^1 xe^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\sin t\,dt$

$$=\Big[e^t\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\cos t\,dt$$
$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\Big[e^t\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\sin t\,dt$$
$$\therefore\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\sin t\,dt=e^{\frac{\pi}{2}}+1$$
$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\sin t\,dt=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$$

수련문제 16. (1) $f(x)=x^3-2ax^2$ 에서

$$f'(x)=3x^2-4ax=3x\left(x-\frac{4}{3}a\right)$$

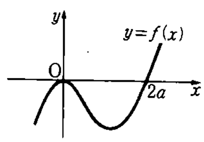
$f'(x)=0$ 이면 $x=0,\ \dfrac{4}{3}a$

$0<x<1$ 에서 $f(x)$의 극소값이 존재하려면

$$0<\frac{4}{3}a<1\qquad\therefore\ 0<a<\frac{3}{4}$$

(2) (i) $0<2a<1$

즉, $0<a<\dfrac{1}{2}$ 일 때



$$\int_0^1|f(x)|dx$$
$$=\int_0^{2a}(-x^3+2ax^2)\,dx+\int_{2a}^1(x^3-2ax^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}ax^3\right]_0^{2a}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}ax^3\right]_{2a}^1$$
$$=\frac{8}{3}a^4-\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}$$

(ii) $\dfrac{1}{2}\leqq a<\dfrac{3}{4}$ 일 때

$$\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1(-x^3+2ax^2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}ax^3\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}$$

답 $\displaystyle\int_0^1|f(x)|dx=\begin{cases}\frac{8}{3}a^4-\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}\left(0<a<\frac{1}{2}\right)\\ \frac{2}{3}a-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\leq a<\frac{3}{4}\right)\end{cases}$

(3) $\displaystyle\int_0^1|f(x)|dx=g(a)$라고 하면

(i) $0<a<\frac{1}{2}$일 때

$$g'(a)=\frac{32}{3}a^3-\frac{2}{3}=\frac{32}{3}\left(a^3-\frac{1}{16}\right)=0$$

이면 $a=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$이고 $g(a)$는 $a=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$에서 극소이고 최소이다.

$$g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{16}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2-\sqrt[3]{4}}{8}$$

(ii) $\frac{1}{2}\leq a<\frac{3}{4}$일 때 $g'(a)=\frac{2}{3}>0$

$g(a)$는 단조증가이므로 $a=\frac{1}{2}$에서 최소이다.

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

(i), (ii)에서 $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{8}<\frac{1}{12}$이므로

구하는 최소값은 $\boldsymbol{\frac{2-\sqrt[3]{4}}{8}}$

수련문제 17. $f(a)=\displaystyle\int_0^{\pi}(a\sin x-\pi)^2dx$라고 하면

$$f(a)=\int_0^{\pi}(a^2\sin^2 x-2a\pi\sin x+\pi^2)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(2\pi^2+a^2-a^2\cos 2x-4a\pi\sin x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(2\pi^2+a^2)x-\frac{1}{2}a^2\sin 2x+4a\pi\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}(a^2-8a+2\pi^2)$$

$f'(a)=\pi(a-4)$이므로

$f'(a)=0$이면 $a=4$

$a<4$에서 $f'(a)<0$

$a>4$에서 $f'(a)>0$

이므로 $f(a)$는 $a=4$에서 극소이고 최소이다.

답 **4**

수련문제 18. (1) (준식) $=\displaystyle\int_0^1(1+2x)^7dx$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times\left[(1+2x)^8\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{16}(3^8-1)=\mathbf{410}$$

(2) (준식) $=\displaystyle\int_0^1\cos^2\pi x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1+\cos 2\pi x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

수련문제 19. (1) (준식)

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) (준식) $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}f\left(1+\frac{k}{2n}\cdot 2\right)\frac{1}{2n}\cdot 2$

$$=2\int_0^1 f(1+2x)\,dx$$

$1+2x=t$라고 하면 $2dx=dt$, $dx=\frac{1}{2}dt$

또, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int_1^3 f(t)\,dt=\int_1^3 te^{t^2}\,dt$$

$t^2=y$라고 하면 $2t\,dt=dy$, $t\,dt=\frac{1}{2}dy$

$t=1$일 때 $y=1$, $t=3$일 때 $y=9$

$$\therefore\ (\text{준식})=\int_1^9 e^y\cdot\frac{1}{2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^y\right]_1^9=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^9-e)}$$

수련문제 20. $g(t)=\cos t+e^t$, $\displaystyle\int g(t)\,dt=G(t)+C$

라고 하면

$$F(x)=\left[G(t)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{x}=G(x)-G\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{G(x)-G\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=G'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

그런데 $G'(t)=g(t)=\cos t+e^t$이므로

$$G'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}+e^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{e^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

수련문제 21. $f(t)=t^2+t+2$, $\displaystyle\int f(t)\,dt=F(t)+C$

라고 하면

$$(\text{준식})=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\Big[F(t)\Big]_2^{2+x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\times\frac{F(2+x)-F(2)}{x}$$
$$=\frac{1}{2}F'(2)$$

그런데 $F'(t)=f(t)=t^2+t+2$ 이므로

$$\frac{1}{2}F'(2)=\frac{1}{2}(2^2+2+2)=4$$

수련문제 **22.** $\int_0^\pi tf(t)\,dt=k$ (k는 상수)라고 하면

$f(x)=\sin^2x+k$

$$\therefore\ k=\int_0^\pi(t\sin^2t+kt)\,dt$$
$$=\int_0^\pi\left\{\frac{t}{2}(1-\cos 2t)+kt\right\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{t}{2}\cos 2t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\pi^2+\frac{1}{2}\pi^2k-\left[\frac{t}{4}\sin 2t\right]_0^\pi+\int_0^\pi\frac{1}{4}\sin 2t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\pi^2+\frac{1}{2}\pi^2k-\left[\frac{1}{8}\cos 2t\right]_0^\pi$$
$$=\frac{1}{4}\pi^2+\frac{1}{2}\pi^2k$$

즉, $(4-2\pi^2)k=\pi^2$에서 $k=\dfrac{\pi^2}{4-2\pi^2}$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=\sin^2x+\frac{\pi^2}{4-2\pi^2}}$$

수련문제 **23.** 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=1$

또, 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^x+1-f'(x)e^x$

즉, $(1+e^x)f'(x)=1+e^x$에서 $f'(x)=1$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int dx=x+C$

그런데 $f(0)=1$ 이므로 $C=1$

$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=x+1}$

수련문제 **24.** $\int_0^1 f(t)e^{-t}dt=k$ (k는 상수)라고 하면

$\int_0^x f(t)\,dt=e^x-ake^{2x}$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1-ak$ $\therefore\ ak=1$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x-2ake^{2x}$

$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=e^x-2e^{2x}}$ (⬅ ㉡)

또, $k=\int_0^1 f(t)e^{-t}dt=\int_0^1(1-2e^t)\,dt$

$=\Big[t-2e^t\Big]_0^1=1-2e+2=3-2e$

$ak=1$에서 $a=\dfrac{1}{k}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3-2e}}$

수련문제 **25.** $F(x)=\int_0^x(\cos t+\sin t)\,dt$에서

$$F'(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0\leqq x\leqq\pi$에서 $F'(x)=0$ 이면 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

$0<x<\dfrac{3}{4}\pi$이면 $F'(x)>0$

$\dfrac{3}{4}\pi<x<\pi$이면 $F'(x)<0$

따라서 $F(x)$는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$에서 극대이고 최대이다.

$$\therefore\ (\text{최대값})=F\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\cos t+\sin t)\,dt$$
$$=\Big[\sin t-\cos t\Big]_0^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-0+1$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}+1}$$

수련문제 **26.** $0\leqq x\leqq1$일 때

$(x^2+x)-(4x-2)=(x-1)(x-2)\geqq0$

$(x^2+x)-2x=x(x-1)\leqq0$

$\therefore\ 4x-2\leqq x^2+x\leqq 2x$

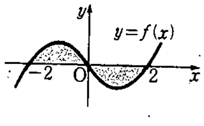
$\therefore\ e^{4x-2}\leqq e^{x^2+x}\leqq e^{2x}$

$$\therefore\ \int_0^1 e^{4x-2}dx\leqq\int_0^1 e^{x^2+x}dx\leqq\int_0^1 e^{2x}dx$$

그런데

$$\int_0^1 e^{4x-2}dx=\left[\frac{1}{4}e^{4x-2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\geqq\frac{1}{4}(e^2-1)$$
$$\int_0^1 e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^2-1)\leqq\int_0^1 e^{x^2+x}dx\leqq\frac{1}{2}(e^2-1)}$$

수련문제 **27.** 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면



$f(2x)=x^3-x$

$2x=t$라고 하면 $x=\dfrac{1}{2}t$이므로

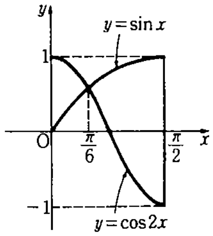
$$f(t)=\frac{1}{8}t^3-\frac{1}{2}t$$
$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}$$

또, $f(x)=\dfrac{1}{8}x(x+2)(x-2)=0$에서 이 곡선의

x 절편은 $x=0,\ -2,\ 2$
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{4}x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{4}x^2\right]_{0}^{2}=\mathbf{1}$$

$\boxed{\text{수련문제}}$ **28.** 두 곡선의 교점은



$\sin x=\cos 2x$
$\sin x=1-2\sin^2 x$
$(2\sin x-1)$
$\times(\sin x+1)=0$
$\therefore\ \sin x=\frac{1}{2},\ -1$

$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\quad x=\frac{\pi}{6}$

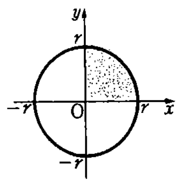
$0\leq x\leq\frac{\pi}{6}$ 일 때 $\quad \cos 2x\geq\sin x$

$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\quad \cos 2x\leq\sin x$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos 2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+0+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$=\mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}-1}$$

$\boxed{\text{수련문제}}$ **29.** 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$



$\therefore\ y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

구하는 원의 넓이 S는
$0\leq x\leq r$ 에서 곡선 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 과 x축 사이의 넓이의 4배이므로

$$S=4\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$x=r\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 라고 하면

$$\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2(1-\sin^2\theta)}=r\cos\theta$$
$$dx=r\cos\theta\,d\theta$$

또, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=r$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ S=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}r^2\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=2r^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=2r^2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\pi r^2}$$

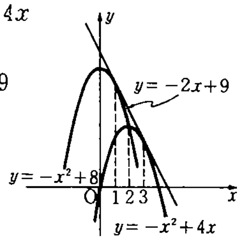
$\boxed{\text{수련문제}}$ **30.** (1) 공통접선을 $y=ax+b$ 라고 하면

(i) $-x^2+8=ax+b$, 즉 $x^2+ax+(b-8)=0$
에서 $D=a^2-4(b-8)=0$ ······ ㉠

(ii) $-x^2+4x=ax+b$, 즉 $x^2+(a-4)x+b=0$
에서 $D=(a-4)^2-4b=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-2,\ b=9$
따라서 공통접선의 방정식은 $\quad \boldsymbol{y=-2x+9}$

(2) (i) $-x^2+8=-x^2+4x$
$\therefore\ x=2$



(ii) $-x^2+8=-2x+9$
$\therefore\ x=1$

(iii) $-x^2+4x$
$=-2x+9$
$\therefore\ x=3$

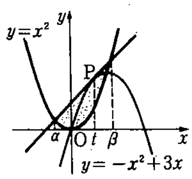
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{1}^{3}(-2x+9)\,dx-\int_{1}^{2}(-x^2+8)\,dx-\int_{2}^{3}(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[-x^2+9x\right]_{1}^{3}-\left[-\frac{1}{3}x^3+8x\right]_{1}^{2}-\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{2}^{3}$$
$$=10-\frac{17}{3}-\frac{11}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{\text{수련문제}}$ **31.** $y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$
에서 이 곡선은 $x=2$를 중심으로 대칭이다.
그런데 주어진 그림에서 $S_1:S_2=1:2$ 이므로

$$\int_{0}^{2}(x^2-4x+a)\,dx=0$$
$$\therefore\ \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax\right]_{0}^{2}=2a-\frac{16}{3}=0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a=\frac{8}{3}}$$

$\boxed{\text{수련문제}}$ **32.** 곡선 $y=-x^2+3x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+3t)$ 에서의 접선의 방정식은



$y-(-t^2+3t)$
$=(-2t+3)(x-t)$

즉, $y=(-2t+3)x+t^2$ ······ ㉠

$x^2=(-2t+3)x+t^2$

즉, $x^2+(2t-3)x-t^2=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$

라고 하면

$$\alpha+\beta=-2t+3,\ \ \alpha\beta=-t^2$$

따라서 곡선 $y=x^2$과 직선 ㉠으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_\alpha^\beta\{-x^2+(-2t+3)x+t^2\}dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

따라서 S가 최소로 되려면 $(\beta-\alpha)$가 최소가 되어야 한다. 그런데

$$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$$
$$=(-2t+3)^2+4t^2$$
$$=8t^2-12t+9$$
$$=8\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ S:\text{최소}\Longleftrightarrow(\beta-\alpha)^3:\text{최소}$$
$$\Longleftrightarrow(\beta-\alpha)^2:\text{최소}\Longleftrightarrow t=\frac{3}{4}$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{27}{16}\right)$

수련문제 33. 구하는 영역 중 제1사분면에 있는 영역의 넓이를 S_1이라고 하면

$$S_1=\int_0^a y\,dx$$

그런데 $y=a\sin^3 t$, $dx=3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\,dt$

또, $x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=a$일 때 $t=0$

$$\therefore\ S_1=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\,dt$$
$$=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\,dt$$

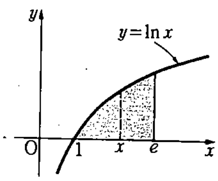
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{32}\pi$$

$$\therefore\ S_1=3a^2\left(\frac{3}{16}\pi-\frac{5}{32}\pi\right)=\frac{3}{32}\pi a^2$$

$$\therefore\ (\text{구하는 넓이})=4S_1=\boldsymbol{\frac{3}{8}\pi a^2}$$

수련문제 34. x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 y인 정삼각형이므로 그 넓이는



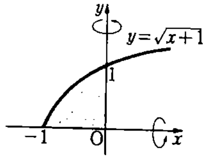
$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln x)^2$$

그런데 $1\leqq x\leqq e$이므로 구하는 부피는

$$\int_1^e\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln x)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln x)^2dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e-\int_1^e 2\ln x\,dx\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x\Big]_1^e$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)}$$

수련문제 35. $V_x=\int_{-1}^0\pi y^2dx$



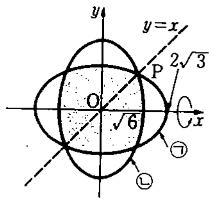
$$=\pi\int_{-1}^0(x+1)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^0=\frac{\pi}{2}$$

$$V_y=\int_0^1\pi x^2dy=\pi\int_0^1(y^2-1)^2dy$$
$$=\pi\int_0^1(y^4-2y^2+1)\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+y\right]_0^1=\frac{8}{15}\pi$$

$$\therefore\ V_x:V_y=\frac{\pi}{2}:\frac{8}{15}\pi=\boldsymbol{15:16}$$

수련문제 36. $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y_1^2}{6}=1 & \cdots\cdots㉠\\[2mm] \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y_2^2}{12}=1 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$

· 두 곡선 ㉠, ㉡은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 ㉠, ㉡의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 P라고 하면, 점 P는 ㉠과 직선 $y=x$의 교점 중 한 점이다.

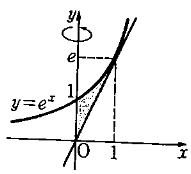


$\frac{x^2}{12}+\frac{x^2}{6}=1$에서 $x=2$ ($\because\ x>0$)이므로 P의 좌표는 $(2,\ 2)$

따라서 구하는 부피는

$$2\left\{\int_0^2\pi y_1^2dx+\int_2^{\sqrt{6}}\pi y_2^2dx\right\}$$
$$=2\pi\left\{\int_0^2\left(6-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_2^{\sqrt{6}}(12-2x^2)\,dx\right\}$$
$$=2\pi\left\{\left[6x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2+\left[12x-\frac{2}{3}x^3\right]_2^{\sqrt{6}}\right\}$$
$$=\boldsymbol{16\pi(\sqrt{6}-1)}$$

수련문제 37. $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식은 $y-e^t=e^t(x-t)$이고, 이 접선이 원점을 지나므로



$$-e^t=-te^t\quad\therefore\ t=1$$

원점을 지나는 접선은 $y=ex$

따라서 구하는 부피는

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot e-\int_1^e \pi x^2 dy$$
$$=\frac{1}{3}\pi e-\pi\int_1^e (\ln y)^2 dy$$
$$=\frac{1}{3}\pi e-\pi\Big[y(\ln y)^2\Big]_1^e+\pi\int_1^e 2\ln y\, dy$$
$$=\frac{1}{3}\pi e-\pi e+2\pi\Big[y\ln y-y\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{3}\pi e-\pi e+2\pi=\mathbf{2\pi\left(1-\frac{e}{3}\right)}$$

수련문제 38. 물이 들어가기 시작한 지 t초 후 수면의 높이를 $h(t)$, 반지름을 $R(t)$, 부피를 $V(t)$라고 하면

$$V(t)=\int_0^{h(t)}\pi\{R(t)\}^2 dh$$
$$=\int_0^t \pi\{R(t)\}^2\cdot h'(t)\,dt$$
$$\therefore\ \frac{dV(t)}{dt}=\pi\{R(t)\}^2\cdot h'(t)$$

에서 $\dfrac{dV(t)}{dt}=2$, $h'(t)=\dfrac{1}{t+1}$이므로

$$R(t)=\sqrt{\frac{2(t+1)}{\pi}} \quad\cdots\cdots ㉠$$

$h'(t)=\dfrac{1}{t+1}$에서

$$h(t)=\int_0^t \frac{1}{t+1}dt=\Big[\ln|t+1|\Big]_0^t=\ln(t+1)$$
$$\therefore\ t+1=e^{h(t)} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\mathbf{R=\sqrt{\dfrac{2e^h}{\pi}}}$

수련문제 39. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)$

$$\therefore\ |\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

따라서 실제로 P가 운동한 거리는

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\Big[t-\frac{1}{t}\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}=\mathbf{e-\frac{1}{e}}$$

수련문제 40. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$에서

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})$$
$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})$$
$$=\left\{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right\}^2$$
$$\therefore\ \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

구하는 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx$$
$$=\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=\mathbf{e-\frac{1}{e}}$$

수련문제 41. $\dfrac{dx}{dt}=6t$, $\dfrac{dy}{dt}=3-3t^2$

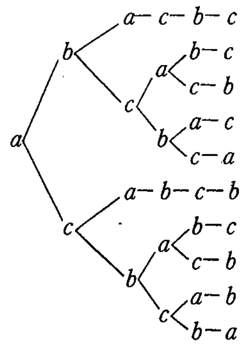
$$\therefore\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=36t^2+(9-18t^2+9t^4)$$
$$=9+18t^2+9t^4$$
$$=(3+3t^2)^2$$
$$\therefore\ \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=3+3t^2$$

구하는 곡선의 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3+3t^2)\,dt=2\Big[3t+t^3\Big]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=2\Big[3\sqrt{3}+3\sqrt{3}\Big]=\mathbf{12\sqrt{3}}$$

IV. 확 률

수련문제 1. 첫번째에 a가 오는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같이 10가지이다.



a가 2개, b가 2개, c가 2개씩이므로 첫번째에 b 또는 c가 오는 경우도 모두 10가지씩이다.

$\therefore\ 10\times 3=$**30(가지)**

수련문제 2. 접시에 담긴 귤의 수를 많은 것부터 x개, y개, z개라고 하면

$x\geq y\geq z$, $x+y+z=8$

$\therefore\ 1\leq z\leq 2 \quad \therefore\ z=1,\ 2$

$z=1$인 경우 : $x+y=7$

$\therefore\ (x,\ y)=(6,\ 1),\ (5,\ 2),\ (4,\ 3)$

$z=2$인 경우 : $x+y=6$

$\therefore (x,\ y)=(4,\ 2),\ (3,\ 3)$

따라서 구하는 경우의 수는 **5가지**

수련문제 3. 두 과목을 선택하는 방법은

(국어, 영어), (국어, 수학), (영어, 수학)

이고 각각 4×3, 4×5, 3×5 가지씩이므로

$4\times3+4\times5+3\times5=\mathbf{47}$ **(가지)**

수련문제 4. 최소의 것은 $a_1=1$, $a_2=2, \cdots, a_k=k$ 일 때이므로 그 합은

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

또, 최대인 것은 $a_1=n-k+1$, $a_2=n-k+2$, $\cdots$, $a_k=n$일 때로 그 합은

$$(n-k+1)+(n-k+2)+\cdots+n$$
$$=\frac{1}{2}k(2n-k+1)$$

로서 그 사이에 있는 모든 자연수를 나타내게 되므로 구하는 개수는

$$\frac{1}{2}k(2n-k+1)-\frac{1}{2}k(k+1)+1$$
$$=\boldsymbol{k(n-k)+1}$$

수련문제 5. 1, 2, 3, 4, 5 중 짝수는 2, 4 이므로 구하는 짝수의 개수는

$4!\times2=\mathbf{48}$ **(개)**

수련문제 6. a는 $a\neq0$이므로 -3, 2, 4, 6, 7의 5가지, b, c, d는 a에 사용된 수를 제외한 나머지 5개의 수 중에서 3개를 택하면 되므로

$5\times{}_5P_3=5\times(5\times4\times3)=\mathbf{300}$ **(개)**

수련문제 7. (1) (i) 한 자리의 수는 ${}_3\Pi_1=3$ (개)

(ii) 두 자리의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$ (개)

(iii) 세 자리의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$ (개)

(iv) 네 자리의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$ (개)

(v) 다섯 자리의 수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$ (개)

$\therefore 3+9+27+81+243=\mathbf{363}$ **(개)**

(2) 다섯 명의 아이를 ①, ②, ③, ④, ⑤라 하고 세 개의 과일을 a, b, c라고 하면 오른쪽 표와 같이 대응된다. 과일 한 개를 준다는 것은 줄마다 한 아이를 택한다는 것과 같다.

a	b	c
↓	↓	↓
①	①	①
①	①	②
①	②	①
……	……	……
⑤	⑤	⑤

$\therefore {}_5\Pi_3=5^3=\mathbf{125}$ **(가지)**

수련문제 8. (1) 1, 1, 1, 2, 2에서 네 개의 숫자를 택하는 방법은

(1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 2)

(i) (1, 1, 1, 2)인 경우 $\dfrac{4!}{3!}=4$ (개)

(ii) (1, 1, 2, 2)인 경우 $\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$ (개)

$\therefore 4+6=\mathbf{10}$ **(개)**

(2) m, a, n은 순서가 정해졌으므로 같은 문자로 보면

$\dfrac{8!}{3!}=\mathbf{6720}$ **(개)**

수련문제 9. (1) 남자 3명을 원탁에 앉히는 방법은 $(3-1)!$ 가지

남자 사이에 여자가 앉는 방법은 $3!$ 가지이므로 구하는 경우의 수는

$(3-1)!\times3!=\mathbf{12}$ **(가지)**

(2) 부부를 묶어서 생각하여 세 쌍을 앉히는 방법의 수는 $(3-1)!$ 가지, 부부끼리 자리를 바꿀 수 있으므로

$(3-1)!\times2\times2\times2=\mathbf{16}$ **(가지)**

(3) 남자 3명, 여자 3명을 각각 원순열로 만든 후 남녀 교대로 합석하면

$(3-1)!\times(3-1)!\times3=\mathbf{12}$ **(가지)**

수련문제 10. 원순열의 수는 $\dfrac{9!}{5!\,4!}\times\dfrac{1}{9}=\mathbf{14}$ **(가지)**

좌우대칭인 원순열은 $\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$ (가지)

좌우비대칭인 원순열은 $14-6=8$ (가지)

따라서 목걸이의 수는 $6+8\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{10}$ **(가지)**

수련문제 11. (1) 1단의 계단을 오르는 방법은 1가지, 2단의 계단을 오르는 방법은 (1단, 1단), (2단)의 2가지이므로

$f(1)=1,\ f(2)=2$

처음에 1단을 오르면 남은 $(n-1)$개의 계단을 오르는 방법은 $f(n-1)$가지, 처음에 2단을 오르면 남은 $(n-2)$개의 계단을 오르는 방법은 $f(n-2)$가지이고 이 두 경우는 동시에 일어날 수 없으므로

$$\boldsymbol{f(n)=f(n-1)+f(n-2)}$$

(단, $n\geq3$, $f(1)=1$, $f(2)=2$)

(2) $f(3)=f(1)+f(2)=3$

$f(4)=f(3)+f(2)=5$

$f(5)=f(4)+f(3)=8$

$f(6)=f(5)+f(4)=13$

$f(7)=f(6)+f(5)=21$

$\therefore f(8)=f(7)+f(6)=\mathbf{34}$

수련문제 12. (1) 각각의 선거인이 A, B, C 중 한 사람을 택할 수 있으므로 ${}_3\Pi_{10}=\mathbf{3^{10}}$ **(가지)**

(2) 세 후보가 얻은 표의 수를 x, y, z라고 하면 구하는 수는 $x+y+z=10$의 음이 아닌 정

수해 $(x,\ y,\ z)$의 개수와 같으므로

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}=\mathbf{66}\text{ (가지)}$$

수련문제 **13.** (1) (3명, 1명), (2명, 2명)의 **2가지**

(2) (3명, 1명), (2명, 2명)으로 조편성하여 배에 태우면 되므로

$$\left({}_4C_3\times{}_1C_1+{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2\,!}\right)\times 2\,!$$

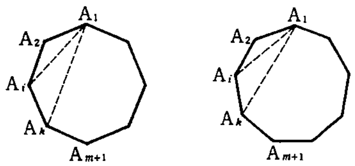
$$=\mathbf{14}\text{ (가지)}$$

(3) 서로 다른 6개의 좌석에 4명이 앉는 방법과 같으므로 ${}_6P_4=\mathbf{360}$ **(가지)**

수련문제 **14.** (1) 정 n각형의 꼭지점을 3개 택하면 되므로

$${}_nC_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\text{ (개)}$$

(2) A_1을 한 꼭지점으로 하는 $\triangle A_1A_iA_k$ $(1<i<k)$에서 $\angle A_i$ 가 둔각 또는 직각인 것을 생각한다.



$n=2m$인 경우와 $n=2m+1$인 경우로 나누어

$$k\leqq m+1,\ 2\leqq i\leqq k-1$$

의 범위에서 A_k의 위치를 정하면 A_i를 취하는 방법은 $(k-2)$가지 있다.

따라서 이와 같은 삼각형의 수는

$$(m-1)+(m-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}m(m-1)$$

($\because$ $k=m+1$ 일 때,

A_i를 취하는 방법은 $(m-1)$가지)

따라서 (1)의 삼각형 중 예각삼각형이 아닌 것의 수는 이 수의 각각 $2m$배, $(2m+1)$배이다.

그러므로 구하는 예각삼각형의 개수는

(i) $n=2m$일 때

$$\frac{1}{6}\cdot 2m(2m-1)(2m-2)-\frac{1}{2}m(m-1)\cdot 2m$$

$$=\frac{1}{3}m(m-1)(m-2)$$

$$=\frac{1}{24}n(n-2)(n-4)\text{ (개)}$$

(ii) $n=2m+1$일 때

$$\frac{1}{6}(2m+1)\cdot 2m\cdot(2m-1)$$

$$-\frac{1}{2}m(m-1)(2m+1)$$

$$=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)\text{ (개)}$$

답 $\begin{cases} n\text{이 짝수일 때 } \dfrac{1}{24}n(n-2)(n-4)\text{개} \\ n\text{이 홀수일 때 } \dfrac{1}{24}n(n-1)(n+1)\text{개} \end{cases}$

수련문제 **15.** (1) $(1+x)^n$

$$={}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots+{}_nC_nx^n$$

$x=1$을 대입하면

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

(2) $(1+x)^n$

$$={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots+{}_nC_nx^n$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$n(1+x)^{n-1}$$

$$={}_nC_1+2{}_nC_2x+\cdots r{}_nC_rx^{r-1}+\cdots+n{}_nC_nx^{n-1}$$

여기서 $x=-1$을 대입하면

$${}_nC_1-2{}_nC_2+3{}_nC_3-\cdots+(-1)^{n-1}n{}_nC_n=0$$

수련문제 **16.** $(1+x)^n\times(1+x)^n=(1+x)^{2n}$에서

$$(1+x)^n\times(1+x)^n$$

$$=\left(\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,x^{n-r}\right)\times\left(\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,x^r\right)$$

또, $(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k\,x^k$이므로 양변에서

x^{n+1}의 계수를 구하면

좌변에서 ${}_nC_0\,{}_nC_1+{}_nC_1\,{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}\,{}_nC_n$

우변에서 ${}_{2n}C_{n+1}$

$$\therefore\ {}_nC_0\,{}_nC_1+{}_nC_1\,{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}\,{}_nC_n$$

$$=\frac{(2n)\,!}{(n-1)\,!\,(n+1)\,!}$$

수련문제 **17.** (1) $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^7$의 일반항은

$${}_7C_r(x^2)^{7-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_7C_r(-2)^rx^{14-3r}$$

$14-3r=-1$에서 $r=5$

$$\therefore\ {}_7C_5(-2)^5=\mathbf{-672}$$

(2) 0.99^6

$$=(1-0.01)^6=\sum_{r=0}^{6}{}_6C_r(-0.01)^r$$

$$=1-{}_6C_1(0.01)+{}_6C_2(0.01)^2-{}_6C_3(0.01)^3+\cdots$$

$$=1-0.06+0.0015-0.000020+\cdots$$

$$=0.94148\cdots$$

$$\fallingdotseq\mathbf{0.9415}$$

수련문제 **18.** $(1+x+x^2)^6$의 일반항은

$$\frac{6\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}1^px^q(x^2)^r=\frac{6\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}x^{q+2r}$$

여기서 $p+q+r=6,\ q+2r=6$

$$\therefore\ (p,\ q,\ r)=(0,\ 6,\ 0),\ (1,\ 4,\ 1),$$

$$(2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 0,\ 3)$$

따라서 x^6의 계수는

$$\frac{6!}{6!}+\frac{6!}{4!}+\frac{6!}{2!2!2!}+\frac{6!}{3!3!}=\mathbf{141}$$

수련문제 19. $(a^2+ab+b^2)^4$의 일반항은

$$\frac{4!}{p!q!r!}(a^2)^p(ab)^q(b^2)^r$$
$$=\frac{4!}{p!q!r!}a^{2p+q}\times b^{q+2r}$$

따라서 a^3b^5을 포함하는 항은 $\begin{cases} p+q+r=4 \\ 2p+q=3 \\ q+2r=5 \end{cases}$

즉, $(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2)$일 때이므로 구하는 계수는

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}=\mathbf{16}$$

수련문제 20. 일반항 ${}_{19}\mathrm{C}_r\left(\frac{4}{5}x\right)^r={}_{19}\mathrm{C}_r\left(\frac{4}{5}\right)^r x^r$

x^r의 계수를 $a_r={}_{19}\mathrm{C}_r\left(\frac{4}{5}\right)^r$이라고 할 때

$$\frac{a_{r+1}}{a_r}=\frac{{}_{19}\mathrm{C}_{r+1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{r+1}}{{}_{19}\mathrm{C}_r\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^r}=\frac{4(19-r)}{5(r+1)}$$

$\frac{a_{r+1}}{a_r}\geqq 1$이면 $r\leqq\frac{71}{9}$ $\quad\therefore\ r\leqq 7$

$\therefore\ a_0\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq\cdots\leqq a_6\leqq a_7\leqq a_8$

$\frac{a_{r+1}}{a_r}\leqq 1$ 이면 $r\geqq\frac{71}{9}$ $\quad\therefore\ r\geqq 8$

$\therefore\ a_8\geqq a_9\geqq a_{10}\geqq\cdots\geqq a_{18}\geqq a_{19}$

따라서 a_8이 최대 계수이다.

$$\therefore\ \boldsymbol{a_8={}_{19}\mathrm{C}_8\left(\frac{4}{5}\right)^8}$$

수련문제 21. $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 이므로

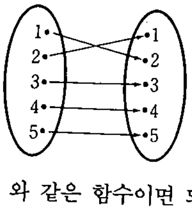
(1) $f(k)\geqq k$ 이면 $f(k)=k,\ k+1,\ \cdots,\ 5$에서 $(6-k)$ 가지

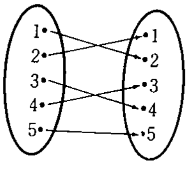
$\therefore$ (구하는 개수)

$$=\prod_{k=1}^{5}(6-k)=5\times4\times3\times2\times1$$
$$=5!=\mathbf{120(개)}$$

(2) (i) f가 항등함수이면 $(f\circ f)(a)=f(a)$

(ii) f가 항등함수가 아닐 때



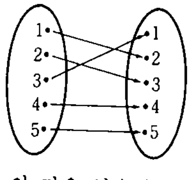


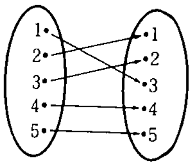
와 같은 함수이면 되므로

$$(\text{구하는 개수})=1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}$$
$$=\mathbf{26(개)}$$

(3) (i) f가 항등함수이면 성립

(ii) f가 항등함수가 아닐 때





와 같은 함수이면 되므로

$$(\text{구하는 개수})=1+{}_5\mathrm{C}_3\times2$$
$$=\mathbf{21(개)}$$

수련문제 22. 모든 경우의 수는 ${}_6\Pi_3=216$ (가지)

$5=1+1+3,\ 1+2+2$ 이므로

$$\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=6\ (\text{가지})$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{216}=\mathbf{\frac{1}{36}}$

수련문제 23. $i_1,\ i_2,\ l_1,\ l_2,\ u,\ s,\ o,\ n$을 일렬로 늘어 놓는 경우의 수는 $8!$ (가지)

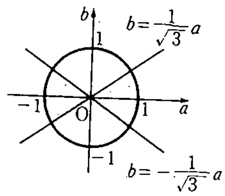
$(i_1,\ i_2),\ (l_1,\ l_2)$가 이웃하는 경우의 수는

$6!\times2!\times2!$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{6!2!2!}{8!}=\mathbf{\frac{1}{14}}$

수련문제 24. 모든 실수 x에 대하여

$$x^2+2ax-b^2+1\geqq0$$



이 성립하려면

$$\frac{D}{4}=a^2+b^2-1\leqq0$$

$\therefore\ a^2+b^2\leqq1$

$\therefore$ 표본 공간 $S=\{(a,\ b)\mid a^2+b^2\leqq1\}$

$x^2-2ax+3b^2=0$이 실근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=a^2-3b^2\geqq0$$

$\therefore\ A=\{(a,\ b)\in S\mid(a+\sqrt{3}b)(a-\sqrt{3}b)\geqq0\}$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{(\text{영역 } A\text{의 넓이})}{(\text{영역 } S\text{의 넓이})}=\frac{\frac{1}{3}\pi}{\pi}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

수련문제 25. 모든 경우의 수는 $5!$ 가지

(1) 1명이 자기 이름이 쓰인 카드를 집는 경우는 ${}_5\mathrm{C}_1$

4명이 자기 이름이 쓰이지 않는 카드를 집는 경우는 9가지(수형도를 그려볼 것)

$$\therefore\ (\text{확률})=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times9}{5!}=\mathbf{\frac{3}{8}}$$

(2) 5명 모두 자기 카드를 집지 못하는 경우의 수는 44가지 이므로 구하는 확률은

$$\frac{44}{5!}=\mathbf{\frac{11}{30}}$$

수련문제 **26.** (1) n명이 가위바위보를 할 때
모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_n=3^n$(가지)
승부가 나지 않을 경우는
모두 같은 손일 때 3가지
가위, 바위, 보가 모두 나왔을 때
$${}_3\Pi_n-{}_3C_1\times{}_2\Pi_n+{}_3C_2\times{}_1\Pi_n$$
$$=3^n-3\times2^n+3$$
$$\therefore\ \mathbf{P(n)=\frac{3^n-3\times2^n+6}{3^n}}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}P(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-3\times2^n+6}{3^n}=\mathbf{1}$

수련문제 **27.** 꺼내는 공의 번호를 차례로 기록하면 1에서 n까지, 즉 n개의 숫자의 중복을 허용하는 순열이므로 모든 경우의 수는 ${}_n\Pi_n=n^n$

(1) 1에서 n까지의 모든 수가 나오는 것은 중복을 허용하지 않는 경우이므로
${}_nP_n=n!$ (가지)
따라서 구하는 확률은 $\mathbf{\frac{n!}{n^n}}$

(2) 2에서 n까지의 번호 중 어느 것인가가 두 번 나타나게 된다. 두 개의 2와 3, 4, …, n의 n개의 수의 순열의 총수는 $\frac{n!}{2!}$이고, 다른 수가 두 번 나타나게 되는 경우도 마찬가지이므로 구하는 확률은
$$\frac{\frac{n!}{2!}\times(n-1)}{n^n}=\mathbf{\frac{(n-1)\cdot n!}{2n^n}}$$

(3) 한 개의 공을 꺼낼 때, 번호가 1이 아닐 확률은 $\frac{n-1}{n}$이고 n회 모두 1이 아닐 확률은 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$이므로 구하는 확률은 $\mathbf{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}$

수련문제 **28.** 갑이 당첨된 사건을 E, 을이 당첨된 사건을 F라고 하면
$$P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$
$$=\frac{P(E\cap F)}{P(E\cap F)+P(E^c\cap F)}$$
$$=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

수련문제 **29.** A, B가 독립이므로 A와 B^c, A^c와 B^c도 서로 독립이다.
$$\therefore\ P(A\cap B^c)=P(A)\cdot P(B^c)$$
$$=P(A)\cdot(1-P(B))=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots㉠$$
$$\therefore\ P(A^c\cap B^c)=P(A^c)\cdot P(B^c)$$
$$=(1-P(A))\cdot(1-P(B))=\frac{1}{6}\quad\cdots\cdots㉡$$
㉠, ㉡에서 $\mathbf{P(A)=\frac{3}{4},\ P(B)=\frac{1}{3}}$

수련문제 **30.** (1) 모자를 잃어버리지 않으려면 A, B, C의 집에서 각각 잃어버리지 않으면 되므로 구하는 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{8}{27}}$

(2) 모자를 잃어버리고 돌아올 확률은 $1-\frac{8}{27}$이고, C의 집에서 잃어버렸을 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$

이므로 구하는 확률은 $\frac{1-\frac{8}{27}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}}=\mathbf{\frac{4}{19}}$

수련문제 **31.** 양 끝에 있는 주사위가 1의 눈을 보일 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 중간에 있는 주사위가 1의 눈을 보일 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 양 끝에 있는 주사위가 모두 1의 눈을 보일 때
$$P_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot{}_4C_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{36}$$
(ii) 양 끝에 있는 주사위 중 하나가 1의 눈을 보일 때
$$P_2={}_2C_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot{}_4C_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{36}$$
(iii) 양 끝에 있는 주사위가 모두 1의 눈을 보이지 않을 때
$$P_3=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot{}_4C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{36}$$
따라서 구하는 확률은 $P_1+P_2+P_3=\mathbf{\frac{11}{36}}$

수련문제 **32.** 주사위를 100번 던져서 1의 눈이 r번 나올 확률을 P_r라고 하면
$$P_r={}_{100}C_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{100-r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$
$$P_{r+1}-P_r={}_{100}C_{r+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{r+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{100-(r+1)}$$
$$-{}_{100}C_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{100-r}$$
$$=\frac{100!}{(100-r)!\,(r+1)!}\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{100-(r+1)}$$
$$\times\left\{(100-r)\cdot\frac{1}{6}-(r+1)\cdot\frac{5}{6}\right\}$$
$$=\frac{100!}{(100-r)!\,(r+1)!}$$
$$\times\left(\frac{1}{6}\right)^{r+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{100-(r+1)}(95-6r)$$
$95-6r=0$으로 놓으면 $r=\frac{95}{6}=15.8\cdots$

r는 정수이므로 $0 \leqq r \leqq 15$ 일 때 $P_{r+1} > P_r$

$16 \leqq r \leqq 99$ 일 때 $P_{r+1} < P_r$

$\therefore P_0 < P_1 < \cdots < P_{15} < P_{16} > P_{17} \cdots > P_{99} > P_{100}$

그러므로 P_{16}, 즉 **16번** 나오는 것이 가장 일어나기 쉽다.

V. 통　계

수련문제 1. $m = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{16}{8} = 2$

또, $\sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - m^2$ 에서

$$\sum x_i^2 f_i = (\sigma^2 + m^2) \times \sum f_i = (4^2+2^2) \times 8 = \mathbf{160}$$

수련문제 2. $E(X)=1$, $\sigma(X)=2$이므로

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)^2\} = 2^2 + 1^2 = \mathbf{5}$$

$$\sigma(-2X+3) = |-2|\sigma(X) = 2 \times 2 = \mathbf{4}$$

수련문제 3. 주사위를 던졌을 때 나타나는 눈의 수를 X라고 하면 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합
$P(X)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore E(X) = \frac{2+4+3+4}{6} = \mathbf{\frac{13}{6}}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{2+8+9+16}{6} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{41}{36}}$$

수련문제 4. 나온 눈의 합이 4 이하인 경우는

(1, 1), (1, 2), (2, 1),

(1, 3), (2, 2), (3, 1)

의 6가지이므로

구하는 확률은 $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

X의 분포는 $\mathbf{B\left(60, \frac{1}{6}\right)}$을 따르므로

$$E(X) = np = 60 \times \frac{1}{6} = \mathbf{10}$$

$$V(X) = npq = 60 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \mathbf{\frac{25}{3}}$$

수련문제 5. (1) $q = 1-p$ 이므로

$$pq = p(1-p) = p - p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4}$$

$$\therefore pq \leqq \frac{1}{4}$$

(2) $P\left(\left|\dfrac{X}{n} - p\right| < \alpha\right) \geqq 1 - \dfrac{pq}{n\alpha^2}$에서

$\alpha = 0.1$, $n = 100$으로 하면

$$(\text{우변}) = 1 - \frac{pq}{100 \times 0.1^2} = 1 - pq$$

그런데 $pq \leqq \dfrac{1}{4}$이므로

$$(\text{우변}) = 1 - pq \geqq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\therefore P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0.1\right) \geqq 0.75$$

수련문제 6. (1) 확률밀도함수의 정의에 의하여

$$\int_0^2 ax^3 dx = \left[\frac{a}{4}x^4\right]_0^2 = 4a = 1 \qquad \therefore \mathbf{a = \frac{1}{4}}$$

$$P(X \leqq k) = \int_0^k \frac{1}{4}x^3 dx = \left[\frac{1}{16}x^4\right]_0^k = \frac{1}{16}k^4 = \frac{1}{256} \qquad \therefore \mathbf{k = \frac{1}{2}}$$

(2) $E(X) = \displaystyle\int_0^2 x \cdot \frac{1}{4}x^3 dx = \left[\frac{1}{20}x^5\right]_0^2 = \mathbf{\frac{8}{5}}$

수련문제 7. 기다리는 시간을 X라고 하면

$0 \leqq X \leqq 10$

X의 확률밀도함수를 $f(x)$라고 하면

$$P(0 \leqq X \leqq x) = \int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{10}$$

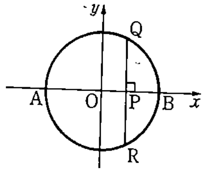
$$\therefore f(x) = \frac{1}{10}$$

$$\therefore E(X) = \int_0^{10} x \cdot \frac{1}{10} dx = \left[\frac{1}{20}x^2\right]_0^{10} = \mathbf{5}\,\text{(분)}$$

$$V(X) = \int_0^{10} x^2 \cdot \frac{1}{10} dx - 5^2 = \left[\frac{1}{30}x^3\right]_0^{10} - 25 = \frac{25}{3}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{\frac{25}{3}} = \mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

수련문제 8. (1) O, A, B의 좌표를 각각 (0, 0), $(-a, 0)$, $(a, 0)$이라 하고 동점 P의 좌표를 $(x, 0)$이라고 하자.



점 P의 x좌표를 확률변수 X라 하고, X의 확률밀도함수를 $f(x)$라고 하면

$$P(-a \leqq X \leqq x) = \int_{-a}^x f(t)\,dt = \frac{x+a}{2a}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2a} \quad (\text{단, } -a \leqq x \leqq a)$$

또, $\overline{QR} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$이므로

$2\sqrt{a^2-x^2}>a$ 에서 $|x|<\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\mathrm{P}\left(|X|<\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{1}{2a}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2a}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $\overline{\mathrm{QR}}$ 의 길이의 평균을 m 이라고 하면

$$m=\int_{-a}^{a}2\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{2a}dx$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=\frac{2}{a}\times\left(\pi a^2\times\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}a$$

수련문제 **9.** 점수를 X 라고 하면, X 는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 7.5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{7.5}$ 이라고 하면

$$\mathrm{P}(55\leqq X\leqq 85)=\mathrm{P}(-2\leqq Z\leqq 2)$$
$$=2\times\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 2)$$
$$=2\times 0.4772=0.9544$$

따라서 구하는 학생 수는

$1000\times 0.9544=954.4\fallingdotseq$ **954 (명)**

수련문제 **10.** 받게 될 점수를 X 라고 하면, X 는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 15^2)$ 을 따른다.

$Z=\frac{X-65}{15}$ 라 하고 상위 30%에 해당하는 점수를 c 라고 하면

$$\mathrm{P}(X\geqq c)=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{c-65}{15}\right)=0.3$$
$$=\mathrm{P}(Z\geqq 0.524)$$

$\therefore\ \frac{c-65}{15}=0.524$

$\therefore\ c=72.86\fallingdotseq$ **73 (점)**

수련문제 **11.** 1의 눈이 나올 횟수를 X 라고 하면 X 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$에 따른다.

$\therefore\ m=np=720\times\frac{1}{6}=120$

$\sigma^2=npq=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=10^2$

그런데 $n=720$ 은 충분히 크다고 할 수 있으므로 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-120}{10}$ 이라고 하면

$$\mathrm{P}(100\leqq X\leqq 150)=\mathrm{P}(-2\leqq Z\leqq 3)$$
$$=\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 2)+\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 3)$$
$$=\mathbf{0.9759}$$

수련문제 **12.** X 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$m=300\times\frac{1}{4}=75$

$\sigma^2=300\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{15}{2}\right)^2$

그런데 $n=300$ 은 충분히 크므로 X 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{15}{2}\right)^2\right)$에 따른다고 할 수 있다.

$\therefore\ \mathrm{P}(60\leqq X\leqq k)$

$=\mathrm{P}\left(-2\leqq Z\leqq\frac{k-75}{7.5}\right)$

$=0.4772+\mathrm{P}\left(0\leqq Z\leqq\frac{k-75}{7.5}\right)$

$\leqq 0.9544$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leqq Z\leqq\frac{k-75}{7.5}\right)\leqq 0.4772$

$\therefore\ \frac{k-75}{7.5}\leqq 2\qquad\therefore\ k\leqq 90$

따라서 구하는 최대값은 **90**

수련문제 **13.** (1) R 의 확률밀도함수를 $f(t)$라고 하면 $\mathrm{P}(0<R<t)=\int_0^t f(t)\,dt=t$ 에서

$f(t)=1\ \ (0<t<1)$

$[10R]=7$ 에서 $0.7\leqq R<0.8$ 이므로

$[10R]=7$ 일 확률은

$$\mathrm{P}=\int_{0.7}^{0.8}f(t)\,dt=\int_{0.7}^{0.8}1\,dt=\mathbf{0.1}$$

(2) $[10R]=7$ 인 것의 개수를 X 라고 하면 X 의 확률분포는 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$에 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times 0.1=\mathbf{40}$

$\sigma(X)=\sqrt{400\times 0.1\times 0.9}=\mathbf{6}$

(3) $n=400$ 은 충분히 크므로 X 는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$에 따른다고 볼 수 있다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(X<34)=\mathrm{P}(Z<-1)=\mathrm{P}(Z>1)$$
$$=0.5-0.34$$
$$=\mathbf{0.16}$$

수련문제 **14.** $\overline{X}$ 의 표준편차는

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{5}{10}=0.5$$

$5-3\overline{X}$ 의 표준편차는

$$\sigma(5-3\overline{X})=|-3|\cdot\sigma(\overline{X})=\mathbf{1.5}$$

수련문제 **15.** 모평균 $m=\frac{1+2+\cdots+10}{10}=\frac{11}{2}$

모분산 $\sigma^2=\frac{1^2+2^2+\cdots+10^2}{10}-\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{33}{4}$

따라서 $n=100$ 인 표본의 평균 $\overline{X}$ 는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m=\frac{11}{2}$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{100}\mathrm{V}(X)=\frac{33}{400}$$

$n=100$ 은 충분히 크므로 $\overline{X}$ 의 분포는

$$\mathrm{N}\left(\frac{11}{2},\ \frac{33}{400}\right)$$

수련문제 16. $n=400$ 이므로 $\overline{X}$ 는 $\mathrm{N}\left(100,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$\therefore\ f_{400}(k)=\mathrm{P}(\overline{X}\geqq k)=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{k-100}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\geqq 2(k-100))\leqq 0.05$$

$$=\mathrm{P}(Z\geqq 1.64)$$

$\therefore\ 2(k-100)\geqq 1.64 \qquad \therefore\ k\geqq 100.82$

따라서 k 의 최소값은 **100.82**

수련문제 17. $\overline{X}=83.7,\ s=3,\ n=36$ 이므로

$$83.7-\frac{1.96\times 3}{\sqrt{36}}\leqq m\leqq 83.7+\frac{1.96\times 3}{\sqrt{36}}$$

$\therefore\ 82.72\leqq m\leqq 84.68$

$\therefore$ **82.7 cm 이상 84.7 cm 이하**

수련문제 18. $\overline{p}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10},\ n=50$ 이므로

신뢰도 95%의 정밀도는

$$1.96\times\sqrt{\frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}}{50}}\fallingdotseq 0.083$$

따라서 모비율 p 는

$0.9-0.083\leqq p\leqq 0.9+0.083$

$\therefore\ 0.817\leqq p\leqq 0.983$

답 **81.7% 이상 98.3% 이하**

수련문제 19. A학생의 실력이 향상되지 않았다고 가정하면 한 문제를 풀 확률은 0.6 이므로 5문제 중 4문제 이상 풀 확률은

$$\mathrm{P}(X\geqq 4)={}_5\mathrm{C}_4(0.6)^4\times 0.4+{}_5\mathrm{C}_5(0.6)^5$$

$$\fallingdotseq 0.337>0.05$$

따라서 위의 가설은 기각될 수 없다.(단측검정)

즉, 이번 성적만으로는 실력이 **향상되었다고 할 수 없다.**

수련문제 20. 남자의 출생률이 $\frac{1}{2}$이라고 하면

400명 중 남자의 수를 확률변수 $\overline{X}$ 라고 할 때

$$\overline{X}:\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)\Longrightarrow\overline{X}:\mathrm{N}(200,\ 10^2)$$

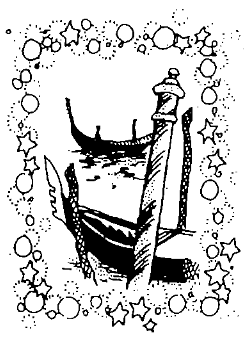
따라서 $\overline{X}=212$ 의 표준측도

$$Z=\frac{212-200}{10}=1.2 \text{ 이므로}$$

$|Z|=1.2<1.96$

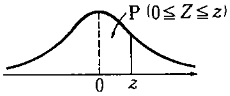
따라서 가설은 채택된다.

즉, 남·여의 출생률이 **다르다고 할 수 없다.**



표준정규분포표

$$P(0 \leq Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997