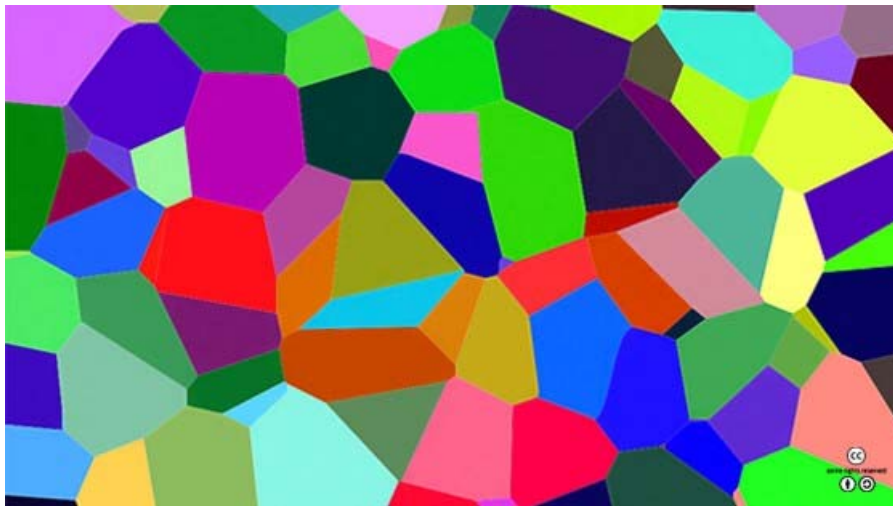


[수학산책]

수학적 원리로 그린 그림, 다양한 분야에 쓰인다.

보로노이 다이어그램



보로노이 다이어그램. <출처 : (cc) Helix84 at Wikimedia.org>

무작위로 평면을 나눈 듯 여러 모양의 다각형이 빼곡하게 담겨있는 이 그림의 정체는 뭘까? 개구리 알처럼 보이기도 하고, 기린의 무늬를 닮기도 했다. 간단한 수학적 원리로 그릴 수 있는 이 그림은 ‘보로노이 다이어그램’이라 부른다. 생소한 이름이지만, 공학이나 생물학, 지리학, 건축과 예술까지 여러 분야에 쓰이고 있다. 다양한 분야에서 보로노이 다이어그램이 어떻게 쓰이고 있는지 알아보자.

보로노이 다이어그램이란?

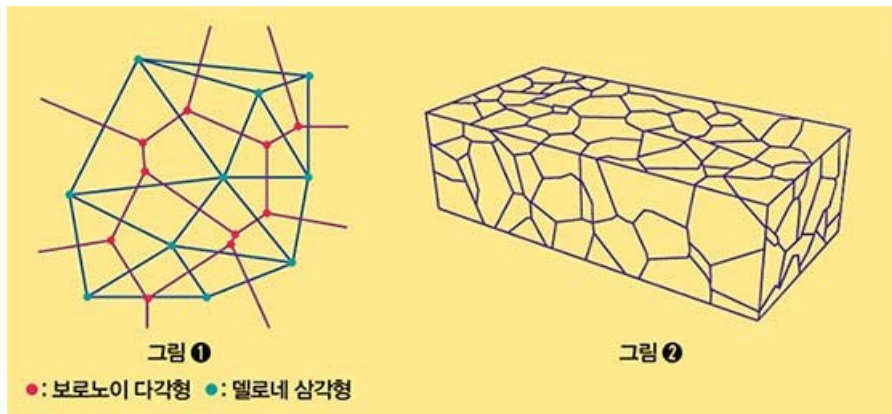
‘보로노이 다이어그램’은 1868년 우크라이나에서 태어난 러시아의 수학자 조지 보로노이의 이름을 따서 그 이름을 지었다. 똑같이 많은 다각형으로 채워져 있어 규칙이 없는 것처럼 보이지만, 수학적 원리로 평면을 분할하는 과정에서 나타나는 그림이다.

보로노이 다이어그램을 그리는 방법은 간단하다. 먼저 평면 위에 여러 개의 점을 찍는다. 그런 다음, 가장 인접한 두 개의 점을 선택해 수직이등분선을 그리면 평면은 수직이등분선에 의해 여러 개의 다각형으로 분할된다. 이렇게 그려진 그림을 보로노이 다이어그램이라고 하고, 이때 생기는 다각형을 보로노이 다각형이라고 한다. 보로노이 다각형은 특정 점을 기준으로 가장 가까운 점들을 모은 집합이 된다. 이것이 보로노이 다이어그램이 갖는 가장 중요한 성질이다. 보로노이 다각형의 모서리는 로봇이나 GPS 등 최단경로를 찾는 데에 종종 쓰인다.

보로노이 다이어그램을 그리다 보면 아래 그림①과 같이 인접한 점을 연결해 그려지는 삼각형을 발견할 수 있다. 이들 삼각형도 보로노이 다각형과 마찬가지로 평면을 분할하는데, 이러한 분할을 ‘델로네 삼각분할’이라고 한다. 델로네 삼각형의 외심은 보로노이 다각형의 꼭짓점이 된다.



조지 보로노이(1868~1908).



보로노이 다이어그램과 델로네 삼각분할(그림1), 3차원보로노이 다이어그램(그림2)

보로노이 다이어그램과 델로네 삼각분할은 서로 쌍대관계를 갖는다. 이 때문에 보로노이 다이어그램을 알면 델로네 삼각형을, 델로네 삼각형을 알면 보로노이 다이어그램을 그릴 수 있다. 한편 2차원 평면에서 그린 보로노이 다이어그램을 3차원 공간에서 그리는 것도 가능하다. 이때는 수직이등분선 대신에 수직이등분평면으로 공간을 분할한다. 그러면 그러면 그림②와 같은 3차원 보로노이 다이어그램이 완성된다.

참고로, 보로노이 다이어그램을 공식적인 수학적 개념으로 정의한 사람은 조지 보로노이지만, 그 이전에도 보로노이 다이어그램에 관한 기록이 남아 있다. 1644년 데카르트는 그의 저서에서 보로노이 다이어그램을 이용해 태양계 내의 행성들의 관계를 설명했다. 1850년에는 데데킨트도 2차원, 3차원 보로노이 다이어그램을 언급했다. 또 영국인 의사 존 스노우는 콜레라 감염의 원인을 보로노이 다이어그램을 이용해 설명했다.

공공기관의 관할구역을 효율적으로 나누는 방법은?

우리가 살고 있는 동네에는 소방서, 동사무소, 경찰서와 같이 국민들의 편의를 위한 여러 종류의 공공기관이 있다. 이런 공공기관은 국민들의 편의를 위해 지어진 것으로 누구나 접근하기 편리한 곳에 있어야 한다. 그러려면 그 지역의 사람들을 빠짐없이 나누면서도, 각 사람들이 가장 가깝고 편리하게 접근하도록 공공기관의 관할구역을 나눠야 한다. 이와 같이 어떤 지역의 공간을 효율적으로 나누는 문제를 ‘분할 문제’라고 한다. 이런 문제는 지리학자들의 연구 분야 중 하나로, 지리학자들은 분할 문제를 해결하기 위해 많은 노력을 기울이고 있다.

공공기관의 관할구역 분할 문제를 해결하는 데 보로노이 다이어그램은 핵심적인 역할을 한다. 그 이유는 보로노이 다이어그램이 특정한 점을 기준으로 가장 가까이에 있는 점들로 공간을 나눈다는 성질이 있기 때문이다. 공공기관을 점으로 생각해 보로노이 다이어그램을 그리면, 보로노이 다각형이 바로 공공기관의 관할 구역이 된다.



공공기관의 관할구역 분할 문제를 해결하는 데 보로노이 다이어그램은 핵심적인 역할을 한다.

그러나 현실에 적용할 효율적인 관할구역을 찾는 데에는 보로노이 다이어그램만으로는 부족하다. 보로노이 다이어그램은 유클리드거리만을 고려해 분할한 것이기 때문이다. 실제 지역에서는 **유클리드 거리¹⁾**가 최선의 방법이 아닌 경우가 무척 많다. 출발점과 도착점 사이에 산이나 강이 있다거나, 도로가 없는 경우에 유클리드 거리는 가장 짧은 길이 아니다. 따라서 현실에서 적용할 수 있는 최선의 관할구역을 찾으려면 보로노이 다이어그램은 기본이고 지역의 지형이나 인구밀도, 도로의 상황까지도 고려해야 한다.

하지만 보로노이 다이어그램이 모든 분할 문제에 쓰이는 것은 아니다. 공공 기관이 아닌 편의점이나 패스트푸드와 같은 가게는 공익을 목적으로 하지 않고, 높은 이윤을 목적으로 한다. 이 때문에 모든 사람이 아닌 주요 소비층만을 대상으로 해서 위치를 정한다. 따라서 상점의 위치를 정하는 문제에는 보로노이 다이어그램을 적용하지 않는다.

보로노이 다이어그램, 건축에도 쓰인다!

보로노이 다이어그램은 세포의 분열이나 동물의 무늬, 벌집과 같이 다양한 자연 구조와 닮아 예술적인 가치도 높다. 자연의 패턴이나 구조는 완전하며 아름다운 균형미를 가지고 있기 때문이다. 게다가 보로노이 다이어그램은 공간 분할에 있어서도 최소를 이용해 최대한의 효과를 얻는 원리를 담고 있어 경제적이기도 하다. 예술성과 경제성을 두루 갖추고 있는 보로노이 다이어그램은 건축 디자인에서도 자주 활용된다. 보로노이 다이어그램을 활용한 건축에는 어떤 것이 있을까?

워터큐브

실제의 건물로는 2008년 베이징 올림픽에서 수영 경기가 이뤄진 ‘워터큐브’가 대표적이다. 워터큐브는 거대한 직사각형 외관이 3차원 보로노이 다이어그램 모양으로 이뤄져 있다. 마치 비누거품 모양과도 비슷한 워터큐브는 무려 634개의 입체로 이뤄져 있다.



2008년 베이징 올림픽에서 수영 경기가 이뤄진 '워터큐브'

고대 유물 느낌으로 디자인한 초고층 건물

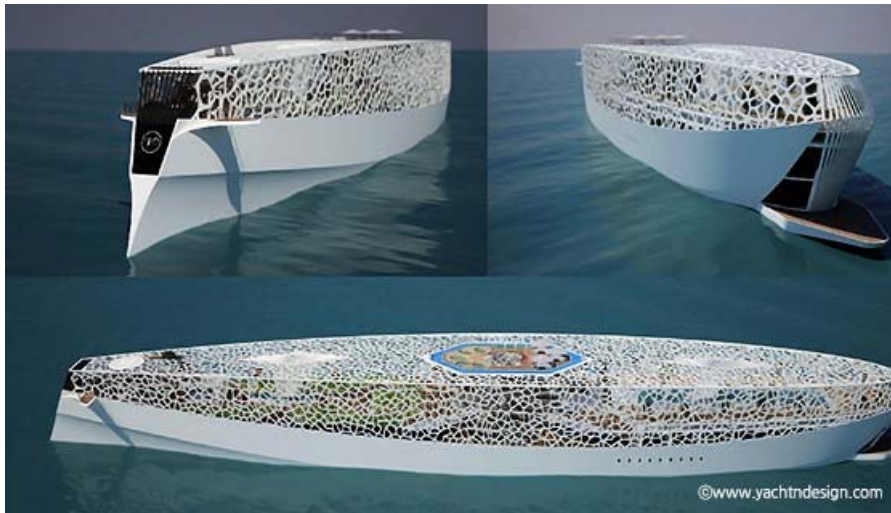
설계안은 여럿을 찾을 수 있다. 2010년 초고층 건물 디자인 공모전에 출품됐던 작품으로 호주의 홍준 저우와 중국의 루싱의 합작품이다. 산 속에 있는 고대 유물 느낌으로 디자인한 이 초고층 건물은 3차원 보로노이 다이어그램을 이용해 공간을 분할했다.



고대 유물 느낌으로 디자인한 초고층 건물. 2010년 초고층 건물 디자인 공모전 출품작. <출처 :
©Hongjun Zhou, Lu Xing>

보로노이 다이어그램을 이용해 디자인한 초호화 요트

시각디자이너 김현석씨가 보로노이 다이어그램을 이용해 디자인한 초호화 요트다. 길이가 125m, 너비가 20m에 이르는 초대형 보트로, 골프 그린과 수영장까지 갖췄다. 김현석 디자이너는 불필요한 공간을 없애면서 적은 재료로 견고한 구조를 만드는 데에 보로노이 다이어그램이 적합해 이를 이용했다고 말했다.



시각디자이너 김현석씨가 보로노이 다이어그램을 이용해 디자인한 초호화 요트. <출처 :
©www.yachtdesign.com>

경기도 일산 마곡지역의 도시 설계안

경기도 일산 마곡지역의 도시 설계안이다. 보로노이 다각형의 모서리를 따라 물길을 만들어 동선이 최단거리가 되도록 했다. 보로노이 다이어그램의 원리까지 활용해 효율성을 살린 사례다.



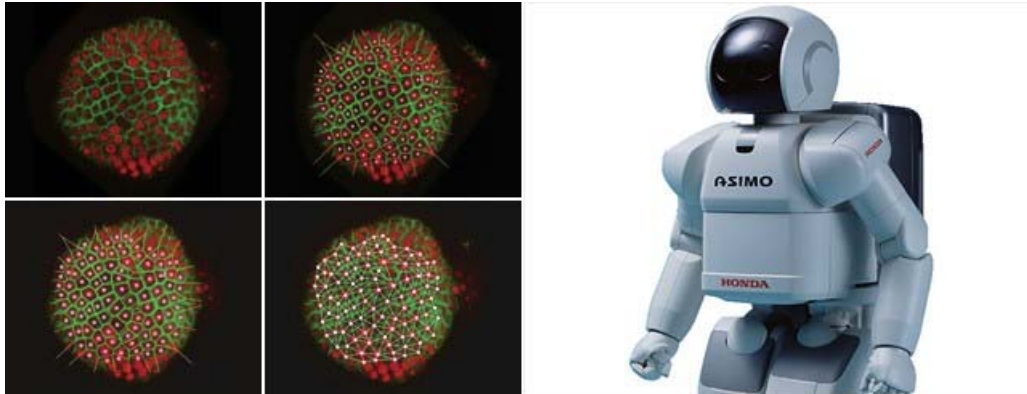
다이어그램의 원리를 활용한 경기도 일산 마곡지역의 도시 설계안. <출처 : ©이재경 스튜디오>

단백질 구조와 로봇 경로 찾아내는 보로노이 다이어그램!

일상생활의 편리와 아름다움을 넘어 보이지 않는 세포나 분자와 같은 작은 자연의 세계를 이해하는 데에도 보로노이 다이어그램이 쓰이고 있다. 예를 들어 보로노이 다이어그램을 이용하면 단백질 구조를 정확하게 알 수 있다. 분자를 이루고 있는 원자의 중심에 점을 찍어 보로노이 다이어그램을 그리면, 이를 토대로 분자의 구조를 계산할 수 있다.

특히 과거에는 2차원 보로노이 다이어그램을 이용했지만, 현재는 3차원 보로노이 다이어그램을 이용해 단백질 구조를 더 정확하게 구할 수 있다. 2차원 보로노이 다이어그램을 이용할 때는 분자를 이루고 있는 서로 다른 원자의 크기를 고려하는 것이 어려웠다. 점을 선택해 그린 보로노이 다이어그램이 평면적이기 때문에, 분자의 구조를 정확하게 알 수 없었던 것이다. 그러나 3차원 보로노이 다이어그램을 그리면, 분자의 입체 모양을 정확하게 알 수 있다. 그 결과 같은 분자처럼 보이는 것도 거리와 위치를 파

악해 서로 다른 분자로 구별할 수 있게 됐다.



미국 캘리포니아 공과대학의 백먼 연구소에서 보로노이 다이어그램을 이용해 식물의 세포단위를 분석한 모습.

보로노이 다이어그램은 로봇이나 GPS에서 최단 경로를 찾는 데에 활용된다.

보로노이 다이어그램은 로봇의 경로를 찾는 데에도 쓰인다. 로봇이 장애물을 만나면 피해가도록 동선을 짜는 것이 필요한데, 보로노이 다이어그램은 이런 문제를 해결하는 데 핵심적인 역할을 한다. 보로노이 다각형의 모서리가 분할된 공간에서 최단 경로 역할을 한다는 점을 이용한 것이다.

이처럼 보로노이 다이어그램은 생활 속 곳곳에서부터 첨단 연구까지 무척 다양한 곳에서 활약하고 있다. 보로노이 다이어그램이야말로 진정한 멀티플레이어가 아닐까?

1) 유클리드 거리 : 두 점 A와 B사이의 거리는 두 점을 잇는 선분의 길이로 구하는 것을 유클리드 거리라고 한다. 일반적으로 사람들이 알고 있는 거리를 뜻한다.

글 장경아 / 수학동아기자

학창시절 수학을 잘 가르치는 선생님이 되고 싶었지만, 더 많은 독자들에게 재미있는 수학을 소개하고 싶어 수학동아 기자가 됐다. 실생활 속에서 신기하고 재미있는 수학이야기를 찾기 위해 노력하고 있다.

도움 신정엽(서울대학교 지리교육과 교수), 김종근 박사(서울대학교 지리교육과), 김덕수(한양대학교 산업공학과 교수), 전한중(한양대학교 건축학과 교수), 지승열(한양대학교 건축학과 박사과정)

사진 동아일보, 이재경 스튜디오, www.yachtdesign.com

발행 2012.09.11