제 1 장

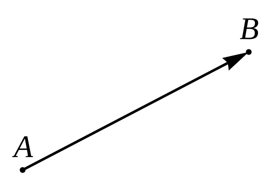
벡터와 행렬

제 1 절 직교좌표와 벡터

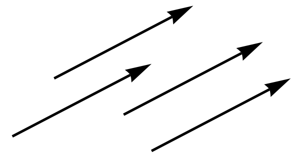
길이, 질량, 속력 등의 양은 크기만 알면 표현이 가능하다. 그러나 이동, 힘, 속도 등은 크기 뿐만 아니라 방향을 알아야 표현이 가능하다. 이렇게 크기와 방향이 주어진 양을 **벡터(vector)**라고 한다. 2차원, 또는 3차원 공간에서 벡터는 **화살표(arrow)**, 또는 **방향선분(directed line segment)**을 이용하여 나타낸다. 화살의 방향은 벡터의 방향을 나타내고, 화살의 길이는 벡터의 크기를 나타낸다. 화살의 **꼬리(tail)**는 벡터의 **시점(initial point)**, 화살의 **머리(head)**는 벡터의 **종점(terminal point)**이라고 부른다. 앞으로 벡터는 $\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{v}, \mathbf{x}$ 와 같이 볼드체의 소문자를 이용하여 나타내기로 한다. 벡터와 구분하여 실수는 **스칼라(scalar)**라는 표현을 사용하고 a, t, x 와 같이 이탤리체 소문자를 사용하여 나타낸다. 다음 그림처럼 벡터 $\mathbf{v}$ 의 시점이 A, 종점이 B 인 경우

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

로 나타낸다.



같은 크기와 방향을 가진 벡터들은 서로 **동등하다(equivalent)**, 또는 **같다(equal)**고 한다. 따라서 다음 그림의 벡터들처럼 크기와 방향은 같지만 위치가 다른 벡터들은 모두 같은 벡터로 간주한다.



동등한 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 는

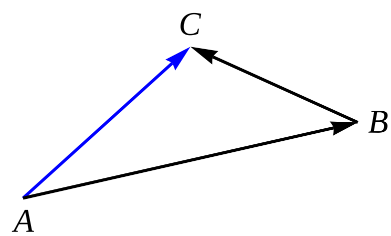
$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

로 나타낸다.

벡터의 연산

어떤 입자가 A 에서 B 까지 움직였다면 이때 벡터는 $\overrightarrow{AB}$ 로 나타낼 수 있다. 다시 이 입자가 B 에서 C 까지 움직였다면 이때의 벡터는 $\overrightarrow{BC}$ 이다. 그러면 이 입자는 결국 A 에서 C 로 움직인 것이 된다. 이때 벡터 $\overrightarrow{AC}$ 를 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{BC}$ 의 합으로 정의한다.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



크기가 0 인 벡터를 **영벡터**(**zero vector**)라고 부르고 $\mathbf{0}$ 로 나타낸다. 임의의 벡터 $\mathbf{v}$ 에 대하여

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

로 정의한다. 시점과 종점이 같은 벡터는 모두 영벡터가 된다.

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$$

보기 1 평면의 임의의 세 점 A, B, C 에 대하여

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$$

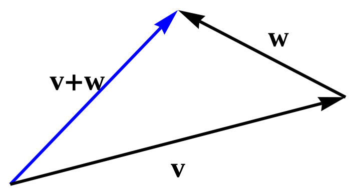
임을 보여라.

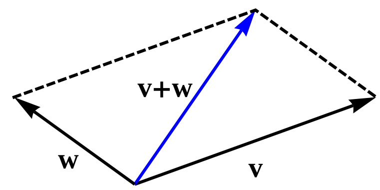
Solution

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0} \qquad \square$$

일반적으로 임의의 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 에 대하여 두 벡터의 합 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ 는 다음과 같은 방법으로 정의한다. 벡터 $\mathbf{w}$ 의 시점이 벡터 $\mathbf{v}$ 의 종점과 일치하도록 $\mathbf{w}$ 를 이동한다. 이때 시점은

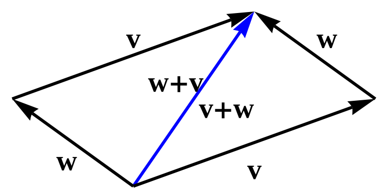
$\mathbf{v}$ 와 일치하고 종점은 $\mathbf{w}$ 와 일치하는 벡터를 $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 로 정의한다.(왼쪽그림) 만약 $\mathbf{v}$ 와 $\mathbf{w}$ 의 시점이 일치하게 놓는다면 $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 는 $\mathbf{v}$ 와 $\mathbf{w}$ 로 만들어지는 평행사변형의 대각선으로 정의된다.(오른쪽 그림)





정의에 의하면 두 벡터 $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 와 $\mathbf{w}+\mathbf{v}$ 는 같음을 알 수 있다.

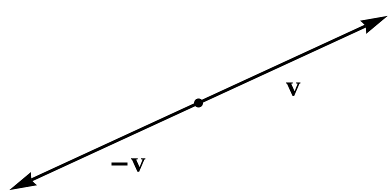
$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$$



영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{v}$ 에 대하여 $-\mathbf{v}$ 는 $\mathbf{v}$ 와 크기는 같고 방향은 반대인 벡터로 정의한다. 이때

$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$$

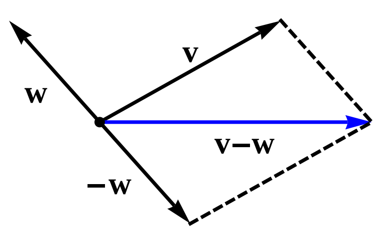
이 된다.

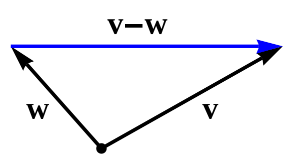


두 벡터의 차(**difference**) 는

$$\mathbf{v}-\mathbf{w}=\mathbf{v}+(-\mathbf{w})$$

로 정의한다.(왼쪽 그림) 만약 $\mathbf{v}$ 와 $\mathbf{w}$ 의 시점을 같은 위치에 놓는다면 $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ 는 $\mathbf{w}$ 의 종점에서 $\mathbf{v}$ 의 종점으로 가는 벡터가 된다.(오른쪽 그림)





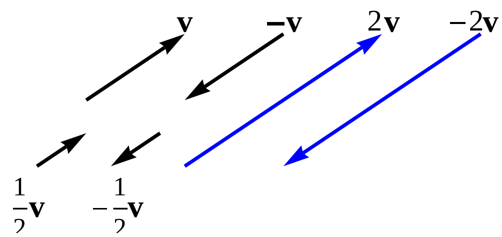
영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{v}$ 의 **상수곱(scalar multiple)** $k\mathbf{v}$ 는 크기가 벡터 $\mathbf{v}$ 의 $|k|$ 배이고 $k > 0$ 이면 $\mathbf{v}$ 와 같은 방향, $k < 0$ 이면 $\mathbf{v}$ 와 반대방향인 벡터이다. 특히,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \qquad 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

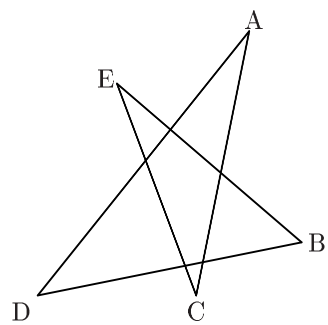
으로 정의한다. $\mathbf{w}$ 가 $\mathbf{v}$ 의 상수곱이면 두 벡터는 **평행하다(parallel)**고 하고

$$\mathbf{v} \;//\; \mathbf{w}$$

로 나타낸다.



성취도평가 (2007 정시 5번)



위의 도형에서 $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \boxed{}$ 이다.

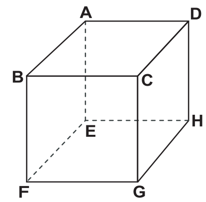
성취도평가 (2005 정시 5번) 그림과 같은 정육면체에서, 벡터

$$\overrightarrow{AG} = \boxed{}\,\overrightarrow{AB} + \boxed{}\,\overrightarrow{FH} + \boxed{}\,\overrightarrow{HD}$$

이다.

직교좌표계의 벡터

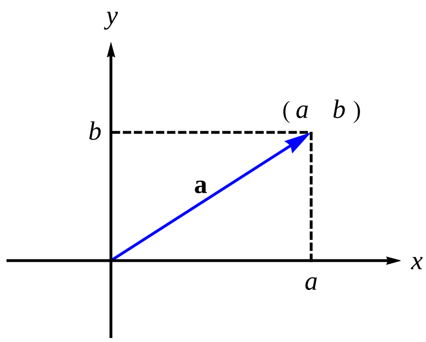
벡터를 포함하는 많은 문제들은 직교좌표계를 이용하면 대수적으로 간단하게 표현할 수 있다. 평면은 두 개의 좌표축을 갖는 좌표평면으로, 공간은 세 개의 좌표축을 갖는 좌표공간으로 생각할 수 있다. 이때 좌표평면의 점은 두 실수의 순서쌍 (a, b) 로, 좌표공간의 점은 세

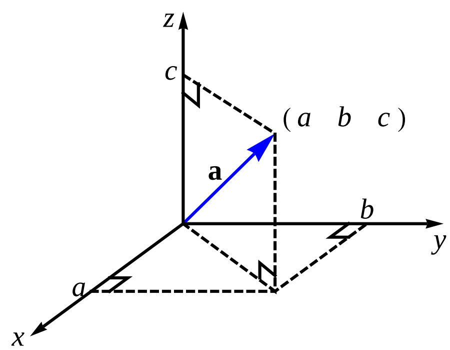


실수의 순서쌍 (a, b, c) 로 나타낸다. 시점이 원점이고 종점이 (a, b), 또는 (a, b, c) 인 벡터를 $\mathbf{a}$ 라고 할 때

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \quad \text{또는} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

로 나타낸다.[1]





이때 $\mathbf{a}$ 를 점 (a, b) 또는 (a, b, c) 의 **위치벡터(position vector)**라고 부르고 실수 a, b, 또는, a, b, c 를 $\mathbf{a}$ 의 **성분(components)**이라고 한다. 모든 평면, 또는 공간의 점은 위치벡터와 일대일 대응을 할 수 있으므로 특별히 혼동의 위험이 없는 한 순서쌍 (a, b, c) 를 벡터 $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ 대신 사용하기로 한다. 따라서 순서쌍 (a, b, c) 는 경우에 따라서 공간의 점을 나타내기도 하고 공간에서 원점을 시점으로 하는 위치벡터를 나타내기도 한다.

공간의 두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$ 와 $B(b_1, b_2, b_3)$ 를 각각 시점과 종점으로 하는 벡터는 $\overrightarrow{AB}$ 로 나타낸다. 이 벡터를 평행이동하여 원점 O 가 벡터의 시점이 되도록 하면 그 종점의 좌표 C 는

$$C(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

이 되고

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

가 된다. 따라서 모든 벡터는 동등한 위치벡터를 가지며 위치벡터의 종점과 같은 성분을 갖는다.

---

[1] 경우에 따라서는 다음과 같이 열벡터를 이용하여 나타내기도 한다.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{또는} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

벡터의 크기

벡터 $\mathbf{u}$ 의 길이를 벡터의 **크기(norm)**라고 하고 $\|\mathbf{u}\|$ 로 나타낸다. 따라서 2차원 공간의 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 의 크기는

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

3차원 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 의 크기는

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

이다. 크기가 1 인 벡터는 **단위벡터(unit vector)**라고 부른다. 영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{v}$ 에 대하여 같은 방향의 단위벡터는 벡터의 크기로 $\mathbf{v}$ 를 나누어 주면 얻어진다. 다시 말해서

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

는 $\mathbf{v}$ 와 같은 방향의 단위벡터이다.

공간의 두 점 $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ 을 시점과 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 의 크기는 두 점 사이의 거리와 일치한다.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

두 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ 는 각 성분이 같으면 같은 벡터이다. 다시 말해서

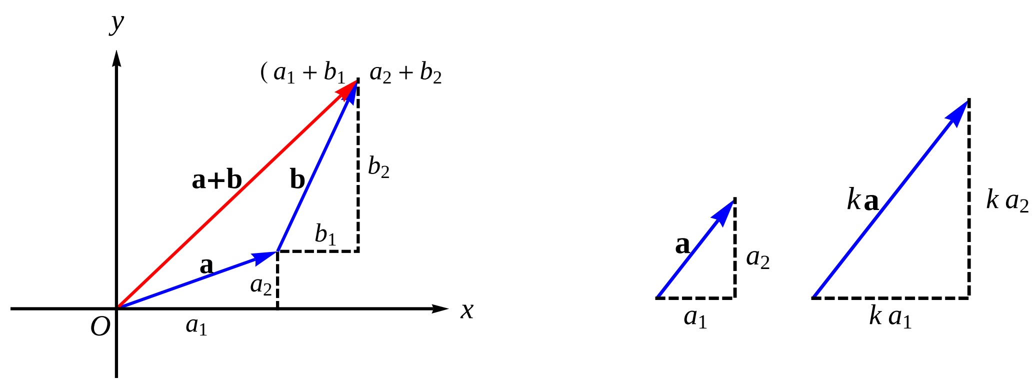
$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \quad v_3 = w_3$$

이면

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

이다. 벡터의 합과 상수곱은 벡터의 성분별로 계산이 가능함은 다음 그림에서 이해할 수 있다.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \qquad k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2)$$



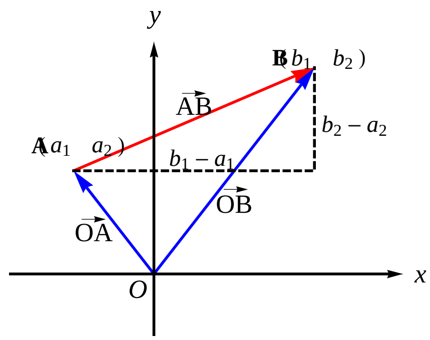
또한 벡터의 차이는 성분의 차이를 계산하면 얻어진다. 다시 말해서 $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ 일 때

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \end{aligned}$$

이다. 이 식을 이용하면 벡터의 시점이 원점이 아닌 경우도 위치벡터를 이용하여 나타내는 것이 가능하다. 공간의 두 점 $A(a_1, a_2)$ 와 $B(b_1, b_2)$ 를 시점과 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 는

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

가 된다. 다시 말해서, 종점의 위치벡터에서 시점의 위치벡터를 뺀 것이 된다.



표준 단위 벡터

공간의 임의의 벡터 (a_1, a_2, a_3) 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) \qquad (1.1)\end{aligned}$$

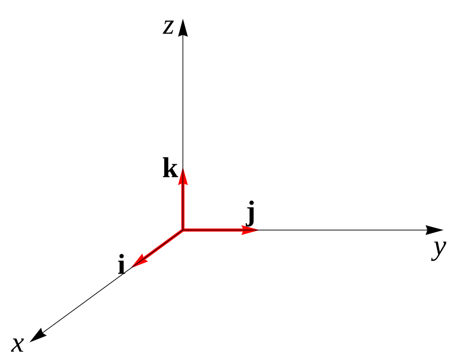
다시 말해서, $\mathbb{R}^3$ 의 임의의 벡터는 세 벡터 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ 의 **일차결합(linear combination)**으로 표현하는 것이 가능하다. 여기서 이 세 벡터를 $\mathbb{R}^3$ 의 **표준 단위 벡터(standard unit vector)**라고 하고 각각 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 로 나타낸다.[2]

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \quad \mathbf{j} = (0,1,0), \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

이 표현을 이용하면 식 (1.1) 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

표준단위벡터 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 는 모두 단위벡터이고 각각 x-축, y-축, z-축의 양의 방향을 가리킨다.



[2] 경우에 따라서는 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 로 나타내기도 한다.

n-벡터

자연수 n 에 대하여 순서쌍

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

의 집합을 $\mathbb{R}^n$ 으로 나타내고 n **차원 공간**(n-**dimensional space**)이라고 부른다. 즉,

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ : \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

이다. 여기서 a_i 를 i-번째 성분이라고 한다. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 은 n 차원 공간에서 한 점을 나타내기도 하고 원점을 시점으로 하는 n 벡터를 나타내기도 한다. $n = 1$ 이면 $\mathbb{R}^1$ 은 직선의 점들과 실수를 일대일대응시키는 수직선을, $n = 2$ 이면 $\mathbb{R}^2$ 는 좌표평면을, $n = 3$ 이면 $\mathbb{R}^3$ 는 좌표공간을 나타낸다. 이때 $n \geq 4$ 이면

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

을 기하학적으로 나타낼 수는 없지만 $n = 2$ 일 때와 같은 방법으로 합과 스칼라곱을 정의한다. 다시 말해서

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

와 스칼라 $k \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \\ k\mathbf{v} &= (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n) \end{aligned}$$

으로 정의한다. 평면벡터에서와 같은 방법으로 두 벡터의 차는

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots, v_n - w_n)$$

으로 정의한다. 이렇게 벡터의 연산은 성분별로 이루어지므로 실수의 연산의 성질이 대부분 벡터의 연산에 대하여도 성립한다.

벡터의 연산

벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ 와 스칼라 $k, m \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

(f) $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$

(g) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

이러한 벡터의 연산을 이용하면 $\mathbb{R}^n$ 의 벡터들을 성분으로 나타내지 않고도 다룰 수가 있다. 예를 들어 벡터방정식

$$\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

를 만족하는 벡터 $\mathbf{x}$ 는 다음과 같은 연산과정을 통하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}+\mathbf{u})+(-\mathbf{u}) &= \mathbf{v}+(-\mathbf{u})\\ \mathbf{x}+(\mathbf{u}-\mathbf{u}) &= \mathbf{v}-\mathbf{u}\\ \mathbf{x}+\mathbf{0} &= \mathbf{v}-\mathbf{u}\\ \mathbf{x} &= \mathbf{v}-\mathbf{u}\end{aligned}$$

2 차원 벡터, 또는 3 차원 벡터처럼 기하학적으로 표현을 할 수 없는 경우에도 여러 경우의 정의가 같은 방식으로 주어진다. $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ 의 크기는

$$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$$

으로 정의한다. $\mathbb{R}^n$ 의 n 개의 벡터 $(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)$ 을 각각 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 으로 나타내고 표준단위벡터라고 부른다.

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0,\ldots,0),\ \mathbf{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n=(0,0,0,\ldots,1)$$

일반적인 n 벡터 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 은 다음과 같이 표준단위벡터의 일차결합으로 나타낼 수 있다.

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\cdots+a_n\mathbf{e}_n$$

제 2 절 벡터의 내적

지금까지 우리는 두 벡터의 합과 벡터의 상수곱을 살펴 보았다. 두 벡터의 합이나 벡터의 상수곱은 성분별로 계산할 수 있었고 따라서 실수에서의 연산의 성질이 대부분 성립하였다. 그렇다면 벡터와 벡터의 곱을 정의하는 것은 가능한가? 그리고 그 정의가 어떤 의미를 갖는가? 벡터와 벡터의 곱은 두 가지 형태로 정의된다. 하나는 **내적(inner product)**이라 불리는 것이고 다른 하나는 **외적(outer product)**이라 불리는 것이다. 우선 내적에 대하여 알아보기로 한다.

벡터의 내적

두 벡터 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 의 내적은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 로 나타내고

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

로 정의한다. 두 벡터의 내적의 결과는 스칼라로 주어지므로 내적을 **scalar product** 라고 부르기도 한다.[3] 일반적으로 n 벡터에 대하여 내적의 정의는 다음과 같이 자연스럽게 확장할 수 있다.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

보기 1 다음 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대하여 내적 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 을 구하여라.

(a) $\mathbf{a} = (1, -1, 1), \mathbf{b} = (1, 1, 2)$

(b) $\mathbf{a} = (1, -2, 3), \mathbf{b} = (1, -2, 3)$

(c) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Solution (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, -1, 1) \cdot (1, 1, 2) = 1(1) + (-1)(1) + 1(2) = 2$

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, -2, 3) \cdot (1, -2, 3) = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 14$

(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 3(2) + (-2)(4) + 5(1) = 3$ □

서로 다른 표준 기저 벡터끼리의 내적은 모두 0 이 됨을 알 수 있다.

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

내적은 실수끼리의 곱에서 성립하는 다음과 같은 성질들이 성립한다. 이 결과를 보이는 것은 연습문제로 남긴다.

내적의 성질

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 가 $\mathbb{R}^n$ 의 벡터들이고 c 는 실수라고 하자. 그러면

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

[3] 또는 기호 · 을 이용하므로 dot product 라고 부르기도 한다.

보기 2 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$$

Solution 내적의 성질에서

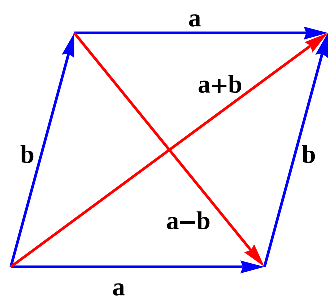
$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \\
\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2
\end{aligned}$$

이므로

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$$

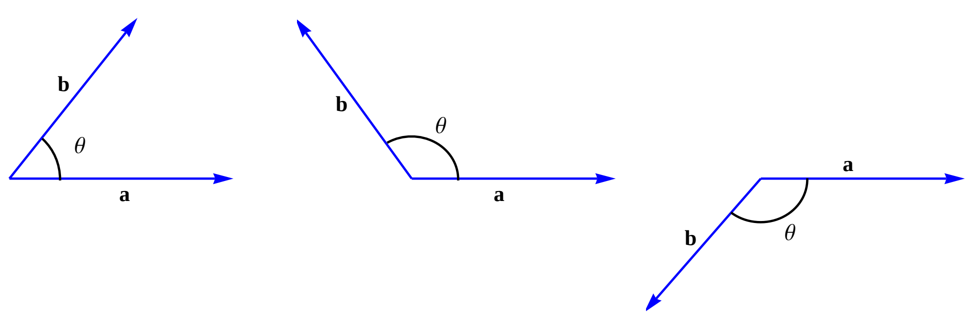
이 성립한다. □

Note 위의 보기를 평행사변형을 이용하여 나타내면 다음과 같다. 따라서 이 등식을 **평행사변형의 법칙(parallelogram law)**이라고 한다.



두 벡터의 사잇각

두 벡터의 내적은 두 벡터 사이의 낀 각 θ 를 이용하여 나타낼 수도 있다. 평면, 또는 공간의 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 시점이 일치하도록 놓았다고 하자. 두 벡터의 **사잇각(angle between two vectors)**은 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 이루는 각 중에서 $0 \le \theta \le \pi$ 인 각으로 정의한다. 만약 두 벡터가 평행이라면 $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$ 이다.



두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 이루는 각도가 θ 일 때, 두 벡터의 **내적(inner product)** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 은

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta \tag{1.2}$$

을 만족한다. 이 성질에 의하면 영벡터가 아닌 두 벡터가 수직일 필요충분조건은

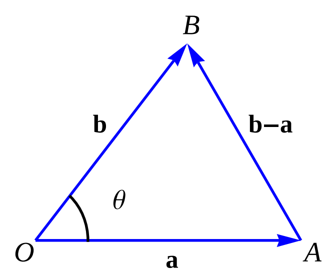
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

이다.

내적의 이 성질은 코사인의 제 2 법칙을 이용하여 증명할 수 있다. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 이면 식 (1.2) 가 성립하는 것은 당연하므로 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 라고 하자. 삼각형 OAB 에 대하여 코사인의 제 2 법칙을 적용하면

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos\theta \tag{1.3}$$

이 성립한다.



$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ 라고 하면

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

이므로

$$|AB| = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

이고 식 (1.3) 은

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta \tag{1.4}$$

가 된다. 내적의 성질에 의하면

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ &= \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{a}\|^2 \end{aligned}$$

이므로 식 (1.4) 는

$$\|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

이 된다. 이를 정리하면

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

을 얻는다. 이 식에서 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 이면

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$$

임을 알 수 있다.

내적과 사잇각

두 벡터 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 의 사잇각을 θ 라고 하면

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

이다. 이 식은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$$

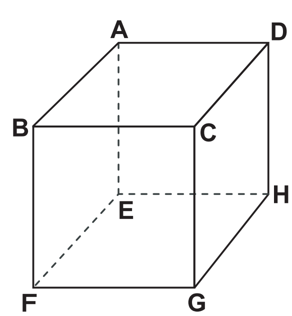
보기 3 두 벡터 $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$ 과 $\mathbf{b} = (1, 1, 2)$ 의 사잇각을 구하여라.

Solution $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ 이므로

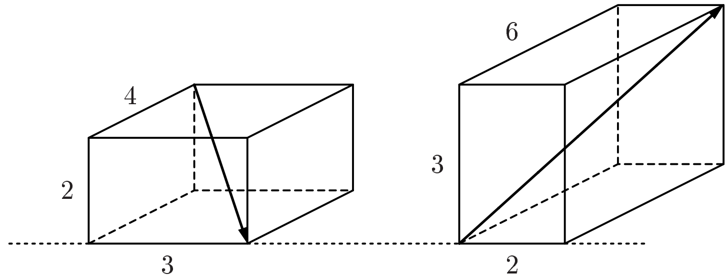
$$\cos\theta = \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

이다. 따라서 $\theta = \frac{\pi}{3} = 60°$ 이다. □

성취도평가 (2006 수시 1번) 아래 그림과 같이 각 변의 길이가 1 인 정육면체에서, 벡터의 내적 $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CF} = \boxed{}$ 이고 $\overrightarrow{FD} \bullet \overrightarrow{FH} = \boxed{}$ 이다.



성취도평가 (2007 수시 5번)



위의 그림과 같이 크기 $4 \times 3 \times 2$와 크기 $6 \times 2 \times 3$의 직육면체가 한 쪽 모서리를 동일한 직선 위에 놓고 일정 거리를 사이에 두고 놓여 있다. 그림에 표시된 두개의 벡터를 평행이동하여 시점을 일치시켰을 때 두 벡터가 이루는 각을 θ라 하면 $\cos\theta = \boxed{}$이다.

수직인 벡터

영벡터가 아닌 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 의 사잇각이 $\dfrac{\pi}{2}$ 이면 두 벡터는 **수직**(**perpendicular**)이라고 하고

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

로 나타낸다. 따라서 위의 결과는 영벡터가 아닌 두 벡터가 수직인 것과 내적이 0 인 것이 동치임을 설명해 준다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\cos\theta > 0$ 이므로 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ 이다. 반면 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이면 $\cos\theta < 0$ 이므로 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ 이다.

수직인 벡터

영벡터가 아닌 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대하여

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 이면 두 벡터는 수직이다.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ 이면 두 벡터의 사잇각은 예각이다.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ 이면 두 벡터의 사잇각은 둔각이다.

Note $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 가 같은 방향일 때, $\theta = 0$ 이므로

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$$

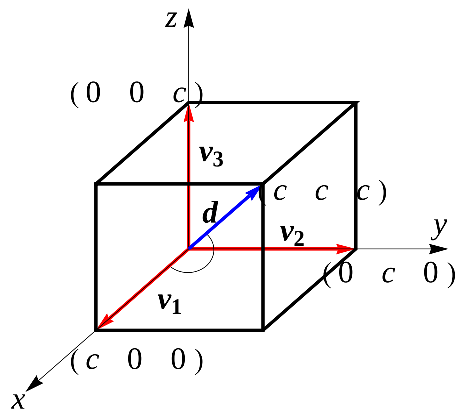
이다. $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 가 반대 방향일 때, $\theta = \pi$ 이므로

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\pi = -\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$$

이다.

Note 두 n - 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대하여 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 이면 수직이라고 정의한다.

보기 4 정육면체에서 모서리와 대각선 사이의 각을 구하여라.



Solution 정육면체의 한 변의 길이를 c 라고 하자. 정육면체의 한 꼭지점을 원점으로 잡고 원점에 이웃한 세 꼭지점을 각각 $\mathbf{v}_1 = (c, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, c, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, c)$ 라고 하자. 그러면 대각선 $\mathbf{d}$ 는

$$\mathbf{d} = (c, c, c) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

가 된다.

$$\|\mathbf{v}_1\| = c, \quad \|\mathbf{d}\| = \sqrt{3}c$$

이므로 x 축과 대각선 사이의 각을 θ 라고 하면

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{c^2}{c(\sqrt{3}c)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다. 따라서 구하는 각은

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.96 \approx 54.7^\circ$$

이다. 대각선이 y 축, z 축과 이루는 각도 마찬가지로 54.7° 이다. □

성취도평가 (2008년 정시 문제 1번)
각 변의 길이가 1인 정사면체 $ABCD$ 에서, N이 선분 AD의 중점일 때, 벡터의 내적 $\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{CB}$ 는 $\boxed{}$ 이다.

보기 5 좌표평면에서 영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{n} = (a, b)$ 는 직선

$$ax + by + c = 0$$

과 수직임을 보여라.

Solution $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ 를 직선 위의 서로 다른 두 점이라고 하자. 그러면

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \quad ax_2 + by_2 + c = 0$$

이다. 두번째 식에서 첫번째 식을 빼면

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

이고 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 이므로

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

이 된다. 다시 말해서 벡터 $\mathbf{n}$ 과 $\overrightarrow{AB}$ 는 수직이다. 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 는 직선 $ax + by + c = 0$ 과 평행하므로 원하는 결과를 얻는다. □

Note 직선, 또는 평면에 수직인 벡터를 **법선벡터(normal vector)**라고 부른다.

코시–슈바르쯔 부등식

$\mathbb{R}^3$ 의 두 벡터 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 사이의 각을 θ 라고 할 때 $|\cos\theta| \le 1$ 이므로

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\||\cos\theta| \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$$

이 성립한다. 등식은 두 벡터가 평행일 때, 다시 말해서 $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$ 일 때 성립한다. 이 부등식을 **코시–슈바르쯔 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)**이라고 한다. 이 부등식은 일반적으로 n 벡터에 대하여도 성립한다.[4] n 벡터에 대한 코시–슈바르쯔 정리를 성분을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

이다.

코시–슈바르쯔 부등식

$\mathbb{R}^n$ 의 두 벡터 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$$

여기서 등식은 두 벡터가 평행일 때 성립한다.

보기 6 n 개의 수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 에 대하여 평균의 제곱은 제곱의 평균보다 작거나 같음을 보여라. 다시 말해서 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \le \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}$$

Solution 위의 부등식의 양변에 n^2 을 곱하면 다음 부등식을 얻는다.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

[4] n 벡터에 대한 슈바르쯔의 부등식의 증명은 연습문제로 남긴다.

따라서 이 부등식이 성립함을 보이면 된다. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (1, 1, \ldots, 1)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \\ \|\mathbf{a}\|^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\ \|\mathbf{b}\|^2 &= 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \;=\; n\end{aligned}$$

이다. 따라서 코시–슈바르츠 부등식에 의하면

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \\ &\leq \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \;=\; (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)n\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. □

삼각부등식

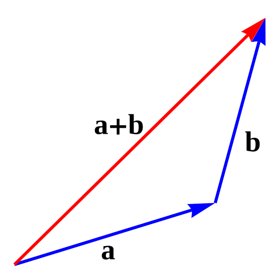
코시–슈바르츠의 부등식에 의하면

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\ &\leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2\end{aligned}$$

이 성립한다. 이때 등식은

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$$

일 때, 즉, 두 벡터가 같은 방향일 때 성립한다. 이 결과를 **삼각부등식(triangle inequality)**이라고 한다.



삼각부등식

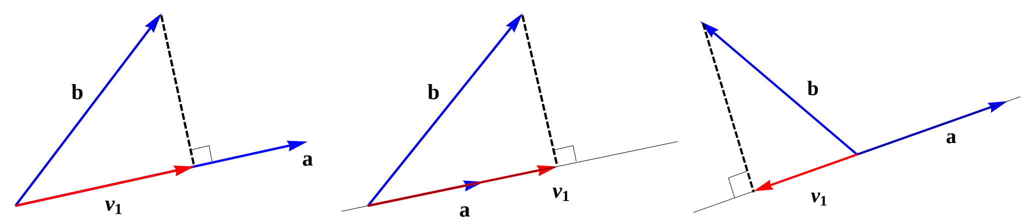
두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

등식은 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 가 같은 방향일 때 성립한다.

정사영*

벡터를 다루는 많은 문제에서 벡터 $\mathbf{b}$ 를 두 개의 벡터의 합으로 나타낸다 : 한 벡터는 특정한 한 벡터 $\mathbf{a}$ 와 평행하고 다른 한 벡터는 $\mathbf{a}$ 와 수직인 벡터의 합으로 나타낸다. 두 벡터 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 가 시점이 일치하도록 놓였다면(시점을 P 라고 하자) $\mathbf{b}$ 의 종점에서 벡터 $\mathbf{a}$ 를 연장한 직선 위로 내린 수선의 발을 종점으로 하는 벡터를 $\mathbf{v}_1$ 이라고 하자.



이때 $\mathbf{a}$ 와 평행한 벡터 $\mathbf{v}_1$ 을 $\mathbf{a}$ 에 대한 $\mathbf{b}$ 의 **정사영 (orthogonal projection)**이라고 하고

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

로 나타낸다. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{v}_1$ 으로 놓으면 정의로부터 $\mathbf{v}_2$ 는 $\mathbf{a}$ 와 수직임을 알 수 있다. 따라서 $\mathbf{b}$ 는 $\mathbf{a}$ 와 평행인 벡터 $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ 와 $\mathbf{a}$ 와 수직인 벡터 $\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ 의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{b} = \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b})$$

이제 $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ 는 $\mathbf{a}$ 와 평행하므로 상수 k 에 대하여

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = k\mathbf{a}$$

로 쓸 수 있다. 따라서 $\mathbf{a}$ 와 수직인 벡터 $\mathbf{v}_2$ 에 대하여

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a} + \mathbf{v}_2$$

으로 분해가 된다. 양변을 $\mathbf{a}$ 와 내적을 취해 주면 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{v}_2$ 는 수직이므로

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = k\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_2 = k\|\mathbf{a}\|^2$$

이 된다. 따라서

$$k = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

이고

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

이다.

정사영

영벡터가 아닌 벡터 $\mathbf{a}$ 와 $\mathbf{b}$ 에 대하여 $\mathbf{a}$ 에 대한 $\mathbf{b}$ 의 정사영 $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ 은

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

이다.

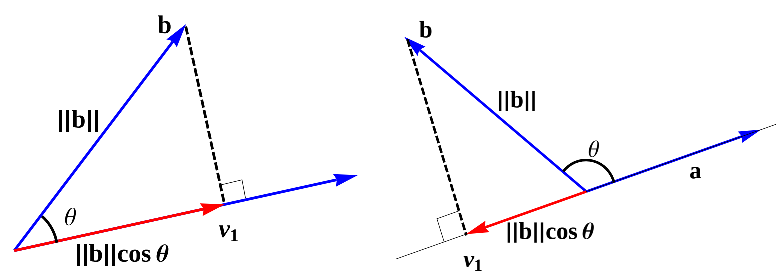
Note 위 식으로부터 정사영의 크기는

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}\| = \left\|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|}$$

임을 알 수 있다. 특히, 두 벡터 사이의 각이 θ 이면

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}\| = \|\mathbf{b}\||\cos\theta|$$

이다.



보기 7 벡터 $\mathbf{a} = (2, -2, 1)$ 에 대한 $\mathbf{b} = (1, 1, 3)$ 의 정사영을 구하여라.

Solution $\|\mathbf{a}\| = 3,\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$ 이므로

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = \frac{1}{3}\mathbf{a} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

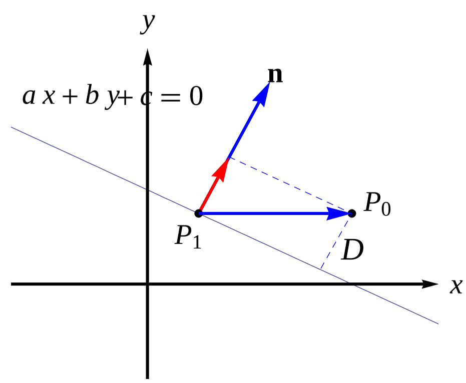
이다. □

이제 한 점에서 평면의 직선까지의 거리를 구하는 공식을 구해보고 이 절을 마치기로 한다.

보기 8 한 점 $P_0(x_0, y_0)$ 에서 직선 $ax + by + c = 0$ 까지의 거리 D 를 구하여라.

Solution 직선 $ax+by+c = 0$ 위의 한 점을 $P_1(x_1, y_1)$ 라고 하자. 직선의 법선벡터 $\mathbf{n} = (a, b)$ 를 시점이 P_1 에 오도록 놓자. 그러면 한 점 $P_0(x_0, y_0)$ 에서 직선 $ax + by + c = 0$ 까지의 거리는 벡터 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 의 $\mathbf{n}$ 에 대한 정사영 $\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_1P_0}$ 의 크기가 된다.

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_1P_0}\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$



$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$, $\mathbf{n} = (a, b)$, $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이므로

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

이다. $P_1(x_1, y_1)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 위의 점이므로

$$-(ax_1 + by_1) = c$$

이고

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

이다. □

<u>점과 직선의 거리</u>

한 점 $P_0(x_0, y_0)$ 에서 직선 $ax + by + c = 0$ 까지의 거리 D 는

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

이다.

제 3 절 직선과 평면의 방정식

평면에서 한 점 $P_0(x_0, y_0)$ 을 지나고 직선의 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad y = m(x - x_0) + y_0$$

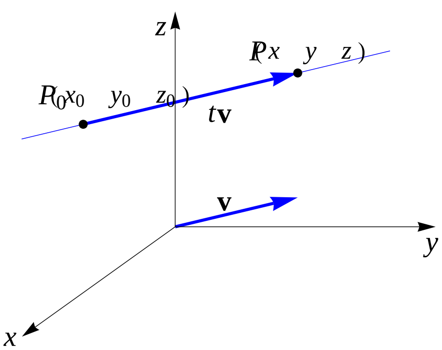
으로 구할 수 있다.

직선의 방정식

공간에서의 직선의 방정식도 직선 위의 한 점과 직선의 방향을 알면 구할 수 있다. 3차원 공간에서의 방향은 벡터로 표현할 수 있으므로 직선과 평행한 벡터를 $\mathbf{v} = (a, b, c)$ 라고 하자. 직선 위의 한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 을 지나고 벡터 $\mathbf{v}$ 와 평행한 직선 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면 벡터 $\overrightarrow{P_0P}$ 는 $\mathbf{v}$ 와 평행하므로

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \tag{1.5}$$

인 실수 t 가 존재한다.



$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}, \quad \overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}_0$$

이라고 하면 식 (1.5) 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

이 식을 직선의 **벡터방정식**(**vector equation**)이라고 한다. 또한 식 (1.5) 를 성분별로 나타내면

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

이므로 직선의 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \quad (-\infty < t < \infty) \tag{1.6}$$

이 식을 직선의 **매개변수방정식**(**parametric equation**)이라고 한다. 또한, 매개변수방정식에서 매개변수 t 를 소거하여

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad (abc \neq 0)$$

로 나타낼 수도 있다. 이 방정식은 직선의 **대칭방정식(symmetric equation)**이라고 한다. 만약 a, b, c 중에서 0 이 있어도 매개방정식 (1.8) 에서 매개변수를 소거하는 것이 가능하다. 예를 들어, $a = 0$ 이라면

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

으로 나타낼 수 있다. 이때 직선은 x 축과 수직인 평면 $x = x_0$ 에 포함된다.

보기 1

(a) 공간의 두 점 $A(2, 4, -1)$ 과 $B(3, 1, 2)$ 를 지나는 직선의 매개변수방정식과 대칭방정식을 구하여라.

(b) 이 직선과 xy-평면이 만나는 점을 구하여라.

Solution (a) 직선은 벡터

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3 - 2, 1 - 4, 2 - (-1)) = (1, -3, 3)$$

와 평행하다. 따라서 매개변수방정식은

$$x = 2 + t, \quad y = 4 - 3t, \quad z = -1 + 3t$$

가 된다. 대칭방정식은

$$x - 2 = \frac{y - 4}{-3} = \frac{z + 1}{3}$$

이 된다.

(b) xy - 평면은 $z = 0$ 이므로 대칭방정식에서

$$x - 2 = \frac{y - 4}{-3} = \frac{1}{3}$$

이 성립한다. 따라서

$$x = \frac{7}{3}, \quad y = 3$$

이다. 즉 직선과 xy - 평면은 $(\frac{7}{3}, 3, 0)$ 에서 만난다. □

Note 위의 보기에서처럼 공간의 두 점 $P(x_1, y_1, z_1)$ 과 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 을 지나는 직선은 벡터

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

과 평행이다. 따라서 두 점 $P(x_1, y_1, z_1)$ 과 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 을 지나는 직선의 방정식은 다음 식으로 주어진다.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

직선의 방정식

한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 을 지나고 벡터 $\mathbf{v}$ 와 평행한 직선의 방정식
직선 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$, $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$, $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}_0$ 라고 하자.

1. 벡터방정식 : $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$
2. 매개변수방정식 : $x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \quad (-\infty < t < \infty)$
3. 대칭방정식 :$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}, \quad (abc \neq 0)$

성취도평가 (2007년 정시 8번) 곡면 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 위의 점 $(1, 0, 0)$을 지나며 이 곡면에 완전히 포함되는 직선 2개를 찾아라.

꼬인 직선

평면에서 두 직선은 평행하지 않은 직선은 한 점에서 만난다. 그러나 공간에서의 두 직선은 평행하지 않아도 만나지 않는 경우가 생긴다. 이런 경우 두 직선은 꼬인 위치에 있다고 한다.

보기 2 다음 두 직선은 꼬인 위치에 있음을 보여라.

$$L_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}, \quad L_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Solution 두 직선의 방향벡터 $(2, 3, 4)$ 와 $(1, 2, 3)$ 은 평행하지 않으므로 두 직선은 평행하지 않다. 두 직선을 매개변수방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x = 2 + 2t,\ y = 3 + 3t,\ z = 4 + 4t \\ L_2 &: \quad x = -1 + s,\ y = -2 + 2s,\ z = 3 + 3s \end{aligned}$$

두 직선이 만난다면

$$2 + 2t = -1 + s, \quad 3 + 3t = -2 + 2s, \quad 4 + 4t = 3 + 3s$$

을 만족하는 값 t, s 가 존재한다. 처음 두 식을 연립하여 풀면

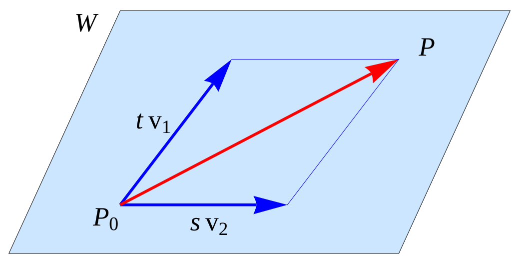
$$t = -1, \quad s = 1$$

을 얻는다. 그러나 이 값들은 마지막 식을 만족하지 않는다. 따라서 두 직선은 만나지 않는다. 즉, 두 직선은 꼬인 위치에 있다. □

평면의 벡터방정식

평면에서 직선의 방정식은 기울기와 한 점을 알면 구할 수가 있었다. 마찬가지로 공간에서 평면의 방정식은 평면의 방향과 한 점을 알면 구할 수 있다. 그러나 평면의 방향은 직선과는 달리 평면과 평행한 하나의 벡터로는 구할 수가 없으며 두 개의 벡터(서로 평행하지 않은), 또는 일직선 상에 있지 않은 세개의 점이 필요하다.

평행하지 않은 두 벡터 $\mathbf{v}_1$ 과 $\mathbf{v}_2$ 와 평행이고 점 P_0 을 지나는 평면을 W 라고 하자. W 의 임의의 점을 P 라고 하고 $\mathbf{v}_1$ 과 $\mathbf{v}_2$ 의 시점이 P_0 이 되도록 놓으면 적당한 실수 t, s 에 대하여 $\overrightarrow{PP_0}$ 이 $t\mathbf{v}_1$ 과 $s\mathbf{v}_2$ 를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 대각선이 되도록 할 수 있다.



따라서

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 \tag{1.7}$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}, \quad \overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}_0$$

이라고 하면 식 (1.7) 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$$

이 식을 평면의 **벡터방정식(vector equation)**이라고 한다. 또한, $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1), \mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ 일 때, 식 (1.7) 을 성분별로 나타내면

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta_1 + sa_2, tb_1 + sb_2, tc_1 + sc_2)$$

이므로 평면의 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x = x_0 + ta_1 + sa_2, \quad y = y_0 + tb_1 + sb_2, \quad z = z_0 + tc_1 + sc_2 \quad (-\infty < t, s < \infty) \tag{1.8}$$

이 식을 평면의 **매개변수방정식(parametric equation)**이라고 한다.

평면의 벡터방정식과 매개변수방정식

평행하지 않은 두 벡터 $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ 과 $\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ 와 평행이고 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 을 지나는 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$\text{벡터방정식 :} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$$

$$\text{매개변수방정식 :} \qquad \begin{cases} x = x_0 + ta_1 + sa_2 \\ y = y_0 + tb_1 + sb_2 \\ z = z_0 + tc_1 + sc_2 \end{cases}$$

여기서 $P = (x, y, z)$ 는 평면 위의 점이고 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}, \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ 를 나타낸다.

보기 3 세 점 $A(1,1,1), B(1,2,4), C(2,3,5)$ 을 지나는 평면의 벡터방정식과 매개변수방정식을 구하여라.

Solution 한점 $A(1,1,1)$ 을 지나고 두 벡터

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (0,1,3), \quad \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (1,2,4)$$

와 평행인 평면의 방정식을 구하면 된다. $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OA} = (1,1,1)$ 이라고 하면 주어진 평면의 벡터방정식은

$$\mathbf{r} = (1,1,1) + t(0,1,3) + s(1,2,4)$$

이다. $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 라고 하면 매개변수방정식은

$$\begin{aligned} x &= 1 + s \\ y &= 1 + t + 2s \\ z &= 1 + 3t + 4s \end{aligned}$$

이다. □

법선벡터를 이용한 평면의 방정식

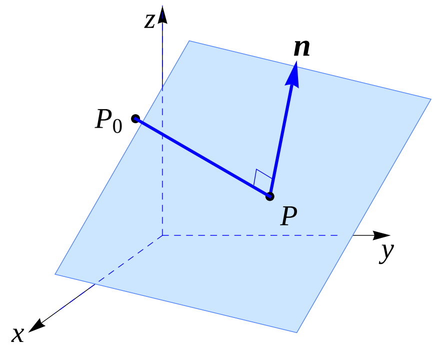
평면과 평행인 두 벡터 대신 평면과 수직인 벡터를[5] 안다면 역시 평면의 방정식을 구할 수 있다. 이때, 평면과 수직인 벡터를 평면의 **법선벡터**(**normal vector**)라고 한다.

이제 공간의 한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 을 지나고 법선벡터가 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ 인 평면의 방정식을 구해 보자. 평면의 임의의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

은 평면에 포함되는 벡터이고 따라서 $\mathbf{n}$ 과 수직이다.

[5] 어떤 벡터가 평면과 수직이라는 것은 평면에 포함되는 모든 벡터와 수직이라는 것을 의미한다.



그러므로 평면 위의 임의의 점 $P(x, y, z)$ 에 대하여

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

이 성립한다. 이 식을 평면의 **일반방정식(general equation)**이라고 한다.

평면의 일반방정식

한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 을 지나고 법선벡터가 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ 인 평면의 방정식은 다음과 같다.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Note 또한 $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ 이면 방정식

$$ax + by + cz + d = 0$$

은 법선벡터가 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ 인 평면을 나타낸다.

보기 4 점 $P_0(2, -3, 1)$ 을 지나고 벡터 $\mathbf{n} = (3, -5, 7)$ 과 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

Solution 평면 위의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(x - 2) - 5(y + 3) + 7(z - 1) = 0$$

이 성립한다. 이를 정리하면 주어진 평면의 방정식은

$$3x - 5y + 7z = 28$$

이다. □

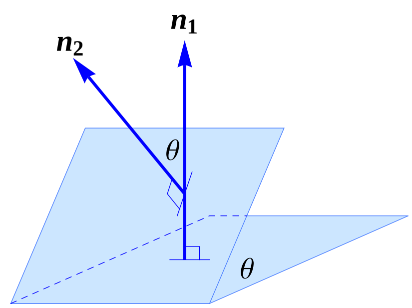
성취도평가 (2007년 정시 6번) 좌표공간의 한 점 $(4, 1, 6)$에서 평면 $2x + 2y - z = 0$ 에 내린 수선의 발의 좌표는 $\boxed{}$ 이다.

성취도평가 (2006년 정시 1번) 3차원 공간에서 광원이 원점에 위치하고 스크린이 평면 $3x+2y+z=12$ 으로 주어졌을 때, 점 $P(1,2,3)$ 이 스크린 위에 나타나는 상의 위치는 점(, ,) 이다.

성취도평가 (2006년 수시 11번) 좌표공간의 세 점 $A(2,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,0,1)$ 을 꼭지점으로 하는 ΔABC 를 평면 $2x-y+z=6$ 위로 정사영시킨 $\Delta A'B'C'$ 의 넓이를 구하라.

두 평면의 위치

각각의 법선벡터가 평행한 두 평면은 **평행하다(parallel)**고 한다. 평행한 두 평면은 일치하거나 만나지 않는다. 평행하지 않은 두 평면은 직선에서 만난다. 평행하지 않은 두 평면의 각은 각 평면의 법선벡터들의 사잇각으로 정의한다.



보기 5 다음 두 평면에 대하여

$$2x-y+z=2, \quad x-2y-z=10$$

(a) 두 평면의 사잇각을 구하여라.

(b) 두 평면의 교선을 구하여라.

Solution (a) 각 평면의 법선벡터를 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 라고 하면

$$\mathbf{n}_1=(2,-1,1), \quad \mathbf{n}_2=(1,-2,-1)$$

이고

$$\|\mathbf{n}_1\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}, \quad \|\mathbf{n}_2\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

이다. 두 벡터의 사잇각을 θ 라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|}=\frac{2(1)+(-1)(-2)+1(-1)}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

이다. 따라서 두 평면 사이의 각은 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

(b) y, z 를 x 를 이용하여 나타내자. 그러면

$$y = x - 4, \quad z = -x - 2$$

가 된다. $x = t$ 라고 하면 다음과 같은 매개변수방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t - 4 \\ z &= -t - 2 \end{aligned}$$

이 식을 대칭방정식으로 바꾸어 쓰면

$$\frac{x}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

이다. □

성취도평가 (2009년 수시 1번) 좌표공간에서 세 점 $A(1,1,1)$, $B(0,2,3)$, $C(1,3,4)$ 을 지나는 평면과 방정식 $x + y - 2z = 1$ 로 주어진 평면이 이루는 각 가운데 예각의 코사인 값은 $\boxed{}$ 이다.

점과 평면 사이의 거리

이제 평면에서 한 점과 직선 사이의 거리를 구한 것과 같은 방법으로 평면과 한 점 사이의 거리를 구할 수 있다. 공간의 한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 와 평면

$$ax + by + cz + d = 0$$

사이의 거리 D 를 구해 보기로 하자.

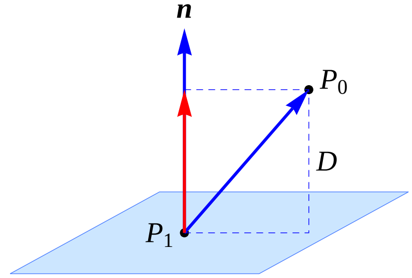
평면의 임의의 점 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 에 대하여

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

라고 하면 $D = \|\mathbf{b}\| \cos\theta|$ 가 된다. 따라서

$$D = \|\mathbf{b}\||\cos\theta| = \|\mathbf{b}\|\frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{n}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

이다.



$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0} &= a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)\\ &= ax_0+by_0+cz_0-(ax_1+by_1+cz_1)\end{aligned}$$

에서 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 은 평면의 점이므로

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0 \quad \Rightarrow \quad -(ax_0+by_0+cz_0)=d$$

이고 $\|\mathbf{n}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 이므로

$$D=\frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{n}\|}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다.

한 점과 평면 사이의 거리

$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 와 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리 D 는 다음과 같다.

$$D=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

보기 6 다음 두 평면이 평행함을 설명하고

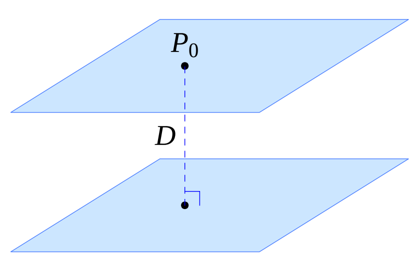
$$5x-3y-z=10, \quad -10x+6y+2z=1$$

두 평면 사이의 거리를 구하여라.

Solution 두 평면의 법선벡터를 각각 $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$ 라고 하면

$$\mathbf{n}_1=(5,-3,-1), \quad \mathbf{n}_2=(-10,6,2)=-2\mathbf{n}_1$$

이므로 두 평면은 평행이다.



따라서 첫 평면의 임의의 한 점에서 두 번째 평면까지의 거리를 구하면 된다. 이제 첫 평면의 한 점 $(2,0,0)$ 에서 평면 $-10x+6y+2z=1$ 까지의 거리를 구해 보기로 하자. 위에서 구한 공식을 적용하면

$$D=\frac{|-10(2)+6(0)+2(0)-1|}{\sqrt{(-10)^2+6^2+2^2}}=\frac{21}{\sqrt{140}}=\frac{3\sqrt{35}}{10}$$

을 얻는다. □

성취도평가 (2007년 수시 6번)

좌표공간의 네 점 $O(0,0,0)$, $A(1,2,-1)$, $B(-1,2,1)$, $C(-1,1,3)$이 주어져 있다. 이 네점을 꼭지점으로 하는 사면체의 부피는 $\boxed{}$이다.

성취도평가 (2008년 수시 2번)

좌표공간에서 두 식 $x+z=0$, $x^2+y^2+z^2=2$ 의 공통부분으로 주어진 원과 식 $x+2y-z=6$ 으로 주어진 평면 사이의 최단 거리는 $\boxed{}$ 이다.

성취도평가 (2008년 수시 8번)

좌표공간에서 두 점 $P(3,1,2), Q(-3,4,3)$ 과 평면 $x+2y+z=1$ 위의 점 R에 대하여, $\overline{PR}+\overline{QR}$의 최소값을 구하라.

성취도평가 (2008년 정시 2번)

좌표공간에서 점 (1,1,1)이 중심이고 반지름의 길이가 1인 구와 평면 $2x+y+2z=14$ 의 최단거리는 $\boxed{}$ 이다.

제 4 절 행렬

수를 직사각형모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것을 **행렬(matrix)**이라고 한다. 다음은 행렬의 보기이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬의 **크기(size)**는 **행(row)**의 수와 **열(column)**의 수를 곱셈기호를 이용하여 나타낸다. 예를 들어 위의 행렬들의 크기는 각각

$$2 \times 2, \quad 1 \times 4, \quad 3 \times 1, \quad 2 \times 3$$

이다. 두 번째 행렬처럼 $1 \times m$ 행렬을 **행벡터(row vector)**, 세 번째 행렬처럼 $n \times 1$ 행렬을 **열벡터(column vector)**라고 한다. 의미가 명확한 경우에는 행벡터, 열벡터 대신 단순히 벡터라고 부르기도 한다. 행렬 A 의 i 번째 행, j 번째 열에 있는 원소를 a_{ij} 로 나타내고 행렬 A 의 (i, j) 항이라고 한다. $m \times n$ 행렬을 간단히 (a_{ij}), 크기를 강조하고 싶을 때는 $(a_{ij})_{m \times n}$ 로 나타내기도 한다. 일반적인 $m \times n$ 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A 의 i 번째 행은 $\mathbf{r}_i(A)$ 로 나타내고 A 의 j 번째 열은 $\mathbf{c}_j(A)$ 로 나타내기로 한다.

$$\mathbf{r}_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A 는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(A) \\ \mathbf{r}_2(A) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1(A), \mathbf{c}_2(A), \ldots, \mathbf{c}_n(A) \end{pmatrix}$$

혼동의 우려가 없는 경우에는 행벡터는 단순히 $\mathbf{r}_i$, 열벡터는 $\mathbf{c}_j$ 로 나타내기로 한다.

정방행렬과 대각행렬

행렬 A 에서 $m = n$ 이면 A 를 **정방행렬(square matrix)**이라고 한다. 항

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

을 정방행렬의 **대각항(diagonal entry)**이라고 한다. 대각항 이외의 모든 항이 0 인 정방행렬을 **대각행렬(diagonal matrix)**이라고 한다. 대각항이 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 인 대각행렬은

$D(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 으로 나타낸다.

$$D(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

크기가 같은 두 행렬 A, B 의 각 항이 모두 같으면 두 행렬은 같다고 한다. 다시 말해서 $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 와 $B = (b_{ij})$ 에 대하여

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

이면 두 행렬은 같다고 한다.

행렬의 합과 상수곱

크기가 같은 두 행렬 A, B 에 대하여 행렬의 합 $A + B$ 는 두 행렬의 각 항을 더한 것을 항으로 갖는 행렬이다. 즉, $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 와 $B = (b_{ij})$ 에 대하여

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

이다. 상수 c 에 대하여 상수곱 cA 는 각 항에 c 를 곱한 것을 항으로 갖는 행렬이다.

$$c(a_{ij}) = (ca_{ij})$$

$(-1)A$ 는 단순히 $-A$ 로 쓰기로 한다. 그러면 두 행렬의 차는 다음과 같이 정의한다.

$$A - B = A + (-B)$$

행렬의 모든 항이 0 인 행렬을 **영행렬(zero matrix)**이라고 하고 O 로 나타낸다. 그러면 A 와 같은 크기의 영행렬 O 에 대하여

$$A + O = A = O + A, \quad A - A = O = -A + A$$

이 성립한다.[6] 다음 관계식이 성립하는 것은 쉽게 확인할 수 있다.

[6] 이러한 성질을 갖는 원소 O 를 덧셈에 대한 항등원, $-A$ 를 A 의 덧셈에 대한 역원이라고 한다.

행렬의 합과 상수곱의 성질

같은 크기의 행렬 A, B, C, O 와 상수 a, b 에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = A, \quad A + (-A) = O$
- $(ab)A = a(bA)$
- $a(A + B) = aA + aB$
- $(a + b)A = aA + bA$

행렬의 곱

$m \times n$ 행렬 A 와 $n \times k$ 행렬 B 의 곱은 $m \times k$ 행렬이고 AB 로 나타낸다.

$$\underset{(m \times k)}{C} = \underset{(m \times n)}{A} \ \underset{(n \times k)}{B}$$

$C = AB = (c_{ij})$ 라고 하면 c_{ij} 는 A 의 i 번째 행벡터가 $\mathbf{r}_i(A) = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots a_{in})$, B 의 j 번째 열벡터가 $\mathbf{c}_j(B) = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ 일 때, 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \end{aligned}$$

행렬곱의 정의로부터 다음 식이 성립하는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

$$A(cB) = c(AB), \quad A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$$

보기 1 두 행렬 A, B 가 다음과 같을 때

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C = AB$ 는 2×2 행렬이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

반면에 BA 는 3×3 행렬이다.

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 & 4 \\ 9 & 17 & -7 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Note $m \times n$ 행렬 A 와 $n \times k$ 행렬 B 에 대하여 $m \neq k$ 이면 BA 가 정의되지 않는다. 또한 $m = k$ 인 경우라도 일반적으로 행렬의 덧셈과는 다르게 행렬의 곱셈에 대하여는 교환법칙이 성립하지 않는다. 다시 말해서 일반적으로는

$$AB \neq BA$$

이다.

보기 2 삼순이와 삼식이는 과일을 사러 가기로 하고 필요한 개수와 근처에 있는 두 매장 '가', '나' 의 가격을 조사하였더니 다음과 같았다.

	사과	배	감
삼순이	5	3	10
삼식이	7	5	5

	매장 가	매장 나
사과	1000	900
배	2000	2500
감	900	800

삼순이와 삼식이가 각 매장에서 과일을 샀을 경우 얼마를 지불하여야 하는지를 구하여라.

Solution 삼순이가 매장 '가'에서 살 경우

$$5(1000) + 3(2000) + 10(900) = 20000$$

매장 '나'에서 살 경우

$$5(900) + 3(2500) + 10(800) = 20000$$

을 지불해야 한다. 삼식이의 경우는 매장 '가'에서 살 경우

$$7(1000) + 5(2000) + 5(900) = 21500$$

매장 '나'에서 살 경우

$$7(900) + 5(2500) + 5(800) = 22800$$

을 지불해야 한다. 이 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

	매장 '가'	매장 '나'
삼순이	20000	20000
삼식이	21500	22800

$\square$

Note 보기 2 에서 지불해야 할 액수는 두 벡터의 내적 형태로 구하여진다. 다음과 같이 필요한 개수의 표와 각 매장에서의 가격표를 행렬을 이용하여 다음과 같이 나타내자.

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1000 & 900 \\ 2000 & 2500 \\ 900 & 800 \end{pmatrix}$$

그러면 행렬곱 LP 는 삼순이와 삼식이가 지불해야할 액수를 구하여 준다.

$$LP = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 & 900 \\ 2000 & 2500 \\ 900 & 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 & 20000 \\ 21500 & 22800 \end{pmatrix}$$

보기 3 세 종류의 농작물을 재배하는 농장에서 병충해 예방을 위해 세 종류의 농약을 사용한다. 각 농작물이 단위 무게당 흡수한 농약의 양을 다음과 같이 표로 정리하였다.

	농작물 1	농작물 2	농작물 3
농약 A	3	4	2
농약 B	2	3	4
농약 C	4	3	4

이 농장에서 생산된 농작물은 역시 이 농장에서 키우는 가축의 사료로 사용되는데 1주일에 각 가축들이 소비하는 농작물의 양은 다음과 같다.

	농작물 1	농작물 2	농작물 3
소	30	40	25
토끼	2	5	4
사슴	4	10	8

1 주일동안 가축들의 체내에 흡수되는 농약의 양을 행렬의 곱을 이용하여 나타내어라.

Solution 예를 들어 소가 흡수하는 농약 A 의 양은

$$3 \cdot 30 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 25 = 300$$

이다. 행렬의 곱을 이용하여 나타내기 위해서는 두 번째 표를 다음과 같이 바꾸어 보는 것이 편리하다.

	소	토끼	사슴
농작물 1	30	2	4
농작물 2	40	5	10
농작물 3	25	4	8

그러면 첫 번째 표를 나타내는 행렬과 두 번째 표를 나타내는 행렬의 곱을 계산하면 각 가축이 섭취하는 농약의 양을 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 2 & 4 \\ 40 & 5 & 10 \\ 25 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & 34 & 68 \\ 280 & 35 & 70 \\ 340 & 39 & 78 \end{pmatrix}$$

이 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

	소	토끼	사슴
농약 A	300	34	68
농약 B	280	35	70
농약 C	340	39	78

예를 들어 토끼가 섭취하는 농약 B 의 양은 35 임을 알 수 있다. □

Note 위의 보기에서 볼 수 있듯이 행렬의 곱이 의미를 갖기 위해서는 첫 번째 표의 열의 이름과 두 번째 표의 행의 이름이 같아야 한다. 이런 경우 두 행렬의 곱에 있어서 행의 이름은 첫 번째 표의 행의 이름과 일치하고 열의 이름은 두 번째 표의 열의 이름과 일치한다.

전치행렬

보기 3 에서 두 번째 표의 행과 열의 이름을 바꾸어서 나타내었다. 이렇게 $m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 에서 (i, j) 항을 (j, i) 항이 되도록 만든 행렬을 A^t 로 나타내고 A 의 **전치행렬(transpose matrix)**이라고 한다. A^t 는 $n \times m$ 행렬이 된다. 다시 말해서 $A^t = (a^t_{ij})$ 라고 하면

$$a^t_{ij} = a_{ji}$$

이다. 예를 들어

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

이다. 전치행렬 A^t 의 i 번째 행은 A 의 i 번째 열과 같다. 연산이 가능한 행렬 A, B 에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

- $(cA)^t = cA^t, \quad (A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t, \quad (AB)^t = B^t A^t$

정방행렬 A 에 대하여 $A^t = A$ 이면 A 를 **대칭(symmetric)**이라고 한다. 다시 말해서, $A = (a_{ij})$ 의 모든 i, j 에 대하여

$$a_{ij} = a_{ji}$$

이면 A 는 대칭이라고 한다. 정의에 의하면 모든 대칭행렬은 정방행렬이다. 다음 행렬 A 는 대칭이지만 B 와 C 는 대칭이 아니다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

보기 4 모든 행렬 A 에 대하여

$$(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$$

이므로 A^tA 는 대칭행렬이다. A^t 의 i 번째 행은 A 의 i 번째 열과 같으므로 $(A^tA)_{ij}$ 는 A 의 i 열과 j 열의 내적으로 주어진다.

$$(A^tA)_{ij} = \mathbf{r}_i(A^t)\mathbf{c}_j(A) = \mathbf{c}_i(A) \cdot \mathbf{c}_j(A)$$

□

열벡터

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

에 대하여

$$\mathbf{u}^t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

이다. 따라서 n - 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\mathbf{u}^t\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \tag{1.9}$$

행렬과 벡터의 곱

$m \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 와 n 벡터 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬곱 $A\mathbf{b}$ 는 $m \times 1$ 행렬, 즉, m 벡터이다.

$$\begin{aligned} A\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(A)\mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(A)\mathbf{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix} \\ &= b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= b_1\mathbf{c}_1(A) + b_2\mathbf{c}_2(A) + \cdots + b_n\mathbf{c}_n(A) \end{aligned}$$

따라서 행렬과 벡터의 곱은 행렬의 열벡터의 **일차결합(linear combination)**으로 쓸 수 있다. 이때 일차결합의 계수는 열벡터의 항들이 된다.

보기 5 행렬 $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 17 \\ 19 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ 와 벡터 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A\mathbf{b}$ 는 A 의 열벡터의 일차결합으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} A\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 10 & 12 & 17 \\ 19 & 11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 31 \end{pmatrix} \end{aligned}$$ □

일차결합을 이용한 표현은 일반적인 행렬곱에도 적용이 가능하다. $m \times n$ 행렬 A 와 $n \times k$ 행렬 B 의 곱 AB 의 j 번째 열벡터는 A 와 $\mathbf{c}_j(B)$ 의 곱이다.

$$\mathbf{c}_j(AB) = A\mathbf{c}_j(B)$$

따라서

$$\begin{aligned} AB &= A\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1(B) & \mathbf{c}_2(B) & \cdots & \mathbf{c}_k(B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\mathbf{c}_1(B) & A\mathbf{c}_2(B) & \cdots & A\mathbf{c}_k(B) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

행렬과 벡터의 곱

$m \times n$ 행렬 A 와 $n \times 1$ 벡터 $\mathbf{b}$ 의 곱은 A 의 열벡터와 $\mathbf{b}$ 의 원소의 일차결합으로 쓸 수 있다. 즉

$$A\mathbf{b} = b_1\mathbf{c}_1(A) + \cdots + b_n\mathbf{c}_n(A)$$

이다. $m \times n$ 행렬 A 와 $n \times k$ 행렬 B 의 곱 AB 에서 j 번째 열은

$$\mathbf{c}_j(AB) = A\mathbf{c}_j(B)$$

이다. 즉,

$$AB = \begin{pmatrix} A\mathbf{c}_1(B) & A\mathbf{c}_2(B) & \cdots & A\mathbf{c}_k(B) \end{pmatrix}$$

이다.

단위행렬

$n \times n$ 행렬

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

을 n 차원 **단위행렬(identity matrix)**이라고 부른다. 단위행렬의 i 번째 열벡터를 **기본단위벡터(elementary unit vector)**라고 부르고 $\mathbf{e}_i$ 로 나타낸다.

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 번째 행}$$

그러면 모든 열벡터는 기본단위벡터의 일차결합으로 나타낼 수 있다. 다시 말해서

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$$

로 나타낼 수 있다. 따라서 $m \times n$ 행렬 A 에 대하여

$$\mathbf{c}_i(I_mA) = I_m\mathbf{c}_i(A) = a_{1i}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{mi}\mathbf{e}_m = \mathbf{c}_i(A)$$

이다. 즉,

$$I_mA = A$$

가 성립한다. 또한

$$A\mathbf{e}_i = 0\mathbf{c}_1(A) + \cdots + 1\mathbf{c}_i(A) + \cdots + 0\mathbf{c}_n(A) = \mathbf{c}_i(A)$$

이다. 따라서

$$AI_n = A$$

가 성립한다. 특히, $m = n$ 이면

$$I_nA = AI_n = A$$

이다. 그러므로 I_n 은 행렬곱에 대한 항등원이다.

보기 6 $m \times n$ 행렬 A, $n \times k$ 행렬 B 와 k 벡터 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 식이 성립함을 보여라.

$$A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

Solution 열벡터의 일차결합으로 나타내면

$$B\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1(B) + \cdots + x_k\mathbf{c}_k(B)$$

이므로

$$\begin{aligned} A(B\mathbf{x}) &= A(x_1\mathbf{c}_1(B)) + \cdots + A(x_k\mathbf{c}_k(B)) \\ &= x_1 A\mathbf{c}_1(B) + \cdots + x_k A\mathbf{c}_k(B) \\ &= \begin{pmatrix} A\mathbf{c}_1(B) & \cdots & A\mathbf{c}_k(B) \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ &= (AB)\mathbf{x} \end{aligned}$$

이 성립한다. □

$k \times l$ 행렬 C 의 각 열벡터에 보기 5 의 결과를 적용하면

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} (AB)\mathbf{c}_1(C) & \cdots & (AB)\mathbf{c}_l(C) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A(B\mathbf{c}_1(C)) & \cdots & A(B\mathbf{c}_l(C)) \end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} B\mathbf{c}_1(C) & \cdots & B\mathbf{c}_l(C) \end{pmatrix} \\ &= A(BC) \end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 다시 말해서 행렬곱에 대하여 결합법칙이 성립한다.

지금까지 살펴본 행렬곱에 대한 성질들을 정리하면 다음과 같다.

행렬곱의 성질

연산이 가능한 행렬 A, B, C 에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(cB) = c(AB)$
- $A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$
- $I_m A = A, \quad AI_n = A \quad$ 단 A 는 $m \times n$ 행렬이다.

Note 위의 결과에 의하면 정방행렬의 거듭제곱은 잘 정의된다. 따라서 정방행렬 A 를 n 번 곱한 것을

$$A^n = A \cdot A \cdots A$$

로 나타낸다.

보기 7 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음에 답하여라.

(a) $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = O$ 임을 보여라.

(b) $a + d = -1, ad - bc = 1$ 일 때, $A^3 = I$ 임을 보여라.

Solution VOD 강좌 참조

제 5 절 역행렬과 선형방정식계

0 이 아닌 실수 a 에 대하여 다음 성질을 만족하는 곱셈에 대한 역원 b 가 존재한다.

$$ab = ba = 1$$

행렬의 곱셈에 대한 항등원은 I_n 이다. 다시 말해서, $n \times n$ 행렬 A 에 대하여

$$AI_n = I_nA = A$$

이 성립한다. 그렇다면 행렬 A 에 대하여 곱셈에 대한 역원이 존재하는가? 즉,

$$AB = BA = I_n \tag{1.10}$$

이 성립하는 B 가 존재하는가? 만약 이런 성질을 갖는 행렬 B 가 존재하면 A 는 **가역**(**invertible**)이라고 하고 B 를 A 의 **역행렬**(**inverse matrix**)이라고 한다. 식 (1.10) 이 성립하려면 A, B 의 크기는 모두 $n \times n$ 이어야 한다. 지금부터 이 절에서 다루는 모든 행렬은 정방행렬임을 가정한다.

보기 1 다음 두 행렬 A, B 는 서로 역행렬임을 보여라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solution $AB = BA = I_3$ 임을 보이면 된다.

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1(2)+0(-2)+(-2)(\frac{1}{2}) & 1(1)+0(0)+(-2)(\frac{1}{2}) & 1(-1)+0(1)+(-2)(-\frac{1}{2}) \\ 1(2)+1(-2)+0(\frac{1}{2}) & 1(1)+1(0)+0(\frac{1}{2}) & 1(-1)+1(1)+0(-\frac{1}{2}) \\ 2(2)+1(-2)+(-4)(\frac{1}{2}) & 2(1)+1(0)+(-4)(\frac{1}{2}) & 2(-1)+1(1)+(-4)(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(1)+1(1)+(-1)(2) & 2(0)+1(1)+(-1)(1) & 2(-2)+1(0)+(-1)(-4) \\ -2(1)+0(1)+1(2) & -2(0)+0(1)+1(1) & -2(-2)+0(0)+1(-4) \\ \frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)+(-\frac{1}{2})(2) & \frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2}(1)+(-\frac{1}{2})(1) & \frac{1}{2}(-2)+\frac{1}{2}(0)+(-\frac{1}{2})(-4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

역행렬

$n \times n$ 행렬 A 에 대하여 다음 성질을 만족하는 $n \times n$ 행렬 B 가 존재하면 행렬 A 를 가역이라고 한다.

$$AB = BA = I_n$$

이때, B 를 A 의 역행렬이라고 하고 A^{-1} 로 나타낸다.

Note 1. B, C 가 A 의 역행렬이라고 하자. 즉,

$$AB = BA = I_n, \qquad AC = CA = I_n$$

이라고 하면

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B$$

이다. 다시 말해서 A 가 가역행렬이면 A 의 역행렬은 유일하다.

Note 2. 실수의 경우와 마찬가지로 영행렬에 대한 역행렬은 존재하지 않는다. 그러나 실수의 경우와는 다르게 영행렬이 아닌 모든 행렬에 대하여 역행렬이 존재하는 것은 아니다. 예를 들어 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 임의의 $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ 에 대하여

$$AB = \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이다. 그러므로 A 는 영행렬이 아니지만 가역이 아니다.

2×2 행렬의 역행렬

2×2 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 역행렬은 연립방정식을 풀어서 구할 수 있다. 그 과정은 고등학교 교재를 참고하기 바란다.

2×2 행렬의 역행렬

행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여

- $ad - bc \neq 0$ 이면 역행렬이 존재하고 다음과 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- $ad - bc = 0$ 이면 A 는 가역이 아니다.

보기 2 행렬 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 에 대하여

(a) A 의 역행렬을 구하여라.

(b) $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ 임을 보여라.

Solution VOD 강좌 또는 강의 참고

여기서 $ad-bc$ 는 A 의 가역성을 결정짓는(determine) 수이다. 이 수를 A 의 **행렬식(determinant)**이라고 하고 $\det(A)$ 로 나타낸다.

$$\det(A) = ad - bc$$

일반적인 $n \times n$ 행렬이 가역일 조건도 역시 행렬식을 이용하여 찾을 수 있다. $n \times n$ 행렬의 행렬식의 정의와 가역일 때 역행렬을 구하는 것은 여기서는 다루지 않으며 관심이 있는 학생들은 선형대수학 교재를 참고하기 바란다.

역행렬의 성질

역행렬을 정의하는 식 (1.10) 에서 A 와 B 의 역할이 똑같다. 따라서 A 는 B 의 역행렬이다. 그러므로

$$A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

이다. A 가 가역일 때 $B = A^{-1}$ 이라고 하자. 그러면

$$AB = BA = I_n$$

이고 $I_n^t = I_n$ 이므로

$$B^tA^t = (AB)^t = I_n^t = I_n$$
$$A^tB^t = (BA)^t = I_n^t = I_n$$

이다. 따라서 A^t 는 가역이고 역행렬은 유일하므로

$$(A^t)^{-1} = B^t = (A^{-1})^t$$

이다.

A, B 가 모두 가역행렬이라고 하자. 그러면 행렬곱에 대한 결합법칙을 사용하면

$$\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\
&= AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \\
(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(AA^{-1})B \\
&= B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n
\end{aligned}$$

이므로 AB 는 가역이다. 역행렬은 유일하므로

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

이다.

역행렬의 성질

- A 가 가역행렬이면 A^{-1} 와 A^t 도 가역이고 그 역행렬은 다음과 같다.

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

- A, B 가 모두 가역행렬이면 AB 도 가역이고 다음 식이 성립한다.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Note $A_1, \ldots A_k$ 가 가역일 때, 두 번째 성질을 반복하여 사용하면

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

이 성립함을 알 수 있다. 특히 $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$ 이면

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

이 성립한다.

보기 3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 행렬을 구하여라.

(a) A^{101} (b) $(A^{-1})^{101}$

Solution VOD 강좌 또는 수업 참조

보기 4 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여

(a) A, P 는 가역임을 보여라.

(b) $B = P^{-1}AP$ 를 구하여라.

(c) A^{19}, B^{19} 를 구하여라.(Hint. B^{19} 를 먼저 구할 것)

Solution VOD 강좌 또는 수업 참조

선형방정식계

다음과 같은 방정식을 n 개의 변수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 의 **선형방정식(linear equation)**이라고 한다.[7]

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = d \tag{1.11}$$

식 (1.11) 에

$$x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$$

을 대입했을 때 등식이 성립하면 벡터 $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ 을 식 (1.11) 의 **해(solution)**라고 한다. $n = 2$ 이면 해집합은 평면에서 직선, $n = 3$ 이면 공간에서 평면의 집합이 된다.[8]

같은 변수들의 선형방정식이 유한개 모여 있는 것을 **선형방정식계(system of linear equations)**,[9] 또는 간단히 **선형계(linear system)**라고 한다. 일반적으로 n 개의 변수를 갖는 선형방정식계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.12}$$

여기서 계수들로 이루어진 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

을 주어진 선형계의 **계수행렬(coefficient matrix)**이라고 한다. 상수벡터를 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 라고 하면 선형계 (1.12) 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

이렇게 선형방정식계를 행렬을 이용하여 나타낸 것을 **행렬방정식(matrix equation)**이라고 한다.

보기 5 다음 선형방정식계를 행렬방정식으로 나타내어라.

(a) $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ -x + y + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$

---

[7] 고등학교 교재에서는 일차방정식이라는 용어가 사용되었다.
[8] $n \geq 4$ 이면 식 (1.11) 의 해집합을 **초평면(hyperplane)**이라고 부른다.
[9] 고등학교 교재에서는 일차연립방정식이라는 용어가 사용되었다.

Solution VOD 강좌 또는 수업 참조

선형방정식계의 모든 선형방정식을 동시에 만족하는 벡터를 선형방정식계의 해라고 한다. 선형방정식계의 해를 구하는 것을 **선형방정식계를 푼다**고 한다.

선형계와 역행렬

$n \times n$ 행렬 A 에 대하여 행렬방정식

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

는 n 개의 변수를 가진 n 개의 선형방정식을 갖는 선형계를 의미한다. A 가 가역이면 선형계

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

의 양변에 A^{-1} 을 곱하여

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}A)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

와 같이 유일한 해를 구할 수 있다.

선형계와 역행렬

$n \times n$ 행렬 A 에 대하여 A 가 가역이면 선형계 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 는 유일한 해 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 을 갖는다.

보기 6 다음 선형계를 역행렬을 이용하여 풀어라.

(a) $\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta &= 2 \\ x\sin\theta + y\cos\theta &= 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2z &= 2 \\ x + y &= 2 \quad \text{(Hint. 보기 1 참고)} \\ 2x + y - 4z &= 3 \end{cases}$

Solution VOD 강좌 또는 수업 참조

제 2 장

함수와 극한

제 1 절 수열

수를 순서대로 배열한 것을 **수열**(**sequence**)이라 부른다. 즉, 수열이란 자연수의 집합[1]

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

에서 정의된 함수이다. 예를 들어, 수열

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$$

에서 초항은 1, 둘째 항은 1/2 이고, n 번째 항은

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad n \geq 1$$

이다. 이때 a_n 을 **일반항**이라고 한다. 수열 $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ 은 다음과 같이 간단히 나타내기도 한다.

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (a_n)$$

보기 1 다음은 수열을 나타내는 여러 방법을 나타낸다.

(a) $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots), \quad a_n = \sqrt{n}\,(n \geq 1), \quad (\sqrt{n})_{n=1}^{\infty}, \quad (\sqrt{n})$

(b) $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right), \quad a_n = \frac{n-1}{n}\,(n \geq 1), \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)$

[1] 꼭 자연수의 집합일 필요는 없다. 뒤에 나오는 멱급수나 테일러급수의 경우는 음이 아닌 정수의 집합

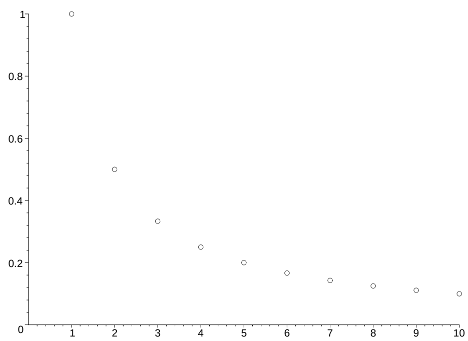
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

을 주로 사용한다.

(c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$, $\quad a_n = \frac{1}{2^n}\,(n \geq 1)$, $\quad \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\quad \left(\frac{1}{2^n}\right)$

(d) $(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots)$, $\quad a_n = (-1)^{n-1}\,(n \geq 1)$, $\quad ((-1)^{n-1})_{n=1}^{\infty}$, $\quad ((-1)^{n-1})$

수열은 다음과 같이 그래프를 이용하여 나타낼 수도 있다.



이 그래프에서 $a_n = 1/n$ 은 n 이 커질수록 0 에 가까워짐을 알 수 있다. 이때 이 **수열의 극한값(limit of sequence)**은 0 이라고 하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

이라고 표현한다. 일반적으로 n 이 커짐에 따라 a_n 의 값이 L 에 가까워질 때[2] 수열 a_n 은 극한값 L 을 갖는다고 하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

이라고 쓴다.

<u>수열의 극한값</u>

n 이 커짐에 따라 a_n 의 값이 L 에 가까워지면 수열 (a_n) 은 극한값 L 을 갖는다고 하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

이라고 쓴다. 만약 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 이 존재하면 수열 (a_n) 은 **수렴한다(converge)**고 한다. 수렴하지 않는 수열은 **발산한다(diverge)**고 한다.

수렴하지 않는 수열 (a_n) 에 대하여 n 이 커짐에 따라 a_n 이 커질 때[3], 수열 (a_n) 은 **양의 무한대로 발산한다(diverges to ∞)**고 말하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

[2] n 이 아주 크면 a_n 과 L 의 차이 $|a_n - L|$ 가 아주 작다는 것을 의미한다. 엄밀하게 쓰자면, 임의의 양수 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 유한개의 a_n 을 제외하고는 모두 $|a_n - L| < \varepsilon$ 을 만족한다는 뜻이다.

[3] 엄밀하게 말하자면 임의의 양수 M 에 대하여 $n \geq N$ 이면 $a_n \geq M$ 이 되는 자연수 N 이 존재하면 수열 (a_n) 은 무한대로 발산한다고 한다.

로 나타낸다. 마찬가지로 수렴하지 않는 수열 (a_n) 에 대하여 n 이 커짐에 따라 a_n 이 작아질 때, 수열 (a_n) 은 **음의 무한대로 발산한다(diverges to $-\infty$)**고 말하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

로 나타낸다.

보기 2 등비수열 (r^n) 이 수렴하는 r 의 범위를 구하여라.

Solution $|r| < 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ 이다. 반면, $|r| > 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$ 이다. $r = 1$ 인 경우,

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

이므로 수렴한다. 그러나 $r = -1$ 일 때, 수열은

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

이 되고 이 수열은 발산한다. 따라서 등비수열 (r^n) 이 수렴하는 r 의 범위는 $-1 < r \le 1$ 이다. □

등비수열의 극한

등비수열 (r^n) 은 $-1 < r \le 1$ 이면 수렴하고 다른 경우는 발산한다.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & -1 < r < 1 \\ 1, & r = 1 \end{cases}$$

수렴하는 수열의 기본 성질

수열의 극한값을 구하기 위해서는 다음과 같은 사실들을 사용할 수 있다.

- $a_n \le b_n \le c_n$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ 이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ 이다.
- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

보기 3 위의 성질들로부터 다음을 알 수 있다.

(a) $0 < \dfrac{n}{n^2+1} \le \dfrac{1}{n}$ 이고, $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ 이므로 다음 관계식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

이다. □

또한 수열의 극한에 대하여 다음 성질들도 성립한다.

수렴하는 수열의 기본 성질

수렴하는 두 수열 (a_n), (b_n) 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

라고 하자. 상수 c 에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha \cdot \beta, \qquad \lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\cdot\alpha$
3. $\beta \neq 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

자연상수

자연상수 e 는

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

로 정의한다.[4]

보기 4 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ (b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

Solution VOD 강좌 또는 수업 참조

단조 수열

모든 $n \geq 1$ 에 대하여

$$a_{n+1} \geq a_n$$

이면 수열 (a_n) 은 **증가수열(increasing sequence)**이라고 한다. 모든 $n \geq 1$ 에 대하여

$$a_{n+1} \leq a_n$$

[4] 이 상수에 e 라는 기호를 붙힌 사람은 L. Euler이다. 그러나 이 수를 오일러의 상수라고 부르지는 않는다. 이 수는 수학적으로 아주 중요한 수임에도 불구하고 특별한 이름을 갖고 있지 않다. 여기서 쓰는 자연상수라는 용어는 우리나라에서만 쓰이는 표현이다.

이면 수열 (a_n) 은 **감소수열(decreasing sequence)**이라고 한다.[5] 증가수열 또는 감소수열을 **단조수열(monotone sequence)**이라고 부른다.

보기 5 일반항이 다음과 같이 주어진 수열은 단조증가함을 보여라.

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \geq 1$$

Solution 모든 n 에 대하여 $a_{n+1} \geq a_n$ 임을 보이면 된다.[6]

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0 \qquad \square \end{aligned}$$

유계인 수열

수열 (a_n) 이 주어졌을 때, 모든 n 에 대하여

$$a_n \leq M$$

인 실수 M 이 존재하면 수열 (a_n) 은 **위로 유계(bounded above)**라고 한다. 마찬가지로, 모든 n 에 대하여

$$a_n \geq m$$

인 실수 m 이 존재하면 수열 (a_n) 은 **아래로 유계(bounded below)**라고 한다. 위로 유계이면서 아래로도 유계인 수열을 **유계인 수열(bounded sequence)**이라고 한다.

보기 6 다음에서 처음 두 수열은 유계인 수열이다. 마지막 수열은 아래로는 유계이지만 위로는 유계가 아닌 수열이다.

(a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$

(b) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \cdots$

(c) $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \cdots$

수렴하는 모든 수열은 유계이다. 일반적으로 그 역은 참이 아니다. 그러나 단조수열인 경우 유계이면 그 수열은 항상 수렴한다는 것이 알려져 있다.[7]

---

[5] 이 정의에 의하면 상수수열 $a_n = c$ 은 증가수열이면서 감소수열이기도 하다. 모든 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 이 성립하는 수열은 **순증가수열(strictly increasing sequence)**이라고 부른다.

[6] 도함수를 배우면 도함수의 성질을 이용하여 보일 수도 있다.

[7] 이 성질을 **실수의 완비성(completeness of real numbers)**이라고 한다. 이 성질은 실수가 갖는 특징 중의 하나인데 유리수의 집합은 이러한 성질을 갖지 않는다.

유계인 단조수열

유계인 단조수열은 항상 수렴한다.

일계선형점화식

초항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열 (x_n) 은 모든 n 에 대하여 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$x_{n+1} = x_n + d$$

또한 초항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열 (x_n) 은 모든 n 에 대하여 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$x_{n+1} = rx_n$$

이와 같이 어떤 규칙에 의하여 정의되는 수열은 앞, 뒤 항 사이의 관계식으로 표현할 수 있다. 앞의 항을 이용하여 뒤의 항이 정의되는 식을 **점화식(recursive equation)**이라고 한다.

다음과 같이 함수 f 가 일차식인 경우 점화식을 **일계선형점화식(first order linear recursive equation)**이라고 한다.

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n + b, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$n = 0, 1, 2$ 에 대하여 계산해 보면

$$\begin{aligned}
x_1 &= ax_0 + b \\
x_2 &= ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b \\
&= a^2x_0 + (a+1)b \\
x_3 &= ax_2 + b = a(a^2x_0 + (a+1)b) + b \\
&= a^3x_0 + (a^2 + a + 1)b
\end{aligned}$$

이고 일반적으로 다음 식이 성립한다.

$$x_n = a^n x_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)b$$

$a \neq 1$ 이면 두 번째 항은 공비가 a 인 등비수열의 합이므로

$$x_n = a^n x_0 + b\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right)$$

이다. $a = 1$ 이면

$$x_n = x_0 + nb$$

이다.

일계선형점화식

일계선형점화식

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n + b, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

의 일반해는 다음과 같다.

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\Big(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\Big), & a \neq 1 \\ x_0 + nb, & a = 1 \end{cases}$$

보기 7 혈압 조절을 위하여 혈압약을 매일 1 단위씩 섭취한다고 하자. 체내의 혈압약은 하루가 지나면 반으로 줄어든다. 약을 먹기 시작한지 n 일 후, 즉, n 번째 약을 먹고 난 후의 체내의 혈압약의 양을 x_n 이라고 하자. x_n 이 만족하는 점화식을 구하고 일반해를 구하여라.

Solution x_0 은 혈압약을 처음 먹기 시작하기 전의 체내에 있는 혈압약의 약이라고 하자. 그러면

$$x_0 = 0$$

이다. x_1 은 처음 약을 먹은 후의 혈압약의 양이므로

$$x_1 = 1$$

이다. 일반적으로 n 번째 날, 약을 먹은 후 체내에 있는 혈압약의 양 x_n 은 다음날 약을 먹기 전에 반으로 줄어든다. 즉, 다음날 약을 먹기 직전에는 $\frac{1}{2}x_n$ 만큼의 혈압약이 체내에 존재한다. 따라서 $(n+1)$ 번째 날, 1 단위의 약을 먹은 후 체내의 혈압약의 양은 다음 관계식을 만족한다.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1$$

따라서 n 일째 약을 먹은 후의 혈압약의 양은 다음과 같다.

$$x_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big) \qquad \square$$

보기 8 **하노이의 탑(tower of Hanoi)**은[8] 판자에 세워진 세 개의 막대와 가운데 구멍이 뚫린 모두 다른 크기의 원반으로 이루어져 있다. 1 번 막대에 n 개의 원반이 끼워져 있을 때, 3 번 막대로 원반을 모두 옮기려고 한다. 이때 다음과 같은 규칙에 따라 원반을 움직인다.

[8] 이 문제의 기원은 인도의 전설에서 유래하며 베트남의 수도인 하노이와는 연관이 없다. 힌두교의 전설에 의하면 태초에 신은 갠지스 강 유역을 세상의 중심으로 정하고 큰 사원을 세웠다. 그리고 다이아몬드 막대 3 개와 순금으로 된 64 개의 원반을 마련하였다. 원반은 모두 크기가 다르고 가운데에 구멍이 뚫려 있었는데 막대에 크기 순서대로 쌓여 있다. 신은 승려들에게 이 원반들을 한장씩 옮겨서 비어 있는 다른 하나의 막대로 모두 옮기라고 명령했다. 단, 큰 원반은 항상 작은 원반 위에 올려 놓을 수 없다. 이렇게 64 개의 원반이 모두 다른 막대로 옮겨지면 세상의 종말이 오고, 신의 명령을 열심히 수행한 승려는 상을 받고 게으름을 피운 승려들은 벌을 받는다.

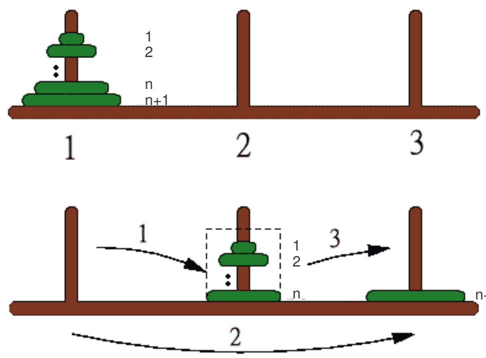
- 한번에 하나의 원반만 움직인다.
- 큰 원반은 항상 작은 원반 아래에 있어야 한다.

원반이 n 개일 때 작업을 마치려면 필요한 이동횟수를 구하여라.

Solution 원반이 n 개일 때 원반을 이동시키는 수를 x_n 이라 하자.

$$x_1 = 1$$

임은 자명하다. 원반이 $(n+1)$ 개 있다면 우선 n 개의 원반을 2 번 막대로 옮겨야 한다. 그런 다음 가장 큰 원반을 3 번 막대로 옮긴다. 그리고 2 번 막대에 있는 n 개의 원반들을 다시 3 번 막대로 옮기면 된다.



그러면 처음 1 번 막대에서 2 번 막대로 n 개의 원반을 옮기는데 필요한 이동횟수는 x_n, 가장 큰 원반을 3 번으로 옮기는데 1 번, 다시 2 번 막대에 있는 n 개의 원반을 3 번 막대로 옮기려면 x_n 번을 움직여야 한다. 따라서 x_{n+1} 과 x_n 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$x_{n+1} = x_n + 1 + x_n = 2x_n + 1$$

따라서

$$x_n = 2^n - 1$$

이다.[9] □

[9] 전설처럼 64 개의 원반이 있다면

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

번을 옮겨야 한다. 한 번 옮기는데 1 초가 걸린다면 모두 옮기는데 걸리는 시간은

$$18446744073709551615$$

초이고 햇수로 환산하면

$$\frac{18446744073709551615}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 5849\text{억년}$$

이 걸린다.

제 2 절 급수

수열 (a_n) 의 각 항을 모두 더한 것을

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

로 나타내고 **무한급수(infinite series)**, 또는 단순히 **급수(series)**라고 부른다. 급수를 간단히 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{또는} \quad \sum a_n$$

그렇다면 무한히 많은 항을 더한다는 것은 무엇을 의미하는가?

부분합

다음과 같이 정의된 수열 (s_n) 을 무한급수 $\sum a_n$ 의 **부분합(partial sum)**의 수열이라고 한다.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

부분합의 수열 (s_n) 이 극한값 s 로 수렴하면 무한급수는 수렴한다고 하고 s 를 **무한급수의 합(sum of series)**이라고 부른다. 즉,

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \end{aligned}$$

(s_n) 이 발산하면 무한급수도 발산한다고 한다.

보기 1 다음 무한급수는 수렴함을 보이고 그 합을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Solution 부분분수를 이용하면

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

이므로 부분합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

이다. 따라서 주어진 급수는 수렴하고 그 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

이다. □

보기 2 다음과 같이 정의된 **조화급수(harmonic series)**는 발산함을 보여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Solution 2 의 거듭제곱항에 대한 부분합, 즉, $s_2, s_4, s_8, \cdots$ 을 살펴보기로 하자.

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{2} \\ s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$s_{16} > 1 + \frac{4}{2}, \qquad s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$$

임을 보일 수 있고, 일반적으로 다음 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

그러므로 $n \to \infty$ 일 때 $s_{2^n} \to \infty$ 이고, 따라서 조화급수는 발산한다. □

Note 조화급수가 발산하는 것은 사실이지만 커지는 속도는 아주 느리다. 부분합이 5 보다 커지기 위해서는 80 개 이상의 항을 더하여야 하고, 10 보다 커지기 위해서는 12300 항 이상을 더하여야 한다. 실제로

$$\log n < s_n < 1 + \log n$$

이므로 1 억(10^8)개의 항을 더해도 부분합은 20 을 넘지 못한다. 따라서 조화급수가 수학적으로는 발산하지만 유한한 시간과 공간에 위치한 실제 상황에서 다룰 때에는 주의가 필요하다.

등비급수

무한급수 중 가장 중요한 보기는 **등비급수** 또는 **기하급수**(**geometric series**)이다. 초항이 $a(\neq 0)$ 이고 공비가 r 인 등비급수는 다음과 같이 정의된다.

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

$r = 1$ 이면 부분합은 $n \to \infty$ 일 때,

$$s_n = a + a + \cdots + a = na \to \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

이므로 등비급수는 발산한다. 한편 $r \neq 1$ 이면

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \end{aligned}$$

에서

$$s_n - rs_n = a - ar^n \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

이다. $-1 < r < 1$ 이면 $r^n \to 0$ 이므로($n \to \infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

이다. $r > 1$ 이거나 $r \leq -1$ 이면 r^n 은 발산하므로 등비급수도 발산한다.

등비급수의 합

초항이 $a\,(a \neq 0)$ 이고 공비가 r 인 등비급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

는 $|r| < 1$ 이면 수렴하고 이때 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

이다. $|r| \geq 1$ 이면 등비급수는 발산한다.

보기 3 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하여라. 수렴하는 경우 그 합을 구하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}5^{1-n}$ (b) $6 - 2 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} - \cdots$

Solution

(a) 일반항이

$$a_n = 2^{2n}5^{1-n} = 5\left(\frac{2^2}{5}\right)^n = 5\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

이므로 초항은 4, 공비는 $\dfrac{4}{5}$ 인 등비급수이다. 따라서 주어진 급수는 수렴하며 그 합은

$$\frac{4}{1-\frac{4}{5}} = 20$$

이다.

(b) 초항은 6 이고 공비는 $-\dfrac{1}{3}$ 인 등비급수이므로 수렴한다. 그 합은

$$\frac{6}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{6}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{2}$$

이다. □

순환소수

순환하는 무한소수는 무한급수의 합으로 쓸 수 있다. 예를 들어

$$\begin{aligned} 0.\dot{3} &= 0.333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 0.3(0.1)^{n-1} \\ 1.1\dot{2}\dot{1} &= 1.1 + 0.021 + 0.00021 + \cdots \\ &= 1.1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0.021(0.01)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 순환하는 무한소수는 항상 분수로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0.\dot{3} &= \frac{0.3}{1-0.1} = \frac{1}{3} \\ 1.1\dot{2}\dot{1} &= 1.1 + \frac{0.021}{1-0.01} = \frac{363}{330} + \frac{7}{330} = \frac{37}{33} \end{aligned}$$

p 진법

각자리 수가 p 의 거듭제곱을 나타내는 표시법을 p **진법**이라 한다. 십진법과 구분하기 위하여 수 밑에 작게 (p) 를 적어준다.

- $10_{(p)} = p, \quad 100_{(p)} = p^2, \quad 1000_{(p)} = p^3, \quad \ldots$
- $0.1_{(p)} = 1/p, \quad 0.01_{(p)} = 1/p^2, \quad 0.001_{(p)} = 1/p^3, \quad \ldots$

보기 4 p 진법으로 쓰인 다음 수들을 십진법으로 바꾸어 써라.

(a) $101.\dot{1}_{(2)}$ (b) $0.\dot{1}\dot{2}_{(3)}$

Solution (a)

$$\begin{aligned} 101.\dot{1}_{(2)} &= 100_{(2)} + 1_{(2)} + 0.1_{(2)} + 0.01_{(2)} + \cdots \\ &= 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \\ &= 5 + \frac{1/2}{1-1/2} = 6 \end{aligned}$$

따라서 $101.\dot{1}_{(2)} = 6 = 110_{(2)}$ 이다.

(b)

$$\begin{aligned} 0.\dot{1}\dot{2}_{(3)} &= 0.121212\ldots_{(3)} = 0.12_{(3)} + 0.0012_{(3)} + 0.000012_{(3)} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) + \frac{1}{81}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) + \cdots \\ &= \frac{5/9}{1-1/9} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

□

수렴하는 급수의 기본 성질

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 s 로 수렴한다고 하자. 그러면

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 이 존재하지 않거나 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

일반항 판정법

- 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.
- $\lim_{n\to\infty} a_n$ 이 존재하지 않거나 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.(대우)

Note $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하는지 발산하는지 일반항판정법으로는 알 수 없다.

다음 보기처럼 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 인 경우 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 는 수렴할 수도, 발산할 수도 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

보기 5 다음 급수들이 수렴하는지 발산하는지 판단하여라.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-n})$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$

Solution (a) $a_n = 1 - e^{-n} \to 1 \neq 0$ 이므로 급수는 발산한다.

(b) $n\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{\sin 1/n}{1/n} \to 1 \neq 0$ 이므로 급수는 발산한다. □

무한급수의 합은 수열의 부분합의 극한으로 정의되므로 수열에 대하여 성립한 많은 성질들이 무한급수에 대하여도 성립한다.

수렴하는 급수의 기본 성질

급수 $\sum a_n$ 과 $\sum b_n$ 이 수렴하면 상수 c 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

보기 6 $|r| < 1$ 일 때 다음 급수의 합을 구하여라.

$$S = 1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + \cdots$$

Solution $a_n = r^n$ 이라고 하자.

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 이 짝수} \\ r^n, & n \text{ 이 홀수} \end{cases}$$

으로 정의하면 주어진 급수는

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$$

이다. $\sum a_n$ 과 $\sum b_n$ 은 각각 공비가 r, r^2 인 등비급수이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{r}{1-r^2}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \\ &= \frac{1}{1-r} + \frac{r}{1-r^2} = \frac{1+2r}{1-r^2} \end{aligned}$$

이다. □

제 3 절 함수의 극한

함수 $y = f(x) = x^2$ 의 값은 x 가 어떤 방법으로 2 에 가까워지더라도 항상 4 에 가까워진다. 이때 $f(x)$ 가 가까워지는 값 4 를 x 가 2 로 갈 때 f 의 **극한값(limit)**이라고 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

함수의 극한은 다음과 같이 수열의 극한을 이용하여 정의할 수 있다. a 로 수렴하는 임의의 수열 (x_n) $(x_n \neq a)$ 에 대하여(x 가 어떤 방법으로 a 에 가까워지더라도)

$$y_n = f(x_n) \to L$$

이면($f(x)$ 가 항상 L 에 가까워지면) x 가 a 로 갈 때 $f(x)$ 는 L 로 **수렴한다(converge)**고 한다.

<u>함수의 극한값</u>

a 로 수렴하는 임의의 수열 (x_n) 에 대하여$(x_n \neq a)$

$$y_n = f(x_n) \to L$$

이면 x 가 a 로 갈 때 $f(x)$ 는 L 로 수렴한다고 한다. 이를 간단히

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{또는} \quad x \to a \ \text{일 때} \ f(x) \to L$$

로 나타낸다. 이때, L 을 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 극한값이라고 한다.

Note 함수가 $x = a$ 에서 정의되지 않아도 $x = a$ 에서 함수의 극한값은 정의될 수도 있다.

보기 1 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Solution $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 는 $x \neq 2$ 에서 정의되며 $x \neq 2$ 이면

$$f(x) = x + 2$$

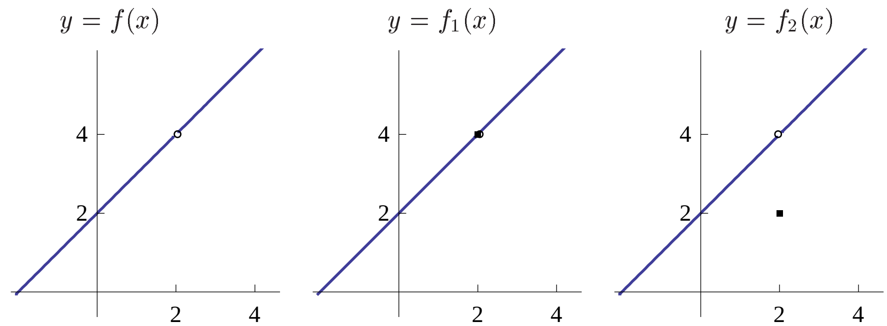
이다. 따라서

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

이다. □

Note 극한값의 정의로부터 극한값은 $x = a$ 에서의 $f(x)$ 의 값 $f(a)$ 와는 상관 없다. 예를 들어 함수 $f(x)$ 가 다음과 같이 정의된 경우에도 $x = 2$ 에서 $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$ 의 극한값은 모두 4 이다.

(a) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$ (b) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$



보기 2 다음 극한값을 조사하여라.

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$$

Solution 함수 $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ 는 $x = 0$ 에서 정의되지 않는다. 0 근방에서 $f(x)$ 가 어떻게 변하는지 살펴보자. $x_n = \dfrac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots$ 일 때 $f(x)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sin\pi = 0, & f(x_2) &= \sin 2\pi = 0 \\ f(x_3) &= \sin 3\pi = 0, & f(x_4) &= \sin 4\pi = 0 \end{aligned}$$

또한 $x_n = -\dfrac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots$ 일 때 $f(x)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sin(-\pi) = 0, & f(x_2) &= \sin\Big(-2\pi\Big) = 0 \\ f(x_3) &= \sin\Big(-3\pi\Big) = 0, & f(x_4) &= \sin\Big(-4\pi\Big) = 0 \end{aligned}$$

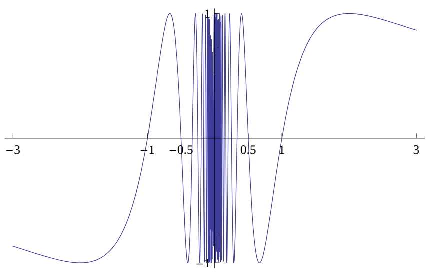
그러나 이를 근거로

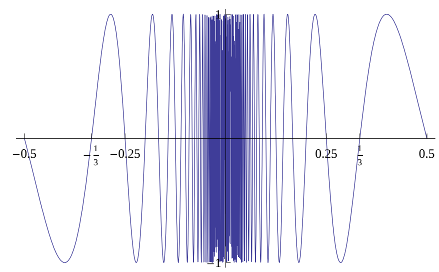
$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x} = 0$$

이라고 말할 수는 없다. $x = 0$ 에서 극한값이 존재하려면 0 으로 수렴하는 모든 수열 (x_n) 에 대하여 $(f(x_n))$ 이 같은 값으로 수렴해야 한다. 하지만 만약 $x_n = \dfrac{2}{4n+1}$ 이면 다시 말해서

$$\frac{\pi}{x_n} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

이면 $f(x_n)$ 의 값이 모두 1 이 된다. 또한 $x_n = \dfrac{2}{4n-1}$ 이면 $f(x_n)$ 의 값은 모두 -1 이 된다. 실제로 그래프를 그려 보면 $y = f(x)$ 는 0 근방에서 -1 과 1 사이를 무수히 진동하는 것을 볼 수 있다.





x 가 0 에 가까워질 때 $f(x)$ 의 값이 하나의 값으로 가까워지지 않으므로 $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ 의 극한값

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$$

은 존재하지 않는다. □

극한법칙

보기 3 에서 보았듯이 계산기를 이용한 계산이나 그래프는 편리하고 빠르게 그 결과를 보여 주지만 예기치 않은 오류를 일으키는 경우들이 있다. 따라서 극한값을 구하거나 다른 계산을 하는 경우에도 계산기의 결과를 이론적으로 확인하는 것이 필요하다. 이제 우리가 알고 있는 함수들의 극한값을 이용하여 새로운 함수의 극한값을 구하는 방법을 살펴보기로 한다. 함수의 극한법칙은 수열의 극한법칙에서 쉽게 유도된다.

극한법칙

c 가 상수이고 극한값

$$\lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

가 존재하면 다음이 성립한다.

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)] = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ 이면 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}$ 이 정의되면
$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$
이다.

상수 a 와 c 에 대하여

$$\lim_{x\to a} c = c, \qquad \lim_{x\to a} x = a$$

이다. 이 극한값과 $f(x) = g(x) = x$ 로 놓고 세 번째 성질을 반복하여 이용하면

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

임을 알 수 있다. 다시 이 성질과 첫 번째 성질, 두 번째 성질을 이용하면 다항식 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

이 성립한다. 마지막으로 유리함수 $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 에 대하여 $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x\to a} Q(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = Q(a)$$

이다.

다항식과 유리함수의 극한값

다항식 또는 유리함수 $Q(x)$ 에 대하여 a 가 정의역에 있으면

$$\lim_{x\to a} Q(x) = Q(a)$$

이다.

Note 이렇게 a 에서 함수의 극한값과 함수값이 일치하는 경우 함수는 a 에서 연속이라고 한다. 이러한 성질을 갖는 함수에 대하여는 5 절에서 다루기로 한다.

보기 3 다음 극한값을 구하여라.

(a) $\lim_{x\to 2}(x^3 + 2x^2 - 4)$

(b) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3 + 2x^2 - 4}$

(c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3 + 2x^2 - 4}{x^3 - 2}$

Solution

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ 에 대하여 $f(2) = 12$ 이므로 주어진 극한값은 12 이다.

(b) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 2} f(x)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 이다.

(c) 주어진 유리식의 분모를 $g(x) = x^3 - 2$ 라고 하면

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 6 \neq 0$$

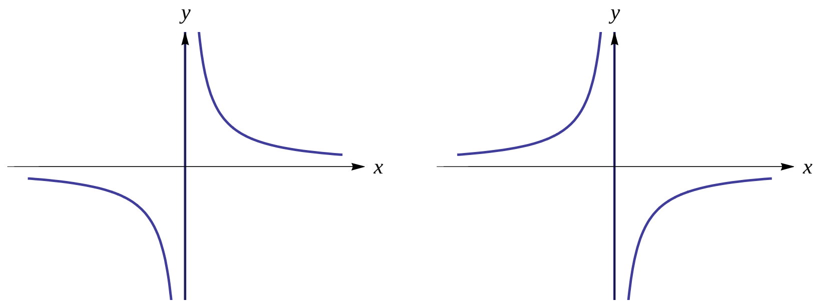
이므로 주어진 극한값은

$$\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{12}{6} = 2$$

이다. □

무한대에서의 극한값

$y = \dfrac{a}{x}$ 의 그래프는 $a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때 각각 다음과 같다.



$x \to \infty$ 일 때 $\dfrac{a}{x}$ 는 0 에 가까워진다. 이때

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$$

이라고 나타내고 x 가 양의 무한대로 갈 때 $\dfrac{a}{x}$ 는 0 으로 **수렴한다(converge)**고 한다. 여기서 0 을 $\dfrac{a}{x}$ 의 양의 무한대에서의 **극한값(limit)**이라고 한다. 마찬가지로 $x \to -\infty$ 일 때 $\dfrac{a}{x}$ 는 0 에 가까워지는데 이런 경우

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a}{x} = 0$$

이라고 나타내고 음의 무한대에서 극한값이 0 이라고 한다. 일반적으로 $x \to \pm\infty$ 일 때의 함수 $y = f(x)$ 의 극한값은 다음과 같이 정의한다.

무한대에서의 극한값

$x \to \infty(-\infty)$ 일 때 함수 $f(x)$ 가 L 에 가까워지면

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \ \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right)$$

이라고 쓰고 f 의 양의(음의) 무한대에서의 극한값은 L 이라고 한다.

Note 분자가 상수이고 양의 무한대에서 분모가 양, 또는 음의 무한대 값을 가진다고 하자. 그러면 그 함수의 양의 무한대에서 극한값은 0 이다. 다시 말해서 $g(x) = \dfrac{c}{f(x)}$ 이고 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 이면

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{c}{f(x)} = 0$$

이다. 이러한 성질은 다음과 같이 간단히 나타내기도 한다.

$$\frac{c}{\infty} = 0$$

보기 4 다음과 같이 정의된 유리함수에 대하여 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 와 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 를 구하여라.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

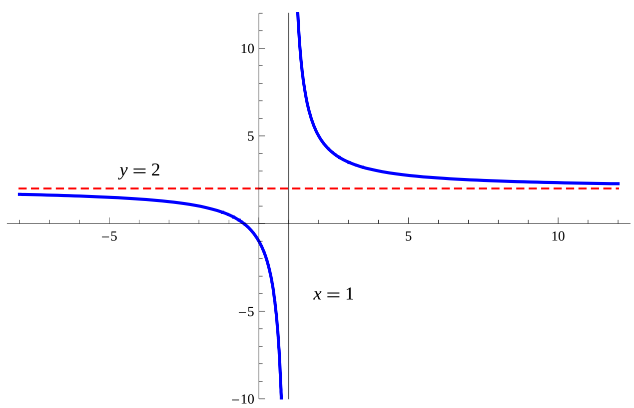
Solution $2x+1$ 을 $x-1$ 로 나누면

$$2x + 1 = 2(x-1) + 3$$

이므로

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

이다. 따라서 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축 양의 방향으로 1 만큼, y 축 양의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 얻어진다.



따라서

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

이다. □

수평점근선

보기 5 에서 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 의 그래프는 x 가 커지면 직선 $y = 2$ 의 그래프와 아주 가까워진다. 이런 경우 직선 $y = 2$ 를 $y = f(x)$ 의 **수평점근선(horizontal asymptote)**이라고 한다. 일반적으로 수평점근선은 x 의 무한대에서의 극한값을 구하면 찾을 수 있다.

수평점근선

함수 $y = f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \quad \text{또는} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

이면 직선 $y = L$ 은 $y = f(x)$ 의 수평점근선이다.

보기 6 $c \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

의 수평점근선을 구하여라.

Solution

$$ax + b = \frac{a}{c}(cx+d) - \frac{ad}{c} + b$$

이므로

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)/c}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)/c^2}{x+d/c}$$

이다. $x \to \pm\infty$ 일 때, $x + d/c \to \pm\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a}{c}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a}{c}$$

이다. 따라서 수평점근선은 $y = \frac{a}{c}$ 이다. □

무한대에서의 극한값 구하기

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 의 무한대에서의 극한값은 분모의 극한값이 0 이 아닌 유한한 값을 갖도록 변형하여 구한다. 특히, 유리함수의 무한대에서의 극한값은 분자와 분모를 분모의 최대차수로 나누면 구하여진다.

보기 7 다음 극한값을 구하여라.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1}$　　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+1}{3x^4-5x^2-2}$

Solution (a) 분자, 분모를 x^2 으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x^2}{1-1/x^2} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

을 얻는다.

(b) 분자, 분모를 x^4 으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+1}{3x^4-5x^2+2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{2/x+3/x^2+1/x^4}{3-5/x^2+2/x^4}\\ &= \frac{0+0+0}{3-0+0}=0\end{aligned}$$

이다. □

두 다항함수

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,\quad g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$$

에 대하여

$$Q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

라고 하자. 분자, 분모를 x^m 으로 나눈 후 계산하면 다음 결과를 얻는다.

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & n=m\\ \pm\infty, & n>m\end{cases}$$

유리함수가 아닌 일반적인 분수함수의 경우도 분모의 극한값이 0 이 아닌 유한한 극한값을 갖도록 변형하여 계산한다.

보기 8 다음 함수의 수평점근선을 구하여라.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

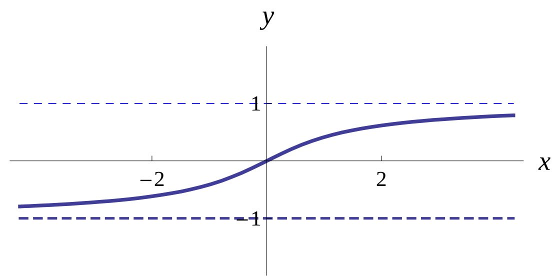
Solution 분수식은 아니지만 분자, 분모를 분모의 최대차수 x 로 나누어 보자. $x>0$ 이면 $x=\sqrt{x^2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(x^2+1)/x^2}-1/x}{1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\\ &= \sqrt{1+0}-0 \;=\; 1\end{aligned}$$

이다. 한편 $x<0$ 이면 $x=-\sqrt{x^2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{(x^2+1)/x^2}-1/x}{1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\\ &= -\sqrt{1+0}-0 \;=\; -1\end{aligned}$$

이다. 따라서 두 개의 수평점근선 $y=1, y=-1$ 이 존재한다. □


y
1
x
−2
2
−1

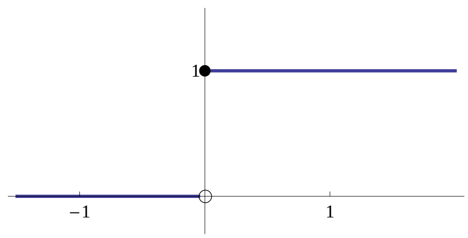
제 4 절 극한의 계산

x 가 a 보다 크면서(또는 a 의 오른쪽에서) a 로 갈 때 $x \to a^+$ 로 나타낸다. a 보다 작으면서(또는 a 의 왼쪽에서) a 로 갈 때는 $x \to a^-$ 로 나타내기로 한다.

좌극한과 우극한

다음과 같이 정의된 **헤비사이드**[10] 함수(**Heaviside function**)[11]의 $t = 0$ 에서 극한값을 생각해 보자.

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



이 경우 $t \to 0^+$ 일 때 $H(t)$ 는 항상 1 에 가까워지지만[12] $t \to 0^-$ 이면 항상 0 이다. 그러므로 t 가 0 에 가까워지면서 $H(t)$ 가 가까워지는 단 하나의 수는 존재하지 않는다. 다시 말해서

$$\lim_{t \to 0} H(t)$$

는 존재하지 않는다. 그러나 $t \to 0^+$ 이면 $H(t) \to 1$ 이고 $t \to 0^-$ 이면 $H(t) \to 0$ 이다.

$$\lim_{t \to 0^+} H(t) = 1, \quad \lim_{t \to 0^-} H(t) = 0$$

여기서 1 은 0 에서의 **우극한값**(**right-hand limit**), 0 은 0 에서의 **좌극한값**(**left-hand limit**)이라고 한다. 일반적인 경우의 정의는 다음과 같다.

좌극한과 우극한

x 가 a 의 오른쪽에서(또는 왼쪽에서) a 에 가까워질 때 $f(x)$ 의 값이 L 에 한없이 가까워지면 L 을 a 에서 $f(x)$ 의 우극한(또는 좌극한)이라고 하고

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ (또는 } \lim_{x \to a^-} f(x) = L)$$

이라고 쓴다.

우극한, 또는 좌극한은 존재할 때도 있고 존재하지 않을 때도 있다. 또한 두 극한이 모두 존재하는 경우, 두 극한이 다를 수도 있고 같을 수도 있다. 두 극한이 존재하면서 일치하면

[10] Olive Heaviside(1850–1925), 영국의 전기공학자
[11] 시간 0 에서 전원을 올렸을 때 전류의 흐름을 나타내는 함수이다.
[12] 실제로는 정확히 1이고

극한값이 존재하며 이 경우 일치하는 값이 극한값이 된다.

극한의 존재 조건

a 에서 $f(x)$ 의 극한값이 L 이 될 필요충분조건은 두 극한값 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 와 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 가 존재하고

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

인 것이다.

$[x]$ 를 x 를 넘지 않는 최대정수라고 하자. 예를 들어

$$[1] = 1, \quad [1.9] = 1, \quad [-1.1] = -2, \quad \cdots$$

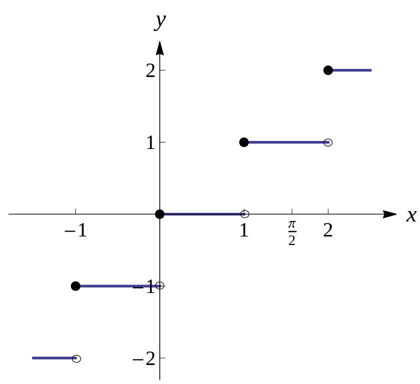
이다. $f(x) = [x]$ 를 **최대정수함수(greatest integer function)**라고 한다.

보기 1 최대정수함수 $f(x) = [x]$ 에 대하여 다음 극한값이 존재하면 극한값을 구하여라.

(a) $\lim_{x\to -1^+} f(x), \quad \lim_{x\to -1^-} f(x), \quad \lim_{x\to -1} f(x)$

(b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x), \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x), \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)$

Solution 자연수 n 에 대하여 구간 $[n, n+1)$ 에 있는 값 x 에 대하여 $[x] = n$ 이다. 따라서 그래프를 그려보면 다음과 같은 계단 모양이 된다.



(a) -1 의 오른쪽에서 -1 에 가까워지면 $f(x)$ 는 -1 이므로

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1$$

이다. 반면 -1 의 왼쪽에서 -1 에 가까워지면 $f(x)$ 는 -2 이므로

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -2$$

이다. 따라서 $\lim_{x\to -1} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

(b) $1 < \dfrac{\pi}{2} < 2$ 이므로

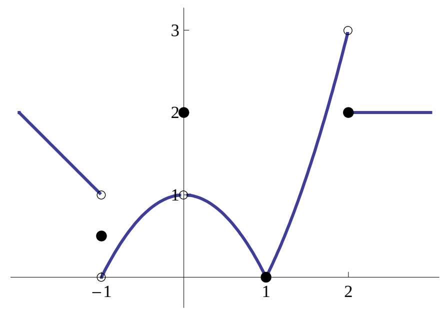
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

이다. □

보기 2 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때 $x = a$ 에서 우극한값과 좌극한값

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

을 구하여라. $x = a$ 에서 극한값이 존재하지 않으면 그 이유를 설명하여라.



(a) $a = 2$

(b) $a = 1$

(c) $a = 0$

(d) $a = -1$

Solution

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$ 으로 우극한의 값과 좌극한의 값이 다르다. 따라서 $x = 2$ 에서의 극한값 $\lim_{x\to 2} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

(b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(0)$ 이므로 $x = 1$ 에서의 극한값은 $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ 이다.

(c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ 이다.

(d) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ 이므로 $x = -1$ 에서의 극한값 $\lim_{x\to -1} f(x)$ 는 존재하지 않는다. □

Note 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 양 끝점 a, b 에서의 극한값은 우극한값과 좌극한값으로 각각 정의한다. 다시 말해서

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = L_2$$

이면 f 는 a 에서 극한값 L_1, b 에서 극한값 L_2 를 갖는다고 한다.

수직점근선

보기 5 에서 $x \to 1^+$ 이면[13] $f(x)$ 의 값은 무한히 커진다. 이런 경우

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$$

로 나타내고 x 가 오른쪽에서 1 로 갈 때 양의 무한대로 **발산한다(diverge)**고 한다. 마찬가지로 같은 함수에 대하여

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

이고 x 가 왼쪽에서 1 로 갈 때 음의 무한대로 발산한다고 한다. 일반적인 함수에 대하여는 다음과 같이 정의한다.

무한대로 발산

$x \to a^+$(또는 $x \to a^-$) 일 때 $f(x)$ 의 값이 무한히 커지면

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \quad (\text{또는} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty)$$

로 쓰고 x 가 오른쪽에서(또는 왼쪽에서) a 로 갈 때 $f(x)$ 는 양의 무한대로 발산한다고 한다. $x \to a^+$(또는 $x \to a^-$) 일 때 $f(x)$ 의 값이 무한히 작아지면

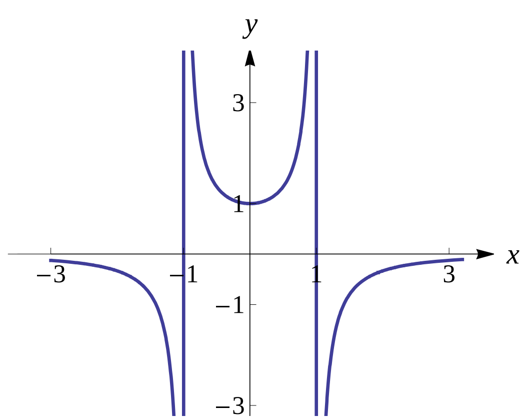
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \quad (\text{또는} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty)$$

로 쓰고 x 가 오른쪽에서(또는 왼쪽에서) a 로 갈 때 $f(x)$ 는 음의 무한대로 발산한다고 한다.

예를 들어

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1-x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1-x^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$$

이다.



[13] x 가 a 보다 크면서 a 에 가까워질 때 $x \to a^+$ 로 나타낸다.

다음의 네 경우

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

x 가 a 에 가까워지면 함수의 그래프는 수직선 $x = a$ 와 만나지는 않지만 아주 가까워진다. 이 중 하나라도 성립하면 $x = a$ 를 $y = f(x)$ 의 **수직점근선(vertical asymptote)**이라고 부른다.

<u>**수직점근선**</u>

다음 네 개의 식 중에서 하나라도 성립하면 직선 $x = a$ 를 함수 $y = f(x)$ 의 수직점근선이라고 한다.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Note $g(x) = \dfrac{c}{f(x)}$, $c \neq 0$ 에서 $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, 또는 $\lim_{x\to a^-} f(x) = 0$ 이면 직선 $x = a$ 는 함수 $y = g(x)$ 의 수직점근선이 된다.

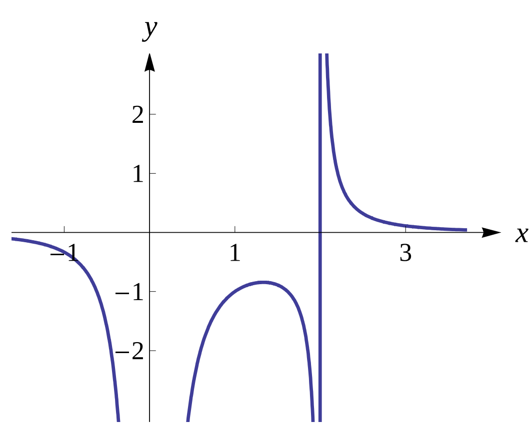
보기 3 다음 함수의 수직점근선을 모두 구하여라.

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2}$$

Solution $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ 이므로 $x = 0$, 또는 $x = 2$ 에서 f 의 분모는 극한값 0 을 갖는다. 따라서 $y = f(x)$ 는 두 개의 수직점근선

$$x = 0, \quad x = 2$$

를 갖는다. □



0/0 꼴의 극한값

분수식 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 의 극한값에 대하여 좀 더 살펴보기로 한다. $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ 가 존재하고 $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

이 성립한다. 그렇다면 $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ 인 경우는 어떻게 될까? 이 경우는 다음 두 가지로 나누어 생각해 볼 수 있다.

1. $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$
2. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

첫 번째 경우는 $x = a$ 가 수직점근선이 됨을 살펴보았다.

두 번째 경우는 0/0 꼴이 되는데 이런 경우는 분모가 0 이 아닌 극한값을 갖도록 대수적인 계산을 해 준 후 극한값을 구한다.

보기 4 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$$

Solution $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$ 라고 하면 f 는 2 에서 정의되지 않는다. 그러나 $x \neq 2$ 이면

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+2}{x+1}$$

이므로

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

이다. □

보기 5 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$$

Solution $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ 라고 하면 0 에서 f 는 정의되지 않는다. 따라서 분자 분모의 극한값을 따로 취하여 극한값을 구할 수 없다. 그러나 분자 분모에 각각 $\sqrt{x^2+1}+1$ 을 곱하면

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} &= \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} \\
&= \frac{x^2+1-1}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}
\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+1}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 0}(x^2+1)}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다. □

부정형의 계산

지금까지 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하는 보기를 살펴보았다. 일반적으로

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0\cdot\infty$$

꼴의 극한을 **부정형(indeterminate form)**이라고 하는데 경우에 따라 적절한 계산을 하여 극한값을 구할 수 있다. 다음 보기는 $\infty-\infty$ 꼴의 극한값을 구하는 방법을 보여 준다.

보기 6 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$$

Solution $\sqrt{x^2+x}+x$ 를 곱하고 나누어 주면

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x}-x &= \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다. □

압축정리

극한에 대한 다음 두 정리는 극한값을 구하는 또 다른 방법에 대한 것이다.

<u>극한값의 성질</u>

a 근방의 x 에 대하여

$$f(x) \le g(x)$$

이고 a 로 갈 때 f 와 g 의 극한값이 존재한다고 하자. 그러면 다음 부등식이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$$

다음 결과는 주어진 함수가 다른 두 함수 사이의 값을 갖는 경우를 다루기 때문에 **샌드위치 정리**(**Sandwich Theorem**), 또는 **압축 정리**(**Squeeze Theorem**)라고 부른다.

<u>샌드위치 정리</u>

a 근방의 x 에 대하여

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

이고

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

이라고 하자. 그러면 극한값 $\lim_{x \to a} g(x)$ 가 존재하고 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Note 만약 $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ 이면

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

이므로 샌드위치 정리에서

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

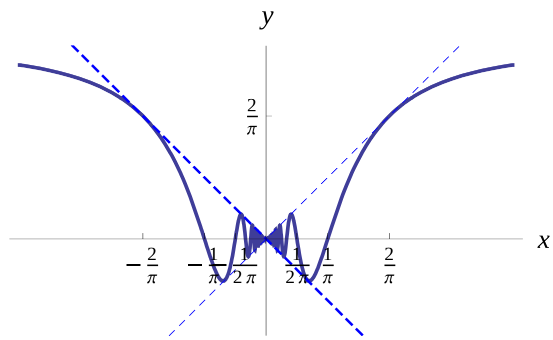
임을 알 수 있다.

보기 7 $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 임을 보여라.

Solution $|\sin \frac{1}{x}| \le 1$ 이므로 $|x \sin \frac{1}{x}| \le |x|$ 이다. $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ 이므로

$$\lim_{x \to 0} |x \sin \frac{1}{x}| = 0$$

이다. 따라서 원하는 결과를 얻는다. □



삼각함수와 관련된 다음 두 극한값은 삼각함수의 도함수를 구하는 데에 중요한 역할을 한다.

보기 8 다음 식이 성립함을 보여라.

(a) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (b) $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

Solution

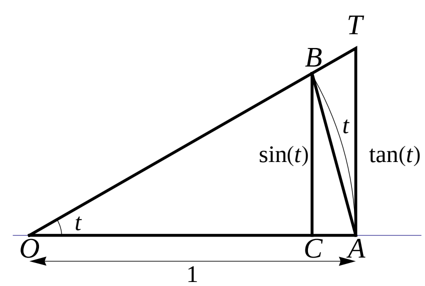
(a) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이면 다음 그림에서

$$\overline{BC} \le \text{ 호 } AB \text{ 의 길이 } \le \overline{AT}$$

이므로

$$\sin t \le t \le \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

이다.



따라서 첫 번째 부등식에서

$$\frac{\sin t}{t} \le 1$$

이다. 또한 두 번째 부등식에서

$$\cos t \le \frac{\sin t}{t}$$

이고 $\lim_{t\to 0} \cos t = 1$ 이므로 샌드위치 정리에 의하여

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

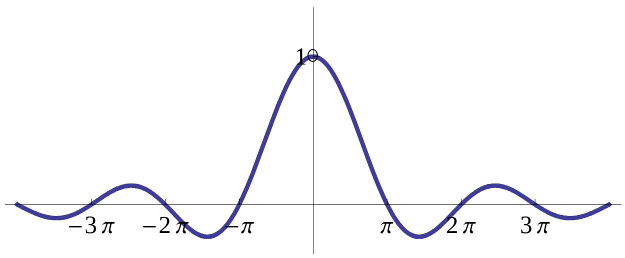
이다. 이제 $t<0$ 이면 $s=-t>0$ 이라고 하자. 그러면 $t\to 0^-$ 일 때 $s\to 0^+$ 이고 사인 함수는 기함수이므로

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\sin t}{t}=\lim_{s\to 0^+}\frac{\sin(-s)}{-s}=\lim_{s\to 0^+}\frac{\sin s}{s}=1$$

을 얻는다. 따라서

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

이 성립한다.



(b) 분자, 분모에 모두 $(1+\cos t)$ 를 곱하면

$$\frac{1-\cos t}{t^2}\frac{1+\cos t}{1+\cos t}=\frac{\sin^2 t}{t^2}\frac{1}{1+\cos t}$$

을 얻는다. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}=1,\ \lim_{t\to 0}\dfrac{1}{1+\cos t}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos t}\\ &= 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이 성립한다. □

Note 상수 c 에 대하여 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$ 이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 이어야 한다. 따라서 보기 7 의 결과에서

$$\lim_{t\to 0}\sin t=0,\qquad \lim_{t\to 0}\cos t=1$$

임을 알 수 있다.

치환에 의한 극한값의 계산

구하고자 하는 극한값의 함수가 복잡한 경우 치환에 의하여 우리가 이미 알고 있는 함수의 극한값으로 변형하는 방법을 사용한다. 예를 들어, $x\to 0$ 이면 $u=2x\to 0$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\cdot 2 = 1\cdot 2 = 2\end{aligned}$$

가 된다. 또한 $x \to \infty$ 이면 $u = 1/x \to 0$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} &= \lim_{u\to 0} \frac{1}{\sqrt{u}} \sin u \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \sqrt{u} = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

을 얻는다.

보기 9 다음 극한값을 구하여라.

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ (b) $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+ct}-1}{t}, \; c \neq 0$

Solution

(a) 주어진 식을 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{\sin 3x}{3x} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2}$$

따라서

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

을 얻는다.

(b) $x = (1+ct)^{1/4}$ 라고 하자. 그러면 $t \to 0$ 일 때 $x \to 1$ 이고 $x^4 = 1+ct$ 이므로 $t = \dfrac{x^4-1}{c}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+ct}-1}{t} &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x^4-1)/c} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{c}{x^3+x^2+x+1} = \frac{c}{4} \end{aligned}$$

을 얻는다. □

제 5 절 연속함수

3 절에서 우리는 다항식의 경우 임의의 점 $x = a$ 에서 함수의 극한값과 함수값이 일치하는 것을 보았다. 함수가 이러한 성질을 가질 때 f 는 $x = a$ 에서 **연속**(**continuous**)이라고 한다.

<u>**연속함수의 정의**</u>

함수 f 가 다음 성질을 만족하면 a 에서 연속이라고 한다.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\Big(\lim_{x\to a} x\Big) \tag{2.1}$$

Note 식 (2.1) 은 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

Note 함수 f 가 $x = a$ 에서 연속이라는 것은 다음과 같은 세 가지 사실을 내포하고 있다.

1. $f(a)$ 가 존재한다. (a 가 정의역에 속한다.)
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ 가 존재한다.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

보기 1 다음 함수가 $x = 1$ 에서 연속이 되도록 c 를 정하여라.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 2, & x \le 1 \\ cx + 4, & x > 1 \end{cases}$$

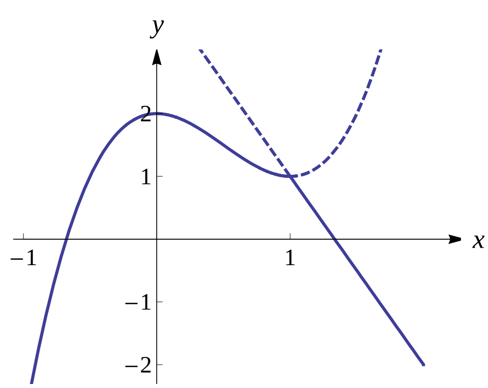
Solution $x = 1$ 에서 우극한이 $f(1)$ 이 되도록 c 를 정해야 한다.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \quad = \quad \lim_{x\to 1^+} (cx+4) \quad = \quad c+4$$

이므로

$$c + 4 = f(1) = 2 - 3 + 2 = 1$$

에서 $c = -3$ 이면 f 는 1 에서 연속이다. □



함수 f 가 $x = a$ 에서 연속이 아닐 때, f 는 $x = a$ 에서 **불연속**(**discontinuous**)이라고 하고 $x = a$ 를 f 의 **불연속점**(**discontinuity**)이라고 한다. f 가 a 에서 불연속인 경우는 다음 세가지 경우이다.

1. $f(a)$ 가 존재하지 않는다. (a 가 정의역에 속하지 않는다.)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ 가 존재하지 않는다.
3. $\lim_{x \to a} f(x)$ 가 존재하지만 $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ 이다.

보기 2 다음 함수는 0 에서 연속인지 불연속인지 판단하여라.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(b) $f(x) = [x]$ (최대정수함수)

(c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

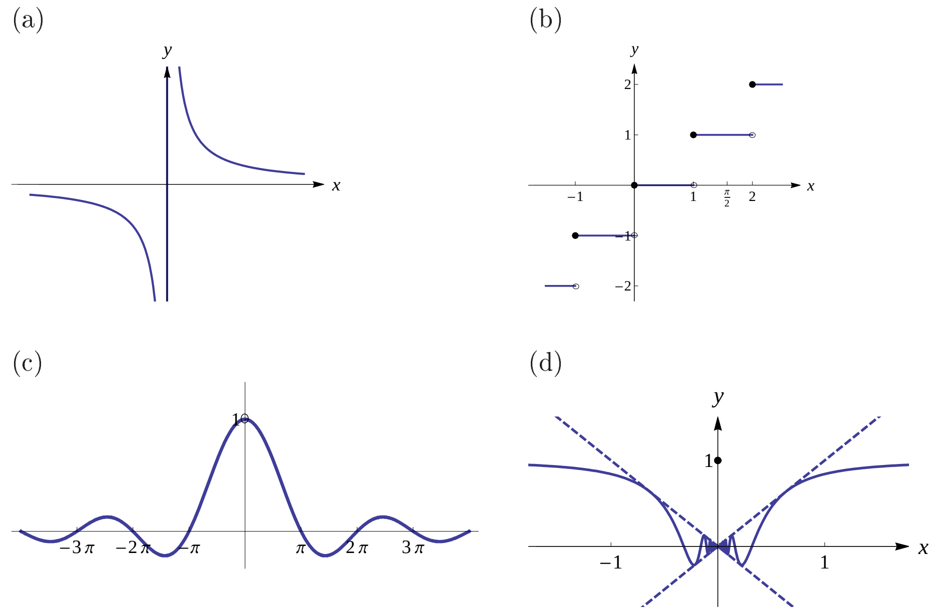
Solution (a), (c) 의 경우 0 에서 f 가 정의되지 않으므로 불연속이다.

(b) 에서는 $\lim_{x \to 0} f(x)$ 가 존재하지 않으므로 불연속이다.

마지막으로 (d) 에서는

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$$

이므로 0 에서 불연속이다. □



Note 1. (c), (d) 의 경우 각각 $f(0) = 1$ 과 $f(0) = 0$ 으로 다시 정의하면 f 는 0 에서 연속이다. 이렇게 불연속점에서 연속이 되도록 함수를 다시 정의할 수 있으면 **제거가능한 불연속점(removable discontinuity)**이라고 한다.

Note 2. (b) 의 경우처럼 좌극한, 우극한이 존재하면서 두 값이 다른 경우는 **비약 불연속점(jump discontinuity)**이라고 부른다.

연속함수

최대정수함수 $y = [x]$ 의 경우 0 에서 우극한값과 함수값이 일치한다. 이런 경우 f 는 0 에서 오른쪽으로부터 연속이라고 한다. 일반적으로

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

이면 a 에서 함수 f 는 **오른쪽으로부터 연속(continuous from the right)**이라고 한다. 마찬가지로

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

이면 a 에서 함수 f 는 **왼쪽으로부터 연속(continuous from the left)**이라고 한다. f 의 정의역이 구간 $[a, b]$ 로 주어질 때

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

이면, 다시 말해서 오른쪽에서 연속이면 연속이라고 한다. 같은 방법으로

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

이면, 다시 말해서 $x = b$ 에서는 왼쪽에서 연속이면 연속이라고 한다. 함수 f 가 구간의 모든 점에서 연속이면 구간에서 연속이라고 한다. 함수가 정의역의 모든 점에서 연속이면 **연속함**

수 (**continuous function**)라고 한다.

보기 3 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 는 구간 $[-1,1]$ 에서 연속임을 보여라.
Solution $a \in (-1,1)$ 이면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\sqrt{1-x^2}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to a}(1-x^2)}\\ &= \sqrt{1-a^2}\\ &= f(a)\end{aligned}$$

이다. 따라서 f 는 $(-1,1)$ 에서 연속이다. 같은 방법으로

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1), \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$$

임을 보일 수 있다. 따라서 f 는 구간 $[-1,1]$ 에서 연속이다.

연속함수

함수가 정의역의 모든 점에서 연속이면 연속함수라고 한다.

보기 3 에서 f 의 정의역은 $[-1,1]$ 이므로[14] f 는 연속함수이다.

Note f 가 연속함수라고 해서 항상 구간에서 연속인 것은 아니다. 예를 들어

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

는 정의역이 $\mathbb{R} - \{0\}$ 이고 정의역의 모든 점에서 연속이므로 연속함수이다. 그러나 구간 $[-1,1]$ 에서는 연속이 아니다.

함수의 연산과 합성

함수의 연산으로 구해지는 복잡한 함수의 연속성은 함수의 연산에 대한 극한법칙으로부터 확인할 수 있다. 예를 들어 두 함수 f 와 g 가 a 에서 연속이면

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

이다. 따라서 극한성질에 의하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a)+g(a)\\ &= (f+g)(a)\end{aligned}$$

[14] 함수의 정의역이 명시되지 않은 경우 정의역은 함수가 의미를 갖는 최대집합으로 정의한다.

이다. 따라서 함수 $f+g$ 는 a 에서 연속이다. 같은 방법으로 다음 사실을 보일 수 있다.

함수의 연산의 연속성

두 함수 f 와 g 가 a 에서 연속이면 다음 함수들도 $x=a$ 에서 연속이다.

$$f \pm g, \quad c \cdot f \ (c \text{ 는 상수 }), \quad f \cdot g, \quad f/g \, (g(a) \neq 0 \text{ 인 경우})$$

합성함수는 주어진 함수들에서 새로운 함수를 만들어내는 또 하나의 방법이다. a 근방에서 정의된 함수 g 와 $b=g(a)$ 근방에서 정의된 함수 f 에 대하여 합성함수 $f \circ g$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

보기 4

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = 1 - x^2$$

이라고 하면

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad (g \circ h)(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$(f \circ h)(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad (h \circ f)(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

이다. □

g 가 a 에서 연속이고 f 가 $b=g(a)$ 에서 연속이라고 하자. 그러면 x 가 a 로 갈 때 $g(x)$ 는 b 로 가까워지고(g 가 a 에서 연속이므로) $g(x)$ 가 b 로 가면 $f(g(x))$ 는 $f(b)=f(g(a))$ 로 가까워진다.(f 가 b 에서 연속이므로)

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

다시 말해서 $f \circ g$ 는 a 에서 연속이다.

합성함수의 연속성

g 가 a 에서 연속이고 f 가 $b=g(a)$ 에서 연속이면 $f \circ g$ 는 a 에서 연속이다.

3 절의 결과에 의하면 모든 다항함수와 유리함수는 정의역에서(즉, 분모가 0이 아닌 점에서) 연속이다. 그 이외에도 제곱근함수 $f(x)=x^r$, 삼각함수, 지수함수, 로그함수 등은 연속함수이다. 이러한 함수들의 연산, 또는 합성으로 만들어지는 함수들도 역시 연속함수이다.

보기 5 다음 함수들은 연속함수들이다.

$$\sin\sqrt{x^2-1}, \quad \tan\frac{1}{x}, \quad \log(x^2-2x), \quad e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \square$$

조각적으로 연속인 함수

헤비사이드함수

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

나 절대값함수

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

처럼 함수가 두 개 이상의 구간에서 다르게 정의되면 **조각적으로(piecewise)** 정의되었다고 한다. 조각적으로 정의된 함수가 각 구간에서 연속이면 **조각적으로 연속(piecewise continuous)**이라고 한다. 헤비사이드함수와 절대값함수는 모두 조각적으로 연속인 함수이다. 조각적으로 연속인 함수는 각 구간의 끝점에서 연속이면 연속함수가 된다. 예를 들어 절대값함수는

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$$

이므로 연속함수이다. 그러나 헤비사이드함수는 $x = 0$ 에서 연속이 아니므로 연속함수가 아니다.

보기 6 다음 함수가 연속함수가 되도록 상수 c 의 값을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x^2}, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

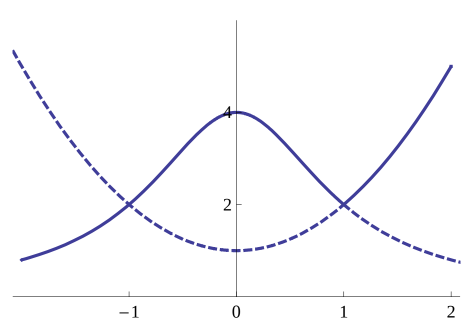
Solution f 는 조각적으로 연속이다.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{c}{x^2+1} = \frac{c}{2}$$

이고 $f(1) = 2$ 이므로

$$2 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{c}{2}$$

이면 즉, $c = 4$ 이면 $y = f(x)$ 는 연속함수가 된다. □



중간값 정리

연속함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 보면 끊어짐이나 구멍이 없이 연결되어 있다. 이러한 관찰에 의하여 다음 사실을 알 수가 있다.

중간값 정리

함수 f 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고

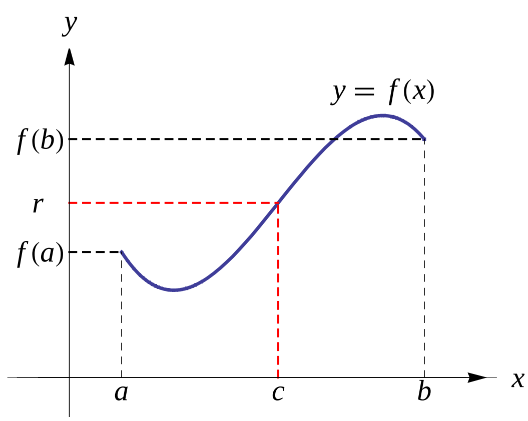
$$f(a) \neq f(b)$$

이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 r 에 대하여

$$f(c) = r$$

인 점 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

중간값 정리를 기하학적으로 보면 r 이 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 값이라면 직선 $y = r$ 과 $y = f(x)$ 의 그래프는 적어도 한 점에서 만나는 것을 의미한다.



이러한 사실을 이용하면 중간값 정리를 이용하여 방정식의 해가 존재하는 구간을 구할 수 있다. 만약 연속함수 f 에 대하여 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 다르므로 $f(c) = 0$ 인 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다. 다시 말하면,

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

이면 방정식 $f(x) = 0$ 의 해가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

보기 7 다음 방정식에 대하여 구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나의 해가 존재함을 보여라.

$$x^5 - 4x^3 + 5x^3 + 2x - 3 = 0$$

Solution $f(x) = x^5 - 4x^3 + 5x^3 + 2x - 3$ 라고 하자.

$$f(0) = -3, \quad f(1) = 1$$

이므로 0 과 1 사이에

$$f(c) = 0$$

이 되는 c 가 존재한다. 즉, 주어진 방정식의 해가 0 과 1 사이에 존재한다. □

Note 위 보기의 경우 중간값 정리를 이용하여 해가 존재하는 구간을 좁힐 수 있다. 다시 말해서

$$f(0.8) = -0.4784, \quad f(0.9) = 0.1851$$

이므로 0.8 과 0.9 사이에 해가 적어도 하나 존재한다. 이렇게 중간값 정리를 이용하여 해가 존재하는 구간을 구하는 것은 정해진 방법이 있는 것은 아니고 대부분 시행착오에 의하여 찾아진다.

성취도평가 (2009년 수시 9번)

함수 $y = f(x)$ 가 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고, 이 구간에 속한 모든 x 에 대해서

$$f(x)^3 - 2f(x)^2 - f(x) + 2 \geq 0$$

이 성립한다. 이때, $f(0) = 0$ 이면, 구간 $[0, 1]$ 에 속한 모든 x 에 대해서

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

이 성립함을 증명하시오.

최대값·최소값 정리

함수를 다룰 때 가장 중요한 주제 중의 하나는 최대값과 최소값을 구하는 것이다. 정의역 D 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 는 모든 $x \in D$ 에 대하여

$$f(x) \geq f(c)$$

인 $c \in D$ 가 존재하면 $x = c$ 에서 **최소값(minimum value)**을 갖는다고 한다. 마찬가지로 모든 $x \in D$ 에 대하여

$$f(x) \leq f(c)$$

인 $c \in D$ 가 존재하면 $x = c$ 에서 **최대값(maximum value)**을 갖는다고 한다. 최대값, 최소값을 구하는 기본적인 방법은 미분계수를 사용하며 다음 장에서 다루기로 하고 연속함수에 대한 다음 결과로 이 절을 마무리하기로 한다.

최대값·최소값 정리

함수 $y = f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 이 구간에서 반드시 최대값과 최소값을 갖는다.

Note 최대값·최소값 정리는 닫힌구간이 아니거나 연속이 아닌 경우 성립하지 않을 수 있다.

제 3 장

함수와 미분

제 1 절 평균변화율과 순간변화율

이 세상의 대부분의 것은 시간이 흐르면 변한다. 이러한 변화는 변화율을 사용하여 수학적으로 나타낼 수 있는데 변화율은 변화가 어느 방향으로 얼마나 빠르게 일어나는지를 나타낸다. 변화가 시간에 관계없이 일정하게 일어나면 직선의 형태로 나타낼 수 있고, 이때 직선의 기울기는 변화율을 나타낸다. 이 경우, 변화율은 시간에 상관없이 항상 일정하다. 그러나 대부분의 경우 변화율은 시간에 따라 다르게 나타나는데 이 절에서는 이러한 변화율에 관한 체계적이고 직접적인 방법을 살펴보기로 한다.

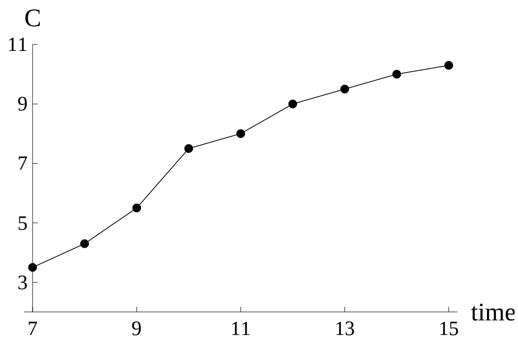
보간법

자연현상, 또는 사회현상에서 관찰되는 변화나 실험실에서 측정되는 변화는 시간에 대하여 연속적으로 기록하는 것이 불가능하다. 따라서 일정한 시간간격을 두고 이러한 수치를 관측하여 기록한다. 그렇다면 관측되지 않은 시점에서의 값은 어떻게 추정할까? 여러가지 방법 중에서 가장 일반적으로 사용하는 방법은 보간법이다.

다음 표는 2008년 11월 19일의 기온을 한 시간마다 기록한 것이다.

시	7시	8시	9시	10시	11시	12시	13시	14시	15시
기온	3.5°	4.3°	5.5°	7.5°	8.0°	9.0°	9.5°	10.0°	10.3°

이렇게 몇 개의 시점에서만 관측된 경우 관측되지 않은 시점에서의 값은 일반적으로 이웃한 두 점을 직선으로 연결하여 나타낸다. 이렇게 함수를 나타내는 방법을 **보간법 (interpolation)**이라고 한다.



이때 두 점을 연결한 직선의 기울기를 두 점 사이의 **평균변화율(average rate of change)**이라고 한다. 다시 말해서, $f(t)$ 를 t 시에서의 기온이라고 한다면 두 점 $(t_1, f(t_1))$, $(t_2, f(t_2))$ 사이의 평균변화율은

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

으로 정의한다.

보기 1 2008년 11월 19일 기온을 참고하여

(a) 7시와 9시 사이의 평균변화율을 구하여라.

(b) 같은 날 7시 30분의 기온은 얼마인지 근사적으로 구하여라.

Solution

(a) 7시와 9시 사이의 평균변화율은

$$\frac{f(9) - f(7)}{9 - 7} = \frac{5.5 - 3.5}{2} = 1.0\ (^\circ C/\text{시})$$

이다.

(b) 7시와 8시 사이의 평균변화율은

$$\frac{4.3 - 3.5}{8 - 7} = 0.8\ (^\circ C/\text{시})$$

이므로 7시 30분에서의 기온은

$$f(7.5) \approx 3.5 + 0.5 \cdot 0.8 = 3.9\ (^\circ C)$$

라고 추정할 수 있다. □

평균변화율

함수 $y = f(x)$ 가 a 를 포함하는 열린 구간에서 정의되었다고 하자. 변수 x 가 a 에서 $a + h$ 로 변할 때, x 의 변화량을

$$\Delta x = h$$

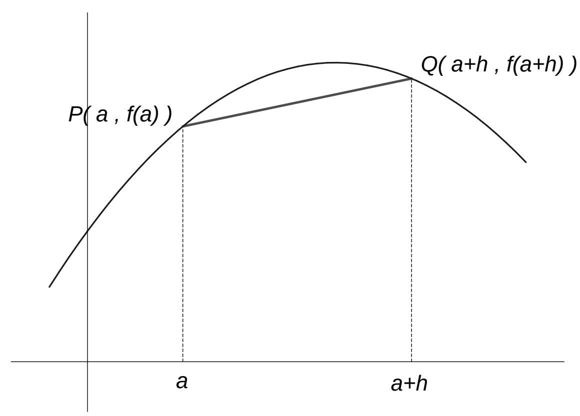
로 나타내고 그에 대응하는 종속변수 y 의 변화량을

$$\Delta y = f(a+h) - f(a)$$

로 나타내자. 여기에서 y 의 변화량을 x 의 변화량으로 나눈 몫

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

을 구간 $[a, a+h]$ 에서[1] x 에 대한 f 의 **평균변화율(average rate of change)**이라 한다. 이 평균변화율은 다음 그림에서 직선 PQ 의 기울기이다.



수직선 위를 움직이는 물체가 있다고 하자. 시간 t 에서 이 물체의 위치를 $s(t)$라고 하면 시각 t 에서 시각 $t+h$ 까지의 **평균속도(average velocity)**는 위치의 변화를 시간으로 나눈 것이다.

$$\text{평균속도} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

보기 2 땅위에서 수직으로 쏘아 올린 총알의 높이는 t 초 후

$$f(t) = 50t - 5t^2 \quad (m)$$

으로 주어진다고 한다. 총을 쏜 후 10초, 1 초, 0.1 초 동안의 평균속도를 각각 구하여라.

Solution 총을 쏜 h 초 후의 위치는

$$f(h) - f(0) \quad = \quad 50h - 5h^2$$

이므로 총을 쏜 후 h 초 동안 평균속도는

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = 50 - 5h$$

이다. 따라서 총을 쏜 후 1 초, 0.1 초, 0.01 초 동안 평균속도는 각각

$$45, \quad 49.5, \quad 49.95 \quad (\mathrm{m/sec})$$

[1] $h > 0$ 일 필요는 없다. $h < 0$ 인 경우 구간 $[a, a+h]$ 대신 구간 $[a+h, a]$ 로 생각한다.

이다. □

순간변화율

위의 보기 2 에서 총을 쏜 후 평균속도를 점점 짧은 시간에서 구하면 평균속도는 50 (m/sec) 에 가까워진다. 이때 이 값을 0 에서의 순간속도로 정의한다. 다시 말해서 $h \to 0$ 일 때 평균속도는 극한값 50 으로 수렴하고 이 값을 $t = 0$ 에서의 **순간속도(instantaneous velocity)**, 또는 단순히 **속도(velocity)**로 정의한다. 다른 시각 t 에서의 속도도 같은 방법으로 정의한다. 즉, 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 는

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

으로 정의한다. 여기서 $s(t)$ 는 물체의 위치를 나타내므로 $v(t) > 0$ 이면 양의 방향으로, $v(t) < 0$ 이면 음의 방향으로 움직임을 의미한다. 속도의 절대값 $|v(t)|$ 를 **속력(speed)**이라고 한다.

일반적으로 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $\Delta x = h$ 가 0 에 가까워짐에 따라 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 어떤 값에 수렴하면 이 값을 $x = a$ 에서의 **순간변화율**, 또는 $x = a$ 에서의 **미분계수(derivative)**라고 하고

$$f'(a), \quad \text{또는,} \quad y'\Big|_{x=a}$$

로 나타낸다. 극한값 $f'(a)$ 가 존재할 때 함수 f 는 $x = a$ 에서 **미분가능하다(differentiable)**고 한다. $x = a + h$ 라고 하면 $h \to 0$ 일 때 $x \to a$ 이므로

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

으로 나타내기도 한다.

$x = a$ 에서의 미분계수

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Note 보기 2 의 경우는 시간 $t = a$ 에서 위치함수의 미분계수가 속도가 된다. 즉,

$$v(a) = s'(a)$$

이다.

보기 3 다음 함수에 대하여 $x = 2$ 에서의 미분계수를 구하여라.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $g(x) = \sqrt{x}$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$

Solution (a) 정의에 의하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(4+h) \;=\; 4 \end{aligned}$$

(b) 정의에 의하면

$$\begin{aligned} g'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

을 얻는다.

(c) 다시 정의에 의하면

$$\begin{aligned} h'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{2-(2+h)}{2h(2+h)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)} \;=\; -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

을 얻는다. □

미분가능한 함수는 연속이다

f 가 $x = a$ 에서 미분가능하다고 하자. 그러면

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

에서 다음 두 극한값이 존재한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a), \quad \lim_{x\to a}(x-a) = 0$$

따라서

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = f'(a)\cdot 0 = 0$$

또는

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

이 성립한다. 그러므로 f 는 $x = a$ 에서 연속이다. 그리고 대우명제를 생각하면

"함수 f 가 $x = a$ 에서 연속이 아니면 미분가능하지 않다"

는 것을 알 수 있다. 그러나 그 역은 참이 아니다. 다시 말해서 f 가 $x = a$ 에서 연속이라고 해서 항상 미분가능한 것은 아니다.

Note $h > 0$ 이면서 0 으로 갈 때 우극한

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면 그 값을 $f'_+(a)$ 로 나타내고 $x = a$ 에서 f 의 **우미분계수(right-hand derivative)**라고 한다. 마찬가지로, $h < 0$ 이면서 0 으로 갈 때 좌극한

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a-h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면 그 값을 $f'_-(a)$ 로 나타내고 $x = a$ 에서 f 의 **좌미분계수(left-hand derivative)**라고 한다. 극한의 성질로부터 우미분계수 $f'_+(a)$ 와 좌미분계수 $f'_-(a)$ 가 존재하고 두 값이 같으면 f 는 $x = a$ 에서 미분가능하고, 이때

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$$

이다.

<u>미분가능성</u>

다음 두 명제는 동치이다.

1. f 는 a 에서 미분가능하다.
2. $f'_+(a)$ 와 $f'_-(a)$ 가 존재하고
$$f'_+(a) = f'_-(a)$$
이다. 이때 $f'(a) = f'_+(a)$ 이다.

보기 4 $x = 0$ 에서 함수 $y = f(x) = |x|$ 의 미분가능성을 조사하여라.

Solution 구간 $[0, h]$ 에서[2] 평균변화율을 구하면

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{h}{h} = 1, & h > 0 \\[2ex] \dfrac{-h}{h} = -1, & h < 0 \end{cases}$$

[2] $h < 0$이면 구간 $[0, h]$ 는 $[h, 0]$ 으로 정의하기로 한다.

이므로

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1$$

이다. 따라서 f 는 0 에서 미분가능하지 않다. □

보기 5 다음 함수가 $x = 2$ 에서 미분가능하도록 b, c 의 값을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ bx + c, & x > 2 \end{cases}$$

Solution $x = 2$ 에서 미분가능하므로 연속이어야 한다. 따라서

$$\lim_{x \to 2^+} (bx + c) = 2b + c = f(2) = 4$$

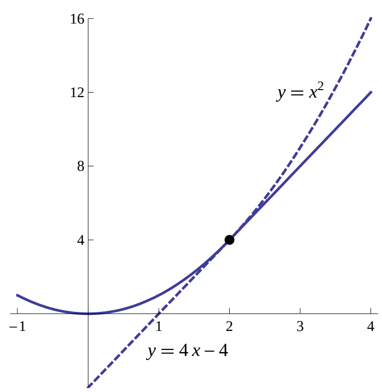
이다. $x = 2$ 에서 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 하므로

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4 \\ f'_+(2) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{b(2+h) + c - 2b - c}{h} = b \end{aligned}$$

에서

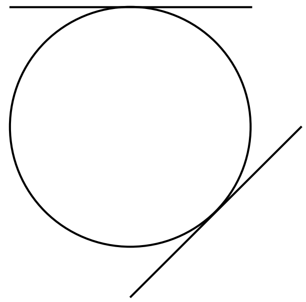
$$b = 4, \qquad c = -4$$

임을 알 수 있다. □

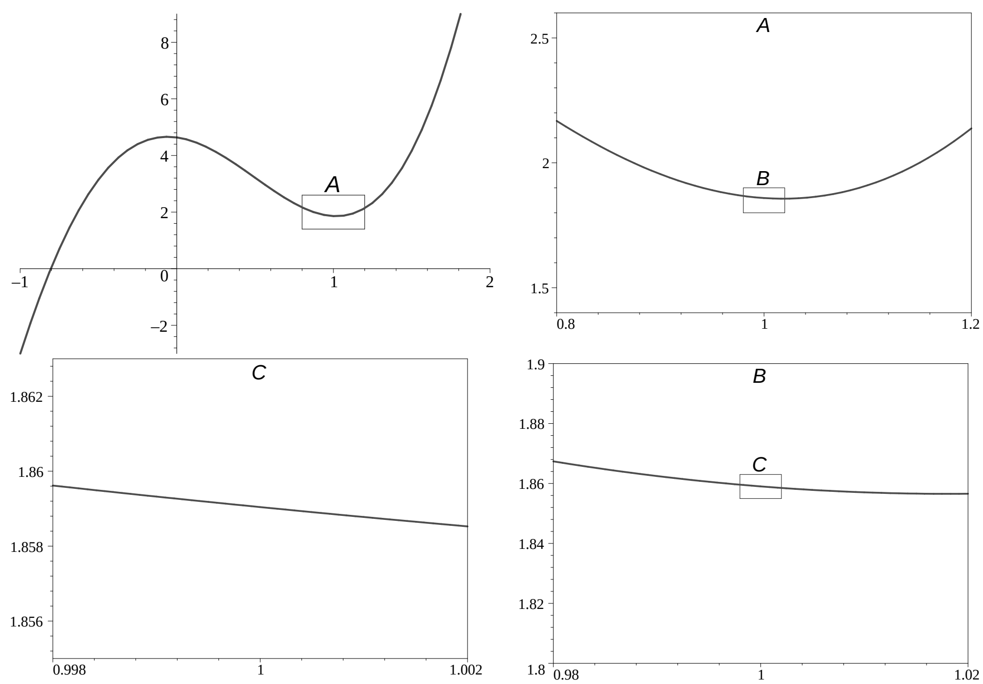


국소적 선형성

유클리드에 따르면 원의 **접선(tangent line)**은 원과 한 점에서 만나는 직선이다.



그렇다면 일반적인 그래프에 대하여 접선은 어떻게 정의할까? 원과 접선을 접점 근방에서 확대해 보면 원과 접선이 아주 비슷해 보인다. 일반적으로 $f'(a)$ 가 존재할 때 곡선 $y = f(x)$ 의 그래프를 점 $P(a, f(a))$ 근방에서 확대하면 할수록 곡선은 직선처럼 보인다. 이런 경우 곡선 $y = f(x)$는 $x = a$에서 **국소적으로 선형**(**locally linear**)이라 한다.



그래프를 확대하면 할수록 곡선 $y = f(x)$ 위의 한 점 $P(a, f(a))$ 근방에서의 평균변화율

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

는 미분계수 $f'(a)$ 로 수렴한다. 따라서 미분계수 $f'(a)$ 를 그 점에서 **곡선의 기울기**(**slope of curve**)로 정의하고, 점 $P(a, f(a))$ 에서 곡선의 기울기와 같은 기울기를 갖는 직선을 **접선**(**tangent line**)으로 정의하기로 한다.

접선의 방정식

곡선 $y = f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하다고 하자. 이때 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서 접선의 기울기는

$$m = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

이다. 따라서 점 $P(a, f(a))$ 에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

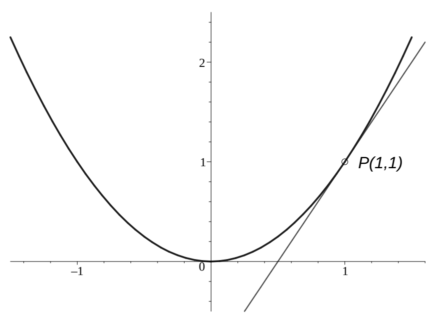
보기 6 포물선 $y = x^2$ 위의 점 $P(1, 1)$ 에서 접선의 기울기는

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2 + h) = 2$$

이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y - 1 = 2(x - 1), \quad \text{즉}, \quad y = 2x - 1$$

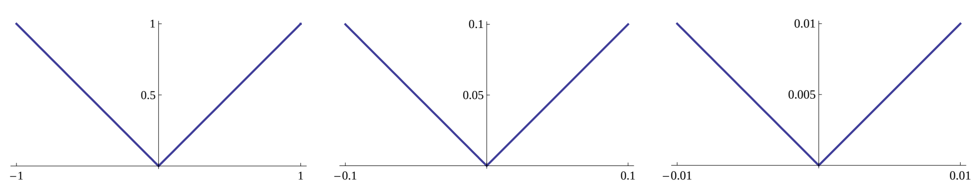
이다. □



보기 7 $a \neq 0$ 일 때, $x = a$ 에서 함수 $y = f(x) = |x|$ 의 미분계수는

$$f'(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

이다. 그러나 $x = 0$ 에서는 미분가능하지가 않다. 원점 이외의 점에서 그래프는 모두 국소적으로 직선이다. 그러나 원점에서는 전혀 다른 상황이 벌어진다. 원점 근방에서는 그래프를 아무리 확대하여도 결코 하나의 직선으로 보이지는 않는다. 즉, 미분계수가 존재하지 않는 경우는 국소적으로 선형이 아니다. □



일반적으로 국소적 선형성과 미분가능성은 동치이다.

국소적 선형성과 미분가능성

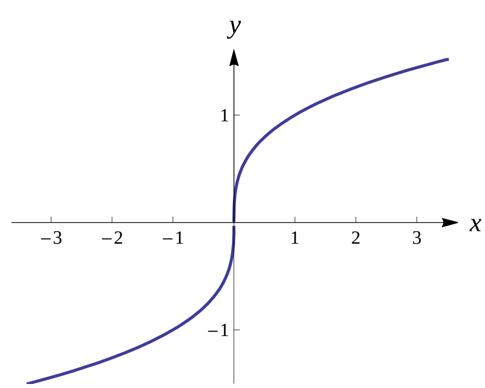
다음 두 명제는 동치이다.

- $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 국소적으로 선형이다
- $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능이다. 즉, $f'(a)$ 가 존재한다.

Note 곡선 $y = \sqrt[3]{x}$ 의 그래프는 $O(0,0)$ 근방에서 확대하면 y 축과 평행한 직선처럼 보인다. 이 경우 비록 그래프는 국소적으로 선형으로 보이나 국소적 선형이라고 하지 않는다. 즉, 어떤 점에서 국소적 선형이란 확대하였을 때 y 축과 평행하지 않으면서 직선처럼 보이는 경우를 일컫는다. 확대하였을 때 그 그래프가 y 축과 평행한 형태가 되는 경우는 **수직접선**(**vertical tangent**)을 갖는다고 한다. 다시 말해서

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty, \text{ 또는 } -\infty$$

이면 $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 수직접선을 갖는다고 한다.



.

제 2 절 도함수

1 절에서 함수 f 가 정의역의 한 점 $x = a$ 에서 미분가능할 때 미분계수 $f'(a)$ 를 정의하였다. 함수 f 가 미분가능한 점들의 집합을 I 라고 하면 $x \in I$ 에 대하여

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

로 정의된 함수 $f' : I \to \mathbb{R}$ 을 f 의 **도함수(derivative)**라고 부른다.

도함수의 정의

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

이다.

Note $y = f(x)$ 의 도함수는 다음과 같이 여러 방법으로 나타낸다.

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}(x)$$

보기 1 $y = x^n$ 의 도함수를 구하여라. 단, n 은 자연수이다.

Solution $f(x) = x^n$ 이라고 하면 공식

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

으로부터

$$\begin{aligned}
&\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\
&= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}
\end{aligned}$$

을 얻는다. $i = 1, \ldots, n$ 에 대하여

$$\lim_{h \to 0} (x+h)^{n-i} x^{i-1} = x^{n-1}$$

이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \to 0} \Big((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \Big) \\
&= x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} \ (\text{ 모두 } n \text{ 개}) \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

을 얻는다. □

Note 상수함수 $f(x) = 1$ 의 도함수는 임의의 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

이다. 이는 상수함수를 $f(x) = x^0$ 으로 나타내면 위 보기의 결과와 일치한다.

미분법칙

이제 두 함수의 연산에 대하여 도함수를 구하여 보기로 한다. 두 함수 f, g 가 미분가능하다고 하자.

$$\frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

이므로 양변에 $h \to 0$ 으로 갈 때의 극한을 취해 주면 덧셈에 대한 극한법칙으로부터

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

를 얻는다. 또한 상수 c 에 대하여

$$(cf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)$$

임을 알 수 있다.

합, 상수곱의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(cf(x))' = cf'(x)$

보기 2 다음 다항식의 도함수를 구하여라.

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 3$$

Solution 위의 두 결과를 이용하면

$$f'(x) = (2x^4)' - (x^3)' + (3)' = 8x^3 - 3x^2$$

을 얻는다. □

보기 3 $y=\sqrt{x}$ 의 도함수를 구하여라.

Solution $x>0$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

이다. □

곱, 몫의 미분법칙

두 함수의 합의 도함수는 각 도함수를 더한 것과 같다. 그렇다면 두 함수의 곱의 도함수는 각 도함수를 곱한 것과 같을까? 다시 말해서

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$$

가 성립할까? $f(x)=g(x)=x$ 인 경우를 생각해 보면 그렇지 않음을 간단히 알 수 있다. 즉,

$$(f(x)g(x))' = (x^2)' = 2x$$

이지만

$$f'(x)g'(x) = 1\cdot 1 = 1$$

이므로

$$(f(x)g(x))' \neq f'(x)g'(x)$$

이다. 이제 곱의 도함수를 구해 보기로 한다. f, g 가 미분가능한 함수라고 하자.

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

의 분자에서 $f(x)g(x+h)$ 를 빼고 더하면

$$\begin{aligned} & f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x) \\ &= [f(x+h)-f(x)]g(x+h)+f(x)[g(x+h)-g(x)] \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. 이로부터

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

을 얻는다. $\lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$ 이므로 양변에 극한을 취하면

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

을 얻는다. $g(x) \neq 0$ 인 x 에 대하여 $\dfrac{1}{g(x)}$ 의 도함수를 구하면

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \\
&= -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

이제 곱의 미분법칙과 식 (3.1) 을 같이 이용하면 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ 의 도함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

곱, 몫의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

보기 4 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(a) $y = (x^2 - x + 1)^2$

(b) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + x + 1}$

Solution

(a) $f(x) = g(x) = x^2 - x + 1$ 라고 놓고 곱의 미분법을 이용하면

$$f'(x) = g'(x) = 2x - 1$$

이므로

$$\begin{aligned} [(x^2-x+1)^2]' &= (2x-1)(x^2-x+1)+(x^2-x+1)(2x-1) \\ &= 2(2x-1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

이다.

(b) $\dfrac{x^3+x^2}{x^2+x+1} = x - \dfrac{x}{x^2+x+1}$ 으로 쓰면 계산을 더 간단하게 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^3+x^2}{x^2+x+1}\right)' &= \left(x - \frac{x}{x^2+x+1}\right)' \\ &= 1 - \frac{1\cdot(x^2+x+1)-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

□

보기 5 곡선 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ 에 대하여

(a) 곡선 위의 점 $(2, 0.4)$ 에서 접선의 방정식을 구하여라.

(b) x 축과 평행한 접선이 있으면 모두 구하여라.

(c) 곡선 위의 임의의 점에서 접선의 기울기는 1 보다 커질 수 없음을 설명하여라.

Solution (a) $y' = \dfrac{1(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 이므로 $x=2$ 에서 접선의 기울기는

$$m = \frac{1-2^2}{(1+2^2)^2} = -\frac{3}{25}$$

이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y - \frac{2}{5} = -\frac{3}{25}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$$

이다.

(b) 기울기가 0 이 되는 x 를 구하면

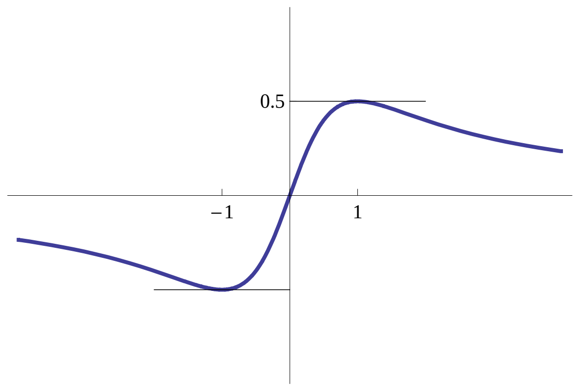
$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

이므로 x 축과 평행한 두 개의 접선 $y = \pm\dfrac{1}{2}$ 이 존재한다.

(c) $|1-x^2| \le 1+x^2$ 이므로 임의의 x 에 대하여 접선의 기울기는

$$\left|\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right| \le \left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \le 1$$

이다. 따라서 접선의 기울기는 항상 절대값이 1 보다 작거나 같다. □



보기 6 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(a) $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ (n 은 자연수)

(b) $y = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Solution (a) $(x^n)' = nx^{n-1}$ 이므로(보기 1)

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}$$

이다.

(b) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$ 이므로(보기 3)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

이다. □

보기 4 의 (a)에 의하면 모든 정수 n에 대하여

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{3.2}$$

이 성립한다. 또한 $n = \pm\dfrac{1}{2}$일 때에도 (3.2) 는 성립한다. 이러한 미분법칙은 임의의 실수 n에 대하여도 성립한다. 이 미분법칙을 **거듭제곱의 법칙**(**power rule**)이라고 부르기로 하고 그 증명은 3 절(n 이 유리수인 경우)과 4 장 **??** 절(n 이 실수인 경우, 연습문제)에서 살펴보기로 한다.

거듭제곱의 미분법칙

임의의 실수 r 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

고계도함수

$y = f(x)$ 가 미분가능한 함수라면 f 의 도함수 f' 도 함수이다. 따라서 f' 이 미분가능하면 f' 의 도함수를 생각할 수 있다. 여기서 f' 의 도함수를 f'' 로 나타내고 f 의 **이계도함수(second derivative)**라고 부른다.

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d}{dx}[f'(x)]$$

다음과 같은 기호들이 모두 이계도함수를 나타내는 데에 사용된다.

$$f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad y''$$

같은 방법으로 f 의 삼계도함수는 f''' 로 나타내고 f'' 의 도함수로 정의한다. 일반적으로 자연수 n 에 대하여 n 계 도함수는 $f^{(n)}(x)$ 로 나타내고 다음과 같이 귀납적으로 정의한다.

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' = \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)]$$

보기 7 보기 4(a) 의 함수 $y = (x^2 - x + 1)^2$ 의 이계도함수를 구하여라.

Solution $y' = 2(2x-1)(x^2 - x + 1)$ 이므로 곱에 대한 미분법을 사용하면

$$\begin{aligned} y'' &= 2(2)(x^2 - x + 1) + 2(2x-1)(2x-1) \\ &= 12x^2 - 12x + 6 \end{aligned}$$

을 얻는다. □

보기 8 $y = x^4 - x^3 + x$ 이면

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - 3x^2 + 1 \\ y'' &= 12x^2 - 6x \\ y''' &= 24x - 6 \\ y^{(4)} &= 24 \\ y^{(5)} &= 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n \geq 5$ 이면 $y^{(n)} = 0$ 이다. □

일반적으로 자연수 n 에 대하여 $f(x) = x^n$ 이면

$$f^{(n)}(x) = n!, \quad f^{(n+1)}(x) = 0$$

이다. 따라서 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 이면

$$f^{(n)}(x) = n!a_n, \quad f^{(n+1)}(x) = 0$$

이다. 예를 들어, $f(x) = (x+2)(2x^2 - 2x + 1)(x-1)$ 이면 f 는 x 의 4 차식이고 x^4 의 계수는 2 이므로

$$f^{(4)}(x) = 4! \cdot 2 = 8, \qquad f^{(5)}(x) = 0$$

이다.

이계도함수는 함수의 접선의 기울기의 순간변화율이다. 따라서 이계도함수는 곡선의 모양을 설명하는 데에 중요한 역할을 한다. 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프의 개형을 그리는 것은 6 절에서 다루기로 한다.

성취도평가 (2008년 정시 8번)

실수 전체 집합에서 정의된 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여

$$|f(x) - f(y)| \leqq 2|x-y|^{\frac{4}{3}}$$

라고 하자. 이때 함수 f 는 상수함수인지 아닌지를 밝히라.

성취도평가 (2006년 수시 4번)

구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 미분가능한 함수 f 가 다음 두 조건

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 5$$

을 만족시키면, $f(x) = \boxed{}$ 이다.

제 3 절 연쇄법칙과 역함수 정리

2 절의 보기 4(a) 를 다시 살펴보자. $y = (x^2 - x + 1)^2$ 에서

$$f(u) = u^2, \quad u = g(x) = x^2 - x + 1$$

이라고 하면

$$y = g^2(x) = f(g(x))$$

와 같이 합성함수로 나타낼 수 있다. 이때

$$y' = 2(x^2 - x + 1)(2x - 1)$$

은 f 와 g 를 이용하여 나타내면 $f'(u) = 2u$ 이므로

$$y' = f'(g(x))g'(x) \tag{3.3}$$

이 성립한다.

연쇄법칙

이러한 관계식 (3.3) 은 일반적인 합성함수에 대하여도 성립한다. $y = f(x),\ z = g(y)$ 가 미분가능한 함수이고

$$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

라고 하자.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \\ v(s) &= \frac{g(s) - g(y)}{s - y} - g'(y) \end{aligned}$$

로 정의하면 모든 t, x, s, y 에 대하여

$$\begin{aligned} f(t) - f(x) &= (t - x)[f'(x) + u(t)] \\ g(s) - g(y) &= (s - y)[g'(y) + v(s)] \end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서 $s = f(t), y = f(x)$ 일 때

$$\begin{aligned} F(t) - F(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= [f(t) - f(x)][g'(y) + v(s)] \\ &= (t - x)[f'(x) + u(t)][g'(y) + v(s)] \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{F(t) - F(x)}{t - x} = [f'(x) + u(t)][g'(y) + v(s)]$$

이다. 그러나 정의에 의하여

$$\lim_{t \to x} u(t) = 0, \qquad \lim_{s \to y} v(s) = 0$$

이므로

$$F'(x) = \lim_{t \to x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f'(x)g'(y) = f'(x)g'(f(x))$$

이 성립한다. 합성함수에 대한 이러한 미분법칙을 **연쇄법칙**(**chain rule**)이라고 한다.

> **<u>연쇄법칙</u>**
>
> 함수 $g(y)$ 가 $y = f(x)$ 에서 미분가능하고 함수 $f(x))$ 가 x 에서 미분가능하다고 하자. 그러면 합성함수 $F(x) = g(f(x))$ 는 x 에서 미분가능하고 다음 식이 성립한다.
>
> $$F'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Note 연쇄법칙은 세 개 이상의 함수가 합성되었을 때에도 같은 방법으로 주어진다. 예를 들어

$$x = h(t), \quad y = g(x), \quad z = f(y)$$

라고 하면 $z = f(g(x)) = f(g(h(t)))$ 에 대하여

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

이다. 따라서

$$F(t) = (f \circ g \circ h)(t) = f(g(h(t)))$$

에 대하여

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \\ &= f'(y)g'(x)h'(t) \\ &= f'(g(h(t)))g'(h(t))h'(t) \end{aligned}$$

을 얻는다.

보기 1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(a) $y = [g(x)]^n$ (단, $g(x)$ 는 미분가능한 함수)

(b) $y = (x^2 + 1)^3(3x^2 - 1)^4$

Solution

(a) $f(u) = u^n$, $u = g(x)$ 라고 하면 $f'(u) = nu^{n-1}$ 이고

$$y = f(g(x))$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x) = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

이다.

(b) 우선 곱의 미분법칙에 의하여

$$\frac{dy}{dx} = \left[(x^2+1)^3\right]'(3x^2-1)^4 + (x^2+1)^3\left[(3x^2-1)^4\right]'$$

이다. $f(u) = u^3,\ g(x) = x^2 + 1$ 로 놓으면 $(x^2+1)^3 = f(g(x))$ 이므로 첫 번째 미분은

$$[f(g(x))]' = 3(g(x))^2 g'(x) = 3(x^2+1)^2(2x) = 6x(x^2+1)^2$$

이다. 같은 방법으로

$$\left[(3x^2-1)^4\right]' = 4(3x^2-1)^3(6x) = 24x(3x^2-1)^3$$

을 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 6x(x^2+1)^2(3x^2-1)^4 + 24x(x^2+1)^3(3x^2-1)^3 \\ &= 6x(x^2+1)^2(3x^2-1)^3(7x^2+3)\end{aligned}$$

이 된다. □

음함수 꼴로 정의된 함수

함수가

$$y = x^2 - 2, \qquad y = x \log x$$

와 같이 $y = f(x)$ 꼴로 쓰여졌을 때 **양함수 꼴로 표현되었다**(**defined explicitly**)고 한다. 그러나

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad x^3 + y^3 = 6xy \tag{3.4}$$

와 같이 함수의 관계식이 명확히 주어지지 않는 경우도 있다. 일반적으로

$$F(x, y) = c$$

이라는 관계식으로 함수가 주어진 경우 **음함수 꼴로 표현되었다**(**defined implicitly**)고 한다. 함수가 음함수 꼴로 주어진 경우 표현된 식을 (국소적으로) y 에 대하여 풀어

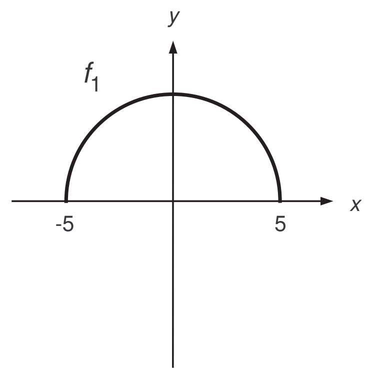
$$y = f(x)$$

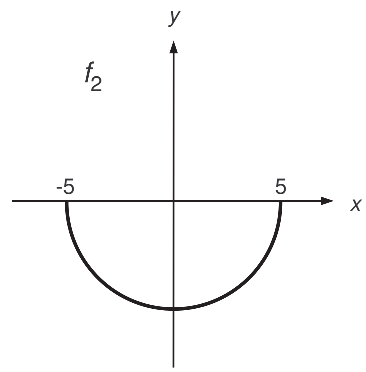
와 같이 양함수 꼴로 나타낼 수 있는 경우가 있다. 예를 들어 $x^2 + y^2 = 25$ 을 y 에 대하여 풀면

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

이 된다. 따라서 $x^2 + y^2 = 25$ 을 양함수 꼴로 바꾸어 쓰면 다음과 같이 두 개의 함수로 표현이 된다.

$$f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$





Note 일반적으로 음함수로 주어진 그래프는 하나의 함수의 그래프가 아니라 여러 함수의 그래프의 합집합이다.

보기 2 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(3, -4)$ 에서 접선의 방정식을 구하여라.

Solution 접선의 기울기를 두 가지 방법으로 구해 보기로 하자.

방법 1. 점 $(3, -4)$ 근방에서 양함수로 고쳐 쓰면

$$y = -\sqrt{25 - x^2} = -(25 - x^2)^{1/2}$$

이다. $f(x) = -x^{1/2}$, $g(x) = 25 - x^2$ 으로 쓰면 $y = f(g(x))$ 이고

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad g'(x) = -2x$$

이므로

$$y' = f'(g(x))g'(x) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

이 된다. 따라서 점 $(3, -4)$ 에서 접선의 기울기는

$$f'(3) = \frac{3}{4}$$

이다.

방법 2. 합성함수의 미분법을 이용하여 $x^2 + y^2 = 25$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

이다. 따라서 점 $(3, -4)$ 에서

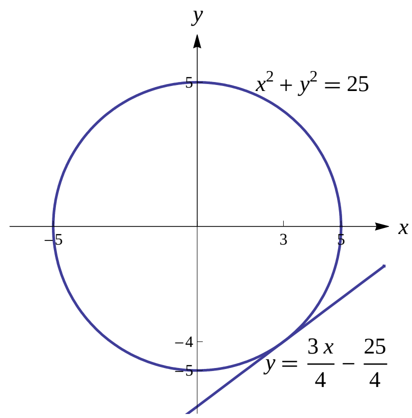
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

이다.

그러므로 접선의 방정식은

$$y + 4 = \frac{3}{4}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

이다. □



음함수 미분법

보기 3 의 두 번째 풀이처럼 음함수를 양함수 꼴로 바꾸지 않고 미분계수를 구하는 것을 **음함수의 미분법(implicit differentiation)**이라고 한다. 이 방법을 이용하면 음함수 꼴로 주어진 함수를 양함수 꼴로 바꾸지 않아도 주어진 점에서 미분계수를 구할 수가 있다.

음함수의 미분법

- 음함수의 양변을 x 에 대하여 미분한다. 이때 y 는 x 의 함수로 간주한다.
- dy/dx 를 포함하는 항을 방정식의 한 변으로 정리하여 dy/dx 에 대하여 푼다.

보기 3 유리수 r 에 대하여 $y = x^r$ 이라고 하자. 다음 식이 성립함을 보여라.

$$y' = \frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$$

Solution 서로 소인 정수 p, q 에 대하여 $r = \frac{q}{p}$ 라고 하자. 그러면

$$y^p = x^q$$

가 되고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$py^{p-1}y' = qx^{q-1}$$

을 얻는다.

$$y' = \frac{q}{p}x^{q-1}y^{1-p} = rx^{q-1}x^{(1-p)\frac{q}{p}}$$

에서 x 의 지수를 계산하면

$$q - 1 + (1-p)\frac{q}{p} = q - 1 + \frac{q}{p} - q = r - 1$$

을 얻는다. 따라서

$$y' = rx^{r-1}$$

이 성립한다. □

보기 4 관계식 $x^3 + y^3 = 6xy$ 에서 dy/dx 를 구하여라.

Solution 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(6xy) \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6y + 6x\frac{dy}{dx}$$

이다. $\dfrac{dy}{dx}$ 를 한쪽으로 모아 $\dfrac{dy}{dx}$ 에 대하여 풀면

$$(3y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

이다. □

음함수의 미분법은 고계미분계수를 구하는 데에도 사용할 수 있다.

보기 5 관계식 $y^2 + xy = 1$ 에서 y'' 를 구하여라.

Solution 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2yy' + y + xy' = 0 \tag{3.5}$$

이고 (3.5) 의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$\Big(2(y')^2 + 2yy''\Big) + y' + \Big(y' + xy''\Big) = 0$$

이다. y'' 을 한변으로 모아 정리하면

$$(2y + x)y'' = -2(y')^2 - 2y'$$

이다. $y' = -y/(2y + x)$ 이므로 대입하여 정리하면

$$y'' = -\frac{2(y')^2 + 2y'}{2y + x} = \frac{2y^2 + 2xy}{(2y + x)^3}$$

이다. □

역함수 정리

$f(x) = 2x - 1$과 f의 역함수

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

는 기울기가 각각 2 와 1/2 로 서로 역수이다. 이것은 기울기가 0 이 아닌 모든 일차함수에 대하여 성립하는 사실이다. 즉,

$$y = f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$$

의 역함수는

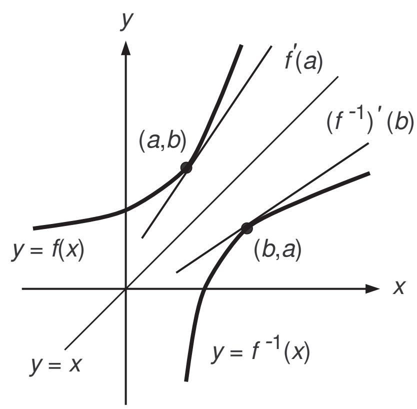
$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

이므로 f 의 기울기 a 와 f^{-1} 의 기울기 $\frac{1}{a}$ 는 항상 역수이다. 이것은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동을 하면 직선의 기울기는 항상 서로의 역수가 되기 때문이다.

이러한 f 와 $g = f^{-1}$ 의 기울기에 대한 역수 관계는 선형함수가 아닌 다른 경우에도 역시 성립한다.[3] 그러나 이 경우 어떤 점에서의 기울기를 고려해야 하는지를 신중히 판단하여야 한다. 점 $(a, f(a))$ 에서 $y = f(x)$ 의 기울기가 $f'(a) \neq 0$ 이라면 점 $(f(a), a)$ 에서 $y = g(x)$ 의 기울기는 $1/f'(a)$ 이다. 따라서 $b = f(a)$ 로 놓으면 $a = g(b)$ 이고

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

이다.



역함수 정리

구간에서 정의된 미분가능한 함수 $y = f(x)$ 가 정의역의 모든 점에서 $f'(x) \neq 0$ 이면, f 의 역함수 $g = f^{-1}$ 가 존재하고 미분가능하다. $b = f(a)$ 에서 $g = f^{-1}$ 의 미분계수는 다음과 같다.

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))} \tag{3.6}$$

Note 1. 역함수 정리의 결론은 라이프니츠의 표기법을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

2. 역함수가 존재하고 미분가능하다는 것을 안다면 (3.6) 은 음함수의 미분법으로도 쉽게 보일 수 있다. 즉, $g(f(x)) = x$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

[3] 어느 점에서 곡선의 기울기는 그 점에서 접선의 기울기로 정의됨을 기억하자.

이다. $b = f(a)$ 이면 $a = g(b)$ 이므로

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$$

이다.

보기 6 함수 $f(x) = x^3 + 3x$ 는 모든 실수에서 역함수 g 가 존재함을 설명하고, 이때 미분계수 $g'(4)$ 를 구하여라.

Solution 임의의 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$$

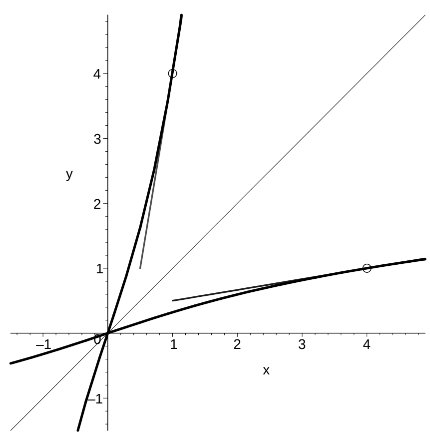
이므로 역함수 정리에 의하여 역함수 g 가 존재한다.

$$f(a) = a^3 + 3a = 4$$

이면 $a = 1$ 이므로 $g(4) = 1$ 이다. 따라서

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

이다. □



제 4 절 도함수의 응용

공모양의 풍선에 바람을 불어 넣으면 시간이 지남에 따라 풍선의 반지름도 늘어나고, 표면적과 부피도 늘어난다. 반지름과 표면적, 부피는 서로 관련이 있다. 다시 말해서, 하나는 다른 하나의 함수로 나타낼 수 있다. 많은 경우 부피의 변화율을 구하기가 반지름이나 표면적의 변화율을 구하는 것보다 훨씬 간단하다. 따라서 부피의 변화율을 이용하여 다른 변화율을 구할 수 있다면 훨씬 효율적이 될 것이다. 이렇게 연관된 두 변수의 함수 관계와 한 변수의 변화율을 이용하여 다른 변수의 변화율을 구하여 보기로 한다. 이때, 구하는 변화율은 대부분 시간에 대한 변화율이다.

보기 1 구 모양의 대형풍선에 분당 $4000\,l$ 의 헬륨을 불어 넣고 있다. 이 풍선은 표면적이 $400\pi m^2$ 이하에서는 안전하지만 이보다 더 넓어지면 파열될 위험성이 있다고 한다. 표면적이 $400\pi m^2$ 일 때 시간에 대한 반지름의 변화율과 표면적의 변화율을 구하여라.

Solution 반지름이 r 일 때 표면적과 부피는 각각

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

이다. 표면적이 $400\pi(m^2)$ 일 때 반지름은 $r = 10(m)$ 이고 부피의 시간에 따른 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = 4(m^3/min)$$

이다.[4] 따라서 부피의 식에서 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt}$$

이다. 따라서 $r = 10$ 일 때

$$4 = 4\pi \cdot 10^2 \frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{100\pi} \approx 0.0032$$

이므로 반지름의 변화율은

$$\frac{dr}{dt} \approx 0.0032(m/min) = 0.32(cm/min)$$

이다. 표면적의 변화율은 표면적의 식을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt} = 4\pi \cdot 2r \frac{dr}{dt}$$

이므로 $r = 10$ 일 때 $\dfrac{dr}{dt} = 0.032$ 임을 이용하면

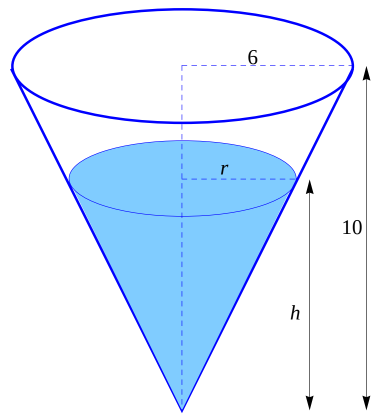
$$\frac{dS}{dt} = 8\pi \cdot 10 \cdot 0.032 \approx 8.04(m^2/min)$$

임을 알 수 있다. □

Note 이 보기에서 볼 수 있듯이 어떤 단위를 사용하느냐에 따라 다른 답을 얻을 수 있다. 그러나 단위를 환산하면 같은 답을 얻는다. 이런 종류의 문제에서 사용하는 단위를 일관되게 통일하여 주도록 주의하여야 한다.

[4] $1m^3 = 1000l$ 이다.

보기 2 다음과 같이 아이스크림콘 모양(원뿔)의 물탱크에서 초당 300 l 의 물이 빠져나가고 있다. 물의 높이가 $5m$ 일 때 높이의 변화율을 구하여라. 또, 높이가 $2m$ 일 때 높이의 변화율은 $5m$ 일 때의 몇 배가 되는가?



Solution 물탱크에 저장된 물의 양을 V 라고 하면

$$\frac{dV}{dt} = -0.3 \quad (m^3/sec) \tag{3.7}$$

이다. 높이가 h 일 때 수면의 반지름을 r 이라고 하면 직각삼각형의 닮음비에서

$$h : 10 = r : 6 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{5}h$$

을 얻는다. 따라서 높이가 h 일 때 물의 부피는

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{9}{25}h^2 h = \frac{3}{25}\pi h^3 \ (m^3) \tag{3.8}$$

이고 연쇄법칙에 의하여 부피의 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{25}\pi\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right) = \frac{9}{25}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \tag{3.9}$$

$h = 5$ 일 때 식 (3.7) 과 (3.9) 에서

$$-0.3 = \frac{9}{25}\pi 5^2 \frac{dh}{dt} = 9\pi \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{30\pi} \approx -0.0106$$

을 얻는다. 여기서 $-$ 부호는 높이가 낮아짐을 의미한다. 또한, 높이가 2 일 때 높이의 변화율은

$$-0.3 = \frac{9}{25}\pi 2^2 \frac{dh}{dt} = 9\pi \cdot \frac{4}{25}\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{25}{4}\cdot\frac{1}{30\pi}$$

이 되므로 $5m$ 일 때 변화율의 $\dfrac{25}{4} = 6.25$ 배가 된다. □

보기 3 교차로 북쪽에서 교차로를 향하여 경찰순찰차가 시속 60 km 로 달리고 있다. 교차로 북쪽 0.75 km 지점에서 교차로 동쪽 1 km 지점에서 동쪽으로 달리는 과속차량을 발견하였다. 순찰차에 있는 Speed gun 으로 측정한 이 차의 속도가 시속 40 km 일 때 이 차의 실

제 속도를 구하여라.

Solution 교차로를 원점으로 하고 x 축의 양의 방향이 동쪽, y 축의 양의 방향을 북쪽이라고 하자. $x(t)$ 를 시각 t 에서 과속차량의 x 좌표, $y(t)$ 를 순찰차의 y 좌표라고 하자. 그러면 주어진 조건은

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0.75, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = -60 \tag{3.10}$$

으로 쓸 수 있고 과속차량의 속도는 $\dfrac{dx}{dt}$ 이다. 순찰차와 과속차량의 거리를 z 라고 하면

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{또는} \quad z^2 = x^2 + y^2 \tag{3.11}$$

이 성립한다. 식 (3.11) 을 음함수미분법으로 미분하면

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}, \quad \text{또는} \quad z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \tag{3.12}$$

을 얻는다. $t = 0$ 에서

$$z(0) = \sqrt{x^2(0) + y^2(0)} = \sqrt{(\frac{3}{4})^2 + 1^2} = \frac{5}{4}$$

이고 speed gun 의 속도 측정에 의하여

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 40$$

이므로 조건 (3.10) 을 식 (3.12) 에 넣어 주면

$$\frac{5}{4}\frac{dz}{dt} = 1 \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{3}{4} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4} \cdot 40 = \frac{dx}{dt} + \frac{3}{4} \cdot (-60)$$

에서

$$\frac{dx}{dt} = 50 + \frac{3}{4}60 = 95(km/hour)$$

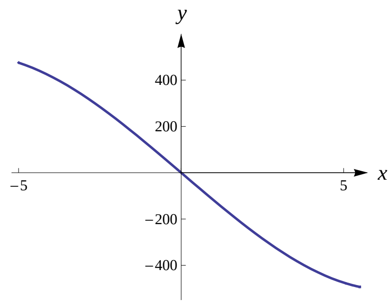
이다. 그러므로 과속차량의 실제속도는 시속 $95km$ 이다. □

제 5 절 평균값정리와 극값

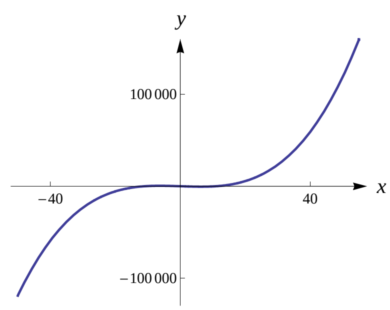
정의역이 실수집합인 함수의 그래프를 그린다고 하자. 유한한 평면에 그래프를 그리려면 x 의 범위를 어느 정도 잡아서 그려야 할까? 다음은

$$y = x^3 - 120x$$

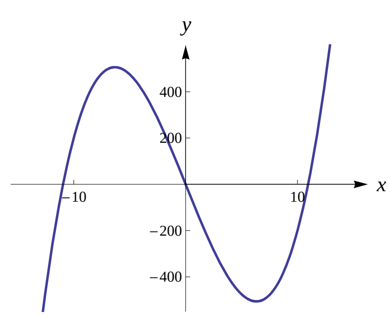
의 그래프를 구간 $[-5, 5]$ 에서 그린 것이다.



그래프는 주어진 구간에서 단순감소하는 모양을 보이는데 이는 $\lim_{x\to\infty} y = \infty$ 라는 사실을 생각하면 그래프 전체의 특성이라고 볼 수는 없다. 이렇게 함수 전체의 특성이 나타나지 않으므로 다음과 같이 x 의 범위를 늘여서 다시 그려 보자. 다음은 같은 함수를 구간 $[-50, 50]$ 에서 그린 것이다.



이번에는 함수는 단순증가하는 모양을 보이는데 $[-5, 5]$ 에서 그린 그래프로부터 이 또한 사실이 아님을 알 수 있다. 이러한 현상은 함수의 치역이 아주 커지면서 원점근방에서 일어나는 상대적으로 작은 변화가 시각화되지 않았기 때문이다. 다음은 구간 $[-15, 15]$ 에서 같은 함수의 그래프를 그린 것이다.



이 그래프에 의하면 약 -6 까지는 증가하다가 6 까지는 감소하고 다시 그 이후에는 증가하는 형태를 보여 준다. 따라서 이 그래프는 앞의 두 그래프보다 훨씬 많은 정보를 우리에게 전해 준다. 이렇게 함수의 그래프를 그릴 때 어느 구간에서 그래프를 그리느냐에 따라 우리가 얻을 수 있는 정보의 양이 달라진다. 이제 함수의 그래프를 그릴 때 얻고자 하는 정보를 살펴보고 그 정보들을 모두 나타내려면 그래프를 어느 구간에서 그려야 하는지를 살펴보기로 한다.

롤의 정리

최대값·최소값 정리에 의하면 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 정의된 연속함수는 항상 최대값과 최소값을 갖는다. 이 결과를 이용하면 다음 **롤의 정리(Rolle's theorem)**를 증명할 수 있다.

롤의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a,b) 에서 미분가능하다고 하자. $f(a)=f(b)$ 이면

$$f'(c)=0$$

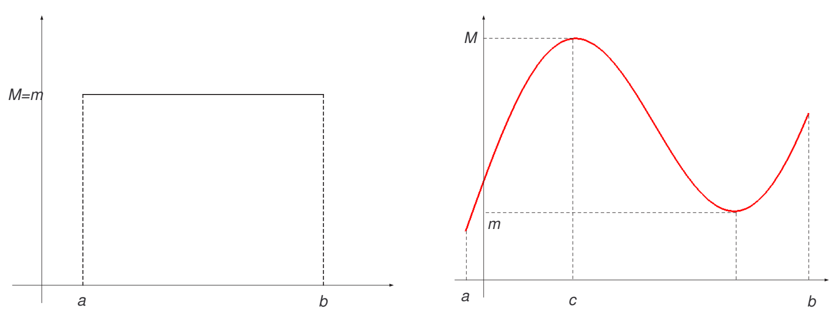
을 만족하는 c 가 구간 (a,b) 안에 적어도 하나 존재한다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이므로, 이 구간에서 최대값 M 과 최소값 m 을 갖는다.

1. $M=m$ 이면 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 상수함수이다. 따라서 $a<c<b$ 인 모든 c 에 대하여

$$f'(c)=0$$

이 성립한다.



2. $M>m$ 이면 $f(a)=f(b)$ 이므로 열린구간 (a,b) 의 한 점 c 에 대하여

$$f(c)=M \quad \text{또는} \quad f(c)=m$$

이 성립한다. 만약 $f(c)=M$ 이면 $c+h\in[a,b]$ 인 모든 h 에 대하여

$$f(c+h)\le f(c)$$

이다. 따라서 $h > 0$ 이면

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0$$

이고 $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능하므로

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0$$

이다. 마찬가지로 $h < 0$ 이면

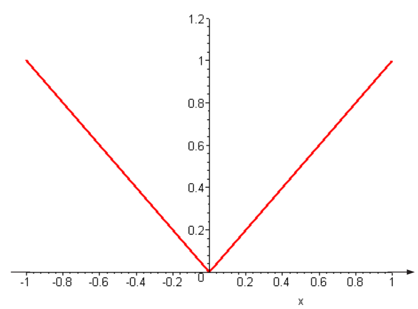
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ge 0$$

이고 $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능하므로

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ge 0$$

이다. 따라서 $f'(c) = 0$ 이다. $f(c) = m$ 인 경우의 증명은 연습문제로 남긴다.

Note. 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하다는 조건이 성립하지 않으면 롤의 정리는 성립하지 않을 수도 있다. 예를 들어, $f(x) = |x|$ 는 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 $f(-1) = f(1) = 1$ 이지만, 열린 구간 $(-1, 1)$ 에서 $f'(c) = 0$ 인 c 는 존재하지 않는다.



평균값 정리

롤의 정리를 이용하면 다음 **평균값 정리(mean value theorem)**를 얻는다.

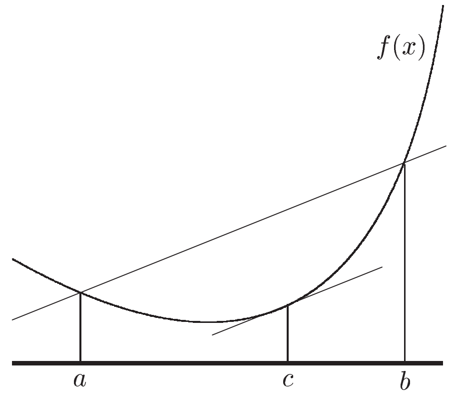
평균값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하다고 하자. 그러면 다음 등식

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

을 만족하는 c 가 구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.

Note 평균값정리는 어떤 구간에서 정의된 미분가능한 함수의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점이 존재한다는 것을 말해 준다.



롤의 정리로부터 평균값 정리를 증명하기 위하여 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$g(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 구간 (a, b) 에서는 미분가능하다. 또한

$$g(a) = g(b) = 0$$

이므로 롤의 정리에 의하여

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

을 만족하는 c 가 열린 구간 (a, b) 안에 존재한다.

도함수와 함수의 증감

구간 $[a,b]$ 에서 $f'(x)=0$ 이라고 하자. 평균값정리에 의하면 $x \in I$ 에 대하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) = 0$$

인 $c \in [a,b]$ 가 존재한다. 따라서 모든 $x \in [a,b]$ 에 대하여

$$f(x) = f(a)$$

인 상수함수가 된다. 이제 어떤 구간 I 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $f'(x)>0$ 이면 어떤 일이 일어나는지 살펴보기로 하자. 구간 내의 임의의 두 점 x, y $(x<y)$ 에 대하여

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$$

인 점 c 가 $[x,y]$ 에 존재한다. 따라서 $x<y$ 이면

$$f(y)-f(x) = f'(c)(y-x) > 0$$

이 성립한다. 다시 말해서 구간 I 에서 함수 $y=f(x)$ 는 **순증가함수**(**strictly increasing function**)이다.[5] 마찬가지로 구간의 모든 점에서 $f'(x)<0$ 이면 f 는 그 구간에서 **순감소함수**(**strictly decreasing function**)가 됨을 보일 수 있다.

> **도함수와 함수의 증감**
>
> 함수 $y=f(x)$ 가 구간 I 의 모든 x 에 대하여
>
> - $f'(x)=0$ 이면 $f(x)$ 는 상수함수이다.
> - $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$ 는 순증가함수이다.
> - $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$ 는 순감소함수이다.

보기 1 다음 함수가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 구하여라.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6, \quad -3 \le x \le 4$$

Solution $f'(x)>0$ 인 구간과 $f'(x)<0$ 인 구간을 구하면 된다.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$$

---

[5]구간 I 의 임의의 두 점 x, y $(x<y)$ 에 대하여

$$f(x) \le f(y)(\text{ 또는 } f(x) < f(y))$$

이면 f 를 증가함수(또는 순증가함수)라고 한다.

이므로 $x=-1,\ 2$ 에서 $f'(x)=0$ 이다. 그 이외의 구간에서 $f'(x)$ 의 부호를 구해보면 다음과 같다.

	$-3 \le x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x \le 4$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	증가	감소	증가

따라서 함수 $y=f(x)$ 는 구간 $(-1,2)$ 에서는 감소하고 나머지 구간에서는 증가한다. □

위의 결과는 부등식을 증명하는 데에도 유용하다. 다시 말해서, $f(a)=b$ 이고 $x>a$ 에 대하여

$$f'(x)>0 \ \text{이면} \quad f(x)>b$$
$$f'(x)<0 \ \text{이면} \quad f(x)<b$$

임을 알 수 있다.

보기 2 $f(x)=x^3-2x^2,\ g(x)=x^2-4x$ 에 대하여 $x>0$ 이면 항상 $f(x)>g(x)$ 임을 보여라.

Solution $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x^2+4x$ 라고 하자. 그러면 $h(0)=0$ 이고

$$h'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$$

이므로 $h(x)$ 는 순증가함수이다. 따라서 $x>0$ 이면

$$h(x)>h(0)=0$$

이므로

$$f(x)>g(x)$$

가 성립한다. □

성취도평가 (2007년 정시 7번)

실수전체에서 미분가능한 두 개의 함수 $f(x), g(x)$가 다음조건을 만족한다.

$$\begin{cases} f'(x)=g(x) \\ g'(x)=-f(x) \end{cases}$$

그러면 $f(x)^2+g(x)^2$ 이 상수임을 보여라.

성취도평가 (2006년 정시 3번)

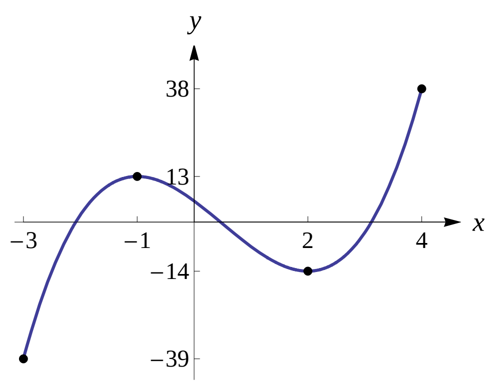
함수 f 가 미분가능하고 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 3$ 일 때, $\lim_{x\to\infty}[f(x+2) - f(x-2)] = \boxed{}$ 이다.

성취도평가 (2006년 수시 9번)
구간 $[0,\infty)$ 에서 연속이고 구간 $(0,\infty)$ 에서 두 번 미분가능한 함수 f 가 $f(0) = 0$ 을 만족시키고 또한 $0 < x < \infty$ 에 대해서 $f''(x) \leqq 0$ 를 만족시킬 때, 다음을 증명하라.

$$f(x+y) \leqq f(x) + f(y) \qquad (x, y \geqq 0)$$

극대값과 극소값

보기 1 에서 f 의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.



그래프로부터 $x = 4$ 일 때 최대값 $f(4) = 38$, $x = -3$ 일 때 최소값 $f(-3) = -39$ 임을 알 수 있다. 만약 구간을 $(-2, 0)$ 으로 제한하거나 $(1, 3)$ 으로 제한한다면 첫 번째 경우는 $x = -1$ 에서 최대값을 갖고 두 번째 경우는 $x = 2$ 에서 최소값을 갖는다는 것을 관찰할 수 있다. 이렇게 정의역에서 한 점 $x = a$ 을 포함하는 어떤 열린 구간에서 $f(a)$ 가 최대값(최소값)이 되면 $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대(극소)가 된다고 하고, $x = a$ 를 극대점(극소점), $f(a)$ 를 **극대값(극소값)(local maximum(local minimum))**이라고 한다.

극대값과 극소값

함수 $y = f(x)$ 가 a 를 포함하는 어떤 열린구간의 모든 x 에 대하여

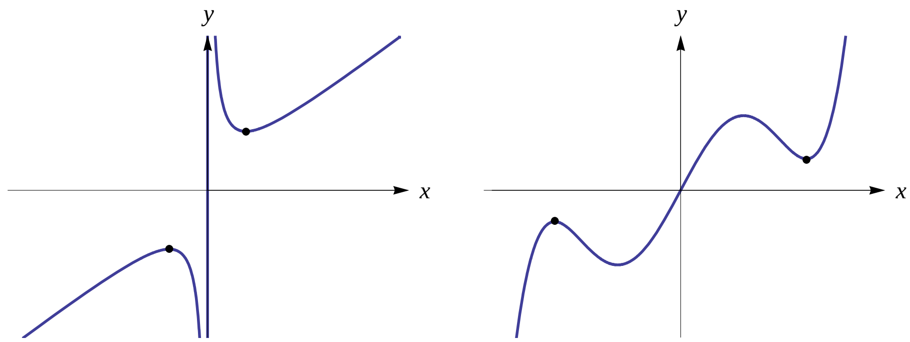
$$f(x) \leq f(a) \ (f(x) \geq f(a))$$

이면 f 는 $x = a$ 에서 극대값 (극소값) $f(a)$ 를 갖는다고 한다.

Note 극대점과 극소점을 통틀어 **극점(extremal point)**이라고 하고, 극대값과 극소값을

통틀어 **극값(extremum)**이라고 한다.

Note 다음 그림에서 볼 수 있듯이 극대값이 항상 극소값보다 큰 것은 아니다.



이제 미분가능한 함수에 대하여 극점에서 어떤 성질이 있는지를 살펴보기로 한다. 우선 $y = f(x)$ 의 도함수 $y = f'(x)$ 가 연속함수라고 하자.[6]

보기 1 에서 그래프를 살펴보면 극대점과 극소점에서 미분계수는 0 이 됨을 알 수 있다. 이러한 사실은 미분가능한 모든 함수에 대하여 성립한다. 미분가능한 함수 $y = f(x)$ 가 $x = c$ 에서 극대값을 갖는다고 하자. 그러면 어떤 양수 h 에 대하여 구간 $(c-h, c+h)$ 의 모든 x 에 대하여

$$f(x) \le f(c)$$

가 성립한다. 따라서 $x \in (c, c+h)$ 이면

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$$

이므로

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$$

이 성립한다. 마찬가지로 $x \in (c-h, c)$ 이면 $x - c < 0$ 이므로

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$$

이 성립하고

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$$

을 얻는다. f 는 $x = c$ 에서 미분가능하므로

$$f'_+(c) = f'_-(c)$$

이고 $f'(c) = 0$ 임을 알 수 있다.

---

[6] 미분가능한 함수의 도함수 $f'(x)$ 가 항상 연속인 것은 아니다. 다음 함수는 f' 이 $x = 0$ 에서 연속이 아닌 예이다.(연습문제)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

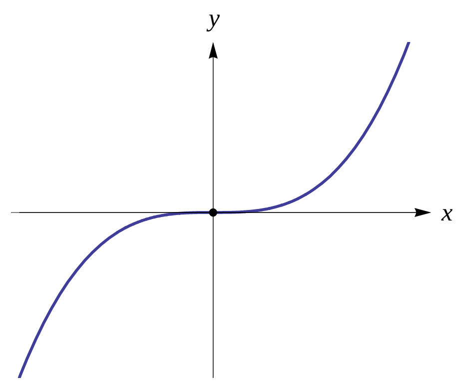
그러나 우리가 다루는 대부분의 미분가능한 함수들은 도함수도 연속이다.

극점에서의 미분계수

$x = c$ 에서 미분가능한 함수 $y = f(x)$ 가 $x = c$ 에서 극값을 가지면 $f'(c) = 0$ 이다.

Note 이 결과의 역은 일반적으로 참이 아니다. 다시 말해서 미분가능한 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $f'(c) = 0$ 이라고 해서 $y = f(x)$ 가 항상 극값을 갖는 것은 아니다.

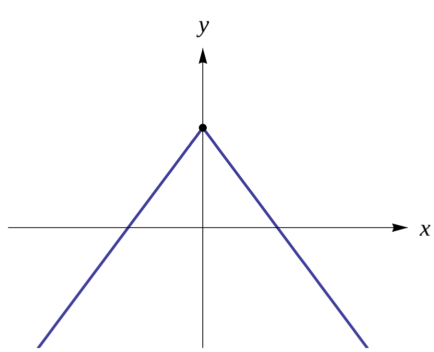
예를 들어, $f(x) = x^3$ 에서 $f'(x) = 3x^2$ 이므로 $f'(0) = 0$ 이다. 하지만 f 는 단순증가하는 함수이므로 f 는 $x = 0$ 에서 극값을 갖지 않는다. 일반적으로 임계점 $x = c$ 를 기준으로 f' 의 부호가 변하지 않으면 $x = c$ 는 극점이 되지 않는다.

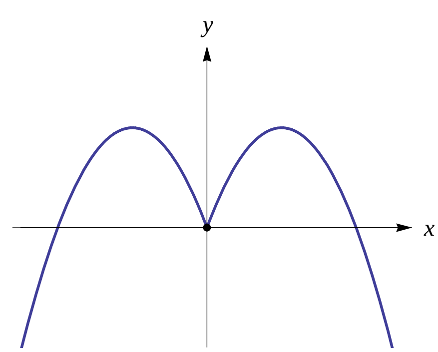


Note 임계점 $x = c$ 주변에서 f' 의 부호가 바뀌면 f 는 $x = c$ 에서 극값을 갖는다. 다시 말해서 f' 의 부호가 $+$ 에서 $-$ 로 바뀌면 극대값을, $-$ 에서 $+$ 로 바뀌면 극소값을 갖는다.

임계점

다음 그림들에서 볼 수 있는 것처럼 함수 $y = f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능하지 않더라도 극값을 가질 수 있다.





따라서 어떤 함수 $y = f(x)$ 가 $x = c$ 에서 극값을 갖는다면 $f'(c)$ 가 존재하지 않거나 또는 $f'(c) = 0$ 이다. 이러한 성질을 갖는 점 $x = c$ 를 **임계점(critical point)**이라고 한다.[7]

[7] 교재에 따라서는 구간의 양 끝값을 임계점에 포함시키는 경우도 있다.

임계점

$f'(c)$ 가 존재하지 않거나 $f'(c) = 0$ 인 점 $x = c$ 를 임계점이라고 한다.

Note 위의 논의들을 요약하면 $x = c$ 에서 $y = f(x)$가 극값을 가지면 $x = c$ 는 임계점이다. 다시 말하면 $x = c$ 가 임계점이 아니면 $y = f(x)$ 는 $x = c$ 에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 극값을 구하기 위해서는 임계점만 살펴보면 된다.

보기 3 다음 함수의 임계점을 모두 구하고 극대값과 극소값을 구하여라.

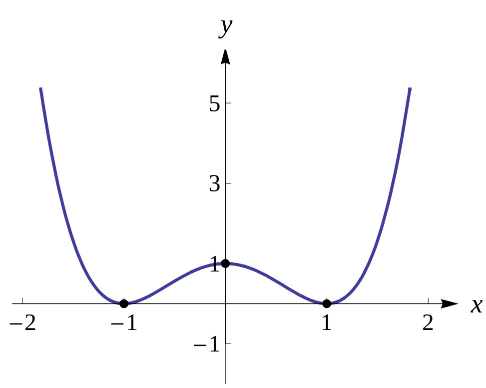
(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$

Solution

(a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ 이므로 세 개의 임계점 $x = 0, 1, -1$ 이 존재한다. 임계점을 기준으로 $f'(x)$ 의 부호를 구하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소값	$\nearrow$	극대값	$\searrow$	극소값	$\nearrow$

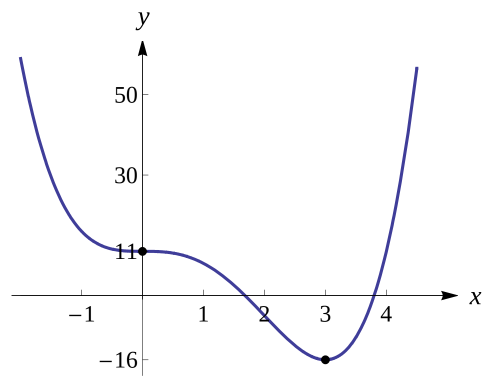
$x = -1$ 에서 극소값 $f(-1) = 0$, $x = 0$ 에서 극대값 $f(0) = 1$, $x = 1$ 에서 극소값 $f(1) = 0$ 을 갖는다.



(b) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ 이므로 두 개의 임계점 $x = 0, 3$ 이 존재한다. 임계점을 기준으로 $f'(x)$ 의 부호를 구하면 다음과 같다.

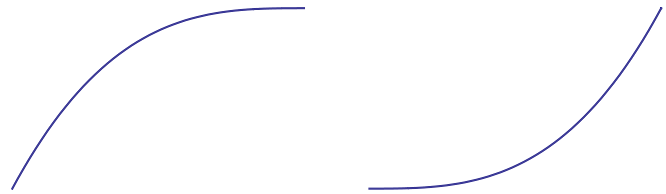
x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극값 아님	$\searrow$	극소값	$\nearrow$

$x = 3$ 에서 극소값 $f(3) = -16$ 을 가지며 다른 극값은 존재하지 않는다. □



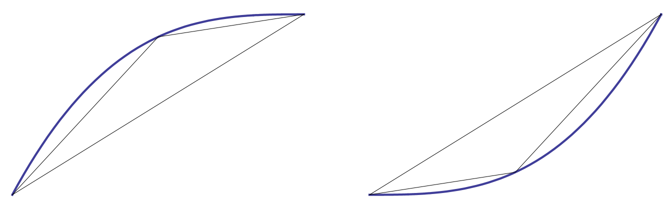
제 6 절 함수의 그래프

다음 두 그래프는 모두 증가하는 함수의 그래프이지만 다른 특징을 갖는다.

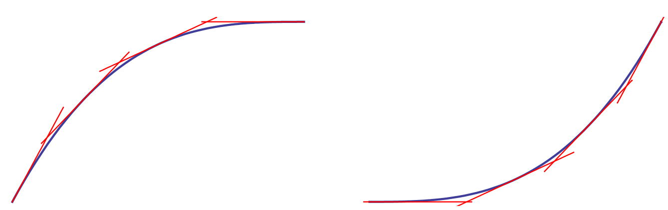


함수의 볼록성

주어진 구간에서 첫 번째 그래프는 **위로 볼록(concave down)**하다고 하고 두 번째 그래프는 **아래로 볼록(concave up)**하다고 한다. 이는 곡선 위의 임의의 두 점을 연결하였을 때 위로 볼록한 경우는 곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위에, 아래로 볼록한 경우는 곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 아래에 있다.



만약 $f(x)$ 가 미분가능한 함수라면 첫 번째 경우는 x 가 커지면 접선의 기울기가 점점 작아진다. 다시 말해서 $f'(x)$ 가 감소한다. 반면 두 번째 경우는 접선의 기울기 $f'(x)$ 가 점점 커진다. 이러한 성질을 미분가능한 함수 $y = f(x)$ 의 볼록성을 정의하는 데에 사용한다.



함수의 볼록성

미분가능한 함수 $y = f(x)$ 가

- 구간 (a, b) 에서 f' 이 증가하면 $y = f(x)$ 는 아래로 볼록이다.
- 구간 (a, b) 에서 f' 이 감소하면 $y = f(x)$ 는 위로 볼록이다.

만약 $y = f(x)$ 의 이계도함수가 존재하면 위의 결과는 다음과 같이 쓸 수 있다.

이계도함수와 볼록성

두 번 미분가능한 함수 $y = f(x)$ 가

- 구간 (a, b) 에서 $f'' > 0$ 이면 $y = f(x)$ 는 아래로 볼록이다.
- 구간 (a, b) 에서 $f'' < 0$ 이면 $y = f(x)$ 는 위로 볼록이다.

보기 1 5 절의 보기 3 에서 위로 볼록인 구간과 아래로 볼록인 구간을 구하여라.

Solution (a) $f''(x) = 12x^2 - 4 = 12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 이므로 구간별로 f'' 의 부호를 살펴보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	아래로 볼록		위로 볼록		아래로 볼록

따라서 구간 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 에서는 위로 볼록하고 나머지 구간에서는 아래로 볼록하다.

(b) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ 구간별로 f'' 의 부호를 살펴보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	아래로 볼록		위로 볼록		아래로 볼록

따라서 구간 $(0, 2)$ 에서는 위로 볼록하고 나머지 구간에서는 아래로 볼록하다. □

변곡점

보기 1(a) 에서 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 의 왼쪽에서 곡선은 아래로 볼록하다가 오른쪽에서는 위로 볼록한 모양이 되고 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 의 왼쪽에서 곡선은 위로 볼록하다가 오른쪽에서는 아래로 볼록한 모양이 된다. 이렇게 곡선의 볼록한 모양이 바뀌는 점을 **변곡점(inflection point)**이라고 한다.

보기 2 새로 개설된 인터넷 사이트의 가입자 수(단위 : 만명)는 시간 t (단위 : 개월) 에 대

하여 다음과 같이 주어진다고 한다.

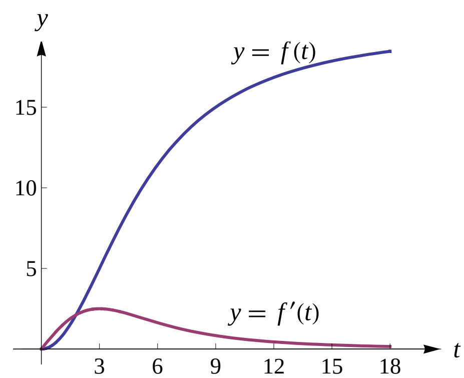
$$f(t) = \frac{20t^2}{27+t^2}, \quad t \geq 0$$

$y = f(t)$ 의 변곡점을 구하고 변곡점 근처에서 어떤 현상이 일어나는지 설명하여라.

Solution $f(t) = \dfrac{20t^2}{27+t^2} = 20 - \dfrac{540}{27+t^2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1080t}{(27+t^2)^2} \\ f''(t) &= \frac{1080}{(27+t^2)^2} - \frac{4320t^2}{(27+t^2)^3} \\ &= \frac{3240(9-t^2)}{(27+t^2)^3} \end{aligned}$$

이다. 따라서 회원 수는 단순증가하며 $t = 3$ 에서 유일한 변곡점을 갖는다. $t < 3$ 이면 $f''(t) > 0$ 이고 $t > 3$ 이면 $f''(t) < 0$ 이므로 $f'(t)$ 는 $t = 3$ 에서 최대값을 갖는다. 다시 말해서 인터넷 사이트를 개설하고 3개월 후에 신규가입자수 $f'(t)$ 는 최대가 된다. 3 개월이 지나고 나면 총가입자 수는 계속 늘지만 신규가입자 수는 줄어들기 시작한다. □



이계도함수 판정법

임계점에서 함수가 위로 볼록하면 극대값을 갖는다. 또한 임계점에서 함수가 아래로 볼록하면 극소값을 갖는다. 이 사실은 f'' 가 연속인 경우 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

이계도함수 판정법

$f'(c) = 0$ 이고 f'' 가 연속일 때

- $f''(c) > 0$ 이면 f 는 c 에서 극소값을 갖는다.
- $f''(c) < 0$ 이면 f 는 c 에서 극대값을 갖는다.

보기 3 5 절의 보기 3 을 다시 살펴보자.

(a) $f''(x) = 12x^2 - 4$ 이고 세 개의 임계점 $x = 0, 1, -1$ 을 갖는다.

$$f''(0) < 0, \quad f''(1) > 0, \quad f''(-1) > 0$$

이므로 $x = 0$ 에서는 극대값을 $x = \pm 1$ 에서는 극소값을 갖는다.

(b) $f''(x) = 12x^2 - 12$ 이고 두 개의 임계점 $x = 0, 3$ 을 갖는다.

$$f''(0) = 0, \qquad f''(3) > 0$$

이므로 $x = 3$ 에서는 극소값을 갖는다. $x = 0$ 에서는 이계도함수판정법을 사용할 수 없다. □

그래프 그리기

지금까지 배운 내용들을 이용하여 함수의 그래프를 그려 보기로 하자. 함수의 그래프를 그리기 위해서는 우선 x 의 범위를 결정하여야 한다. 일반적으로 함수 $y = f(x)$ 의 정의역은 특별히 주어지지 않은 경우 $f(x)$ 가 의미를 갖는 최대집합으로 잡는다. 그러나 정의역이 무한한 경우 유한한 평면에 정의역을 모두 나타내는 것은 불가능하다. 따라서 그래프에 그려지는 x 의 범위를 제한하여야 하는데 $y = f(x)$ 에 대한 정보를 갖고 있는 모든 점을 포함하여야 한다.일반적으로 함수의 그래프를 그리는 경우 다음과 같은 것들이 존재하면 그래프에 표시한다.

(a) x-절편 : 그래프와 x 축이 만나는 점
방정식 $f(x) = 0$ 을 푼다.

(b) y-절편 : 그래프와 y 축이 만나는 점
y-절편 $(0, f(0))$

(c) 대칭성
y 축 대칭 : $f(-x) = f(x)$
원점 대칭 : $f(-x) = -f(x)$

(d) 수평점근선과 수직점근선
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, 또는 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ 이면 $y = L$ 은 수평점근선이다.
$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, 또는 $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ 이면 $x = a$ 는 수직점근선이다.

(e) 임계점
$f'(x)$ 가 존재하지 않거나 $f'(x) = 0$ 인 x 를 구한다.

(f) 함수의 증가하는 구간과 감소하는 구간
임계점과 임계점 사이의 구간에서 f'의 부호를 판정한다.

(g) 극대값, 극소값
임계점 근방에서 f' 의 부호가 바뀌는지 살펴 본다. + 에서 − 로 바뀌면 극대값, − 에서 + 로 바뀌면 극소값을 갖는다.

(h) 변곡점
방정식 $f''(x)=0$ 을 푼다. 변곡점 근방에서 $f''(x)$ 의 부호를 확인하여 그래프가 위로 볼록한 구간과 아래로 볼록한 구간을 구한다.

보기 4 다음 함수의 그래프를 그려라.

(a) $f(x)=x^{2/3}(2-x)$ (b) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Solution

(a) $f(0)=0$ 이므로 y 절편은 0 이다.

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0, x=2$$

이므로 두 개의 x-절편 $0, 2$ 가 존재한다.

$$f(-x)=(-x)^{2/3}(x+2)=x^{2/3}(x+2)$$

이므로

$$f(-x)\neq f(x), \quad f(-x)\neq -f(x)$$

이다. 따라서 y 축에 대하여 대칭이 아니고 원점에 대하여도 대칭이 아니다. $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속인 함수이므로 수직점근선도 존재하지 않는다. 또한,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

이므로 수평점근선은 존재하지 않는다. 이제 임계점을 구하여 보자.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-1/3}(2-x)-x^{2/3} = x^{-1/3}\Big(\frac{2}{3}(2-x)-x\Big) \\ &= x^{-1/3}\Big(\frac{4}{3}-\frac{5}{3}x\Big) \end{aligned}$$

이므로 두 개의 임계점 $x=0, \frac{4}{5}$ 가 존재한다. 임계점 근방에서 f' 의 부호를 살펴보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	존재하지 않음	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0(극소값)	$\nearrow$	1.034(극대값)	$\searrow$

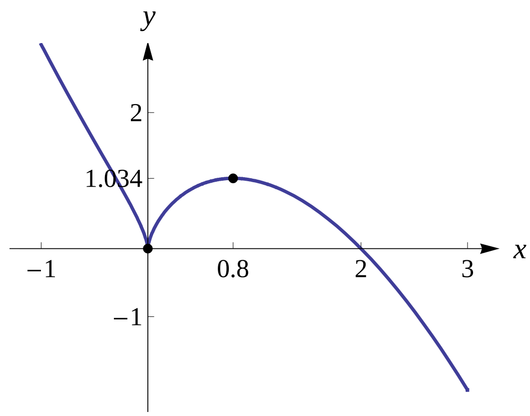
함수의 볼록함을 보기 위하여 이계도함수를 구하면

$$f''(x)=-\frac{1}{3}x^{-4/3}\Big(\frac{4}{3}-\frac{5}{3}x\Big)-\frac{5}{3}x^{-1/3}=-\frac{1}{3}x^{-4/3}\Big(\frac{4}{3}+\frac{10}{3}x\Big)$$

에서 $f''(x)$ 는 $x=0$ 에서 존재하지 않고 $f''\Big(-\frac{2}{5}\Big)=0$ 이다. 이 점 주위에서 f'' 의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	존재하지 않음	$-$
$f(x)$	아래로 볼록		위로 볼록		위로 볼록

지금까지 관찰한 것을 참고하여 그래프를 그리면 다음과 같다.



Note 보기 4(a) 에서 함수는 구간 $(-\frac{2}{5}, 0)$ 과 구간 $(0, \infty)$ 에서 각각 위로 볼록이다. 하지만 구간 $(-\frac{2}{5}, \infty)$ 에서 볼록은 아니다.

(b) 우선 $f(0) = 1$ 이므로 y-절편은 1 이다.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x^2 = 0$$

이므로 두 개의 x-절편 $-1, 1$ 이 존재한다.

$$f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$$

이므로 y 축에 대하여 대칭이다. $f(x) = -1 + \dfrac{2}{1+x^2}$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

이고 $y = -1$ 은 유일한 수평점근선이다. 분모가 항상 양수인 유리식이므로 수직점근선은 존재하지 않는다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(-1 + \frac{2}{1+x^2}\Big)' \\ &= -\frac{4x}{1+x^2} \end{aligned}$$

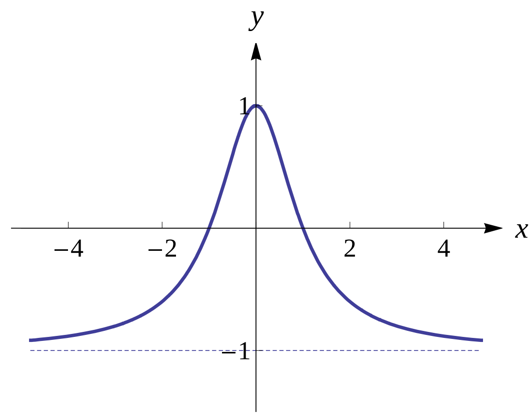
이므로 하나의 임계점 $x = 0$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \Big(-\frac{4x}{1+x^2}\Big)' \\ &= \frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

이므로 두 개의 변곡점 $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이 존재한다. 임계점과 변곡점을 기준으로 f'과 f''의 부호를 구하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$

지금까지 살펴 본 것을 토대로 하여 그래프를 그리면 다음과 같다. □



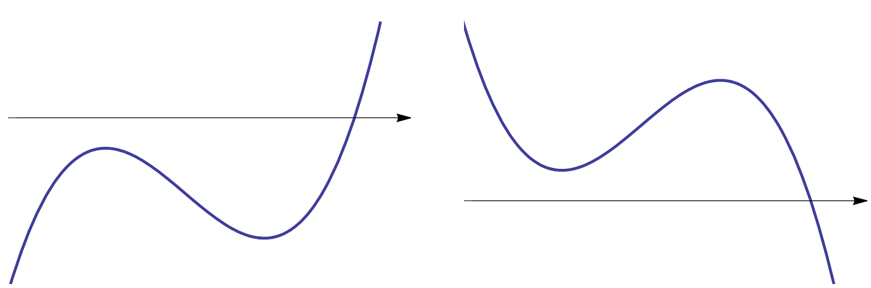
방정식의 실근

이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 는 극소값을 갖는다. 이때 극소값이 0 보다 크면 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 실근은 존재하지 않는다. 반면 극소값이 0 보다 작으면 두 개의 실근을 갖는다. 이렇게 극값에서 함수의 부호를 알면 대응하는 방정식의 실근이 몇 개 존재하는지 알 수 있다. 예를 들어 삼차함수

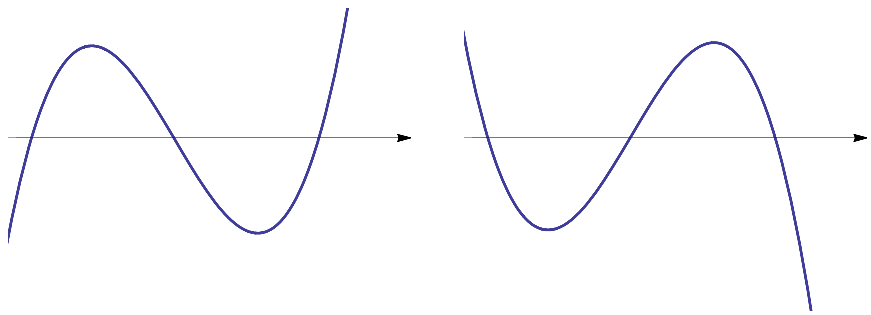
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$$

의 임계점이 없거나 하나이면 단조함수가 되므로 유일한 실근을 갖는다. 임계점이 두 개이면 항상 극대값과 극소값을 갖는다. 이때 극대값을 α, 극소값을 β 라고 하면 $(\alpha \neq \beta)$ 다음 결과를 중간값정리로부터 쉽게 관찰할 수 있다.

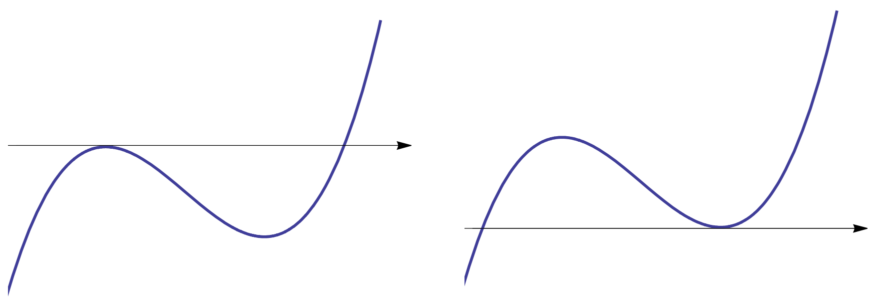
1. $\alpha\beta > 0$ 이면 $f(x) = 0$ 은 유일한 실근을 갖는다.



2. $\alpha\beta < 0$ 이면 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



3. $\alpha\beta = 0$ 이면 $f(x) = 0$ 은 두 개의 실근을 갖는다.



이러한 방법은 일반적인 미분가능 함수가 몇 개의 실근을 갖는지를 판단하는 데에도 적용이 가능하다.

보기 5 방정식 $x^5 - 5x^3 + 5x^2 - 7 = 0$ 은 몇 개의 실근을 갖는지 알아보아라.

Solution $f(x) = x^5 - 5x^3 + 5x^2 - 7$ 라고 하면

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10x = 5x(x-1)^2(x+2)$$

가 된다. 따라서 $y = f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대값 $f(-2) = 23$ 을 갖고 $x = 0$ 에서 극소값 $f(0) = -7$ 를 갖는다. 다른 극값은 존재하지 않는다. 구간 $(-\infty, -2]$ 와 구간 $[1, \infty)$ 에서 각각 $y = f(x)$ 는 단순증가한다.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f(-2) > 0$$

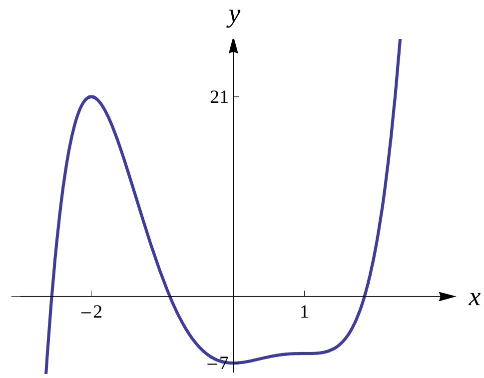
이므로 중간값정리에 의하면 구간 $(-\infty, -2]$ 에 유일한 실근이 존재한다. 또한

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad f(1) < 0$$

이므로 구간 $[1, \infty)$ 에서도 유일한 실근이 존재한다. 마지막으로 구간 $[-2, 1]$ 에서 $y = f(x)$ 는 단순감소하고

$$f(-2) > 0, \quad f(1) < 0$$

이므로 구간 $[-2, 1]$ 에서도 중간값정리에 의하여 유일한 실근이 존재함을 알 수 있다. 따라서 모두 세 개의 실근이 존재한다. □

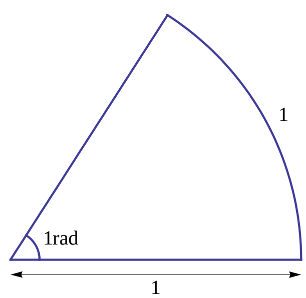

y
21
x
−2
1
−7

제 4 장

초월함수의 미분

제 1 절 삼각함수

각의 크기는 $30°, 45° 30'$ 처럼 일반적으로 60 분법을 이용하여 나타낸다. 그러나 이론적으로는 호도법을 이용하여 각의 크기를 실수로 나타낸다. 호도법은 각의 크기를 단위원에서 대응하는 호의 길이를 이용하여 나타내는 방법이다. 단위원에서 호의 길이가 1일 때 대응하는 중심각을 1 rad 라고 정의하고 1 **라디안(radian)**이라고 읽는다.



반지름이 1 인 반원의 호의 길이는 π 이므로

$$180° = \pi \text{ (rad)}$$

이다. 따라서

$$30° = \frac{180°}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ (rad)}, \quad 45° = \frac{180°}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ (rad)}$$

이다. 특별히 혼란의 위험이 없으면 호도법의 단위 rad 은 생략하고 사용한다.

삼각함수의 정의

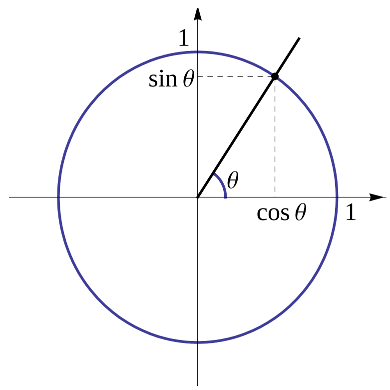
좌표평면에서 원점을 중심으로 하는 단위원은 다음과 같이 음함수를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$x^2 + y^2 = 1$$

이때 x 축에서 양의 방향으로[1] 중심각 θ(rad) 에 대응하는 단위원의 좌표를

$$(\cos\theta, \sin\theta)$$

로 정의한다.[2]



정의에 의하면 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 는 모든 실수 θ 에 대하여 단위원 위에 있으므로 다음 식이 성립한다.

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

단위원의 중심각은 2π 이므로 코사인함수 cos 와 사인함수 sin 은 모두 주기가 2π 인 주기함수이다.

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \ (k \text{ 는 정수})$$

삼각함수의 성질 I

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta, \qquad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \ (k \text{ 는 정수})$$

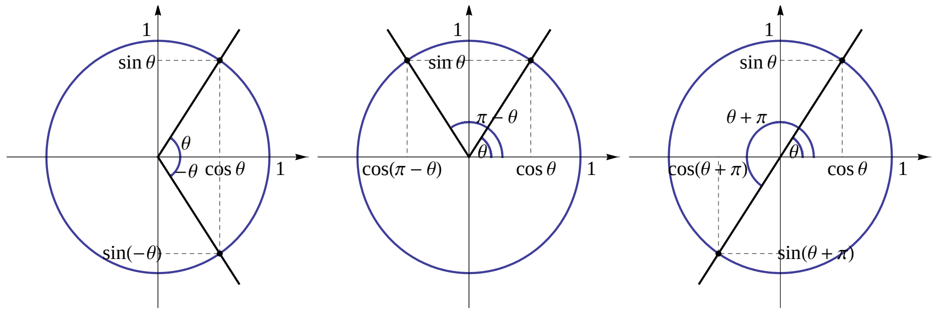
또한 원의 대칭성에 의하여 다음 등식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{array}{rclrcl} \cos(-\theta) & = & \cos\theta, & \sin(-\theta) & = & -\sin\theta \\ \cos(\pi-\theta) & = & -\cos\theta, & \sin(\pi-\theta) & = & \sin\theta \\ \cos(\pi+\theta) & = & -\cos\theta, & \sin(\pi+\theta) & = & -\sin\theta \end{array}$$

[1] 시계반대방향을 의미한다.

[2] 이 정의에 의하면 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 직각삼각형을 이용한 정의와 일치한다.

$$\cos\theta = \frac{\text{밑변}}{\text{빗변}}, \quad \sin\theta = \frac{\text{높이}}{\text{빗변}}$$



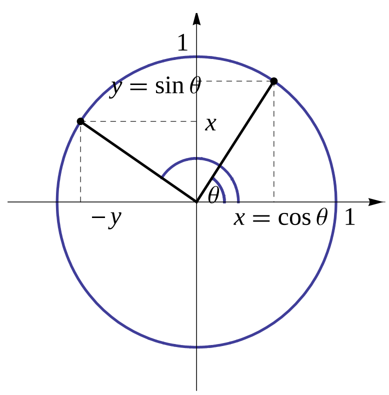
삼각함수의 성질 II

$$\begin{aligned}
\cos(-\theta) &= \cos\theta, & \sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta, & \sin(\pi-\theta) &= \sin\theta \\
\cos(\pi+\theta) &= -\cos\theta, & \sin(\pi+\theta) &= -\sin\theta
\end{aligned}$$

단위원 위의 점 (x, y) 를 양의 방향으로 $\pi/2(=90°)$ 만큼 회전하면 $(-y, x)$ 가 되므로

$$\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta, \quad \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta \tag{4.1}$$

가 성립한다.



식 (4.1) 과 삼각함수의 성질 II 의 첫 번째 식을 이용하면

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) &= -\sin(-\theta) = \sin\theta \\
\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) &= \cos(-\theta) = \cos\theta
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

삼각함수의 성질 III

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

탄젠트함수 tan 는

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

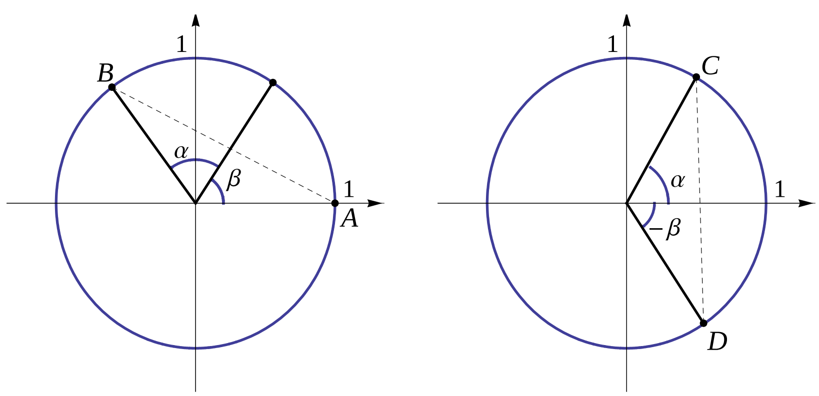
로 정의한다. $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서만 $\cos\theta = 0$ 이므로 탄젠트함수의 정의역은 $\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ 인 실수이다. 사인과 코사인의 대한 성질을 이용하면 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\tan(-\theta) &= -\tan\theta \\ \tan(\pi-\theta) &= -\tan\theta \\ \tan(\pi+\theta) &= \tan\theta\end{aligned}$$

마지막 식에서 코사인함수, 사인함수와는 달리 탄젠트함수의 주기는 π 임을 알 수 있다. 함수의 그래프를 그리는 방법은 고등학교 교재를 참고하기 바란다.

삼각함수의 덧셈정리

단위원 위의 두 점 $A(1,0)$ 과 $B(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ 사이의 거리는 두 점 $C(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 와 $D(\cos(-\beta), \sin(-\beta)) = (\cos\beta, -\sin\beta)$ 사이의 거리와 같다.



따라서

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2 + \sin^2(\alpha+\beta) = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$$

이 성립한다. 항등식 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 을 이용하여 이 식을 정리하면

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

이 되므로

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

을 얻는다. 이 식에 β 대신 $-\beta$ 를 대입하면

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

이 성립하고 이 식에서 α 대신 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)\\ &= \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

를 얻는다. 마지막으로 이 식의 β 대신 $-\beta$ 를 대입하면

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

를 얻는다. 또한 탄젠트함수의 정의에 의하여

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

이 성립한다. 분자와 분모를 모두 $\cos\alpha\cos\beta$ 로 나누면

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

를 얻는다. 이 식에 β 대신 $-\beta$ 를 대입하면

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

을 얻는다. 위에 얻은 여러가지 등식을 삼각함수의 덧셈정리라고 한다.

삼각함수의 덧셈정리

$$\begin{aligned}\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \quad \text{(복호동순)}\\ \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \quad \text{(복호동순)}\\ \tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{(복호동순)}\end{aligned}$$

보기 1 다음 값을 구하여라.

(a) $\cos 15^\circ=\cos\frac{\pi}{12}$ (b) $\sin 75^\circ$ (c) $\tan 75^\circ$

Solution (a) $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0.9659\end{aligned}$$

이다.

(b) $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0.9659$

(c) $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

이다. □

삼각함수의 배각공식

코사인함수의 덧셈정리에서 $\alpha = \beta = \theta$ 이면

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

을 얻는다. 같은 경우 사인함수와 탄젠트함수에 대한 관계식도 정리하면 다음과 같다. 이 등식을 **배각공식**이라고 한다.

배각공식

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\ \tan(2\theta) &= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\end{aligned}$$

코사인에 대한 배각공식은 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

따라서

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

을 얻는다. 이 식들에 θ 대신 $\theta/2$ 를 넣은 것을 **반각공식**이라고 한다.

반각공식

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos\theta}{2}, \quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

삼각함수의 합성

실수 a, b 에 대하여

$$y = f(x) = a\sin x + b\cos x$$

는 주기가 2π 인 주기함수이다. 이제 이 함수의 최대값을 구해보기로 한다. $A = \sqrt{a^2+b^2}$ 라고 하면

$$a\cos x + b\sin x = A\Big[\frac{a}{A}\cos x + \frac{b}{A}\sin x\Big]$$

이다.

$$\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2 = 1$$

이므로 점 $\left(\frac{a}{A}, \frac{b}{A}\right)$ 는 단위원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다. 따라서

$$\cos\alpha = \frac{a}{A}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{A}$$

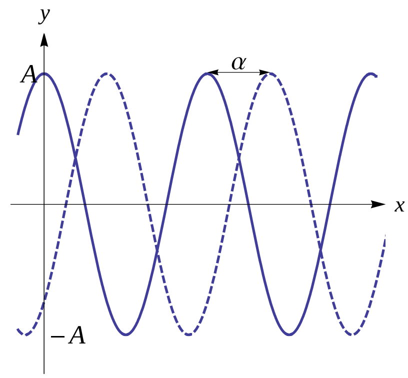
인 α 에 대하여

$$\frac{a}{A}\cos x + \frac{b}{A}\sin x = \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \cos(x-\alpha)$$

이 성립한다. 그러므로

$$f(x) = a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\alpha)$$

으로 쓸 수 있고 최대값은 $A = \sqrt{a^2+b^2}$, 최소값은 $-A$ 이다. $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = A\cos x$ 의 그래프를 x 축 양의 방향으로 α 만큼 평행이동하면 얻어진다.



이렇게 $a\cos x + b\sin x$ 꼴의 함수를 $A\cos(x-\alpha)$, 또는 $A\sin(x+\beta)$ 꼴로 바꾸어 쓸 수 있는데 이를 **삼각함수의 합성**이라고 한다.

삼각함수의 합성

$A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{A}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{A}$ 이면 다음 등식이 성립한다.

$$a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\alpha)$$

Note 삼각함수의 합성은 사인함수를 이용하여 나타낼 수도 있다.

보기 2 $-\pi \le \theta \le \pi$ 에서 $f(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$ 의 최대값을 구하고 $f(\theta) = 1$ 이 되는 θ 를 구하여라.

Solution $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\Big[\cos\theta\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sin\theta\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big]$ 이다.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

가 되는 α 를 구하면 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

이다. 따라서 $f(\theta)$ 의 최대값은 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 에서 $\sqrt{2}$ 이다. $f(\theta) = 1$ 이 되는 θ 는

$$\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{또는} \quad \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

를 만족하므로

$$\theta - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{또는} \quad \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

이다. 따라서

$$\theta = 0, \ \frac{\pi}{2}$$

에서 $f(\theta) = 1$ 이 된다. $\square$

제 2 절 삼각함수의 도함수

사인함수의 덧셈법칙에서

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

이므로

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h$$

이 된다. 따라서

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right] \\
&= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

이므로 합성함수의 미분법으로부터

$$\begin{aligned}
[\cos x]' &= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x
\end{aligned}$$

가 됨을 알 수 있다. $\tan x$ 의 도함수는 다음과 같이 몫의 미분법으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

다음 삼각함수

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

에 대한 미분공식도 몫의 미분법으로 구할 수 있으며 연습문제로 남긴다.

삼각함수의 도함수

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x, & (\csc x)' &= -\csc x \cot x \\
(\cos x)' &= -\sin x, & (\sec x)' &= \sec x \tan x \\
(\tan x)' &= \sec^2 x, & (\cot x)' &= -\csc^2 x
\end{aligned}$$

보기 1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(a) $y = \sin x \tan x$　　(b) $y = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

Solution (a) 곱의 미분법칙을 이용하면

$$\begin{aligned}(\sin x \tan x)' &= (\sin x)' \tan x + \sin x(\tan x)' \\ &= \cos x \tan x + \sin x \sec^2 x \\ &= \sin x + \sec x \tan x\end{aligned}$$

을 얻는다.

(b) 몫의 미분법을 이용하면

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)' &= \frac{\cos x(1-\cos x) - \sin x(\sin x)}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos x - 1}\end{aligned}$$

이다. □

다음 보기는 삼각함수와 관련하여 자주 나오는 부등식을 다룬다.

보기 2 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$$

Solution $f(x) = \sin x$ 라고 하면 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서

$$f''(x) = -\sin x < 0$$

이므로 $f(x) = \sin x$ 는 주어진 구간에서 위로 볼록하다. 따라서 두 점 $(0,0)$ 과 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 을 잇는 직선

$$y = \frac{2}{\pi}x$$

는 곡선 $f(x) = \sin x$ 보다 아래에 있다. 그러므로 첫 번째 부등식

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x$$

이 성립한다. 두 번째 부등식을 증명하기 위해서는

$$g(x) = x - \sin x$$

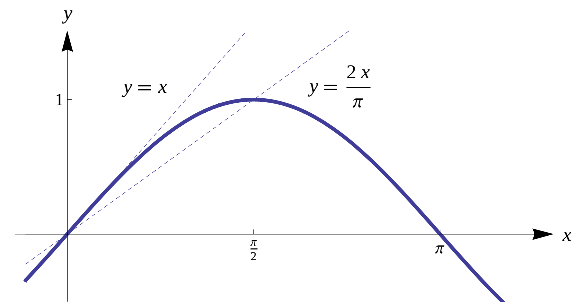
라고 하자. $g(0) = 0$ 이고

$$g'(x) = 1 - \cos x \ge 0$$

이므로 $y = g(x)$ 는 증가함수이다. 따라서 $x > 0$ 이면

$$g(x) \geq g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \sin x$$

이 성립한다. □



보기 3 다음 함수의 그래프를 그려라.

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x$$

Solution

(i) 주기성 :$f(x + 2\pi) = f(x)$ 이므로 구간 $[-\pi, \pi]$에서의 그래프만 그리면 된다.

(ii) 절편 : $f(0) = -1$ 이므로 y-절편은 -1 이다. x-절편을 구하기 위하여 방정식

$$\cos 2x - 2\cos x = 2\cos^2 x - 1 - 2\cos x = 0$$

을 풀면

$$\cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < 0$$

이다.[3] 따라서 x-절편은 구간 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 에 하나 존재한다. 따라서 구간 $[-\pi.\pi]$ 에는 두 개의 x 절편이 존재한다.

(iii) 점근선 : 수평점근선, 또는 수직점근선은 존재하지 않는다.

(iv) 대칭성

$$f(-x) = \cos(-2x) - \cos(-x) = \cos 2x - \cos x = f(x)$$

이므로 y 축에 대하여 대칭이다. 따라서 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 그래프를 그리면 나머지 구간에서의 그래프는 대칭성을 이용하여 그릴 수 있다.

(v) 함수의 증감과 극값 : 이제 극값을 구하여 보기로 하자.

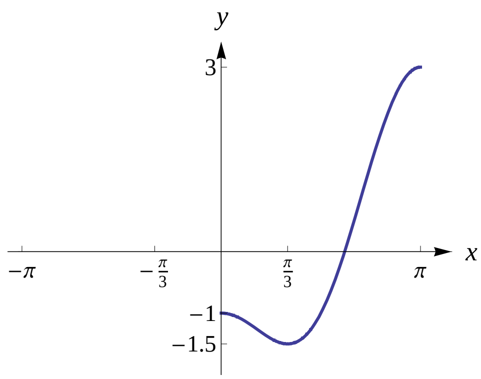
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin 2x + 2\sin x = -4\sin x\cos x + 2\sin x \\ &= 2\sin x(1 - 2\cos x) \end{aligned}$$

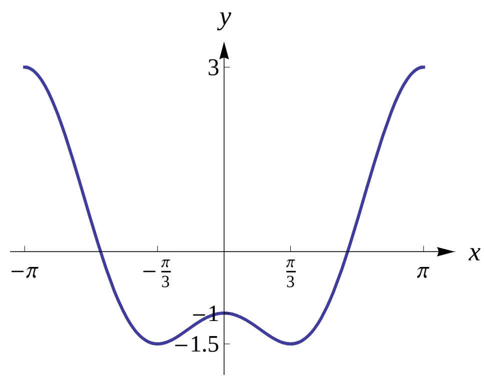
이므로 구간 $[0, \pi]$ 에서 임계점 $x = 0, \dfrac{\pi}{3}, \pi$ 가 존재한다. 임계점을 기준으로 함수의 증감을 조사하면 다음과 같다.

[3] 역삼각함수를 배우면 이 값은 $x = \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ 으로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

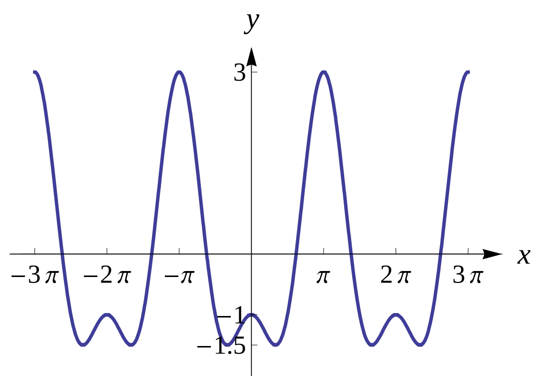
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

(vi) 그래프 그리기 : 구간 $[0,\pi]$ 에서의 그래프는 다음 왼쪽 그림과 같다. y 축에 대하여 대칭이라는 사실을 이용하면 구간 $[-\pi,\pi]$ 에서의 그래프는 다음 오른쪽 그림과 같다.





다음 그림은 주기성을 이용하여 구간 $[-3\pi,3\pi]$ 에 대하여 그래프를 그린 것이다. □



제 3 절 역삼각함수와 도함수

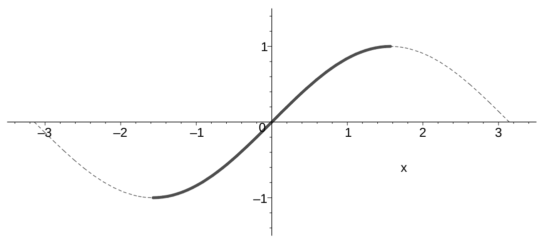
사인함수 $y = \sin x$ 는 주기함수이므로 일대일 대응이 아니다. 따라서 실수 전체집합에서 사인함수의 역함수를 정의할 수 없다. 그러나 정의역을 $[-\pi/2, \pi/2]$ 로 제한하면 사인함수는 $[-\pi/2, \pi/2]$ 에서 $[-1, 1]$ 로 가는 일대일 대응이 된다. 따라서 정의역을 $[-\pi/2, \pi/2]$ 로 제한한 사인함수는 역함수를 갖는다.

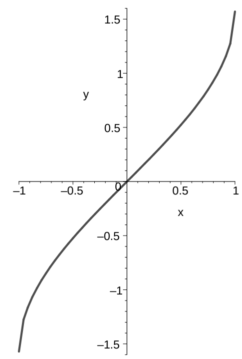
이렇게 정의된 역함수를 **역사인함수**(**inverse sine function**)라고 부르고

$$y = \arcsin x$$

로 나타낸다.[4] 역사인함수의 정의역은 $[-1, 1]$ 이고 치역은 $[-\pi/2, \pi/2]$ 이다.

$$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x \text{ 이고 } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$



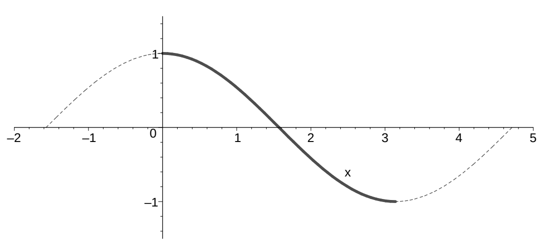


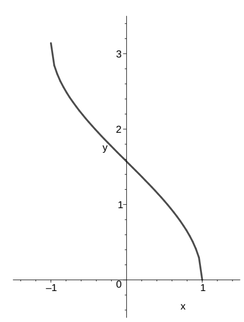
코사인함수 $y = \cos x$ 의 정의역을 $[0, \pi]$ 로 제한하여 얻어지는 코사인함수의 역함수를 **역코사인함수**(**inverse cosine function**)라고 부르고

$$y = \arccos x$$

로 나타낸다. 역코사인함수의 정의역은 $[-1, 1]$ 이고 치역은 $[0, \pi]$ 이다.

$$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x \text{ 이고 } 0 \le y \le \pi$$





보기 4 다음 값을 구하여라.

[4] 역삼각함수를 $y = \sin^{-1} x$ 로 표기하기도 한다.

(a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $\tan\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$

Solution

(a) $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 이고 $\frac{\pi}{6}$ 는 $-\frac{\pi}{2}$ 와 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 있으므로

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

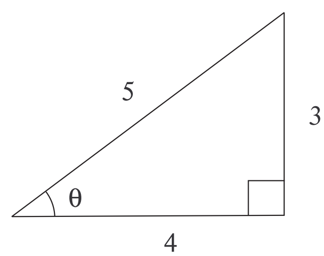
이다.

(b) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ 이고 $\frac{2\pi}{3}$ 는 0 과 π 사이에 있으므로

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

이다.

(c) $\theta=\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ 라고 하자. $\sin\theta=\frac{3}{5}>0$ 이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 임을 알 수 있다. 다음과 같이 한 각이 θ 이고 빗변의 길이가 5 인 직각삼각형을 그려 보자.



피타고라스 정리에 의하여 밑변의 길이는 4 임을 알 수 있다. 따라서

$$\tan\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\tan\theta=\frac{3}{4}$$

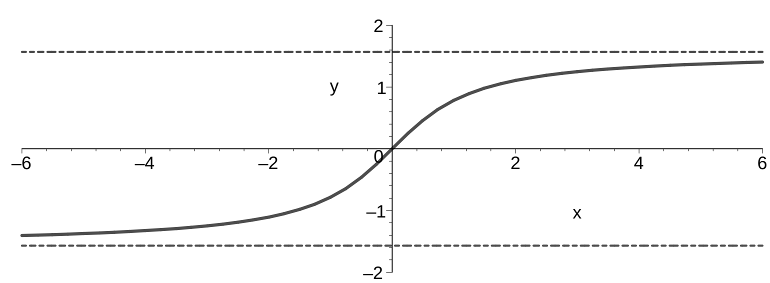
이다. □

탄젠트함수는 정의역을 $(-\pi/2,\pi/2)$ 로 제한하면 일대일 대응이 된다. 따라서 역함수를 정의할 수 있는데 이 역함수를 **역탄젠트함수(inverse tangent function)**라고 부르고

$$y=\arctan x$$

로 나타낸다. 역탄젠트함수의 정의역은 $(-\infty,\infty)$ 이고 치역은 $(-\pi/2,\pi/2)$ 이다.

$$y=\arctan x \quad\Leftrightarrow\quad \tan y=x \text{ 이고 } -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$

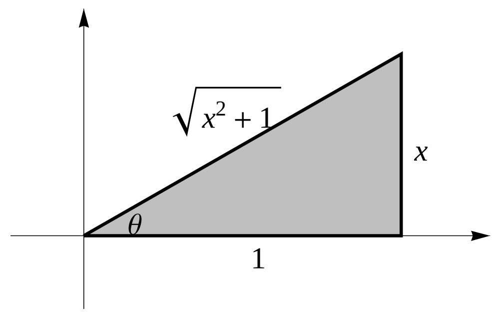


보기 5 다음을 간단히 하여라.

(a) $\sin(\arctan x)$ (b) $\sin(2\arcsin x)$

Solution

(a) $\theta = \arctan x$ 라고 하자. 그러면 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ 이다. 다음과 같이 한 각이 θ 이고 밑변의 길이가 1 인 직각삼각형을 그리자.[5]



$\tan\theta = x$ 이므로 삼각형의 높이는 x 이고 피타고라스 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{1+x^2}$ 이다. 따라서

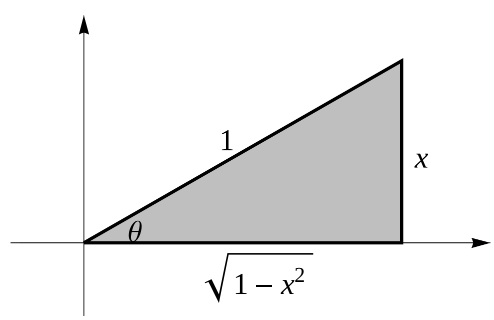
$$\sin(\arctan x) = \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

이다.

(b) $\theta = \arcsin x$ 라고 하자. 사인함수의 배각공식

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

에서 $\sin\theta = \sin(\arcsin x) = x$ 이고 $x = \sin\theta$ 이므로 다음과 같이 한 각이 θ 이고 빗변의 길이가 1 인 직각삼각형을 그리자.



다시 피타고라스의 정리에 의하면 밑변의 길이는 $\sqrt{1-x^2}$ 이 되고 $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ 이 된다. 따라서

$$\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

을 얻는다. □

[5] $\theta > 0$ 이면 삼각형은 1사분면에, $\theta < 0$ 이면 삼각형은 4 사분면에 그려진다.

<u>역삼각함수</u>

$$
\begin{aligned}
y = \arcsin x &\quad\Leftrightarrow\quad \sin y = x \text{ and } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \\
y = \arccos x &\quad\Leftrightarrow\quad \cos y = x \text{ and } \quad 0 \le y \le \pi \\
y = \arctan x &\quad\Leftrightarrow\quad \tan y = x \text{ and } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

역삼각함수의 미분

사인함수 $y = f(x) = \sin x$ 는 모든 점에서 미분가능하고 $-\pi/2 < x < \pi/2$ 이면

$$y' = \cos x > 0$$

이므로 역함수 정리에 의하여 역사인함수 $y = \arcsin x$ 는 $-1 < x < 1$ 일 때 미분가능하다. 다시 역함수 정리의 결과를

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \arcsin x$$

에 대하여 적용하면

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

이다. $\arcsin x = \theta$ 라고 하면

$$\sin\theta = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\cos\arcsin x = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$g'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

을 얻는다.

$(\tan x)' = \sec^2 x > 0$ 이므로 역함수정리에 의하여 역탄젠트함수도 미분가능하다. $y = \arctan x$ 라고 하면 $x = \tan y$ 이다. 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1 = (\sec^2 y)y'$$

이고

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

이므로

$$y' = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

이다.

역삼각함수의 도함수

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ \frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Note 역사인함수와 역코사인함수의 도함수는 부호만 반대이고 같은 함수이다. 다시 말해서

$$(\arcsin x + \arccos x)' = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서 $\arcsin x + \arccos x = C$이고 $\arcsin 0 = 0,\ \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$이므로

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

이 성립한다.

보기 6 다음 함수들의 도함수를 구하여라.

(a) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ (b) $g(x) = \arctan \sqrt{x}$

Solution 합성함수의 미분법을 적용한다.

$$\begin{aligned}(a)\quad \left(\arcsin \frac{1}{x}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}}\left(\frac{1}{x}\right)'\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}\\ (b)\quad (\arctan\sqrt{x})' &= \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})'\\ &= \frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\end{aligned}$$

□

제 4 절 지수함수와 로그함수

양의 실수 a 에 대하여 실수 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = a^x$$

을 **지수함수(exponential function)**라고 한다. 여기서 자연수 n 에 대하여

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(\,a \text{ 를 } n \text{ 번 곱한 것})}$$

으로 정의하고

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

으로 정의한다. $a^0 = 1$ 로 놓는다. x 가 유리수이면 서로 소인 정수 p, q 에 대하여 $x = \dfrac{p}{q}$ 로 쓸 수 있고

$$a^x = (\sqrt[q]{a})^p$$

으로 정의한다.[6] 그렇다면 무리수 x 에 대하여 a^x 는 어떤 의미일까? 이 경우, a^x 의 정의는 유리수의 경우처럼 직접적이지는 않다. x 에 수렴하는 임의의 유리수 수열 (x_n) 에 대하여

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$$

으로 정의한다.[7]

지수함수의 성질

지수함수는 다음과 같이 지수의 성질을 만족한다. x, y 가 유리수인 경우는 지수의 성질에서 바로 보일 수 있고 일반적인 실수의 경우는 수열의 극한의 성질을 이용하면 보일 수 있다.

지수함수의 성질

양의 실수 a, b 와 임의의 실수 x, y 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

지수함수 $y = a^x$ 는 $a > 1$ 이면 증가함수이고

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

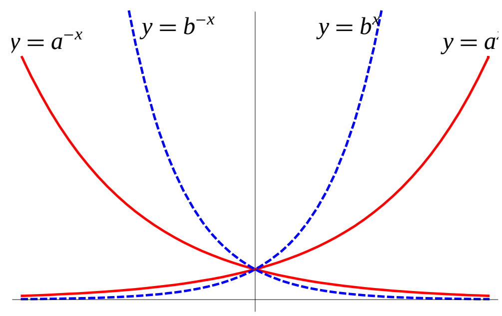
[6] $\sqrt[q]{a}$ 는 q 제곱하였을 때 a 가 되는 유일한 양수를 의미한다.

[7] 이 수가 잘 정의되는지, 즉, x 로 수렴하는 모든 유리수 수열에 대하여 같은 극한값으로 수렴하는지에 대한 논의는 여기서는 다루지 않겠다. 이러한 논의는 해석학이나 고급미적분학 교재를 참고하기 바란다.

이다. 또한, $0 < a < 1$ 이면 감소함수이고

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$

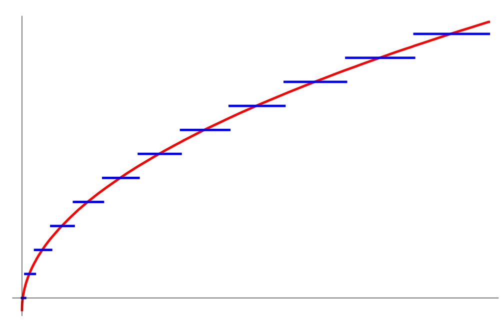
이다. $y = a^x$ 의 그래프와 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.



인구성장

지수함수는 인구성장이나 방사성물질의 붕괴 등 사회나 자연에서의 현상을 수학적으로 모형화하기에 적합한 함수이다.

우선 인구성장을 살펴보기로 하자. 함수 $P = P(t)$ 를 시간 t 에서 어떤 생물의 개체수라 하자. 개체수는 자연수로 주어지므로 개체수함수 $P = P(t)$ 는 다음과 같이 계단 모양의 함수가 된다. 이렇게 구간에서 상수값을 갖는 함수를 **계단함수(step function)**라고 한다. 개체수가 큰 경우 계단함수를 다음 그림처럼 부드러운 곡선으로 근사시켜서 사용한다.



실험실에서 박테리아를 키운다고 하자. 공간과 영양을 충분하게 제공하고 관찰한 결과 박테리아의 개체수는 한 시간에 두 배로 늘어 났다. 같은 방식으로 박테리아의 개체수가 늘어난다면 초기 박테리아의 개체수가 P_0 일 때

$$\begin{aligned} P(1) &= 2P(0) = 2P_0 \\ P(2) &= 2P(1) = 2^2 P_0 \\ P(3) &= 2P(2) = 2^3 P_0 \end{aligned}$$

이다. 일반적으로 자연수 t 에 대하여

$$P(t) = 2^t P_0$$

이고 박테리아의 수는 연속적으로[8] 증가한다고 가정하면 임의의 실수 t 에 대하여 개체수 함수는 $P = 2^t P_0$ 로 가정한다. 이런 방식으로 인구가 증가할 때 인구는 **지수적으로 성장(exponential growth)**한다고 한다.

보기 1 관찰을 시작할 때 100 마리의 박테리아가 있었다고 하자. 30 분에 박테리아의 수는 두 배로 늘어난다고 할 때 두 시간 후 박테리아의 수는 몇 마리인가? 또, 15 분 후 박테리아의 수는 몇 마리인가?

Solution 관찰을 시작한 지 t 시간 후 박테리아의 수를 $P(t)$ 라고 하면

$$P(0) = 100, \quad P(0.5) = 2P(0) = 200$$

이고 일반적으로

$$P(0.5t) = 100 \cdot 2^t, \quad \text{또는} \quad P(t) = 100 \cdot 2^{2t}$$

로 쓸 수 있다. 따라서 두 시간 후의 박테리아의 수는

$$P(2) = 100 \cdot 2^4 = 1600$$

이다. 15 분 후면 0.25 시간 후이므로

$$P(0.25) = 100 \cdot 2^{0.5} \approx 141$$

이다. □

반감기

반감기(half-life)란 물질이 붕괴되거나 다른 물질로 변형되어 원래 양의 반으로 줄어드는 데에 걸리는 시간을 일컫는다. 예를 들어 **폴로늄 218**(^{218}Po)의 반감기는 3.05 분으로 알려져 있다. 지금 $m_0 g$ 의 폴로늄이 있을 때 t 분 후의 폴로늄의 양을 $m(t)$ 라고 하자. 그러면

$$m(3.05) = \frac{m_0}{2}, \quad m(6.10) = \frac{m_0}{2^2}$$

$$m(9.15) = \frac{m_0}{2^3}, \quad m(12.20) = \frac{m_0}{2^4}$$

이다. 따라서 폴로늄의 양 $m(t)$ 는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$m(3.05t) = \frac{m_0}{2^t}$$

또는 $s = 3.05t$ 로 치환하면 s 분 후 폴로늄의 양은 다음과 같다.

$$m(s) = \frac{m_0}{2^{s/3.05}} = m_0 2^{-\frac{s}{3.05}}$$

보기 2 라듐 Ra-226 의 반감기는 약 1600년이다.

[8]수학에서의 연속적인 것과는 차이가 있다. 여기서는 59분까지 변화가 없다가 60분에 두 배가 되는 것이 아니라 그 사이에 계속 증가하여 60분에는 두 배가 된다는 뜻이다.

(a) 현재 100 mg 의 라듐 Ra-226 이 존재할 때 t 년 후 라듐 Ra-226 의 양을 구하여라.

(b) 800 년 후 라듐의 양을 반올림하여 소수점 이하 첫째자리까지 구하여라.

Solution

(a) $m(t)$ 를 t 년 후 남아 있는 라듐 Ra-226 의 양이라고 하자. 반감기가 1600 년이므로

$$m(1600t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

으로 쓸 수 있고 따라서

$$m(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}$$

임을 알 수 있다.

(b) $m(800)$ 을 구하면 된다.

$$m(800) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{800}{1600}} = \frac{100}{\sqrt{2}} \approx 70.7(mg) \qquad \square$$

로그함수의 정의

$a > 0$ 이고 $a \neq 1$ 이면 지수함수 $f(x) = a^x$ 는 증가함수이거나 감소함수이므로 일대일 대응이다. 따라서 f 는 역함수를 갖는다. 이때 지수함수의 역함수를 **밑**(**base**)이 a 인 **로그함수**(**logarithmic function**)라고 부르고 $\log_a x$ 로 나타낸다. 다시 말해서

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

를 의미한다.

보기 3 다음을 간단히 하여라.

(a) $\log_2 8$ (b) $\log_{100} 10$ (c) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$

Solution (a) $2^3 = 8$ 이므로 $\log_2 8 = 3$ 이다.

(b) $\sqrt{100} = 100^{1/2} = 10$ 이므로 $\log_{100} 10 = \frac{1}{2}$ 이다.

(c) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = x$ 라고 하면

$$(\sqrt{3})^x = 3^{x/2} = \frac{1}{3} = (3)^{-1}$$

이므로 $x = -2$ 이다. $\square$

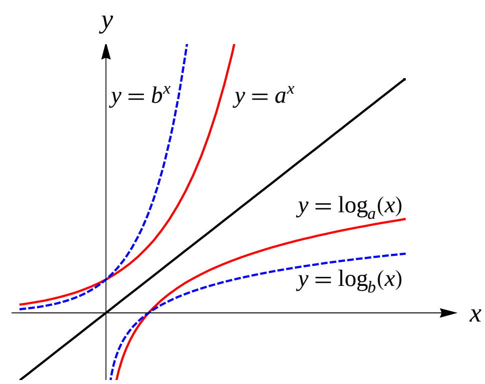
로그함수의 그래프

지수함수의 정의역은 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 이고 치역은 $\mathbb{R}^+$ 이므로 로그함수의 정의역은 $\mathbb{R}^+$, 치역은 $\mathbb{R}$ 이다. $a > 1$ 이면 지수함수 $y = a^x$ 는 단순증가하므로 역함수 $y = \log_a x$ 도 단순증가한다. 마찬가지로 $0 < a < 1$ 이면 지수함수 $y = a^x$ 는 단순감소하므로 역함수 $y = \log_a x$ 도 단순감소한다. 또한 $a^0 = 1$, $a^1 = a$ 이므로 모든 a 에 대하여

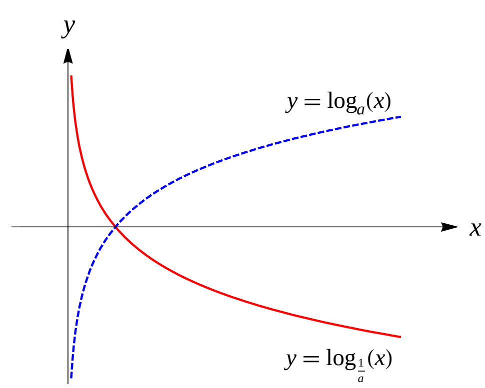
$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$

이다. 다시 말해서 $y = \log_a x$ 의 그래프는 두 점 $(1,0)$ 과 $(a,1)$ 을 지난다.

로그함수 $y = \log_a x$ 는 지수함수 $y = a^x$ 의 역함수이므로 두 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 지수함수 $y = a^x$ 는 $a > 1$ 일 때 아주 빠르게 증가하는 함수이다. 따라서 로그함수 $y = \log_a x$ 는 아주 느리게 증가하는 함수이다. $b > a > 1$ 인 경우 지수함수와 로그함수의 그래프를 같이 그려보면 각각 다음과 같다.



$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$ 이므로 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 의 그래프와 $y = \log_a x$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.



그래프로부터 로그함수 $f(x) = \log_a(x)$ 에 대하여 다음 사실들을 관찰할 수 있다.

- $a > 1$ 이면 a 가 클수록 $x \to \infty$ 일 때, 함수는 천천히 증가한다.
- $a > 1$ 이면 $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty$ 이다.
- $0 < a < 1$ 이면 $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x = \infty$ 이다.

로그함수의 성질

로그함수는 지수함수의 역함수이므로 지수함수의 성질에서 그 성질들을 유도할 수 있다.

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

에서 $y_1 = a^{x_1}, y_2 = a^{x_2}$ 라고 하면

$$x_1 = \log_a y_1, \quad x_2 = \log_a y_2$$

이고 $y_1 y_2 = a^{x_1+x_2}$ 이므로

$$x_1 + x_2 = \log_a(y_1 y_2)$$

이 성립한다. 따라서

$$\log_a y_1 + \log_a y_2 = \log_a(y_1 y_2)$$

임을 알 수 있다. 같은 방법으로 다음 식이 성립함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{y_1}{y_2}\right) &= \log_a y_1 - \log_a y_2 \\ \log_a x^r &= r \log_a x \end{aligned}$$

곱, 몫, 지수에 대한 로그함수의 성질

양의 실수 x, y, 임의의 실수 r 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} &(\text{곱의 법칙}) & \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ &(\text{몫의 법칙}) & \log_a \left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \\ &(\text{지수의 법칙}) & \log_a x^r &= r \log_a x \end{aligned}$$

보기 4 다음 값을 구하여라.

(a) $\log_7(\sqrt{2}+1) + \log_7(\sqrt{2}-1)$

(b) $\log_3 63 - \log_3 7$

(c) $\log_{10} \sqrt{30} - \log_{10} \sqrt{12} + \log_{10} 2$

Solution (a) 곱의 법칙을 적용하면

$$\log_7(\sqrt{2}+1) + \log_7(\sqrt{2}-1) = \log_7(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = \log_7 1 = 0$$

이다.

(b) 몫의 법칙에 의하면

$$\log_3 63 - \log_3 7 = \log_3 \frac{63}{7} = \log_3 9$$

이고 지수의 법칙에 의하여 다음 값을 얻는다.

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2$$

(c) 곱의 법칙과 몫의 법칙을 같이 사용하면

$$\log_{10}\sqrt{30}-\log_{10}\sqrt{12}+\log_{10}2=\log_{10}\left(\frac{\sqrt{30}\cdot 2}{\sqrt{12}}\right)=\log_{10}\sqrt{10}$$

이다. 따라서 지수의 법칙에 의하여

$$\log_{10}\sqrt{10}=\log_{10}10^{1/2}=\frac{1}{2}$$

을 얻는다. □

보기 5 다음 값을 간단히 하여라.

(a) $a^{2\log_a x}$ (b) $3^{\frac{1}{2}\log_3 5}$

Solution (a) $a^{2\log_a x}=a^{\log_a x^2}=x^2$

(b) $3^{\frac{1}{2}\log_3 5}=3^{\log_3\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ □

자연로그

밑수가 자연상수 e 이면 밑수를 생략하고 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$\log_e x=\log x$$

이때 $\log x$ 를 **자연로그함수(natural logarithm)**라고 부른다.[9] 일반적인 밑수 $a(a>0, a\neq 1)$ 를 갖는 로그함수는 자연로그함수를 이용하여 나타낼 수 있다. $y=\log_a x$ 이면 $x=a^y$ 이고 양변에 자연로그를 취해 주면

$$\log x=\log a^y=y\log a$$

이므로

$$y=\log_a x=\frac{\log x}{\log a}$$

가 성립한다. 이를 밑의 변환공식이라고 한다.

밑의 변환공식

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a}$$

보기 6 $\log_a b=c$ 일 때, 다음 값을 c 를 이용하여 나타내어라.

[9] 고등학교 교재에서는 밑이 10 인 상용로그의 경우 밑을 생략하여 쓰고 자연로그의 경우 ln 을 사용한다.

(a) $\log_b a$ (b) $\log_{\frac{1}{a}} b$ (c) $\log_{a^2} b$

Solution 밑의 변환공식에 의하면 $c = \dfrac{\log b}{\log a}$ 이다.

(a) 다시 밑의 변환공식에 의하면

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b} = \frac{1}{c}$$

이다.

(b) 밑의 변환공식과 $\log a^{-1} = -\log a$ 라는 사실을 이용하면

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{a}} b &= \frac{\log b}{\log \frac{1}{a}} = \frac{\log b}{-\log a} \\ &= -\frac{\log b}{\log a} = -c\end{aligned}$$

이다.

(c) $\log_{a^2} b = \dfrac{\log b}{\log a^2} = \dfrac{\log b}{2\log a} = \dfrac{c}{2}$ 이다. □

지수방정식

지수함수는 일대일함수이므로

$$a^x = a^y$$

이면 $x = y$ 가 성립한다. 밑이 다를 때에는 양변에 자연로그를 취하여 풀어 준다. 예를 들어

$$2^x = 3^{x^2}, \quad x \neq 0$$

일 때 양변에 자연로그를 취하면

$$\log 2^x = \log 3^{x^2} \quad \Rightarrow \quad x \log 2 = x^2 \log 3$$

이므로

$$x = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63$$

이 된다.

보기 7 내부온도가 2°C 인 냉장고에서 맥주를 꺼내고 t 분이 지난 후 맥주의 온도를 $f(t)$ 라고 하면 다음과 같이 나타내어진다.[10]

$$f(t) = 24 - 22e^{-0.02t}$$

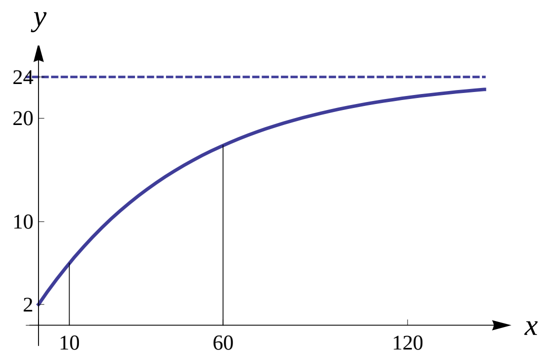
(a) 10 분 후 맥주의 온도는 얼마인가? 1 시간 후 맥주의 온도는 얼마인가?

[10] 이 식은 **뉴턴의 냉각법칙(cooling law of Newton)**에 의하여 유도된다.

(b) 시간이 많이 지나면 맥주의 온도는 어떻게 되는가?

(c) 맥주가 가장 맛있는 온도는 $6°C$ 라고 한다. 맥주를 가장 맛있게 마시려면 맥주를 마시기 몇 분 전에 맥주를 냉장고에서 꺼내 놓아야 하는가?

Solution **Solution** $y = f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



(a) $f(10) = 24 - 22e^{-0.2} \approx 5.99,\ f(60) = 24 - 22e^{-1.2} \approx 17.37$ 이다.

(b) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 24$ 이므로 시간이 많이 지나면($t \to \infty$) 맥주의 온도($f(t)$)는 24 °C 로 수렴한다.

(c) 맥주 마시기 t 분 전에 꺼내 놓는다고 하면

$$24 - 22e^{-0.02t} = 6$$

이 성립하는 t 를 찾으면 된다. 정리하여 양 변에 로그를 취하면

$$e^{-0.02t} = \frac{18}{22} \quad \Rightarrow \quad -0.02t = \log\frac{18}{22} \approx -0.2$$

이므로

$$t \approx \frac{-0.2}{-0.02} = 10$$

이다. 다시 말해서 마시기 10 분 전에 꺼내 놓으면 된다. □

제 5 절 지수, 로그함수의 도함수

지수함수 $f(x) = a^x$ 의 도함수를 정의를 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

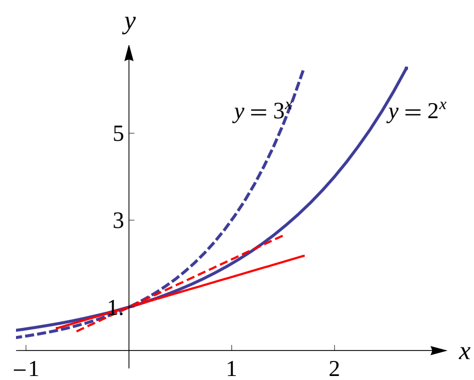
을 얻는다. 따라서 $f(x) = a^x$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하면, 다시 말해서

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = L_a$$

가 존재하면

$$(a^x)' = L_a a^x$$

가 됨을 알 수 있다. 극한값 L_a 는 그래프 $f(x) = a^x$ 의 $x = 0$ 에서의 기울기이다. a 가 증가하면 L_a 의 값도 증가함을 쉽게 알 수 있다.



자연상수

$a = 2, 2.5, 3$ 인 경우 $f'(0)$ 을 수치적으로 근사값을 구해 보면[11]

$$L_2 = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69, \quad L_{2.5} = \lim_{h\to 0} \frac{2.5^h - 1}{h} \approx 0.92, \quad L_3 = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

[11] 0 에 가까운 h 에 대하여 근사값을 구하여 보면 다음과 같다.

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{2.5^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	0.9596	1.1612
0.01	0.6956	0.9205	1.1047
0.001	0.6934	0.9167	1.0992
0.0001	0.6932	0.9163	1.0987
0.00001	0.6931	0.9163	1.0986

임을 알 수 있다. 이 식으로부터 $2.5 < a < 3$ 인 값 중에서

$$L_a = f'(0) = 1$$

이 되는 수가 존재함을 알 수 있는데 이 수를 문자 e 로 나타내고 **자연상수**라고 부른다. 이렇게 정의된 자연상수는 2 장 1 절에서 정의된 자연상수와 일치한다.[12]

자연상수

다음 식을 만족하는 실수를 자연상수 e 라고 한다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Note 정의로부터 자연상수 e 를 밑으로 갖는 지수함수 $f(x) = e^x$ 의 도함수는 자기 자신과 일치한다.

$$f'(x) = (e^x)' = e^x = f(x)$$

따라서 합성함수의 미분법에 의하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)}g'(x)$$

특히 상수 k 에 대하여 $g(x) = kx$ 이면

$$\frac{d}{dx}(e^{kx}) = e^{kx}(kx)' = ke^{kx} \tag{4.2}$$

가 성립한다. 바꾸어 말하면 g 의 변화율을 나타내는 도함수 g' 은 g 의 k 배이다.

$$g'(x) = kg(x)$$

지수함수의 도함수

자연로그함수는 지수함수 $y = e^x$ 의 역함수이다. 따라서 다음 등식이 성립한다.

$$\log e^x = x, \qquad e^{\log x} = x$$

여기서 등식

$$e^{\log x} = x$$

는 일반적인 함수를 지수함수로 변형시켜주는 유용한 공식이다. 예를 들어 밑이 a 인 지수함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

따라서 식 (4.2) 로부터

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = (\log a)e^{x \log a} = a^x \log a$$

[12] 자연상수의 다른 표현 참고

을 얻는다.

지수함수의 도함수

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x, \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a,, \qquad \frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)} g'(x)$$

보기 1 처음 P_0 마리의 박테리아가 있을 때 한 시간에 박테리아의 수가 연속적으로 두 배로 늘어난다고 하자. 그러면 시각 t 에서 박테리아의 개체수함수를 $P = 2^t P_0$ 로 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt}(2^t) = \frac{d}{dt}(e^{t \log 2}) = (\log 2)2^t \approx (0.69)2^t$$

이므로 박테리아 개체수의 성장률은

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(P_0 2^t) \approx P_0(0.69)2^t$$

이다. 예를 들어 초기개체수가 $P_0 = 50$ 이었다면 5 시간 후의 성장률은

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=5} \approx 50(0.69)2^5 = 1104 \quad (\text{마리/시간})$$

이다. 이것은 5시간 후에 박테리아의 개체수는 시간당 약 1104 마리의 비율로 성장한다는 것을 의미한다. □

성취도평가 (2008년 정시 문제 6)

함수 $h(x)$ 는 $h(0) = 0$ 이며 $h'(0) = 1$ 이다. 실수 전체 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 π 의 배수가 아닌 x 에 대하여

$$f(x) = h(x)\frac{3^x - 1}{(\sin x)^2}$$

이면 $f(0)$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

성취도평가 (2007년 정시 문제 3)

$g(0) = 0, g'(0) = 3$ 인 함수 g에 대하여 함수 f를

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - 1)g(x)}{2x^2}, & x \neq 0 \\ \quad 0 \quad, & x = 0 \end{cases}$$

라 할 때, $f'(0) = \boxed{}$ 이다.

성취도평가 (2006년 수시 문제 10)

다음

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

과 같이 정의된 함수 f 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속함수이고, 증가함수임을 보이라.

미분방정식*

지수함수 $y = Ca^x = Ce^{kx}$ $(k = \log a)$ 의 도함수는

$$y' = (\log a)(Ca^x) = ky \tag{4.3}$$

이므로 자신의 상수배가 된다. 이러한 성질을 갖는 함수가 또 있을까? 답은 **아니다**이다. 다시 말해서

$$y' = ky$$

이면 $y = Ce^{kx}$ 이다. 이를 보이기 위하여 $f'(x) = kf(x)$ 라고 하자.

$$g(x) = f(x)/e^{kx} = f(x)e^{-kx}$$

라고 하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-kx} + f(x)(-ke^{-kx}) \\ &= (f'(x) - kf(x))e^{-kx} = 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $g(x) = C$ 이다. 다시 말해서

$$f(x) = Ce^{kx}$$

이다.

식 (4.3) 과 같이 도함수를 포함하는 방정식을 **미분방정식(differential equation)**이라고 한다.

보기 2 온도가 y_0 인 물체를 온도가 A 인 공간에 놓았을 때 시간 t 에서의 물체의 온도 $y = f(t)$ 는 뉴턴의 냉각법칙에 의하면 다음과 같이 주어진다.

$$y = f(t) = A + (y_0 - A)e^{-kt}, \quad k > 0$$

이때 y' 을 y 를 이용하여 나타내어라. 이 식이 의미하는 바를 설명하여라.

Solution 지수의 미분법칙을 이용하면

$$y' = -k(y_0 - A)e^{-kt} = -k(y - A)$$

을 얻는다. 따라서 물체의 온도가 공간의 온도보다 낮으면

$$y' = -k(y - A) > 0$$

이므로 물체의 온도는 올라가고 물체의 온도가 공간의 온도보다 높으면

$$y' = -k(y - A) < 0$$

이므로 물체의 온도는 내려간다. 또한 물체의 온도의 변화율은 물체와 공간의 온도차이에 비례한다. □

쌍곡함수(hyperbolic function)*

모든 함수 f 는 다음과 같이 우함수와 기함수의 합으로 분해하여 쓸 수 있다.

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

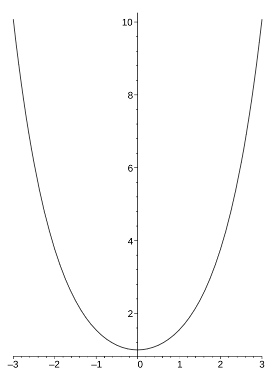
만약 지수함수 e^x 를 이런 방법으로 쓰면 다음과 같다.

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

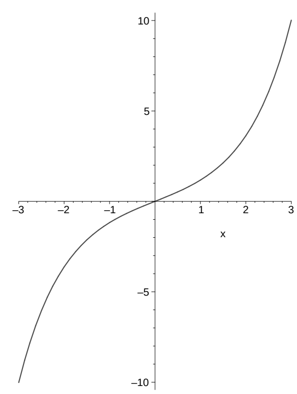
이때 우함수 부분을 **쌍곡코사인함수(hyperbolic cosine)**, 기함수 부분을 **쌍곡사인함수(hyperbolic sine)**라고 부른다. 지수함수 e^x 은 무한번 미분가능하므로 쌍곡코사인함수와 쌍곡사인함수도 무한번 미분가능하며

$$(\cosh x)' = \sinh x, \qquad (\sinh x)' = \cosh x \geq 1$$

이다. $(\sinh x)' > 0$ 이므로 쌍곡사인함수는 **순증가함수(strictly increasing function)**임을 알 수 있다.



$y = \cosh x$



$y = \sinh x$

쌍곡함수

쌍곡코사인함수 : $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, 쌍곡사인함수 : $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

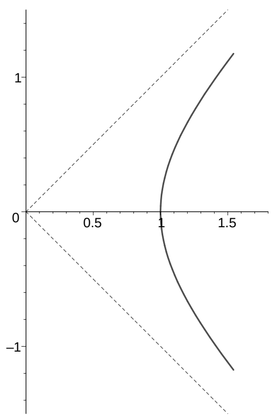
정의에 의하여 다음 등식이 성립한다.

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1$$

따라서

$$x = \cosh t, \qquad y = \sinh t$$

로 놓으면 그 그래프는 **쌍곡선(hyperbola)**의 일부가 된다.[13]



> **쌍곡선의 매개화**
>
> $x = \cosh t, \quad y = \sinh t$ 라고 하면 좌표평면 위의 점 (x, y) 의 자취는 쌍곡선
>
> $$x^2 - y^2 = 1, \quad x \geq 1$$
>
> 이 된다.

쌍곡탄젠트함수*

쌍곡탄젠트함수(hyperbolic tangent)는 쌍곡사인함수와 쌍곡코사인함수의 비로 정의한다.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

쌍곡탄젠트함수의 경우는

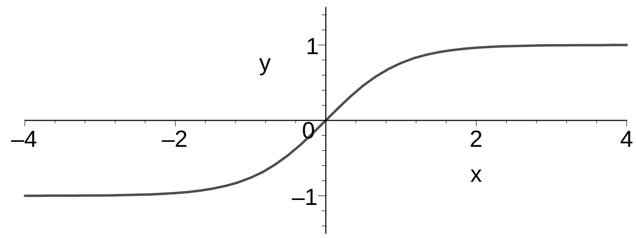
$$\begin{aligned}
(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' \\
&= \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}$$

[13] 삼각함수는 원의 매개화에 쓰인다. 즉, 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 1$ 은 $x = \cos t$, $y = \sin t$ 로 매개화할 수 있다.

이다. 따라서 쌍곡탄젠트함수는 **순증가함수(strictly increasing function)**이다. 또한

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$$

이다.



쌍곡함수는 이름이 유사한만큼이나 삼각함수와 유사한 항등식을 만족한다. 예를 들어 다음은 삼각함수의 배각공식과 아주 유사한 형태를 갖는다.[14]

보기 3 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x, \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Solution 정의를 이용하여 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} 2\sinh x\cosh x &= 2\Big(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big)\Big(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big) \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \sinh 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 x + \sinh^2 x &= \Big(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\Big)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\ &= \cosh 2x \end{aligned}$$

□

쌍곡함수의 역함수*

쌍곡사인함수와 쌍곡탄젠트함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 쌍곡사인함수의 역함수와 쌍곡탄젠트함수의 역함수는

$$y = \sinh^{-1} x, \quad y = \tanh^{-1} x$$

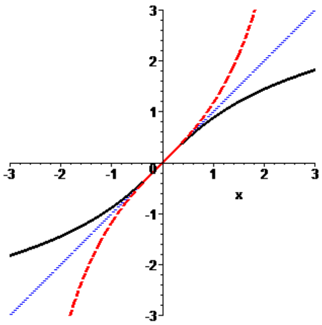
로 각각 나타내기로 한다. 쌍곡사인함수의 역함수는 정의역이 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 인 반면 쌍곡탄젠트함수의 역함수는 정의역이 $-1 < x < 1$ 이다. 또한 정의역을 $x \geq 0$ 로 제한하면 쌍곡코사인함수의 역함수도 존재한다. 이때 그 역함수를

$$y = \cosh^{-1} x$$

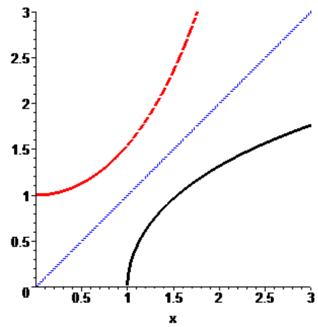
[14] 부호에 유의할 것

로 정의한다. 쌍곡코사인함수의 역함수는 정의역이 $x \geq 1$ 이다. 다음 그림은 쌍곡함수(점선)와 그 역함수(실선)들을 같은 평면에 그린 것이다.

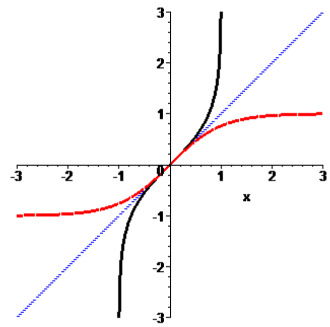
$y = \sinh x,\ y = \sinh^{-1} x$



$y = \cosh x,\ y = \cosh^{-1} x$



$y = \tanh x,\ y = \tanh^{-1} x$



쌍곡함수의 역함수

$$y = \sinh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sinh y$$
$$y = \cosh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cosh y \quad \text{and} \quad x \geq 1,\ y \geq 0$$
$$y = \tanh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tanh y \quad \text{and} \quad -1 < x < 1$$

역함수의 미분법과 쌍곡함수의 항등식을 이용하면 역쌍곡함수의 도함수를 구할 수 있다.

보기 4 $\dfrac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $(x > 1)$ 임을 보여라.

Solution $y = \cosh^{-1} x$ 라고 하면 $x = \cosh y$, $y \geq 0$ 이다. 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} x = (\sinh y) \frac{dy}{dx}$$

이다. 한편 $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ 이고 $y \geq 0$ 이므로

$$\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

이다. 따라서

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

을 얻는다. □

쌍곡함수는 지수함수를 이용하여 나타낼 수 있으므로 역쌍곡함수는 로그함수를 이용하여 나타낼 수 있다.

보기 5 $x \geq 1$ 에 대하여 다음 식이 성립함을 보여라.

$$y = \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Solution 역함수의 정의로부터

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad y \geq 0$$

이므로 양변에 $2e^y$ 를 곱하면

$$e^{2y} + 1 = 2e^y x, \quad \Rightarrow \quad e^{2y} - 2e^y x + 1 = 0$$

을 얻는다. $u = e^y\,(\geq 1)$ 로 놓으면 u 에 대한 이차식

$$u^2 - 2xu + 1 = 0$$

을 얻고 $u \geq 1$ 이므로 근의 공식에서

$$u = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

임을 알 수 있다. $u = e^y$ 이므로 양변에 로그를 취하면

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

을 얻는다. □

로그함수의 도함수

$y = \log x$ 라고 하면 $e^y = x$ 이다. 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(e^y) = e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

을 얻고 양변을 e^y 로 나누면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

을 얻는다. 또한, $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ 이므로

$$\frac{d}{dx}\Big(\log_a x\Big) = \frac{1}{x \log a}$$

이다.

로그함수의 도함수

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \log a}$$

합성함수 $y = \log g(x) = f(g(x))$ 에 대하여 연쇄법칙을 적용하면 $f'(u) = \dfrac{1}{u}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

이 성립한다.

합성함수의 도함수

$$\frac{d}{dx}(\log g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

보기 6 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(a) $y = \log\cos x$

(b) $y = \log(1 + x^2)$

(c) $y = (\log(1 + x^2))^2$

Solution 합성함수의 미분법을 적용하면 각각 다음과 같다.

(a) $y' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(b) $y' = \dfrac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

(c) $y' = 2(\log(1 + x^2))(\log(1 + x^2))' = 2(\log(1 + x^2))\dfrac{2x}{1 + x^2} = \dfrac{4x\log(1 + x^2)}{1 + x^2}$ □

성취도평가 (2006년 정시 문제 4)

곡선 $y\ln x = \ln y$ 위의 점 (e^{-e}, e^{-1}) 에서 이 곡선에 접하는 접선의 기울기는 $\boxed{}$ 이다.

$y = \log|x|$ 는 $x \neq 0$ 인 실수에 대하여 정의된다.

$$\log|x| = \begin{cases} \log x, & x > 0 \\ \log(-x), & x < 0 \end{cases}$$

이므로 $x > 0$ 이면

$$\Big(\log|x|\Big)' = \Big(\log x\Big)' = \frac{1}{x}$$

이고 $x < 0$ 이면

$$\Big(\log|x|\Big)' = \Big(\log(-x)\Big)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

을 얻는다. 이 결과는 따로 기억할 만한 가치가 있는 공식이다.[15]

[15] 적분을 참고할 것

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

성취도평가 (2005년 정시 문제 4)

방정식 $\ln x = cx^2$ 이 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 양의 실수 c 는 $\boxed{}$ 이다.

로그미분법

곱, 몫, 또는 지수에 대하여 로그를 취하면 각각 합, 차, 곱으로 변환된다. 이러한 로그함수의 성질을 이용하면 복잡한 함수의 도함수도 간단하게 구할 수 있다. 예를 들어

$$\log[(x^2+1)^3(x-1)^5] = 3\log(x^2+1) + 5\log(x-1)$$

이므로

$$\begin{aligned}\Big(\log[(x^2+1)^3(x-1)^5]\Big)' &= 3\Big(\log(x^2+1)\Big)' + 5\Big(\log(x-1)\Big)' \\ &= \frac{6x}{x^2+1} + \frac{5}{x-1}\end{aligned}$$

를 얻는다.

보기 7 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(a) $y = \log\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}$ (b) $y = \log\left(\dfrac{1+x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\right)$

Solution

(a) $y = \log\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}} = \dfrac{1}{2}\Big[\log(2x+3) - \log(x+1)\Big]$ 이므로

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x+1}\right]$$

이다.

(b) $y = \log\left(\dfrac{1+x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\right) = \log(1+x^2) - \dfrac{1}{3}\log(1+x^3)$ 이므로

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{3}\frac{3x^2}{1+x^3} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^3}$$

이다. □

로그함수가 아니라도 곱, 몫, 또는 지수로 표현된 경우 양변에 로그를 취하여 계산하면 훨씬 계산이 쉬워진다. 예를 들어

$$y = x^x$$

에서 양변에 로그를 취하면

$$\log y = x \log x$$

이고 음함수 미분법을 이용하여 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = x^x(\log x + 1)$$

을 얻는다. 이렇게 양변에 로그를 취하여 도함수를 구하는 방법을 **로그미분법**이라고 한다.

보기 8 다음 함수의 도함수를 구하여라.

$$y = \frac{\sqrt{(x^2+1)(x^2+4)}}{x^2+2}$$

Solution 양변에 로그를 취하면

$$\log y = \frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1) + \log(x^2+4)\Big] - \log(x^2+2)$$

이므로 양변을 x 에 대한 도함수를 구하면

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\Big[\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+4}\Big] - \frac{2x}{x^2+2}$$

이므로

$$y' = \Big[\frac{x}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{2x}{x^2+2}\Big]\frac{\sqrt{(x^2+1)(x^2+4)}}{x^2+2}$$

을 얻는다. □

성취도평가 (2009년 성취도 정시 문제 2)

a가 양의 상수일 때, $x > 0$ 인 범위에서 함수 $y = x^{(x^a)}$ 의 최소값은 $\boxed{}$ 이다.

성취도평가 (2007년 성취도 수시 문제 7)

$f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(1 < x < e$일 때), $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(e < x$일 때)이고
$g(x) = f_2^{-1} \circ f_1(x)$ $(1 < x < e$일 때)라 하자. $g'(x) = \dfrac{[g(x)]^2(1 - \ln x)}{[1 - \ln g(x)]x^2}$임을 보여라.

성취도평가 (2005년 성취도 정시 문제 5)

곡선 $x^y = y^x$ 위의 점 $(2,4)$ 에서 이 곡선에 접하는 직선의 기울기는 $\boxed{}$ 이다.

제 5 장

미분의 응용

제 1 절 로피탈의 법칙

우리는 2장 4절에서 여러 형태의 부정형의 극한값을 구하였다. 그 중 어떤 것은 대수적인 성질을 이용하였고

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} \text{ (보기 4)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \text{ (보기 5)}$$

어떤 것은 기하학적인 성질을 이용하였다.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \text{ (보기 8)}$$

이 절에서는 이러한 부정형의 극한값을 구하는 일반적인 방법을 알아보기로 한다.

<u>로피탈의 법칙</u>

미분가능한 두 함수 f, g 에 대하여

$$f(a) = g(a) = 0$$

이라고 하자. f', g' 이 연속이고 $g'(a) \neq 0$ 이면

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)}
\end{aligned}$$

이다. 이 결과는 **로피탈의 법칙(L'Hospital's rule)**의 특수한 경우이다. 일반적인 로피탈의 법칙은 $a = \pm\infty$ 일 때도 성립한다. 또한 $x = a$ 에서의 함수값이 $\pm\infty$ 인 경우에도 성립한다.[1]

로피탈의 법칙

미분가능한 함수 f, g 에 대하여 극한값

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

이 존재한다고 하자. $a \in [-\infty, \infty]$ 에 대하여

- $f(a) = g(a) = 0$ 이거나
- $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

이면 다음 등식이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Note 첫 번째 조건이 다음과 같이 좀 더 일반화 되어도 같은 결과가 성립한다.

$$\lim_{x \to} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

로피탈의 정리는 0/0 꼴이나 ∞/∞ 꼴의 부정형의 극한값을 구하는데 유용하다. 예를 들어

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

은 0/0 꼴의 부정형에 로피탈의 법칙을 적용한 것이고 다음은 ∞/∞ 꼴의 부정형의 계산에 로피탈의 법칙을 적용한 것이다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

보기 1 로피탈의 법칙을 이용하여 다음 식이 성립함을 보여라.

(a) $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (b) $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

Solution

(a) 분자, 분모의 극한값이 모두 0 인 0/0 꼴의 부정형이다. 따라서 로피탈의 법칙에 의하여

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t}{1} = 1$$

이다.

[1] 로피탈의 법칙은 프랑스의 귀족 로피탈[2]의 이름을 따서 명명되었지만 실제로는 스위스의 유명한 수학자 집안인 베르누이 가의 **장 베르누이(Jean Bernoulli)**의 업적이다.

(b) 역시 분자, 분모의 극한값이 모두 0 인 0/0 꼴의 부정형이다. 따라서 로피탈의 법칙에 의하여

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t}$$

을 얻는다. 두 번째 극한값도 0/0 꼴의 부정형이므로 다시 로피탈의 법칙을 적용하면

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{2}=\frac{1}{2}$$

가 된다. □

다음과 같이 로피탈의 법칙을 두 번 이상 적용하여 극한값을 구하기도 한다.

보기 2 다음 극한값을 구하여라.

(a) $\dfrac{x^n}{e^x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^p}$, $(p>0)$

Solution

(a) $f(x)=x^n$ (n 은 자연수), $g(x)=e^x$ 에 대하여 $a=\infty$ 에서 로피탈의 법칙을 반복하여 적용하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}\\ &= \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 임의의 다항식 $p(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^x}=0$$

이다.

(b) ∞/∞ 꼴의 부정형이다. 로피탈의 법칙을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^p}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{px^p}=0$$

□

Note 위의 결과는 지수함수가 x 가 아주 커지면 어떤 다항식보다 빨리 증가하고 로그함수는 아주 천천히 증가함을 의미한다.

곱 또는 차의 부정형

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ 이면 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)g(x)$ 의 값은 명확하지가 않다.[3] 이런 경우는

$$fg=\frac{f}{1/g},\quad \text{또는}\quad fg=\frac{g}{1/f}$$

[3]이런 경우 $0\cdot\infty$ 꼴의 부정형이라고 한다.

꼴로 바꾸어 쓰면 0/0, 또는 ∞/∞ 꼴의 부정형을 만들 수 있다. 따라서 로피탈의 법칙을 적용할 수 있다. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ 인 경우 $f - g$ 꼴을 $\infty - \infty$ 꼴의 부정형이라고 하고 역시 적당한 연산을 통하여 0/0, 또는 ∞/∞ 꼴의 부정형을 만들어 극한값을 구한다.

보기 3 다음 극한값을 구하여라.

(a) $\lim_{x\to 0+} x\log x$ (b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right)$

Solution

(a) $0\cdot(-\infty)$ 꼴이지만 다음과 같이 ∞/∞ 꼴로 고쳐서 로피탈의 법칙을 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} x\log x &= \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0+}(-x) = 0\end{aligned}$$

(b) 통분하여 계산하면 다음과 같이 0/0 꼴의 부정형을 얻는다.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)-\log x}{(x-1)\log x}$$

따라서 로피탈의 법칙을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)-\log x}{(x-1)\log x} &= \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x - \frac{x-1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\log x + x - 1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\log x + x\frac{1}{x} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

지수형의 부정형

극한값

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

은 다음과 같이 여러 꼴의 부정형을 갖는다.

1. 0^0 꼴 : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
2. ∞^0 꼴 : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
3. 1^∞ 꼴 : $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

세 경우 모두 지수함수 형태로 바꾸어 쓸 수 있다. 다시 말해서

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$$

이고 지수 $\lim_{x\to a}[g(x)\log(f(x))] = c$ 이면 지수함수는 모든 점에서 연속이므로

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[g(x)\log(f(x))]} = e^c$$

가 성립한다.

보기 4 다음 극한값을 구하여라.

(a) $\lim_{x\to 0+} x^x$ (b) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$ (c) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})^x$

Solution

(a) 0^0 꼴의 부정형이다. $\log x^x = x\log x$ 이고 $\lim_{x\to 0+} x\log x = 0$ 이므로

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = e^0 = 1$$

을 얻는다.

(b) ∞^0 꼴의 부정형이다. $\log(1+x)^{1/x} = \dfrac{\log(1+x)}{x}$ 는 ∞/∞ 꼴의 부정형이다. 로피탈의 법칙에 의하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x}} = e^0 = 1$$

이 된다.

(c) 1^∞ 꼴의 부정형이다. 주어진 함수에 로그를 취하면 $\log(1+\frac{1}{x^2})^x = x\log(1+\frac{1}{x^2})$ 는 $0\cdot\infty$ 꼴의 부정형이다.

$$\lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x^2})}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)-\log(x^2)}{1/x}$$

이므로 로피탈의 법칙을 적용하면

$$\lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{(1+x^2)} = 0$$

이다. 따라서

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})^x = e^0 = 1$$

이다. □

보기 5 함수 $f(x) = x^x$ 의 그래프를 그려라.

Solution 함수 $y = f(x)$ 의 정의역은 $x > 0$ 인 실수집합 $\mathbb{R}^+$ 이다. $x^x > 0$ 이고

$$f'(x) = x^x(\log x + 1)$$

이므로 유일한 임계점 $x = \frac{1}{e}$ 에서 극소값 $f(\frac{1}{e}) = e^{-1/e}$ 을 갖는다.

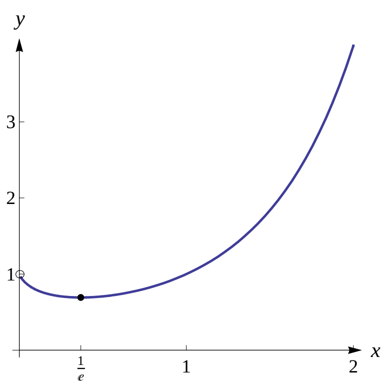
x	$x < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$x > \frac{1}{e}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소값	$\nearrow$

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \infty$$

이므로 수평점근선은 존재하지 않으며

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^x)'(\log x + 1) + x^x(\log x + 1)' \\ &= x^x(\log x + 1)^2 + x^x \frac{1}{x} \\ &= x^x((\log x + 1)^2 + \frac{1}{x}) \ > \ 0 \end{aligned}$$

이므로 곡선은 항상 아래로 볼록하다. 지금까지 살펴 본 것과 보기 4 를 토대로 그래프를 그리면 다음과 같다. □



코시의 평균값정리*

로피탈의 법칙을 증명하기 위해서는 일반화된 평균값정리가 필요하다. 다음 정리는 프랑스의 수학자 **코시**(**Cauchy**[4]의 이름을 따서 **코시의 평균값정리**)라고 부른다.

> **코시의 평균값 정리**
>
> 두 함수 f, g 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하면
>
> $$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)] \tag{5.1}$$
>
> 를 만족하는 $c \in (a, b)$ 가 존재한다.

Note 코시의 평균값정리에서 $g(x) = x$ 이면 $g'(x) = 1$ 이므로 일반 평균값정리가 된다.

[4] Augustin Cauchy(1789–1867)

Note $g(a) \neq g(b)$ 이고 모든 x 에 대하여 $g'(x) \neq 0$ 이면 식 (5.1) 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - g(a)}{g(b) - g(a)}$$

이 식은 두 함수의 평균변화율의 비와 순간변화율의 비가 같아지는 순간이 있음을 의미한다.

코시의 평균값 정리는 함수

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

에 대하여 롤의 정리를 적용하면 쉽게 보일 수 있다.

로피탈 법칙의 증명*

$f(a) = g(a) = 0 \ (-\infty < a < \infty)$ 인 경우를 증명하기로 한다.[5] 코시의 평균값정리에 의하면

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

인 수 c_x 가 a 와 x 사이에 존재한다. $x \to a$ 이면 $c_x \to a$ 이므로

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c_x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

가 성립한다. $a = \infty$ 이면 $t = \dfrac{1}{x}$ 라고 하자. 그러면 $x \to \infty$ 일 때 $t \to 0^+$ 이다. 따라서

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}$$

이므로 a 가 유한할 때의 로피탈의 법칙을 사용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})\frac{-1}{t^2}}{g'(\frac{1}{t})\frac{-1}{t^2}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

그러므로 $f(a) = g(a) = 0 \ (-\infty \leq a \leq \infty)$ 일 때 원하는 결과를 얻는다.

[5] $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ 인 경우는 고등수학 교재를 참고하기 바란다.

제 2 절 최적화문제

주어진 조건에서 최상의 선택을 찾는 것을 **최적화(optimization)**라고 한다. 최상의 선택이란 주어진 상황에 따라 최대값을 찾는 것일 수도 있고 아니면 최소값을 찾는 것이 될 수도 있다.

예를 들어, 제조자의 입장에서는 정해진 물량을 최소의 비용으로 생산하기를 바랄 것이고, 소비자의 입장에서는 정해진 가격에 가능한 한 많은 양의 물건을 사고자 할 것이다. 물류를 운영하는 사람이라면 정해진 지점들을 가장 빠르게 모두 방문할 수 있는 경로를 찾고 싶어 한다. 경영자의 경우라면 비용은 최소화하고 이윤은 최대화 하기를 원할 것이다. 이 절에서는 미분을 이용하여 최적화 문제를 해결하는 방법을 살펴보기로 한다. 우선 최대값, 최소값의 정의를 다시 한 번 살펴보자.

최대값, 최소값

D 에서 정의된 함수 f 와 점 $x_0 \in D$ 에 대하여

- D 의 모든 점 x 에 대하여 $f(x) \le f(x_0)$ 이면 x_0 을 f 의 **최대점**이라 하고 $f(x_0)$ 을 f 의 **최대값(absolute maximum)**이라고 한다.
- D 의 모든 점 x 에 대하여 $f(x) \ge f(x_0)$ 이면 x_0 을 f 의 **최소점**이라 하고 $f(x_0)$ 을 f 의 **최소값(absolute minimum)**이라고 한다.

최대값, 최소값 구하기

최대·최소값 정리에 의하여 연속인 함수 $y = f(x)$ 는 폐구간 $[a, b]$ 에서 최대값, 최소값을 갖는다. 그리고 임계점이 아닌 곳에서는 최대값, 또는 최소값을 가질 수 없다. 따라서 최대값, 최소값은 임계점 또는 양 끝점에서 얻어진다. 따라서 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속함수 $y = f(x)$ 의 최대값, 최소값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

최대값, 최소값 구하기

닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속함수 $y = f(x)$ 에 대하여

1. $y = f(x)$ 의 임계점에서 f 의 값을 모두 구한다
2. 구간 $[a, b]$ 의 양 끝점에서의 값 $f(a)$ 와 $f(b)$ 를 구한다.
3. 1, 2에서 구한 값 중에서 가장 큰 값이 최대값, 가장 작은 값이 최소값이 된다.

Note 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 가 미분가능하면 1. 은 다음과 같이 바꾸어 쓸 수

있다.

1a. : $f'(c) = 0$ 이 되는 c 에 대하여 $f(c)$ 를 모두 구한다.

보기 1 함수 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ 에 대하여 다음 구간에서 최대값과 최소값을 구하여라.

(a) $[-3, 4]$ (c) $[-3, 1.5]$

(b) $[-0.5, 4]$ (d) $[-0.5, 1.5]$

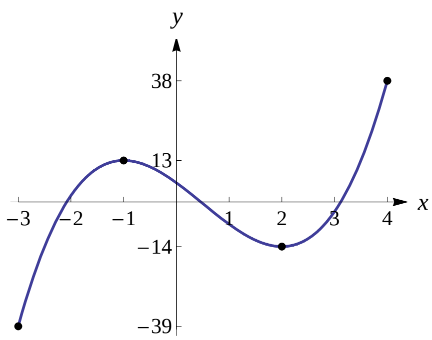
Solution 모든 실수에서 미분가능한 함수이므로 임계점은 $f'(x) = 0$ 인 점 $x = -1, 2$ 이다. 임계점에서 f 의 값은 각각

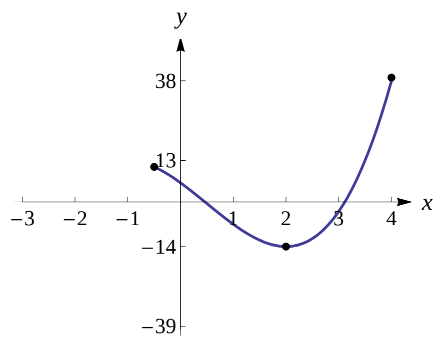
$$f(-1) = 13, \quad f(2) = -14$$

이다.

(a) $f(-3) = -39$, $f(4) = 38$ 이므로 $x = 4$ 에서 최대값 38, $x = -3$ 에서 최소값 -39 를 갖는다.

(b) 주어진 구간에 임계점 $x = -1$ 은 포함되지 않는다. $f(-0.5) = 11$ 이므로 $x = -0.5, 2, 4$ 에서 함수값을 비교하면 $x = 4$ 에서 최대값 38, $x = 2$ 에서 최소값 -14 를 갖는다.



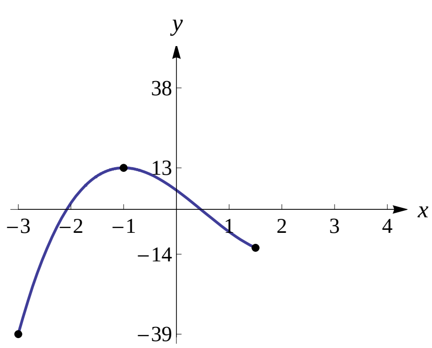


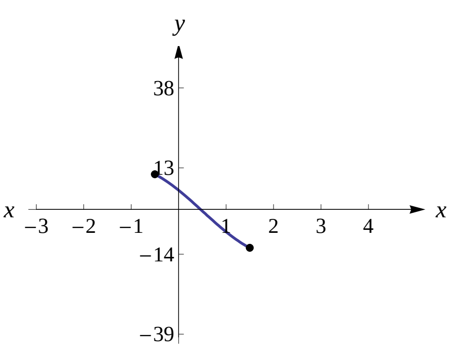
(c) 주어진 구간에 임계점 $x = 2$ 는 포함되지 않고 $f(1.5) = -12$ 이므로 $x = -3, -1, 1.5$ 에서 함수값을 비교하면 $x = -1$ 에서 최대값 13, $x = -3$ 에서 최소값 -39 를 갖는다.

(d) 주어진 구간에 임계점이 하나도 포함되지 않으므로 양 끝점만 비교한다.

$$f(-0.5) = 11, \quad f(1.5) = -12$$

이므로 $x = -0.5$ 에서 최대값 11, $x = 1.5$ 에서 최소값 -12 를 갖는다. □





보기 2 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하여라.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$, $0 \le x \le 4$

(b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

(c) $f(x) = e^x \sin x$, $-\pi \le x \le \pi$

Solution

(a) f 의 도함수를 구하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

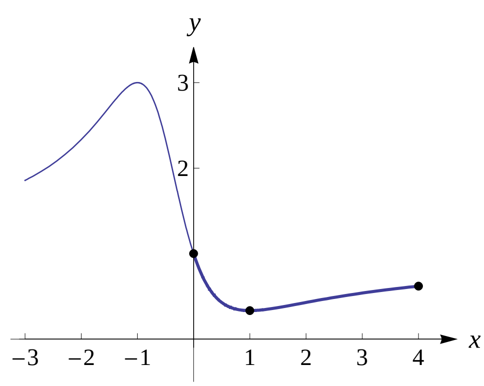
이고 분모는 항상 양수이므로

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

이다. 그러나 $0 \le x \le 4$ 이므로 유일한 임계점 $x = 1$ 을 갖는다. 임계점과 양 끝점에서 함수의 값을 구하면

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{1}{3}, \quad f(4) = \frac{4^2 - 4 + 1}{4^2 + 4 + 1} = \frac{13}{21}$$

이다. 따라서 $x = 0$ 에서 최대값 1, $x = 1$ 에서 최소값 $\dfrac{1}{3}$ 을 갖는다.



(b) 정의역이 언급되어 있지 않은 경우 정의역은 그 함수가 의미를 갖는 최대 집합을 의미한다. 따라서 f 의 정의역은 $-2 \le x \le 2$ 이다. f 의 도함수를 구하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \\ &= \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} \end{aligned}$$

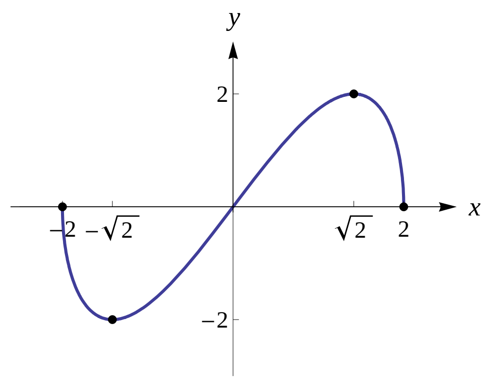
이므로 정의역 안에 두 개의 임계점 $x = \pm\sqrt{2}$ 를 갖는다. 임계점에서의 함수값은

$$f(\sqrt{2}) = 2, \quad f(-\sqrt{2}) = -2$$

이고 양 끝점에서는

$$f(2) = f(-2) = 0$$

이므로 $x = \sqrt{2}$ 에서 최대값 2 를, $x = -\sqrt{2}$ 에서 최소값 -2 를 갖는다.



(c) f 의 도함수를 구하면

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$$

이고 $e^x > 0$ 이므로 임계점은 $\sin x + \cos x = 0$ 을 만족하는 x 이다. 따라서 임계점은

$$x = \frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4}$$

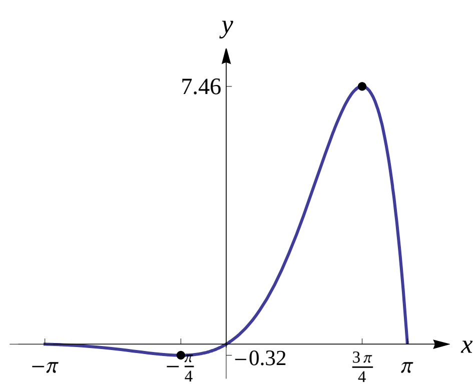
이다. 양 끝점에서의 함수값은

$$f(-\pi) = f(\pi) = 0$$

이고 임계점에서의 함수값은

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \approx 7.46, \qquad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \approx -0.32$$

이므로 $x = \dfrac{3\pi}{4}$ 에서 최대값 7.46, $x = -\dfrac{\pi}{4}$ 에서 최소값 -0.32 를 갖는다. □



주어진 구간이 유한한 닫힌 구간 $[a,b]$ 가 아닌 경우에는 최대값과 최소값이 항상 존재하는 것은 아니다. 주어진 구간이 무한 구간인 경우에는 $x \to \pm\infty$ 일 때의 극한값을 고려해 보아야 한다.

보기 3 다음 함수의 최대값과 최소값이 존재하면 구하여라.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ (b) $f(x) = xe^{-x^2/2},\ x \geq 0$

Solution

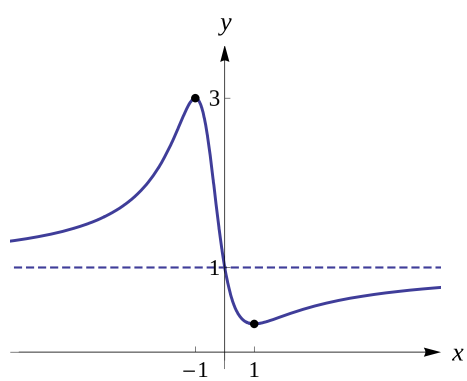
(a) 보기 2 에서 두 개의 임계점 $x = \pm 1$ 이 존재함을 살펴보았다. 함수의 증감표를 그려 보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3(극대값)	$\searrow$	$\frac{1}{3}$(극소값)	$\nearrow$

분모가 항상 양수이므로 함수는 모든 실수에서 정의되고

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1$$

이므로 $x > 1$ 이면 $\frac{1}{3} < f(x) < 1$ 이고 $x < -1$ 이면 $1 < f(x) < 3$ 이다.



따라서 $x = -1$ 에서 최대값 3, $x = 1$ 에서 최소값 $\frac{1}{3}$ 을 갖는다.

(b) f 의 도함수를 구하면

$$f'(x) = e^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2}(-x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

이다. $e^{-x^2/2} > 0$ 이므로

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

이다. 따라서 $x \geq 0$ 인 임계점은 $x = 1$ 하나이다. 임계점에서 함수값은

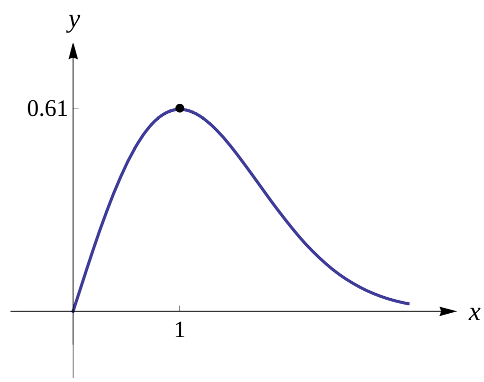
$$f(1) = e^{-1/2}$$

이고 함수의 증감표를 그려 보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$(극대값)	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2/2} = 0$$

이므로 $x > 1$ 이면 $0 < f(x) < e^{-\frac{1}{2}}$ 이고 $f(0) = 0$ 이다.

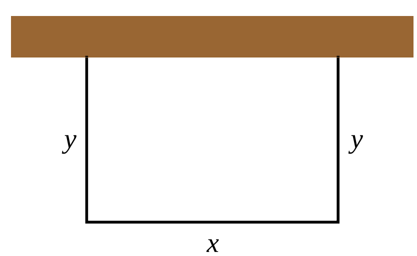


따라서 $x = 0$ 에서 최소값 0, $x = 1$ 에서 최대값 $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.61$ 을 갖는다. □

최적화 문제

자연현상이나 경제활동에서의 최적화 문제는 비용을 최소화하거나 효율을 최대화하는 문제 등을 포함한다. 대부분의 문제에는 변수가 둘 이상이 주어지며 변수 사이의 관계식이 주어진다. 이런 경우 최소화, 또는 최대화하고 싶은 함수를 하나의 변수로 나타내는 것이 우선되어야 한다. 또한 주어진 관계식에서 변수가 취할 수 있는 범위도 구하여야 한다.

보기 4 담에 직사각형 모양의 울타리를 쳐서 임시 창고를 만들려고 한다. 울타리의 길이가 15 m 일 때 창고의 넓이를 최대로 하려면 창고의 가로, 세로의 길이를 어떻게 해야 하는가?



Solution 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y 라고 하자. 그러면 x, y 는 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$x + 2y = 15, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \tag{5.2}$$

창고의 넓이는

$$A = xy$$

이므로 문제는 조건 (5.2)를 만족하는 x, y 중에서 $A = xy$ 를 최대화하는 x, y 를 구하는 것이 된다. 조건 (5.2)에서

$$x = 15 - 2y \geq 0$$

이므로 y 가 취할 수 있는 범위는 $0 \leq y \leq \frac{15}{2}$ 이고

$$A = (15 - 2y)y = 15y - 2y^2$$

이다. A 의 임계점은

$$A' = 15 - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{15}{4}$$

이다.

$$A'' = -4 < 0$$

이므로 $y = \frac{15}{4}$ 에서 A 는 극대값

$$(15 - 2\frac{15}{4})\frac{15}{4} = \frac{225}{8} = 28.125\ (m^2)$$

을 갖는다. 함수 A 의 증감을 살펴보면 다음과 같다.

x	$0 < x < \frac{15}{4}$	$x = \frac{15}{4}$	$x > \frac{15}{4}$
A'	$+$	0	$-$
A	$\nearrow$	극대값	$\searrow$

따라서 유일한 극대값은 최대값이 된다. 이때 최대값은

$$f\left(\frac{15}{4}\right) = \left(15 - \frac{15}{2}\right)\frac{15}{4} = \frac{225}{8} = 28.125$$

이다. □

일반적으로 최적화 문제는 다음과 같은 과정을 거쳐서 해결한다.

최적화 문제의 해결

1. 조건에 있는 미지수들을 이용하여 최적화하고 싶은 함수(목적함수)를 구한다.
2. 조건에 있는 미지수에 대한 조건을 구하고 이 미지수들 사이의 관계식을 구한다.
3. 주어진 조건식을 이용하여 목적함수를 일변수함수로 바꾸어 쓴다.
4. 목적함수의 임계점을 모두 구한다.
5. 임계점과 조건의 끝점에서 목적함수의 값을 모두 구한다.
6. 위에서 구한 값 중에서 가장 큰 값이 최대값, 가장 작은 값이 최소값이 된다.

임계점이 하나일 때

보기 4 처럼 함수가 정의된 구간 안에 임계점이 하나만 있는 경우를 살펴보자. $y = f(x)$ 가 유일한 임계점을 갖고 임계점 왼쪽에서는 증가하고 임계점 오른쪽에서는 감소하면 임계점에서 최대값을 갖는다. 반대로 임계점 왼쪽에서는 감소하고 임계점 오른쪽에서는 증가하면 임계점에서 최소값을 갖는다.

$$y = f(x)$$

가 유일한 임계점 $x = c$ 를 갖고 $x \neq c$ 에서 미분가능하면 이 사실은 다음과 같이 쓸 수 있다.

유일한 임계점

$y = f(x)$ 가 유일한 임계점 $x = c$ 를 갖고 $x \neq c$ 에서 미분가능하다고 하자.

- $x < c$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이고 $x > c$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이면 $y = f(x)$ 는 $x = c$ 에서 최대값 $f(c)$ 를 갖는다.
- $x < c$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이고 $x > c$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이면 $y = f(x)$ 는 $x = c$ 에서 최소값 $f(c)$ 를 갖는다.

보기 5 점 (2,1) 과 원 $x^2 + y^2 = 1$ 사이의 거리를 구하여라.[6]

Solution 원 위의 임의의 점 (x, y) 와 점 $(2, 1)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

이다. 두 점 사이의 거리의 제곱이 최소일 때 거리도 최소이므로

$$d^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

의 최소값을 구하기로 한다. 여기서 (x, y) 는 단위원 위의 점이므로 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$x^2 + y^2 = 1$$

또한, 점 (2,1) 이 1 사분면의 점이므로 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이고

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

으로 쓸 수 있다. 이 사실을 이용하면 d^2 을 x 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} d^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= 6 - 4x - 2\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

[6] 일반적으로 한 점과 도형 사이의 거리는 한 점과 도형 위의 점 사이의 거리의 최소값으로 정의한다.

따라서 목적함수를

$$f(x) = 6 - 4x - 2\sqrt{1-x^2}$$

라고 하자. $f(x)$ 의 임계점을 구하면

$$f'(x) = -4 - 2\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이다. 함수 f 의 증감을 살펴보면 다음과 같다.

x	$0 < x < \frac{2}{\sqrt{5}}$	$x = \frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	극소값	$\nearrow$

따라서 유일한 극소값은 최소값이 되고 이때 최소값은

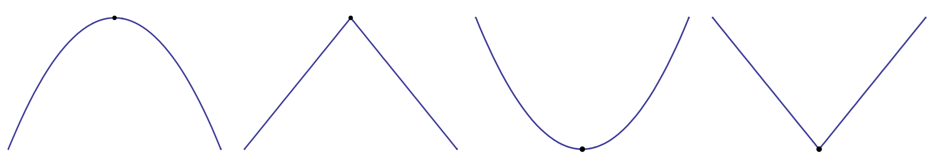
$$f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 6 - 4\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\frac{1}{\sqrt{5}} = 6 - 2\sqrt{5}$$

이다. 따라서 점 (2,1) 과 원 $x^2 + y^2 = 1$ 사이의 거리는

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

이다. □

임계점이 유일한 경우 임계점에서 함수가 위로 볼록하면 이 점은 최대점이 된다. 반대로 아래로 볼록하면 최소점이 된다.

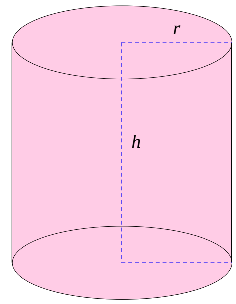


$y = f(x)$ 가 두 번 미분가능한 함수일 때 이 성질은 다음과 같이 쓸 수 있다.

두 번 미분가능한 함수 $y = f(x)$ 가 $x = c$ 에서 유일한 임계점을 갖는다고 하자.

- $f''(c) > 0$ 이면 $y = f(x)$ 는 $x = c$ 에서 최소값 $f(c)$ 를 갖는다.
- $f''(c) < 0$ 이면 $y = f(x)$ 는 $x = c$ 에서 최대값 $f(c)$ 를 갖는다.

보기 6 250 cm^3 들이 음료수용 깡통을 만들려고 한다. 재료비가 가장 적게 들도록 하려면 어떻게 해야 하는가? 다시 말해서 깡통의 겉넓이가 가장 작아지게 하려면 어떻게 해야 하는가?

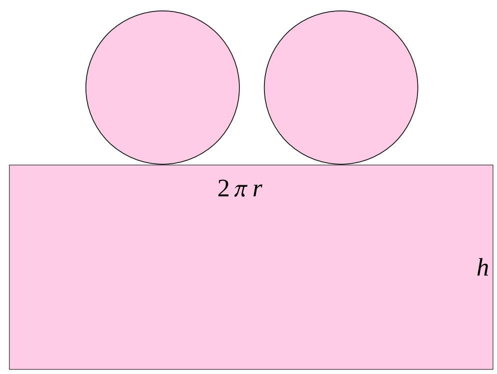


Solution 밑면의 반지름을 r, 높이를 h 라고 하자. 그러면 깡통의 부피가 250 cm^3 이므로

$$V = \pi r^2 h = 250, \quad r \geq 0, \quad h \geq 0$$

을 만족한다. 따라서 $h = \dfrac{250}{\pi r^2}$ 이고 깡통의 겉넓이는 다음과 같이 r 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{500}{r} \end{aligned}$$



임계점을 구하면

$$A' = 4\pi r - \frac{500}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{125}{\pi}\right)^{1/3} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 3.41$$

에서 임계점은 유일하다.

$$A'' = 4\pi + \frac{1000}{r^3} > 0$$

이므로 $r = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 3.41$ 에서 겉넓이는 최소가 된다. 이때, 높이는

$$h = \frac{250}{\pi r^2} \approx 6.84$$

이다. □

제 6 장

함수와 적분

제 1 절　부정적분

함수 $f(x) = x^2$ 의 도함수는 $f'(x) = 2x$ 이다. 거꾸로 함수 F 의 도함수가 $2x$ 라면 F 는 어떤 함수인지 알 수 있을까? x^2 을 미분하면 $2x$ 가 되는 것을 알고 있으므로

$$F(x) = x^2$$

이라고 할 수 있다. 그러나 미분의 경우와는 달리 이런 성질을 갖는 함수는 무수히 많이 있다. 임의의 상수 C 에 대하여

$$(x^2 + C)' = 2x$$

이므로 다음과 같은 형태의 함수

$$F(x) = x^2 + C$$

는 모두 도함수가 $2x$ 이다.

역도함수

일반적으로 주어진 함수 f 에 대하여

$$F'(x) = f(x)$$

가 되는 미분가능한 함수 $F(x)$ 를 $f(x)$ 의 **역도함수(antiderivative)**라고 한다. 예를 들어 $2x$ 는 x^2 의 도함수이고 x^2 은 $2x$ 의 역도함수이다. $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 역도함수라면 $F(x) + C$ 도 $f(x)$ 의 역도함수가 된다. 또한 $G(x)$ 가 $f(x)$ 의 다른 역도함수라면

$$(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

이므로 $G(x) - F(x)$ 는 상수함수가 된다. 따라서 모든 f 의 역도함수는

$$F(x) + C$$

의 꼴로 쓸 수 있다. 함수 $f(x)$ 의 역도함수의 집합을 **부정적분(indefinite integral)**이라고 하고

$$\int f(x)\,dx$$

로 나타낸다.[1] 그러나 집합 기호는 사용하지 않으며 다음과 같이 이해하기로 한다.

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{6.1}$$

여기서 함수 $f(x)$ 를 **피적분함수(integrand)**, C 를 **적분상수(constant of integration)**라고 한다. 적분상수 C 에 대하여 연산을 한 결과는 다시 C 로 쓰기로 한다. 예를 들어

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x) + 2C = 2F(x) + C$$

로 쓴다. 일반적인 연산에서라면 위의 식에서 $C = 0$ 이 된다. 그러나 적분상수는 일반적인 실수를 나타내는 수임을 상기하고 새로운 적분상수(C' 이나 C_1 등)을 사용하는 대신 계속 적분상수 C 로 나타내기로 한다.

식 (6.1) 은 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

도함수와 역도함수

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) &= f(x) \quad (y = f(x) \text{ 는 연속함수}) \\ \int f'(x)\,dx &= f(x) + C \quad (y = f(x) \text{ 는 미분가능한 함수}) \end{aligned}$$

보기 1 다음 식이 성립함을 확인하여라.

$$\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C$$

Solution 우변을 미분한 것이 $\sec x$ 임을 보이면 된다. 합성함수의 미분법을 사용하면

$$\begin{aligned} [\log|\sec x + \tan x|]' &= \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x} \\ &= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \\ &= \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

가 된다. □

[1] 엄밀히 말하자면 역도함수와 부정적분을 구분하여야 하지만 대부분의 교재는 두 용어를 혼용하여 사용한다.

여러 함수의 부정적분

$n \neq -1$ 일 때 $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$ 이므로

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$$

이다. 따라서 다음 부정적분을 얻는다.

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

x^{-1} 의 부정적분은

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

에서

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$$

임을 알 수 있다.

x^n 의 부정적분

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\, dx = \log|x| + C$$

지수함수의 미분법칙으로부터

$$(e^x)' = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \int e^x\, dx = e^x + C$$

이다. 또한

$$(a^x)' = a^x \log a$$

이므로

$$\left(\frac{a^x}{\log a}\right)' = a^x$$

이다. 따라서

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

이다.

지수함수의 부정적분

$$\int e^x\, dx = e^x + C, \qquad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

삼각함수의 미분법으로부터는 다음 부정적분을 얻는다.

삼각함수의 부정적분

$$(\sin x)' = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$
$$(\cos x)' = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

부정적분의 성질

$F(x), G(x)$ 가 각각 연속함수 $f(x), g(x)$ 의 역도함수라고 하자. 그러면

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x)$$

이므로 임의의 상수 k 에 대하여

$$\begin{aligned} [kF(x)]' &= kF'(x) \ = \ kf(x) \\ [F(x) \pm G(x)]' &= F'(x) \pm G'(x) \\ &= f(x) \pm g(x) \text{ (복호동순)} \end{aligned}$$

이다. 따라서 부정적분에 대한 다음 공식이 성립한다.

부정적분의 성질

$$\begin{aligned} \int kf(x)\, dx &= k \int f(x)\, dx \ \ (k \text{ 는 상수}) \\ \int [f(x) \pm g(x)]\, dx &= \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx \text{ (복호동순)} \end{aligned}$$

보기 2 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\int (x^2 + x)\, dx$

(b) $\int 3x^2\, dx$

(c) $\int \frac{x^2 - 2x\sqrt{x} + 1}{x}\, dx$

(d) $\int \frac{x^2}{x-1}\, dx - \int \frac{1}{x-1}\, dx$

Solution (a) 부정적분의 성질에서 항 별로 적분하면 된다.

$$\begin{aligned}\int (x^2+x)\,dx &= \int x^2\,dx + \int x\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

(b) 부정적분의 성질에서 상수는 적분 기호 밖으로 꺼낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\int 3x^2\,dx &= 3\int x^2\,dx \\ &= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + C \;=\; x^3 + C\end{aligned}$$

(c) 분수식을 간단히 한 후 계산한다.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x\sqrt{x} + 1}{x}\,dx &= \int \left(x - 2x^{1/2} + \frac{1}{x}\right)dx \\ &= \int x\,dx - 2\int x^{1/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{1/2+1}x^{1/2+1} + \log|x| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{3/2} + \log|x| + C\end{aligned}$$

(d) 부정적분의 두 번째 성질을 이용하면

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx &= \int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx \\ &= \int (x+1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + C\end{aligned}$$

을 얻는다. □

보기 3 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 관계식을 만족한다고 할 때 $f(x)$ 를 구하여라.

$$\int f(x)\,dx = xf(x) + x^3 - 2x^2 + C, \quad f(0) = 3$$

Solution 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 3x^2 - 4x$$

가 된다. 따라서

$$xf'(x) = 4x - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4 - 3x$$

이므로

$$f(x) = 4x - \frac{3}{2}x^2 + C$$

이다. $f(0) = 3$ 으로부터 $C = 3$ 임을 알 수 있다. 다시 말해서

$$f(x) = 3 + 4x - \frac{3}{2}x^2$$

이다. □

합성함수의 부정적분

함수 $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 역도함수라고 하자. $f(ax+b)$ 의 도함수는 $af'(ax+b)$ 이다. 그렇다면 $f(ax+b)$ 의 부정적분은 어떻게 될까?

$$[F(ax+b)]' = aF'(ax+b) = af(ax+b)$$

이므로 $f(ax+b)$ 의 부정적분은

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

가 된다.[2]

보기 4 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int (2x+3)^5\,dx$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1}{2}x+2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int e^{-x+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \sin(5x-1)\,dx$

Solution (a) $\displaystyle\int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + C$ 이므로

$$\int (2x+3)^5\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{6}(2x+3)^6\Big] + C = \frac{1}{12}(2x+3)^6 + C$$

이다.

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$ 이므로

$$\int \sqrt{\frac{1}{2}x+2}\,dx = \frac{1}{1/2}\Big[\frac{2}{3}(\frac{1}{2}x+2)^{3/2}\Big] + C = \frac{4}{3}(\frac{1}{2}x+2)^{3/2} + C$$

이다.

(c) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ 이므로

$$\int e^{-x+1}\,dx = \frac{1}{-1}e^{-x+1} + C = -e^{-x+1} + C$$

이다.

[2]도함수에서는 상수 a 가 곱해지고 부정적분에서는 상수 a 가 나누어진다.

(d) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ 이므로

$$\int \sin(5x-1)\, dx = \frac{1}{5}(-\cos(5x-1)) + C = -\frac{1}{5}\cos(5x-1) + C$$

이다. □

치환법칙

일반적인 합성함수의 부정적분을 구하기 위해서는 치환법칙을 많이 사용한다. 치환법칙은 미분에서의 연쇄법칙과 밀접한 관계가 있다. 예를 들어, 다음 부정적분을 구한다고 하자.

$$\int 2x(x^2+1)^2\, dx$$

$2x(x^2+1)^2 = 2x^5 + 4x^3 + 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int 2x(x^2+1)^2\, dx &= \int (2x^5 + 4x^3 + 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^6 + x^4 + x^2 + C \\ &= \frac{1}{3}(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) + C' \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C' \end{aligned}$$

을 얻는다. 여기서 $C' = C - \frac{1}{3}$ 이다. 그러나 연쇄법칙을 이용하여 미분을 구하면

$$\left(\frac{1}{3}(x^2+1)^3\right)' = 3\frac{1}{3}(x^2+1)^2(x^2+1)' = 2x(x^2+1)^2$$

이므로

$$\int 2x(x^2+1)^2\, dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C$$

임을 알 수 있다. 일반적으로 함수 $u = g(x)$ 가 미분가능하고 함수 $f(u)$ 의 한 역도함수가 $F(u)$ 일 때, 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned} [F(g(x))]' &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

을 얻는다. 즉, $F(g(x))$ 는 $f(g(x))g'(x)$ 의 역도함수이다.

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C = F(u) + C$$

이다. $F(u) + C = \int f(u)\, du$ 이므로 다음 공식을 얻는다.

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(u) + C = \int f(u)\, du$$

이렇게 합성함수 $f(g(x))$ 에서 $g(x)$ 를 u 로 치환하여 적분하는 방법을 **치환적분법(integration by substitution)**이라고 한다.

치환적분법

함수 $u = g(x)$ 가 미분가능할 때 다음 식이 성립한다.

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Note 라이프니츠의 표기법을 이용하면 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$$

따라서 $u = g(x)$ 일 때 $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$ 를

$$du = g'(x)\,dx \quad \text{또는} \quad dx = \frac{1}{g'(x)}du$$

로 나타내기로 한다.[3]

보기 5 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^3\,dx$

(b) $\displaystyle\int xe^{-x^2/2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$

Solution

(a) $u = x^3 + 1$ 이라고 하면 $du = 3x^2\,dx$ 이므로 $x^2dx = \dfrac{1}{3}du$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int x^2(x^3+1)^3\,dx &= \frac{1}{3}\int u^3\,du \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+3}u^4\right] + C \\ &= \frac{1}{12}(x^3+1)^4 + C\end{aligned}$$

을 얻는다.

(b) $u = -x^2/2$ 이라고 놓으면

$$-x\,dx = du \quad \text{또는} \quad x\,dx = -du$$

이다.

$$\begin{aligned}\int xe^{-x^2/2}\,dx &= -\int e^u\,du \\ &= -e^u + C = -e^{-x^2/2} + C\end{aligned}$$

을 얻는다.

[3]이는 연쇄법칙에서는 곱의 형태로 나타난 것이 치환적분에서는 나누기의 형태로 나타남을 보여준다.

(c) $u = x^4 + 2$ 로 치환하면 $du = 4x^3 dx$ 이고

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx &= \frac{1}{4}\int \cos u\, du \\ &= \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C\end{aligned}$$

을 얻는다. □

위 보기에서는 무엇을 치환하면 부정적분을 구할 수 있는지가 명백해 보인다. 즉,

$$\int f(ax^n + b)x^{n-1}\, dx$$

의 꼴의 부정적분은 $u = ax^n + b$ 로 치환하면 부정적분을 구할 수 있다. 그러나 일반적으로는 치환적분에서 어떤 함수를 치환하여야 하는지가 명백히 보이지 않는 경우가 더 많다.[4] 이런 경우는 치환하는 함수의 도함수가 무엇인지를 고려하여 적분이 쉬워지는 치환을 하는 것이 중요하다.

보기 6 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

Solution

(a) $u = x - 1$ 이라고 하면 $du = dx$ 이고 $x = u + 1$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\, dx &= \int (u+1)\sqrt{u}\, du \\ &= \int u^{3/2}\, du + \int u^{1/2}\, du \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

을 얻는다.

(b) $u = \dfrac{1}{x}$ 이라고 하면 $du = -\dfrac{1}{x^2}dx$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\, dx &= -\int \sin u\, du \\ &= \cos u + C \\ &= \cos\frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

을 얻는다.

[4] 실제로 치환하는 방법은 유일하지 않으며 여러가지 방법이 있을 수 있으며 그 중에서 가장 계산이 쉬워지는 방법을 선택한다.

(c) $u = \log x$ 로 놓으면 $du = \dfrac{1}{x}\,dx$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x}\,dx &= \int u\,du \\ &= \frac{1}{2}u^2 + C \\ &= \frac{1}{2}(\log x)^2 + C\end{aligned}$$

이다.

(d) $u = \sqrt{x}$ 로 놓으면 $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int e^u\,du \\ &= 2e^u + C \\ &= 2e^{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

이다. □

$f'(x)/f(x)$ 의 적분

$f(x) \neq 0$ 인 분수함수 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 의 부정적분을 구하여 보자.

$$u = f(x)$$

라고 하면

$$du = f'(x)dx$$

이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \log|u| + C \\ &= \log|f(x)| + C\end{aligned}$$

를 얻는다.

$f'(x)/f(x)$ 의 적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$$

보기 7 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{3+e^{2t}}\,dt$

Solution

(a) $u = x^2 + 2$ 라고 하면 $du = 2x\,dx$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{2}\log|u| + C = \frac{1}{2}\log(x^2+2) + C\end{aligned}$$

이다.

(b) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 이므로 $u = \cos x$ 로 치환하자.

$$du = -\sin x\,dx$$

이므로

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du \\ &= -\log|u| + C = -\log|\cos x| + C \\ &= \log|\sec x| + C\end{aligned}$$

이다.

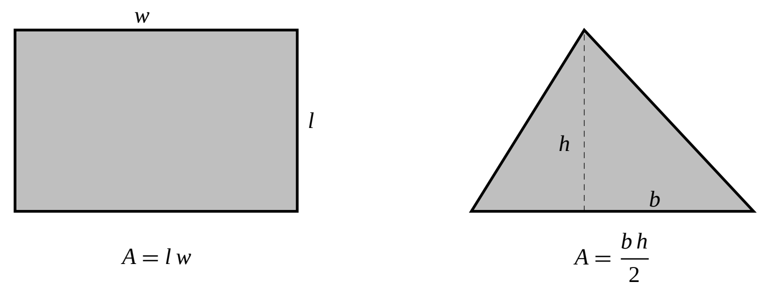
(c) $u = 3 + e^{2t}$ 라고 하면 $du = 2e^{2t}\,dt$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2t}}{3+e^{2t}}\,dt &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\log|u| + C \\ &= \frac{1}{2}\log(3+e^{2t}) + C\end{aligned}$$

이다. □

제 2 절 정적분

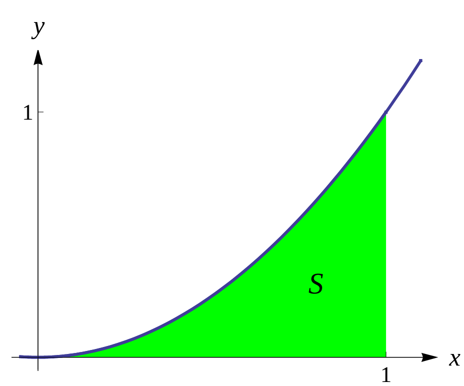
수학에서 가장 오래된 문제 중의 하나는 도형의 넓이를 구하는 문제이다. 직사각형의 넓이는 가로와 세로의 곱으로 구할 수 있고 삼각형의 넓이는 밑변과 높이의 곱의 $\frac{1}{2}$ 로 구할 수 있다.



일반적으로 도형의 경계가 직선인 경우는 삼각형의 넓이를 이용하면 항상 그 넓이를 구할 수 있다.[5]
그러나 경계가 곡선인 경우, 넓이를 구하는 문제는 그리 단순하지가 않다. 이 절에서는 곡선으로 둘러 싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 소개하도록 한다.

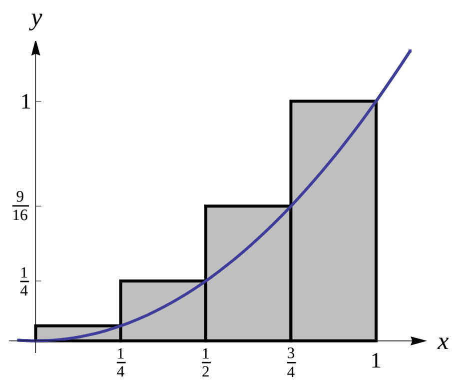
곡선 아래 부분의 넓이

함수 $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ 의 아래 부분 S 의 넓이 $A = |S|$ 를 근사적으로 구하여 보기로 하자.



우선 주어진 영역의 넓이는 높이가 1 인 사각형에 포함되므로 0과 1 사이임을 쉽게 알 수 있다. 이제 구간 [0,1] 을 네 개로 나누고 각 구간에서의 영역을 각각 S_1, S_2, S_3, S_4 로 나타내자. 그러면 영역 S_i 는 밑변의 길이가 1/4 이고 높이가 $\left(\frac{i}{4}\right)^2$ 인 직사각형에 포함된다.

[5]삼각형은 세 변의 길이를 알면 그 넓이를 구할 수 있다.



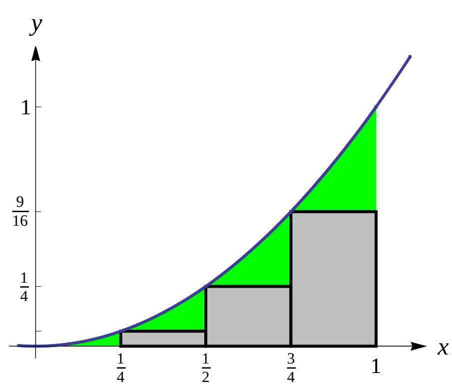
따라서 S_i 의 넓이 $|S_i|$ 는 다음 부등식을 만족한다.

$$|S_i| \le \frac{1}{4}\left(\frac{i}{4}\right)^2$$

따라서

$$A \le \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{4}\right)^2\right] = \frac{15}{32}$$

임을 알 수 있다. 이 식의 오른쪽 값을 구간의 개수가 4 인 **오른쪽 리만합**이라고 하고 R_4 로 나타낸다. S_i 를 포함하는 대신 S_i 에 포함되는 직사각형을 사용하면 반대 방향의 근사값을 구할 수 있다.



즉, 영역 S_i 는 밑변의 길이가 1/4 이고 높이가 $\left(\frac{i-1}{4}\right)^2$ 인 직사각형을 포함하므로

$$|S_i| \ge \frac{1}{4}\left(\frac{i-1}{4}\right)^2$$

이다. 따라서

$$A \ge \frac{1}{4}\left[\left(\frac{0}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = \frac{7}{32}$$

이 성립한다. 이 식의 오른쪽 값을 구간의 개수가 4 인 **왼쪽 리만합**이라고 하고 L_4 로 나타낸다. 그러므로

$$\frac{7}{32} \le A \le \frac{15}{32}$$

가 성립한다. 구간의 갯수를 늘려서 계산하면 좀 더 정확한 A 의 범위를 구할 수 있다. 예를 들어 구간의 수를 10 개로 늘려 계산하면 다음과 같은 A 의 범위를 얻는다.

$$0.285 \le A \le 0.385$$

다음 표는 구간의 수 n 을 늘려가면서 왼쪽리만합과 오른쪽리만합을 구한 것이다.

n	L_n	R_n
50	0.3234	0.3434
100	0.32835	0.33835
1000	0.3328335	0.3338335

위의 표에 의하면 항상

$$\text{오른쪽리만합} - \text{왼쪽리만합} = \frac{1}{n}$$

이다.

보기 1 $A = \dfrac{1}{3}$ 임을 보여라.

Solution 구간 $[0,1]$ 을 n 등분하면 구간의 길이는 $1/n$ 이 된다. i 번째 구간의 영역은 밑변의 길이가 $\dfrac{1}{n}$ 이고 높이가 $\left(\dfrac{i}{n}\right)^2$ 인 직사각형에 포함된다. 따라서

$$\begin{aligned} A \le R_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

이 성립한다. 이 부등식은 모든 n 에 대하여 성립하므로

$$A \le \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

이 성립한다. 마찬가지로 왼쪽리만합에 대하여

$$A \ge \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

이 성립한다. 따라서 압축정리에 의하여 주어진 영역 S 의 넓이는 $A = \dfrac{1}{3}$ 이다. □

Note 보기 1에서와 같이 평면도형의 넓이를 구하기 위하여 평면도형을 작은 사각형으로 분할하고, 그 넓이의 합을 구하여 그 극한값을 취하는 방법을 **구분구적법**이라고 한다. 입체도형의 부피를 구하는 데에도 구분구적법을 사용할 수 있다.[6]

정적분과 넓이

이제 연속함수 $y = f(x)$ 가 $f(x) \ge 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x) \ge 0$ 와 x 축, 그리고 두 수직선 $x = a, x = b$ 로 둘러 싸인 영역의 넓이를 구하여 보기로 하자. 구간 $[a,b]$ 를 n 등분하여 양 끝점과 각 분점의 x 좌표를

$$x_0(=a), x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n(=b)$$

[6] 이 경우는 직사각형이 아니라 작은 기둥으로 분할하여 계산한다.

이라 하고 부분구간의 길이를

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

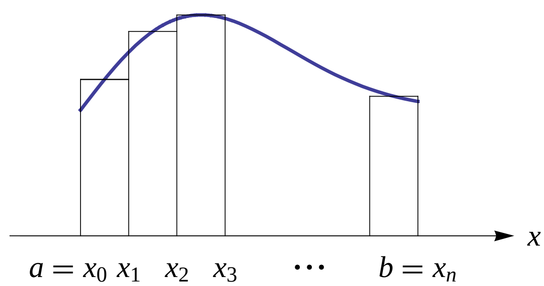
이라 하자. 구간

$$[x_{k-1}, x_k] = \left[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$$

에서 어느 점 x_k^* 를 잡더라도 다음 직사각형의 합

$$f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

는 일정한 값으로 수렴함이 알려져 있다.



이 극한값을 구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 정적분이라고 하고 $\int_a^b f(x)\,dx$ 로 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \tag{6.2}$$

이 경우 $\int_a^b f(x)\,dx$ 가 주어진 영역의 넓이가 됨을 정의로부터 쉽게 이해할 수 있다.

곡선에 의하여 정의된 영역의 넓이

$y = f(x)(\geq 0)$ 가 연속함수일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, 그리고 두 수직선 $x = a, x = b$ 로 둘러 싸인 영역의 넓이는

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

으로 정의하고 $\int_a^b f(x)\,dx$ 로 나타낸다. 여기서 $x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k$ 이다.

Note 연속함수 $y = f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이라고 하자. 그러면

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

이면 $f(x) \equiv 0$ 이다.

성취도평가 (2007년 정시 문제 10)

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx \text{ 임을 보여라.}$$

성취도평가 (2007년 수시 문제 9)

f 를 구간 $(0,1)$ 에서 두 번 미분가능하고 $[0,1]$ 에서 연속이며, $f(0)=0, f(1)=3$, $f'' \leq 0$ 인 함수라 하자. 만약 $\int_0^1 xf(x)dx = 1$ 이면 구간 $[0,1]$ 에서 $f(x) = 3x$ 임을 보여라.

보기 2 다음 극한값을 정적분을 이용하여 나타내고 그 값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Solution $\frac{k}{n}$ 는 구간 $[0,1]$ 을 n 등분하였을 때 k 번째 구간의 오른쪽 끝점 $x_k^* = x_k$ 이고, 이 때 부분구간의 길이는

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

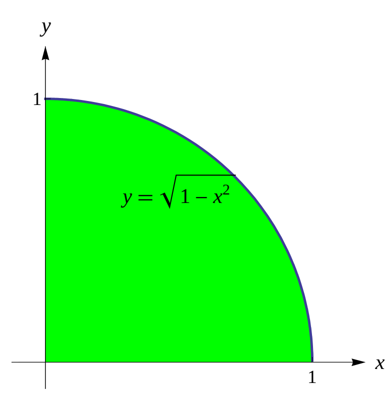
이다. 따라서

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

라고 하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이다. 이 극한값은 정적분 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ 로 나타낼 수 있고 구간 [0,1] 에서 $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 과 x 축 사이의 영역, 즉, 사분원의 넓이이다.



따라서 주어진 극한값은 $\dfrac{\pi}{4}$ 이다. □

성취도평가 (2006년 정시 5번)

함수 f 가 $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f'(x) > 0$, $\int_0^1 f(x)dx = \frac{8}{5}$ 을 만족시킬 때, f 의 역함수를 g 라 하면 $\int_1^2 g(x)dx = \boxed{}$ 이다.

정적분

일반적으로 연속인 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 (6.2) 에서 극한값이 존재할 때, 그 극한값을 함수 f 의 $[a, b]$ 에서의 **리만적분** (**Riemann integral**[7]), 또는 **정적분** (**definite integral**)이라 하고[8]

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

로 나타낸다.

연속함수 f 의 구간 $[a, b]$ 에서의 정적분

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \tag{6.3}$$

여기서 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ 이고 $x_{k-1} \le x_k^* \le x_k$ 이다.

보기 3 다음 극한값을 정적분을 이용하여 나타내어라.

(a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)+\left(\frac{n+2}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{n+n}{n}\right)\right\}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{n}{n}\right)^2+\left(\frac{n+2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n+2n-2}{n}\right)^2\right\}$$

Solution (a) $f(x) = 1 + x$ 라고 하면 구간의 크기 $\Delta x = 1/n$ 이고 $x_k^* = k/n$ 인 경우이다. $x_0 = 0$, $x_n = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)+\left(\frac{n+2}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{n+n}{n}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)\,dx\end{aligned}$$

[7] Bernhard Riemann(1826-1866) 독일의 수학자

[8] 적분을 나타내는 기호 $\int$ 는 합을 나타내는 문자 S 를 길게 늘어뜨린 모양이다. 이 기호는 독일의 수학자 라이프니츠에 의하여 고안되었다.

이다.

(b) $f(x) = (1+x)^2$ 이라고 하자. 구간의 크기를 $\Delta x = 2/n$ 라고 하면 $x_k^* = 2(k-1)/n$ 이고 $x_0 = 0,\ x_n = 2$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big\{ \Big(\frac{n}{n}\Big)^2 + \Big(\frac{n+2}{n}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{n+2n-2}{n}\Big)^2 \Big\} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n}\Big(1 + \frac{2(k-1)}{n}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \Big(1 + x_k^*\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (1+x)^2\, dx
\end{aligned}$$

이다. □

Note 보기 3(b) 에서 구간의 크기를 $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ 으로 잡으면 $x_k^* = x_{k-1} = \dfrac{k-1}{n}$ 에 대하여 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big\{ \Big(\frac{n}{n}\Big)^2 + \Big(\frac{n+2}{n}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{n+2n-2}{n}\Big)^2 \Big\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\Big(1 + 2\frac{k-1}{n}\Big)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x \Big(1 + 2x_k^*\Big)^2 \\
&= \int_0^1 (1+2x)^2\, dx
\end{aligned}$$

비록 정적분은 다른 형태를 갖지만 그 값은 같아진다.

정적분의 성질

$a \le b$ 일 때, $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ 는 함수 $f(x)$ 의 구간 $[a, b]$ 에서의 정적분으로

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\frac{b-a}{n}$$

의 극한값으로 정의한다. 정적분 $\displaystyle\int_b^a f(x)\, dx$ 도 같은 방법으로 정의한다. 그러나 이 때

$$\Delta x = \frac{a-b}{n} = -\frac{b-a}{n}$$

이므로 리만합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Big(-\frac{b-a}{n}\Big) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\frac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

따라서 다음 관계식이 성립한다.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

만약 $a = b$ 이면 $\Delta x = 0$ 이므로

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

이다. 정적분의 정의를 이용하여 다음과 같은 정적분의 성질들이 성립함을 보일 수 있다.

정적분의 성질 I

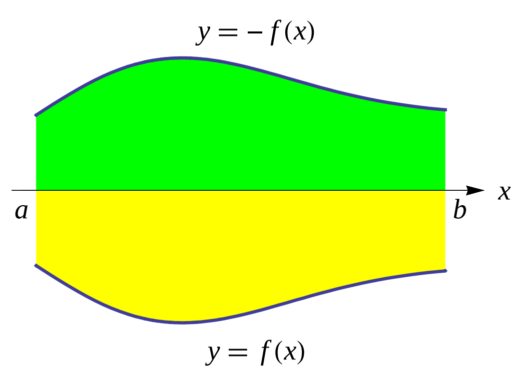
구간 $[a, b]$ 에서 연속인 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ (복호동순)
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (c 는 상수)

$a \le x \le b$ 에서 $f(x) \ge 0$ 이면 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, 그리고 두 직선 $x = a$ 와 $x = b$ 로 둘러 싸인 영역의 넓이가 된다. 이제 구간 $[a, b]$ 에서

$$f(x) \le 0$$

일 때 $y = f(x)$ 와 $x = a,\ x = b$, 그리고 y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 A 라고 보자. $-f(x) \ge 0$ 이므로 주어진 영역의 넓이는 $y = -f(x)$ 와 $x = a,\ x = b$, 그리고 x 축으로 둘러 싸인 영역의 그것과 같다.



따라서 주어진 영역의 넓이 A 는

$$A = \int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{6.4}$$

가 된다. 다시 말해서

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$

이다.

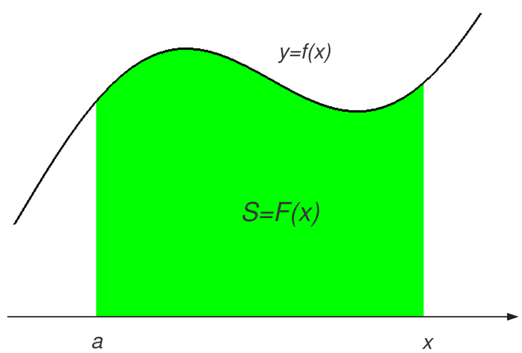
제 3 절 미적분의 기본정리

미분과 적분은 서로 역작용으로 이해할 수 있다. 즉, 어떤 함수를 적분한 후 다시 미분하면 원래의 함수가 되고 반대로 어떤 함수를 미분한 것을 다시 적분하면 원래의 함수가 된다. 이러한 원리를 **미적분의 기본정리(fundamental theorem of calculus)**라고 한다.

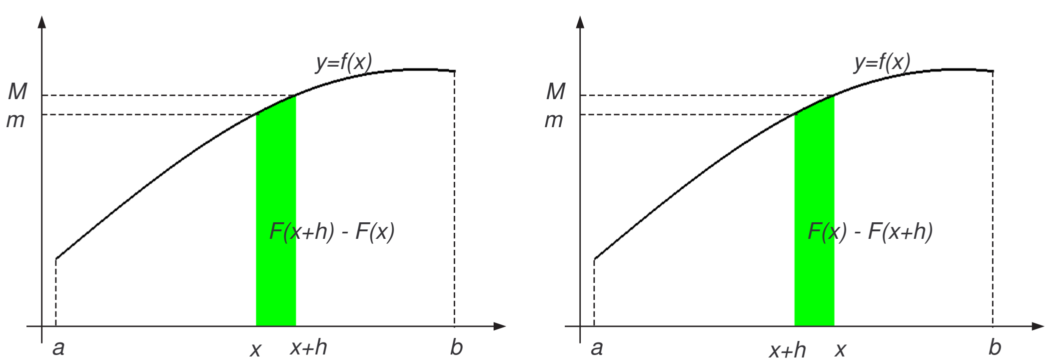
구간 $[a,b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

라고 하자. $f(t) \geq 0$ 이면 기하학적으로 $F(x)$ 는 구간 $[a,x]$ 에서 함수 $y=f(t)$ 와 x 축 사이의 넓이 S 를 의미한다.



x 가 $x+h$ 까지 변화할 때 $h>0$ 이면 $F(x+h)-F(x)$ 는 구간 $[x,x+h]$ 에서의 넓이이고 $h<0$ 이면 $F(x+h)-F(x)$ 는 구간 $[x+h,x]$ 에서의 넓이 $F(x)-F(x+h)$ 의 음의 값을 취한 값이다. 구간 $[x,x+h]$ 또는 $[x+h,x]$ 에서의 연속함수 $f(t)$ 의 최소값을 m, 최대값을 M 이라고 하자.



$h>0$ $\qquad$ $h<0$

$h>0$ 이면

$$mh \leq F(x+h)-F(x) \leq Mh$$

이고 $h < 0$ 이면

$$m(-h) \le F(x) - F(x+h) \le M(-h)$$

이므로 두 경우 모두

$$m \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le M$$

임을 알 수 있다. 함수 f 는 연속이므로 $h \to 0$ 이면 $m, M \to f(x)$ 이다. 따라서 다음 등식이 성립한다.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

이 결과를 **미적분의 기본정리**(**Fundamental Theorem of Calculus**)라고 한다.

미적분의 기본정리

연속함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Note 1. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ 라고 하면

$$\int_x^a f(t)\, dt = -\int_a^x f(t)\, dt = -F(x)$$

이다. 따라서

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_x^a f(t)\, dt\Big) = -f(x)$$

가 성립한다.

Note 2. $G(x) = \displaystyle\int_a^{g(x)} f(t)\, dt$ 라고 하면

$$G(x) = F(g(x))$$

이다. 따라서 합성함수의 미분법을 사용하면

$$G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

가 성립한다. 다시 말해서 다음 식이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_a^{g(x)} f(t)\, dt\Big) = f(g(x))g'(x)$$

보기 1 다음을 구하여라.

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin^3 t\,dt$

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

(c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^2 2t^2e^t\,dt$

(d) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{\sqrt{x}} t^2e^{-t^2}\,dt$

Solution

(a) $f(t)=\sin^3 t$ 는 모든 t 에 대하여 연속이므로

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin^3 t\,dt = \sin^3 x$$

이다.

(b) $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ 는 모든 t 에 대하여 연속이므로

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{1+x^2}$$

이다.

(c) $\displaystyle\int_x^2 2t^2e^t\,dt = -\int_2^x 2t^2e^t\,dt$ 이고 $f(t)=2t^2e^t$ 는 연속이므로

$$\frac{d}{dx}\int_x^2 2t^2e^t\,dt = -2x^2e^x$$

이다.

(d) $f(t)=t^2e^{-t^2}$ 는 모든 t 에 대하여 연속이므로

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_2^{\sqrt{x}} t^2e^{-t^2}\,dt &= (\sqrt{x})^2e^{-(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})' \\ &= xe^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2}e^{-x}\end{aligned}$$

이다. □

성취도평가 (2006년 정시 7번)

다음을 만족하는 다항함수 $f(x)$ 를 구하라.

$$x^3f(x) = 4x^7 + 2x^5 + 3\int_1^x t^2 f(t)\,dt.$$

연속함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 는 미분가능한 함수이다. 미적분의 기본정리는 다음과 같은 형태로 나타낼 수도 있다.

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt = f(a)$$

보기 2 다음 극한값을 구하여라.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt$

(d) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt$

Solution

(a) $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt$ 라고 하면

$$F'(x) = e^{-x^2} = f(x)$$

이고

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2}\,dt = F'(1) = e^{-1}$$

이다.

(b) (a) 의 함수 F 와 f 에 대하여 계산하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x e^{-t^2}\,dt &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}\int_1^x e^{-t^2}\,dt\cdot\frac{1}{1+x}\right]\\ &= f(1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2e}\end{aligned}$$

을 얻는다.

(c) 이 경우는 미적분의 기본정리에서 바로 결과를 얻을 수가 없다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt\cdot\frac{1}{x^2}\right]$$

에서 극한값이 $0\cdot\infty$ 꼴의 부정형이 되기 때문이다. 따라서

$$G(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$$

라고 하면 $G(x)$ 는 미분가능하고

$$G'(x) = \frac{x^2}{1+x^4} = g(x)$$

이다. $G(0)=0$ 이므로 0/0 꼴의 로피탈의 법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt &= \lim_{x\to 0}\frac{G(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{G'(x)}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{1+x^4}\frac{1}{3x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3(1+x^4)}\right]\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

을 얻는다.

(d) (c) 의 함수 G 와 g 에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}\frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{G(2+h)-G(2-h)}{h}$$

로 쓸 수 있다. 분자, 분모의 극한값이 모두 0이므로 로피탈의 법칙을 이용하면 주어진 극한값은

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(2+h)-G(2-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)+g(2-h)}{1} = 2g(2) = \frac{8}{17}$$

이 된다. □

성취도평가 (2007년 정시 2번)

$\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\sin t}{t}dt = \boxed{}$ 이다.

성취도평가 (2007년 수시 1번)

$f(0)=1, f(1)=2, f'(0)=0, f'(1)=3$ 일 때,

$$\int_0^1 [f(x)f'(x)+f'(x)^2 f''(x)]dx = \boxed{}$$

이다.

성취도평가 (2007년 수시 2번)

$f(x)=\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$의 역함수를 g라 할 때 $g'(0)=\boxed{}$이다.

성취도평가 (2009년 수시 10번)

함수 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ 가 다음과 같이 귀납적으로 정의되었다.

$$f_1(x) = \sin x + \cos 4x, \quad f_{n+1} = x\int_{\pi}^{x} f_n(t)\,dt + f_n(x)^2.$$

수열 $\{f_n'(\pi)\}$ 의 일반항 $f_n'(\pi)$ 를 구하시오.

성취도평가 (2006년 정시 4번)

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\int_{2}^{2^{x+1}}\sqrt{1+t^{2006}}\,dt\right] = \boxed{} \text{ 이다.}$$

정적분 구하기

이제 미적분의 기본정리를 이용하여 정적분의 값을 어떻게 구하는지 살펴보기로 한다. $f(x)$ 의 역도함수를 하나 찾았다고 하자. 다시 말해서, 어떤 함수 $F(x)$ 가

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

를 만족한다고 하자. 그러면 미적분의 기본정리에서

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)\,dt = f(x)$$

이므로 모든 x 에 대하여

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{a}^{x} f(t)\,dt - F(x)\right] = f(x) - f(x) = 0$$

이다. 도함수가 0 인 함수는 상수함수이므로

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt - F(x) = C$$

이다. $x = a$ 이면 $-F(a) = C$ 이므로

$$\int_{a}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

정적분의 계산

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이라고 하자. 함수 $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 역도함수이면

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

이다.

Note 위의 결과에서 $F(b) - F(a)$ 를

$$[F(x)]_a^b \quad \text{또는} \quad F(x)\Big|_a^b$$

로 나타내기도 한다. 이 기호에 의하면

$$F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

로 쓸 수 있다.

보기 3 다음 정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 (3x^2 - x + x^{1/3})\,dx$

Solution

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^4 \\
&= \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^4 \\
&= \frac{2}{3}(4\sqrt{4} - 1\sqrt{1}) - 2(\sqrt{4} - 1) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \int_{-2}^2 (3x^2 - x + x^{1/3})\,dx &= \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{1/3+1}x^{1/3+1}\right)\Bigg|_{-2}^2 \\
&= (2^3 - (-2)^3) - \frac{1}{2}(2^2 - (-2)^2) - \frac{3}{4}(2^{4/3} - (-2)^{4/3}) \\
&= 16
\end{aligned}$$

□

보기 4 함수 $F(x) = \displaystyle\int_0^{(x-1)^2} (t^2 - t)\,dt$ 의 극값을 구하여라.

Solution 미적분의 기본정리에 의하여

$$\begin{aligned}
F'(x) &= [(x-1)^2]'[(x-1)^2 - (x-1)] \\
&= 2(x-1)(x-1)(x-2) = 2(x-1)^2(x-2)
\end{aligned}$$

이다. 구간별로 함수의 증감을 조사하면

x		1		2	
$F'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소값	$\nearrow$

이므로 $x = 2$ 일 때 $F(x)$ 는 극소값

$$F(2) = \int_0^1 (t^2 - t)\, dt = \left[\frac{1}{3}\, t^3 - \frac{1}{2}\, t^2\right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

를 갖는다. 극대점은 존재하지 않는다. □

구간별 적분

함수 $f(x)$ 가 세 점 a, b, c 를 포함하는 구간에서 연속이라고 하자. $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

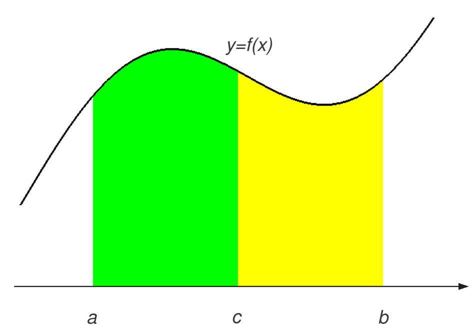
$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

이 성립한다. 이 관계식은 a, b, c 의 대소관계에 상관없이 항상 성립한다.

정적분의 성질 II

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

다음 그림은 $a \le c \le b$ 인 경우 $f(x) \ge 0$ 일 때의 상황을 그래프로 나타낸 것이다.



Note 정적분의 성질 II 는 다음과 같이 차의 형태로도 나타낼 수 있다.

$$\int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx$$

정적분과 넓이

연속함수 $y = f(x)$ 가

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0, \qquad a \leq x \leq b \\ f(x) &\leq 0, \qquad b \leq x \leq c \end{aligned}$$

라고 하자. 그러면 구간 $[a, b]$ 에서 곡선과 x 축 사이의 넓이를 A_1, 구간 $[b, c]$ 에서 곡선과 x 축 사이의 넓이를 A_2 라고 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1, \quad \int_b^c f(x)\,dx = -A_2$$

임을 알고 있다. 따라서

$$\int_a^c f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

가 된다. 다시 말해서 구간 $[a, c]$ 에서 연속함수 $y = f(x)$ 의 정적분은 함수가 양수인 부분의 넓이에서 함수가 음수인 부분의 넓이를 뺀 것과 같다.

정적분과 넓이

연속함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $\int_a^b f(x)\,dx$ 는 $f(x) \geq 0$ 인 부분의 넓이와 $f(x) \leq 0$ 인 부분의 넓이의 차이다.

보기 5 다음 등식이 성립함을 설명하여라.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

Solution $y = f(x-c)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축으로 c 만큼 평행이동하여 얻어진다. 이때 구간 $[a, b]$ 는 구간 $[a+c, b+c]$ 로 이동한다. 따라서 구간 $[a+c, b+c]$ 에서 $y = f(x-c)$ 의 그래프는 구간 $[a, b]$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와 일치한다. 따라서

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

이 성립한다. □

조각적으로 정의된 함수

연속함수가 구간마다 다르게 정의되어 있으면 전체 구간에서 역도함수를 구하는 것이 어려워진다. 이런 경우 구간별로 정적분을 구하여 더하면 전체 정적분의 값을 구할 수 있다.

보기 6 정적분 $\int_0^2 |x-1|\,dx$ 의 값을 구하여라.

Solution $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x \leq 1 \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x-1|\,dx &= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^2 \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{2}2^2 - 2 - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

□

조각적으로 연속인 함수의 정적분은 구간별 적분의 합으로 정의한다. 예를 들어, 구간 $[a,c)$ 에서 연속인 함수 $g(x)$ 와 구간 $(c,b]$ 에서 연속인 함수 $h(x)$ 에 대하여

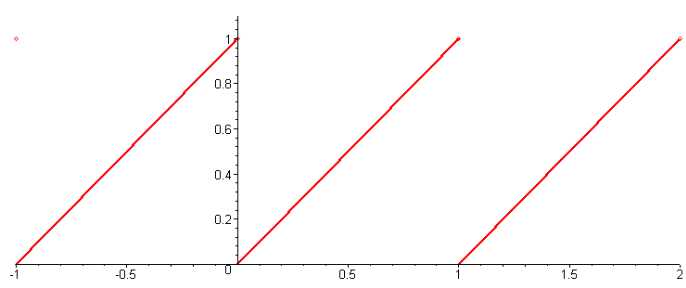
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [a,c) \\ h(x), & x \in (c,b] \\ f(c), & x = c \end{cases}$$

라고 하자. 그러면 구간 $[a,b]$ 에서 $f(x)$ 의 정적분은 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b h(x)\,dx$$

이러한 정의는 명백한 방법으로 조각적으로 연속인 함수에 대하여 확장된다.

보기 7 함수 $g(x) = x - [x]$ 에 대하여 $\int_{-1}^{1.5} g(x)\,dx$ 를 구하여라. 여기서 $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대정수를 나타낸다.



Solution

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1.5} g(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^{1.5} g(x)\,dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

이다. □

성취도평가 (2008년 수시 5번)

다음의 극한값은 $\boxed{}$ 이다.

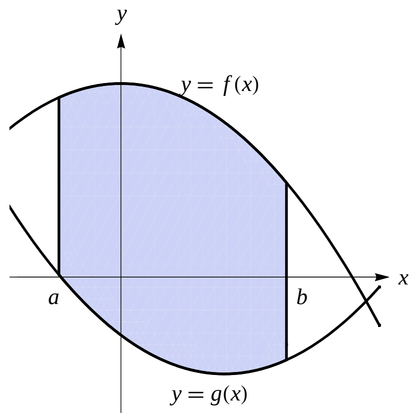
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\ln N}\sum_{n=1}^{N^2}\frac{1}{n}.$$

제 4 절 넓이와 응용

2 절에서 양의 함수 $y = f(x)$ 에 대하여

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

는 구간 $[a, b]$ 에서 곡선의 그래프와 x 축 사이 영역의 넓이임을 보았다. 이제 구간 $[a, b]$ 에서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 사이의 영역의 넓이는 어떻게 구할 수 있는지 알아보기로 한다.



두 함수는 모두 연속이고 $f(x) \geq g(x)$ 라고 가정한다. 2 절에서 한 것과 마찬가지로 구간 $[a, b]$ 를 n 등분하여 양 끝점과 각 분점의 x 좌표를

$$x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n(= b)$$

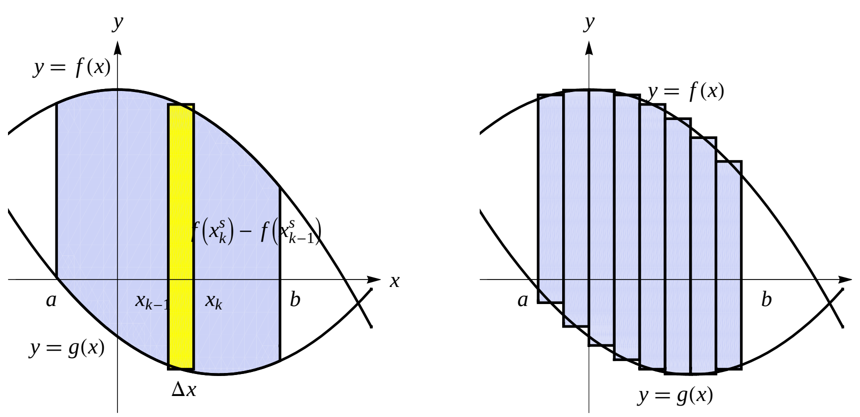
이라 하고 부분구간의 길이를

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

이라 하자. 구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 의 임의의 점 x_k^* 에 대하여 리만합

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x$$

은 주어진 영역 S 의 넓이 A 의 근사값이 되며 n 이 커지면 더 좋은 근사값을 구하여 준다.



따라서 $n \to \infty$ 일 때, f, g 가 연속함수이면 이 극한값이 존재하며 그 극한값을 주어진 영역의 넓이로 정의한다.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x$$

이 극한값은 정적분으로 정의되므로 다음과 같은 식을 얻는다.

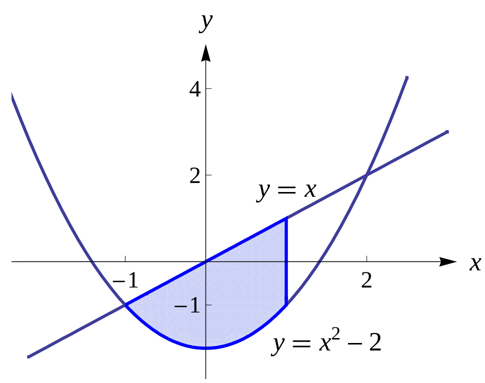
두 곡선 사이의 넓이

$f(x) \geq g(x)$ 인 두 연속함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 두 수직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 영역 S 의 넓이는

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

이다.

보기 1 구간 $[-1, 1]$ 에서 두 곡선 $y = x^2 - 2$ 와 $y = x$ 사이의 넓이를 구하여라.



Solution 주어진 구간에서 $x \geq x^2 - 2$ 이므로 구하는 넓이는

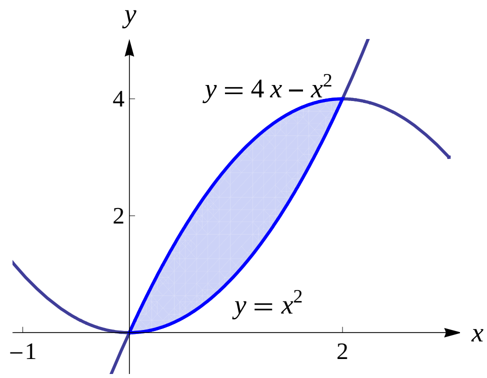
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (x - (x^2 - 2))\, dx &= \int_{-1}^{1} (x - x^2 + 2)\, dx \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}(1-1) - \frac{1}{3}(1+1) + 2(1+1) = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

이다. □

두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하기 위해서는 우선 두 곡선의 교점을 구하여야 한다.

보기 2 다음 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 4x - x^2$$



Solution 두 곡선이 만나는 x 좌표를 구하면

$$x^2 = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ 2$$

이다. 이 구간에서

$$x^2 \le 4x - x^2$$

이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4x - x^2 - x^2)\,dx &= \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

이다. □

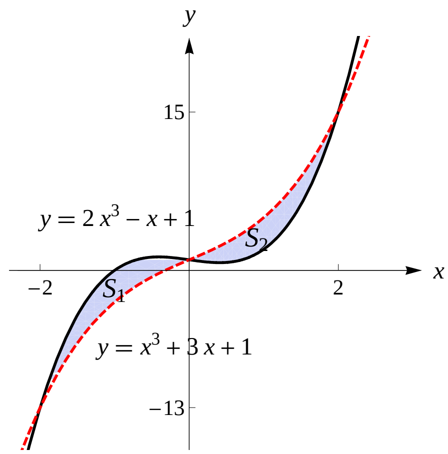
두 함수의 대소관계가 구간에 따라 변하는 경우는 구간에 따라 넓이를 구하여 모두 더한다.

보기 3 두 함수의 그래프 $f(x) = 2x^3 - x + 1$ 과 $g(x) = x^3 + 3x + 1$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

Solution 두 곡선이 만나는 점의 x 좌표를 구하자.

$$f(x) - g(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0$$

이므로 $x = -2, 0, 2$ 에서 두 곡선은 만나고, 두 곡선으로 둘러싸인 영역은 다음과 같이 두 개의 영역 S_1, S_2 로 분리된다.



구간 $[-2,0]$ 에서는 $f(x) \geq g(x)$ 이고 구간 $[0,2]$ 에서는 $f(x) \leq g(x)$ 이므로 S_i 의 넓이 A_i 는 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\, dx \;=\; \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx \\ &= (\frac{1}{4}x^4 - 2x^2)\Big|_{-2}^{0} \;=\; 0 - (4-8) = 4 \\ A_2 &= \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\, dx \;=\; \int_{0}^{2} (4x - x^3)\, dx \\ &= (2x^2 - \frac{1}{4}x^4)\Big|_{0}^{2} \;=\; (8-4) - 0 = 4 \end{aligned}$$

따라서 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$A_1 + A_2 = 8$$

이다. □

Note 구간별로 두 함수의 대소관계가 달라지는 경우, $f(x) \geq g(x)$ 인 구간에서는 $f(x) - g(x)$ 를, $f(x) \leq g(x)$ 인 구간에서는 $g(x) - f(x) = -(f(x) - g(x))$ 를 적분한다. 따라서 피적분함수는 다음과 같이 절대값을 이용하여 하나의 함수로 나타낼 수 있다.

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x), & f(x) \geq g(x) \\ -(f(x) - g(x)), & f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

그러므로 구간 $[a,b]$ 에서 두 곡선 사이의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

두 곡선 사이의 영역의 넓이

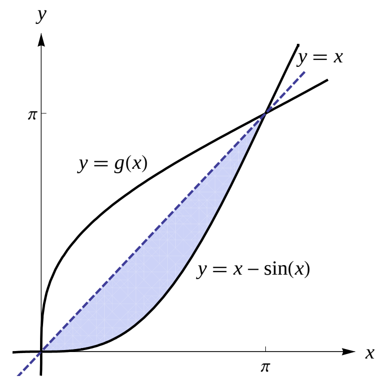
두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 와 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

이다.

보기 4 $f(x) = x - \sin x$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라고 하자. 구간 $[0, \pi]$ 에서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

Solution 두 곡선은 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

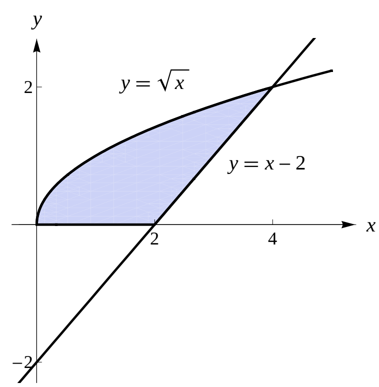


그러므로 구하는 영역의 넓이는

$$2\int_0^{\pi} (x - (x - \sin x))\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 4$$

이다. □

보기 5 다음 그림처럼 1 사분면에서 곡선 $y = \sqrt{x}$ 아래, x 축과 $y = x - 2$ 위에 있는 영역의 넓이를 구하여라.



Solution 주어진 영역은 구간 $[0, 2]$ 에서의 영역 S_1 과 구간 $[2, 4]$ 에서의 영역 S_2 로 구분할 수 있다. 영역 S_1 의 넓이 A_1 은 구간 $[0, 2]$ 에서 $y = \sqrt{x}$ 와 x 축 사이의 넓이이므로

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{1+1/2} x^{3/2}\Big|_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

이다. 영역 S_2 의 넓이 A_2 는 구간 $[2,4]$ 에서 $y=\sqrt{x}$ 아래, $y=x-2$ 위의 영역의 넓이이므로

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_2^4 (\sqrt{x}-(x-2))\,dx = (\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x^2+2x)\Big|_2^4 \\ &= \Big(\frac{16}{3}-8+8\Big)-\Big(\frac{4}{3}\sqrt{2}-2+4\Big) \\ &= \frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

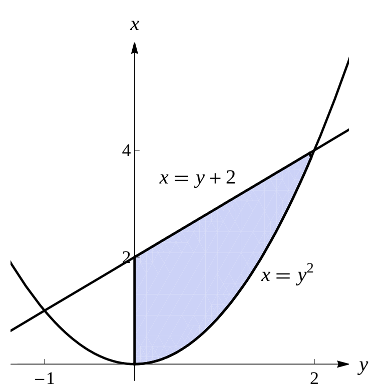
이다. 따라서 구하는 넓이 A 는

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=\frac{10}{3}$$

이다. □

y 에 대한 적분

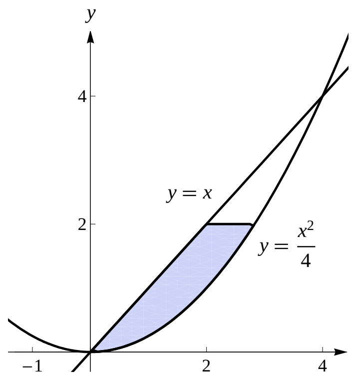
함수를 나타낼 때 우리는 일반적으로 $y=f(x)$ 로 표시한다. 이때, x 를 독립변수라고 하고 수평축에, y 를 종속변수라고 하고 수직축에 나타낸다. 그러나 x 를 항상 독립변수로 간주해야 할 필요는 없다. x 를 y 의 함수로 다루는 것이 더 편할 때에는 y 를 독립변수로 간주해도 된다. 예를 들어, 보기 5 의 경우 주어진 영역은 두 곡선 $x=y^2$, $x=y+2$ 와 $y=0, y=2$ 로 둘러싸인 영역으로 나타낼 수 있다.

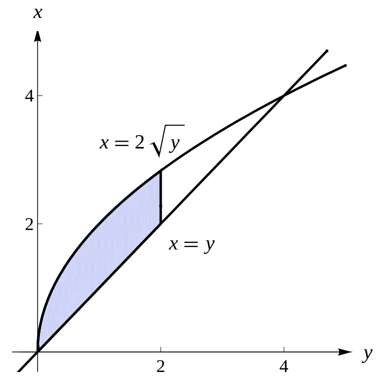


따라서 주어진 영역의 넓이는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [(y+2)-y^2]\,dy = [\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3]\Big|_0^2 \\ &= 2+4-\frac{8}{3}=\frac{10}{3} \end{aligned}$$

보기 6 세 곡선 $y=\dfrac{x^2}{4}, y=x, y=2$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.





Solution 주어진 넓이를 x 에 대한 적분으로 구하려면 두 영역으로($0 \leq x \leq 2$ 과 $2 \leq x \leq 2\sqrt{2}$) 나누어서 구해야 한다. 그러나 y 에 대한 적분은 하나의 영역으로 계산이 가능하다. 이때, 주어진 영역은 y 의 구간 $[0, 2]$ 에서 두 곡선

$$x = \sqrt{4y}, \quad x = y$$

으로 둘러싸인 영역으로 나타낼 수 있으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 (\sqrt{4y} - y)\, dy &= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}(4y)^{3/2} - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} - 2 \end{aligned}$$

이다. □

직선운동과 운동거리

수직선 위를 움직이는 물체가 있을 때 시각 t 에서 이 물체의 속도가 $v(t)$, 위치를 $s(t)$라고 하자.

$$v(t) = s'(t)$$

이므로

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

이다. 따라서 시각 t_1 에서 시각 t_2 까지 위치의 변화는

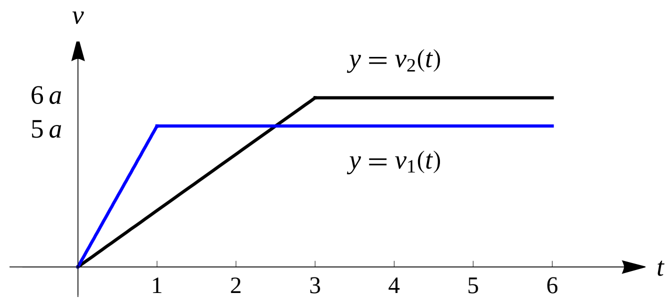
$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

로 나타낼 수 있다. 또한 이 물체가 움직인 거리는

$$d(t) = \int |v(t)|\, dt$$

가 됨을 알 수 있다.

보기 7 두 자동차가 같은 지점을 출발하여 같은 목적지를 향해 달리고 있다. 다음 그래프는 두 자동차의 속도를 나타낸다.



(a) 3 분 후 어떤 차가 앞서는가?

(b) 두 차의 위치가 같아지는 것은 몇 분 후인가? 또, 그 이후는 어떤 차가 앞서는가?

Solution 속도함수와 t 축 사이의 넓이가 움직인 거리이다.

(a) 3분동안 첫 번째 차량의 이동거리는

$$2.5a + 2 \cdot (5a) = 12.5a$$

이고 두 번째 차량의 이동거리는

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (6a) = 9a$$

이다. 따라서 3분 후에는 첫 번째 차량이 앞서 있다.

(b) t 분 후 i 번 째 차의 위치를 $s_i(t)$ 라고 하면

$$s_1(t) = \begin{cases} 2.5at, & 0 \le t \le 1 \\ 2.5a + 5a(t-1), & t \ge 1 \end{cases} \qquad s_2(t) = \begin{cases} 3at, & 0 \le t \le 3 \\ 3a + 6a(t-3), & t \ge 3 \end{cases}$$

이 성립한다. t 분 후 같은 위치에 있다면

$$s_1(t) = s_2(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{5a}{2} + (5a)(t-1) = 9a + (6a)(t-3)$$

이 성립한다. 3 분까지는 첫 번째 차가 앞서므로 $t \ge 3$ 일 때 t 에 대하여 풀면

$$t = \frac{13}{2}$$

이다. 다시 말해서 6분 30초 후에 위치가 같아지고 그 이후는 두 번째 차량이 앞서간다.
□

보기 8 자동차가 출발한지 t 초 후의 속도가

$$f(t) = 20 - \frac{20}{\sqrt{1+t}} \quad (m/sec)$$

로 주어진다고 한다. 처음 2 분 동안 이 자동차가 움직인 거리를 구하여라.

Solution 모든 $t \geq 0$ 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이므로 이 경우 2 분동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{120} \left(20 - \frac{20}{\sqrt{1+t}}\right) dt &= \left(20t - 40\sqrt{1+t}\right)\Big|_0^{120} \\ &= (2400 - 440) - (0 - 40) = 2000 \end{aligned}$$

이다. 즉, 구하는 거리는 $2000m = 2km$ 이다. □

함수의 평균

유한 개의 수 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 의 평균 $\overline{y}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

그렇다면 연속인 구간에서 함수의 평균은 어떻게 정의할까? 보기 8 에서 처음 2 분 동안의 평균속도(이 경우는 평균속력과 일치한다)는 움직인 거리를 시간으로 나눈 것이다. 따라서

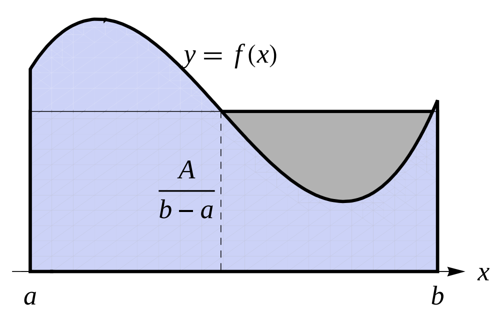
$$\frac{1}{120}\int_0^{120} \left(20 - \frac{20}{\sqrt{1+x}}\right) dx = \frac{2000}{120} = \frac{50}{3}\ (m/sec)$$

이다.

만약 $a \leq x \leq b$ 에서 $y = f(x) \geq 0$ 이라면 그래프와 x 축 사이의 영역의 넓이는

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

이다. A 는 또한 밑변이 $(b - a)$ 이고 높이가 $\dfrac{A}{b-a}$ 인 직사각형의 넓이이기도 하다. 여기서 $\dfrac{A}{b-a}$ 을 구간 $[a, b]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 **평균(average)**으로 정의한다.



일반적인 연속함수 $y = f(x)$ 의 평균도 같은 방법으로 정의한다.

함수의 평균

연속함수 $y = f(x)$ 의 구간 $[a, b]$ 에서의 평균은

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

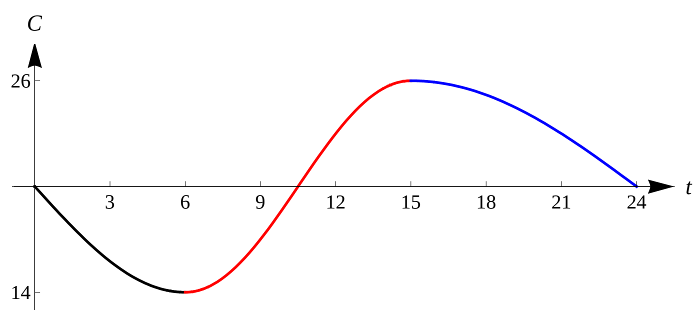
이다.

보기 9 하루 동안의 온도가 다음과 같은 함수로 주어진다고 한다.

$$f(t) = \begin{cases} 20 - 6\sin\dfrac{\pi t}{12}, & 0 \le t \le 6 \\ 20 - 6\cos\dfrac{\pi(t-6)}{9}, & 6 \le t \le 15 \\ 20 + 6\cos\dfrac{\pi(t-15)}{18}, & 15 \le t \le 24 \end{cases}$$

이 날의 평균온도는 얼마인가?

Solution 온도의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.



각 구간에서 정의된 함수를 적분하여 보자. 구간 $[0, 6]$ 에서는

$$\begin{aligned}\int_0^6 \sin\frac{\pi t}{12}\,dt &= \frac{12}{\pi}\Big[-\cos\frac{\pi t}{12}\Big]_0^6 \\ &= \frac{12}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = \frac{12}{\pi}\end{aligned}$$

이고 구간 $[6, 15]$ 에서는

$$\begin{aligned}\int_6^{15} \cos\pi\left(\frac{t-6}{9}\right)dt &= \int_0^9 \cos\pi\left(\frac{t}{9}\right)dt \\ &= \frac{9}{\pi}\sin\pi\left(\frac{t}{9}\right)\Big|_0^9 \\ &= 0\end{aligned}$$

이다. 마지막으로 구간 $[15, 24]$ 에서

$$\begin{aligned}\int_{15}^{24} \cos \pi \left(\frac{t-15}{18} \right) dt &= \int_0^9 \cos \pi \left(\frac{t}{18} \right) dt \\ &= \frac{18}{\pi} \sin \pi \left(\frac{t}{18} \right) \Big|_0^9 \\ &= \frac{18}{\pi} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) \ = \ \frac{18}{\pi}\end{aligned}$$

을 얻는다. 이 결과를 이용하면 평균기온은

$$\begin{aligned}\frac{1}{24} \int_0^{24} f(t)\, dt &= 20 + \frac{1}{24} (-6 \frac{12}{\pi} + 6 \frac{18}{\pi}) \\ &= 20 + \frac{3}{2\pi} \ \approx \ 20.5\end{aligned}$$

이므로 이 날의 평균기온은 $20.5\,^\circ C$ 이다. □

정적분의 평균값정리

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ 라고 하면 $y = F(x)$ 는 미분가능한 함수이다. 따라서 평균값정리에 의하면

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c)$$

인 c 가 a 와 b 사이에 존재한다. 그런데 $F'(c) = f(c)$ 이므로 이 결과는 다음과 같이 쓸 수 있다.

정적분의 평균값정리

연속함수 $y = f(x)$ 에 대하여

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

인 c 가 a 와 b 사이에 존재한다.

Note 이 결과를 연속함수 $y = f(x)$ 의 평균 $\overline{f}$ 와 연결하면

$$\overline{f} = f(c)$$

인 c 가 a 와 b 사이에 존재하는 것을 알 수 있다.

제 7 장

적분의 기법과 응용

제 1 절 치환적분

미적분의 기본정리에서 볼 수 있듯이 정적분을 구하기 위해서는 부정적분을 구하는 것이 필수적이다. 미분과 적분은 역작용으로 이해할 수 있으므로 모든 미분법칙에는 대응되는 적분법칙이 있다. 예를 들어, **치환적분법(integration by substitution)**은 미분의 연쇄법칙에 대응하는 방법이다. 곱의 미분에 대응하는 적분법은 **부분적분법(integration by parts)**이라고 불린다.

정적분의 치환적분법

이제 정적분 $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ 를 구하는 방법을 알아보기로 하자. $F(u)$ 가 $f(u)$ 의 한 부정적분이라면 부정적분의 치환적분법에 의하면 $u = g(x)$ 일 때,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) = F(g(x))$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\end{aligned}$$

을 얻는다.

정적분의 치환적분법

구간 (a,b) 에서 g' 이 연속이고 f 가 $u = g(x)$ 의 치역에서 연속이면 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

보기 1 (6장 1절) 보기 6 의 결과를 이용하여 다음 정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Solution

(a) $u = g(x) = x - 1$ 이라고 하면 $g(1) = 0,\ g(2) = 1$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx &= \int_0^1 (u+1)\sqrt{u}\,du \\ &= \int_0^1 u^{3/2} + u^{1/2}\,du \\ &= \left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}\end{aligned}$$

을 얻는다.

(b) $u = g(x) = \dfrac{1}{x}$ 이라고 하면 $g(\frac{1}{\pi}) = \pi,\ g(\frac{2}{\pi}) = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx &= -\int_{\pi}^{\pi/2} \sin u\,du \\ &= \cos u\Big|_{\pi}^{\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 1\end{aligned}$$

을 얻는다.

(c) $u = g(x) = \log x$ 로 놓으면 $g(1) = 0,\ g(e) = 1$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx &= \int_0^1 u\,du \\ &= \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다.

(d) $u = g(x) = \sqrt{x}$ 로 놓으면 $g(1) = 1,\ g(4) = 2$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 e^u\,du \\ &= \frac{1}{2}e^u\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^2 - e)\end{aligned}$$

이다. □

대칭함수의 적분

적분구간이 원점에 대하여 대칭인 경우 즉, 적분구간이 $[-a, a]$ 인 경우 피적분함수의 대칭성을 이용하면 정적분을 간단히 구할 수 있다. 연속함수 f 에 대하여 정적분의 성질을 사용하면

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

이다. 마지막 식의 첫 번째 정적분에서 $u = -x$ 로 치환하면 $du = -dx$ 이고 $x = -a$ 일 때 $u = a$ 가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}-\int_0^{-a} f(x)\,dx &= -\int_0^a f(-u)(-du) \\ &= \int_0^a f(-u)\,du\end{aligned}$$

가 성립한다. $y = f(x)$ 가 우함수이면 즉,

$$f(-u) = f(u)$$

이면 $\int_0^a f(-u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$ 이므로

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

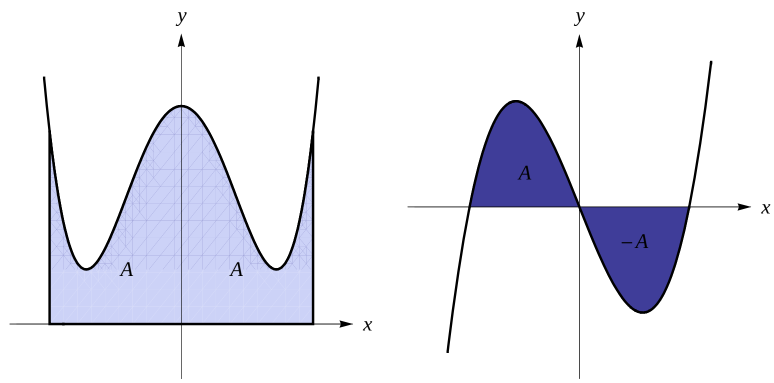
이다. 반면에 $y = f(x)$ 가 기함수이면 즉,

$$f(-x) = -f(x)$$

이면 $\int_0^a f(-u)\,du = -\int_0^a f(u)\,du$ 이므로

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

이다.



대칭함수의 정적분

구간 $[-a,a]$ 에서 연속인 함수 f 에 대하여

- f 가 우함수이면$(f(-x)=f(x))$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
- f 가 기함수이면$(f(-x)=-f(x))$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

보기 2 다음 정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$

Solution (a) $y=x^n$ 은 n 이 홀수이면 기함수, 짝수이면 우함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\,dx &= 2\int_0^2(x^4+x^2+1)\,dx \\ &= \frac{2}{5}2^5+\frac{2}{3}2^3+2\cdot 2 \\ &= \frac{332}{15}\end{aligned}$$

을 얻는다.

(b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 라고 하면 f 는 모든 실수에 대하여 연속이고

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{1+(-x)^2}=-\frac{\sin x}{1+x^2}$$

이므로 f 는 기함수이다. 따라서

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}\,dx=0$$

이다. □

삼각함수와 적분

삼각함수의 반각공식은 배각공식으로부터 쉽게 얻을 수 있다.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

이 공식은 삼각함수의 적분에서 중요한 역할을 하므로 기억해 두는 것이 좋다.

보기 3 다음 값을 구하여라.

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$$

Solution $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ 이므로 $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}|\sin x|$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sin x\, dx \\ &= \sqrt{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/4} \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

이다. □

성취도평가 (2007년 수시 3번)

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx = \boxed{}$ 이다.

$\cos^3 x$ 나 $\sin^2 x \cos^2 x$ 와 같은 삼각함수의 고차식의 부정적분은 삼각함수의 항등식을 적절히 이용하여 구한다. 가장 자주 쓰이는 항등식은

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

이다. 이 식을 이용하면 코사인함수를 사인함수로 바꾸어 쓸 수 있다. 또한

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x$$

임에 유의하여 적절한 치환법칙이 무엇인지 찾아낸다.

보기 4 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx$ (b) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

Solution

(a) $\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$ 이므로 $\sin x = t$ 로 치환하자. $\cos x dx = dt$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int (1-t^2)\, dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

이다.

(b) $\cos x = t$ 로 치환하면 $-\sin x dx = dt$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx &= \int (-\sin^2 x)\cos^2 x(-\sin x)dx \\ &= \int (t^2-1)t^2\, dt \\ &= \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C \\ &= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

이다. □

보기 4 의 경우처럼 사인이나 코사인의 차수가 하나라도 홀수인 경우 치환법칙에 의하여 부정적분을 항상 구할 수가 있다. 그러나 차수가 모두 짝수인 경우에는 치환에 의하여 부정적분을 구하는 것이 어려워진다. 이런 경우는 삼각함수의 반각공식을 이용하여 차수를 낮춘 후 구한다.

보기 5 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$ (b) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

Solution

(a) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

을 얻는다.

(b) 반각공식을 반복해서 이용하면

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\frac{1+\cos 2x}{2}\, dx \\ &= \int \frac{1-\cos^2 2x}{4}\, dx \\ &= \int \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C\end{aligned}$$

□

무리함수의 적분*

삼각함수 치환을 이용하면

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}$$

등의 무리함수를 포함하는 부정적분을 구하는 것이 가능하다. 이러한 함수들의 부정적분을 구하기 위해서는 제곱근 아래의 식

$$a^2 - x^2, \quad x^2 - a^2, \quad a^2 + x^2$$

을 제곱식으로 만들어야 하는데 이는 삼각함수의 항등식

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

과 양변을 $\cos^2 x$ 로 나누어 얻는 식

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

을 이용하면 가능하다. 즉,

- $x = a\sin\theta$ 로 치환하면

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1 - \sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta$$

- $x = a\sec\theta$ 로 치환하면

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta$$

- $x = a\tan\theta$ 로 치환하면

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2(1 + \tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta$$

이 되므로 제곱근을 제거할 수 있다.

보기 6 다음 식이 성립함을 보여라.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x + C$　　(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \arctan x + C$

Solution

(a) 제곱근 아래가 제곱이 되도록

$$x = \sin\theta \; (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$$

로 치환하면 $dx = \cos\theta d\theta$ 이고

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \cos\theta$$

이다. 따라서

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\cos\theta}\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \int 1\,d\theta \\
&= \theta + C = \arcsin x + C
\end{aligned}
$$

를 얻는다.

(b) $x = \tan\theta \; (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ 로 치환하면 $dx = \sec^2\theta d\theta$ 이고

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

이므로

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{\sec^2\theta}\,\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \int 1\,d\theta \\
&= \theta + C = \arctan x + C
\end{aligned}
$$

를 얻는다. □

위 보기의 결과는 미분을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

역삼각함수의 도함수

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \quad \Leftrightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \quad \Leftrightarrow \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

보기 7 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

Solution

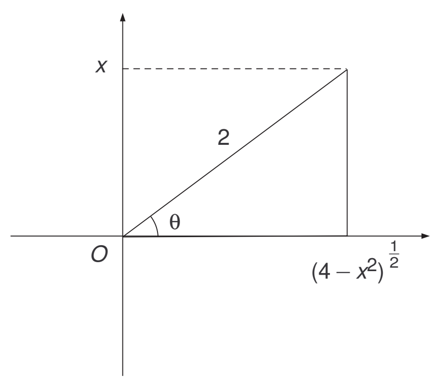
(a) $x = 2\sin\theta,\; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 로 치환하면 $dx = 2\cos\theta\,d\theta$ 이고

$$4 - x^2 = 4 - 4\sin^2\theta = 4\cos^2\theta$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{8\sin^2\theta\cos\theta}{2\cos\theta}\,d\theta \\ &= 4\int \sin^2\theta\,d\theta \\ &= 4\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= 2\theta - \sin 2\theta + C \\ &= 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + C\end{aligned}$$

이다. $\sin\theta = x/2$ 이므로 빗변이 2이고 높이가 x 인 직각삼각형을 생각해 보면 밑변의 길이는 $\sqrt{4-x^2}$ 이 된다.



그러므로

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{4-x^2}/2$$

을 얻는다. $\theta = \arcsin\frac{x}{2}$ 이므로

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

이다.

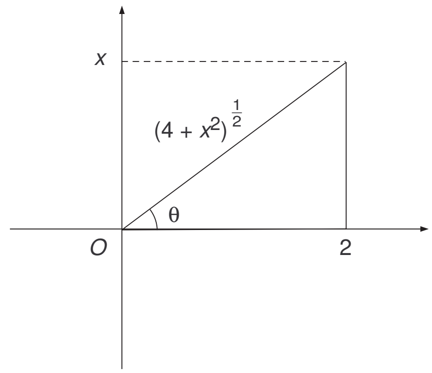
(b) $x = 2\tan\theta\ (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ 로 치환하면 $dx = 2\sec^2\theta d\theta$ 이고

$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4\sec^2\theta$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx &= \int \frac{2\sec^2\theta}{2\sec\theta}\,d\theta \\ &= \int \sec\theta\,d\theta \\ &= \log|\sec\theta + \tan\theta| + C\end{aligned}$$

이다. $\tan\theta = \frac{x}{2}$ 이므로 밑변이 2 이고 높이가 x 인 직각삼각형을 생각해 보면 빗변의 길이는 $\sqrt{4+x^2}$ 이다.



따라서

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$$

이고

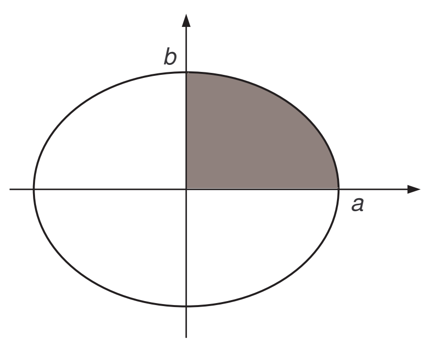
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx &= \log\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C \\ &= \log(\sqrt{4+x^2}+x) + C \end{aligned}$$

이다. □

보기 8 다음 식으로 주어진 타원의 넓이를 구하여라. 단, $a > 0, b > 0$ 이다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solution 주어진 타원은 x 축과 y 축에 대하여 대칭이므로 타원의 넓이는 1사분면에 있는 영역의 넓이를 4 배 한 것과 같다.



$y \geq 0$ 일 때 1 사분면에서 타원의 방정식을 y 에 대하여 풀어 쓰면

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a$$

이다. 따라서 타원의 넓이는

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

로 쓸 수 있다. $x = a\sin\theta$ 로 치환하면 $x = 0$ 일 때 $\theta = 0$, $x = a$ 일 때 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 이다. 또한,

$$dx = a\cos\theta d\theta$$

이므로

$$\begin{aligned} A &= 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\ d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\ d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\ d\theta \\ &= 2ab\Big[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

을 얻는다. 특히 $a = b = r$ 이면 반지름이 r 인 원의 넓이는 πr^2 임을 알 수 있다. □

제 2 절 부분적분법

미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 두 함수의 곱에 대한 미분은

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

으로 주어진다.

<u>부분적분법</u>

양변을 부정적분을 이용하여 나타내면

$$f(x)g(x) = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$$

이 된다. 따라서 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

이 공식에 의한 적분법을 **부분적분법(integration by parts)**이라고 한다.

<u>부분적분법</u>

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Note 부분적분법은 다음 형태로 바꾸어 쓰면 기억하기가 더 좋다.

$$u = f(x), \qquad v = g(x)$$

라고 놓으면

$$du = f'(x)\,dx, \qquad dv = g'(x)\,dx$$

이다. 따라서 치환적분법에 의하면 부분적분법은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

보기 1 다음 부정적분을 구하여라.

(a) $\int x \sin x\,dx$ (b) $\int xe^x\,dx$ (c) $\int x \log x\,dx$

Solution

(a) $u = x, dv = \sin x\,dx$ 라고 하면

$$du = dx, v = -\cos x$$

이다. 따라서 부분적분법에 의하면

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

(b) $u = x, dv = e^x\,dx$ 라고 하면 $du = dx, v = e^x$ 이다. 따라서 부분적분법에 의하면

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= x\cdot e^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

(c) $u = \log x, dv = xdx$ 라고 하면 $du = \frac{1}{x}\,dx, v = \frac{1}{2}x^2$ 이다. 따라서 부분적분법에 의하면

$$\begin{aligned}\int x\log x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\cdot(\log x) - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

□

성취도평가 (2007년 정시 4번)

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-\frac{m}{n}k} = \boxed{}$$ 이다.

성취도평가 (2006년 수시 2번)

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = \boxed{}$$ 이다.

Note 부분적분법은 두 함수의 곱을 적분할 때 유용한 방법이다. 그러나 하나의 함수도 두 함수의 곱으로 생각할 수 있다. 즉,

$$f(x) = 1\cdot f(x) = (x)'\cdot f(x)$$

로 놓으면 하나의 함수의 부정적분도 부분적분법을 이용하여 구할 수 있다.

보기 2 다음 적분을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (b) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$

Solution

(a) $\log x = (x)' \log x$ 로 생각하고 $u = \log x,\ dv = dx$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\int \log x\, dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \;=\; x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$

를 얻는다.

(b) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 임을 기억하자. $u = \arctan x,\ dv = dx$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\int \arctan x\, dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \;=\; x\arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C\end{aligned}$$

를 얻는다. □

성취도평가 (2008년 정시 5번)

극한값

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\{n(n+1)\cdots(n+n)\}^{\frac{1}{n}} - \ln n\right]$$

은 $\boxed{}$ 이다.

성취도평가 (2006년 정시 8번)

두 곡선 $y = cx^p$, $y = \ln x$ 가 접하도록 하는 상수 c 를 구하고, 이때 접점의 좌표 및 두 곡선과 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라. (단, $p > 0$)

성취도평가 (2009년 수시 4번)

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A x^2 e^{-x}\, dx = \boxed{}.$$

두 함수의 곱을 적분하는데 한 함수가 x 의 다항식이면 부분적분법에 의하여 차수가 하나씩 내려간다. 따라서 부분적분을 반복하면 결국 한 함수의 적분 꼴을 계산하면 되는 형태를 얻게 된다. 그러나 두 함수 모두 다항식이 아니면 부분적분법을 사용하여도 피적분함수가 더 단순한 형태로 바뀌지 않는다. 그러나 피적분함수가 지수함수나 삼각함수의 형태이면 부분적분을 반복하면 같은 형태의 피적분함수를 얻게 되어 부정적분을 구할 수 있다.

보기 3 $\int e^x \sin x\, dx$ 를 구하여라.

Solution　e^x 나 $\sin x$ 는 모두 미분에 의하여 더 간단한 형태로 바뀌지 않는다. 그러나 우선

$$u = e^x, \qquad dv = \sin x\, dx$$

로 치환하자. 그러면 $du = e^x\, dx,\ v = -\cos x$ 이고 부분적분법에 의하여

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx \tag{7.1}$$

를 얻는다. 오른쪽 부정적분을 구하기 위하여 다시

$$u = e^x, \qquad dv = \cos x\, dx$$

로 치환하자. 그러면 $du = e^x\, dx,\ v = \sin x$ 이고

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

를 얻는다. 이 식을 식 (7.1) 에 대입하면

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

이다. 이 식을 정리하면

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

이다. □

Note　위 보기에서 $u = \sin x,\ dv = e^x\, dx$ 로 놓고 풀어도 같은 결과를 얻는다.

보기 4 다음 적분을 구하여라.

$$\int \sec^3 x\, dx$$

Solution　$u = \sec x,\ dv = \sec^2 x dx$ 이라고 하면

$$du = \tan x \sec x dx, \quad v = \tan x$$

이므로

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^3 x\, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\tan x \sec x) \tan x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx \end{aligned}$$

이다. 마지막 식의 피적분함수는

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

에서

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec x\, dx &= \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx \\ &= \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx \\ &= I - \log|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

가 되는 것을 알 수 있다. 따라서

$$I = \frac{1}{2}[\tan x \sec x + \log|\sec x + \tan x|] + C$$

을 얻는다. □

위의 보기에 나오는 적분은 아주 복잡한 형태를 갖고 있지만 의외로 곡선의 길이 등을 구할 때 자주 등장하는 함수이다.

보기 5 쌍곡선

$$x^2 - y^2 = 1$$

과 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

Solution 주어진 영역은 $1 \le x \le 2$ 일 때 두 곡선

$$y = \sqrt{x^2 - 1}, \quad y = -\sqrt{x^2 - 1}$$

사이의 넓이이다. 따라서

$$\int_1^2 [\sqrt{x^2 - 1} - (-\sqrt{x^2 - 1})]\, dx = 2\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

을 구하면 된다. $x = \sec\theta$ 로 치환하면

$$x = 1 \Rightarrow \theta = 0, \quad x = 2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

이고

$$x^2 - 1 = \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta, \quad dx = \sec\theta\tan\theta d\theta$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta\sec\theta\tan\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^3\theta - \sec\theta) d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}[\tan x \sec x + \log|\sec x + \tan x|] - \log|\sec x + \tan x|\right)\Big|_0^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{1}{2}[\tan x \sec x - \log|\sec x + \tan x|]\right)\Big|_0^{\pi/3} \\ &= \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log(2 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 주어진 영역의 넓이는

$$2(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})) \approx 2.15$$

이다. □

성취도평가 (2009년 정시 10번)

좌표평면에서 중심의 좌표가 $(0, t)$ 인 원이 쌍곡선

$$x^2 - y^2 = 1$$

에 접할 때, 원의 반지름 $r(t)$ 를 구하고 적분

$$\int_0^{\sqrt{2}} r(t)\,dt$$

의 값을 구하시오.

정적분의 부분적분법

$f(x)g(x) = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$ 이므로 미적분의 기본정리를 적용하면

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$$

이다. 따라서 정적분의 부분적분법은 다음과 같이 쓸 수 있다.

정적분의 부분적분법

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

보기 6 다음 정적분의 값을 구하여라.

(a) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\,dx$

Solution

(a) 보기 1 의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx &= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx \\ &= (-\pi)(-1) + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi\end{aligned}$$

를 얻는다.

(b) $u = e^{2x},\ dv = \sin x\, dx$ 라고 놓으면

$$du = 2e^{2x}\, dx, \qquad v = -\cos x$$

이다. 따라서 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx &= e^{2x}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2e^{2x}(-\cos x)\, dx \\ &= 1 + 2\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x\, dx\end{aligned}$$

을 얻는다. 마지막 정적분에 다시 부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x\, dx &= e^{2x}(\sin x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2e^{2x}(\sin x)\, dx \\ &= e^{\pi} - 2\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx\end{aligned}$$

를 얻는다. $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx$ 라고 하면 위의 두 식으로부터

$$\begin{aligned}A &= 1 + 2\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x\, dx \\ &= 1 + 2e^{\pi} - 4A\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서

$$A = \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx = \frac{1}{5}(1 + 2e^{\pi})$$

이다. □

성취도평가 (2009년 정시 문제 5번)

실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 두 번 미분 가능하고 또한 $f''(x)$ 가 연속이라 가정하자. $f(0) = f'(0) = 1$ 이 성립하고, 모든 x에 대해서 $f(x) + f(1-x) = 0$ 이 성립하면, 적분 $\int_0^1 (1-x)^2 f''(x)\, dx$ 의 값은 $\boxed{}$ 이다.

Note 위 보기 (b) 의 방법을 이용하면 다음과 같이 일반화된 부정적분을 구할 수 있다. 그 증명은 연습문제로 남긴다.

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C \tag{7.2}$$

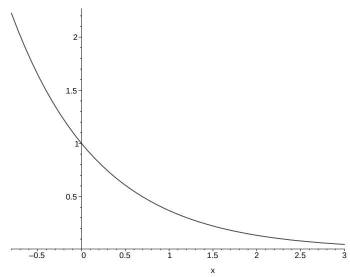
$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C \tag{7.3}$$

제 3 절 특이적분

지금까지 우리는 **유한한 닫힌 구간** $[a,b]$ 에서 정의된 **연속인 함수** f 에 대하여 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 을 정의하였다. 이 절에서는 두 가지 조건 중에서 적어도 하나가 성립하지 않는 경우의 정적분을 정의한다. 이러한 경우의 정적분을 **특이적분(improper integral)**이라 부른다.

무한구간에서 정의된 특이적분

1 사분면에서 곡선 $y = e^{-x}$ 아래 있는 영역을 생각해 보자.



이 영역의 넓이는 구간 $[0,\infty)$ 에서 정의된 정적분의 값으로 이해할 수 있다. 임의의 양수 t 에 대하여 구간 $[0,t]$ 에서의 넓이를 $A(t)$ 라고 하자. 그러면 정적분의 정의에 의하여

$$A(t) = \int_0^t e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^t = 1 - e^{-t}$$

이다. $t \to \infty$ 일 때, $A(t)$ 의 값은 1 로 수렴한다. 따라서 빗금친 부분의 넓이는 1 이라고 할 수 있다.

일반적으로 무한 구간 $[a,\infty)$ 에서 정의된 연속함수 f 에 대하여 $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ 가 존재하면 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

이 극한값이 존재할 때 특이적분 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 는 **수렴한다(converge)**고 말한다. 극한값이 존재하지 않을 때는 **발산한다(diverge)**고 한다. 특이적분 $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ 도 비슷한 방법으로 정의한다.

무한구간에서의 특이적분

- 무한구간 $[a, \infty)$ 에서 정의된 연속함수 f 에 대하여 특이적분 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 는 다음과 같이 정의한다.
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$
- 무한구간 $(-\infty, b]$ 에서 정의된 연속함수 f 에 대하여 특이적분 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ 는 다음과 같이 정의한다.
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$
위의 두 극한값이 존재할 때, 특이적분 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 과 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ 는 **수렴한다**고 한다. 수렴하지 않는 경우는 **발산한다**고 한다.
- 임의의 점 a 에 대하여 특이적분 $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ 와 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 가 수렴할 때, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ 를 다음과 같이 정의한다.
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

보기 1 특이적분 $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ 가 수렴하는지 판단하고 수렴한다면 적분값을 구하여라.

Solution $u = \log x$ 로 치환하면 $du = \frac{dx}{x}$ 이다. 또한 $x = e^u$ 이므로
$$\int_1^t \frac{\log x}{x^2}dx = \int_0^{\log t}\frac{u}{e^u}du = \int_0^{\log t} ue^{-u}du$$
을 얻는다. 부분적분을 이용하면
$$\begin{aligned}\int ue^{-u}du &= -ue^{-u} - \int(-e^{-u})du = -ue^{-u} + \int e^{-u}du \\ &= -ue^{-u} - e^{-u} + C\end{aligned}$$
이다. 따라서
$$\begin{aligned}\int_0^{\log t} ue^{-u}du &= \Big[-ue^{-u} - e^{-u}\Big]_0^{\log t} \\ &= -(\log t)e^{-\log t} - e^{-\log t} + 1 \\ &= -\frac{\log t}{t} - \frac{1}{t} + 1\end{aligned}$$
이고 이 값은 $t\to\infty$ 일 때 1 로 수렴한다. 따라서 다음 결과를 얻는다.
$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\log x}{x^2}dx = 1 \qquad \square$$

보기 2 다음 특이적분의 값을 구하여라.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} \, dx$

Solution (a) $u = x,\ v' = e^x$ 이라 하자. 그러면 $u' = 1,\ v = e^x$ 이므로 부분적분법을 사용하면

$$\int_t^0 xe^x \, dx = xe^x\Big|_t^0 - \int_t^0 e^x \, dx = -te^t - 1 + e^t$$

를 얻는다. $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$ 이고 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = 0$$

을 얻는다. 그러므로 특이적분의 정의에 의하여

$$\int_{-\infty}^0 xe^x \, dx = \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t) = -1$$

을 얻는다.

(b) $f(x) = xe^{-x^2}$ 이라고 하면 f 는 기함수이다. 그러므로 $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \, dx$ 가 수렴한다면 주어진 특이적분의 값은 0 이다. 이제 $\displaystyle\int_0^\infty f(x) \, dx$ 이 수렴하는지 살펴보자. $x^2 = u$ 로 치환하면 $2xdx = du$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^t xe^{-x^2} \, dx &= \int_0^{t^2} \frac{1}{2}e^{-u} \, du \\ &= -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_0^{t^2} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-t^2}\right)\end{aligned}$$

이고 이 값은 $t \to \infty$ 일 때 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다. 즉,

$$\int_0^\infty f(x) \, dx = \frac{1}{2}$$

이고 구하는 특이적분의 값은 0 이 된다. □

보기 3 다음 특이적분이 수렴하는 p 의 범위를 구하여라.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} \, dx$$

Solution $p = 1$ 일 때

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \Big[\log x\Big]_1^t = \log t \to \infty$$

이므로 특이적분은 발산한다. $p \neq 1$ 이면

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x^p}dx &= \int_1^t x^{-p}dx = \left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_1^t \\ &= \frac{1}{1-p}(t^{1-p}-1)\end{aligned}$$

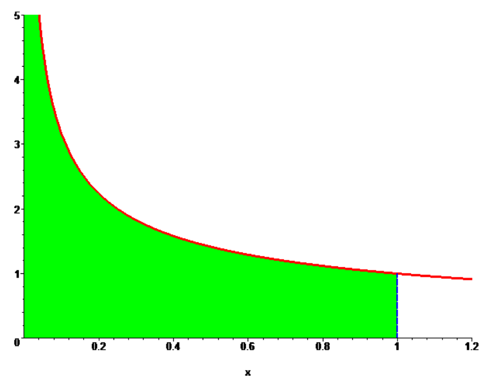
이다. $p > 1$ 이면 $1-p < 0$ 이므로 $t \to \infty$ 일 때 $t^{1-p} \to 0$ 이다. 그러므로

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}, \quad p > 1$$

이다. 반면 $p < 1$ 이면 $t \to \infty$ 일 때 $t^{1-p} \to \infty$ 이므로 특이적분은 발산한다. 따라서 주어진 특이적분이 수렴하는 p 의 범위는 $p > 1$ 이다. □

불연속함수의 특이적분

특이적분의 다른 형태는 피적분함수가 유한한 구간에서 정의되지만 구간의 한점에서 불연속인 경우에 정의된다. 예를 들어, 1 사분면에서 곡선 $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 와 직선 $x = 1$ 에 의하여 만들어지는 영역을 생각해 보자.



우선 $0 < t < 1$ 일 때, 구간 $[t, 1]$ 에서 영역의 넓이를 구하면 다음과 같다.

$$\int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}}\Big|_t^1 = 2(\sqrt{1}-\sqrt{t})$$

주어진 영역의 넓이는 $t \to 0+$ 일 때의 극한값으로 주어진다. 즉,

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{t\to 0+} 2(\sqrt{1}-\sqrt{t}) = 2$$

이다. 일반적으로 함수 $f(x)$ 가 구간 $(a, b]$ 에서 연속이고 $x = a$ 에서 불연속이면[1] 특이적분 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)\,dx$$

[1] 엄밀히 말하자면 $x = a$ 에서 불연속이거나 정의되지 않으면

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b)$ 에서 연속이고 $x=b$ 에서 불연속인 경우도 같은 방법으로 정의한다.

불연속함수의 특이적분

- 함수 $f(x)$ 가 구간 $(a,b]$ 에서 연속이고 $x=a$ 에서 불연속이면 특이적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)\,dx$$

- 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b)$ 에서 연속이고 $x=b$ 에서 불연속이면 특이적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)\,dx$$

위의 두 극한값이 존재할 때, 특이적분 $\int_a^b f(x)dx$ 은 **수렴한다(converge)**고 한다. 수렴하지 않는 경우는 **발산한다(diverge)**고 한다.

- f 가 $x=c(a<c<b)$ 에서 불연속이고 특이적분 $\int_a^c f(x)dx$ 와 $\int_c^b f(x)dx$ 가 수렴하면 $\int_a^b f(x)dx$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c (x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

보기 4 다음 특이적분이 수렴하는지 살펴보아라.

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ (b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$

Solution (a) $x=0$ 에서 불연속이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+}\log x\Big|_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0+}(-\log t) = \infty\end{aligned}$$

이다. 따라서 주어진 특이적분은 발산한다.

(b) 특이적분 $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ 이 발산하므로 주어진 특이적분 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ 도 발산한다. □

Note 위 보기의 (b) 에서 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 는 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = 0$$

이라고 결론을 내려서는 안된다. 불연속점 $x = c$ 가 구간 안에 있는 경우, 특이적분 $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ 와 $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ 가 모두 수렴하는 경우에만 특이적분 $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ 는 수렴한다고 정의한다.

보기 5 $\displaystyle\int_0^1 \log x\, dx$ 을 구하여라.

Solution $f(x) = \log x$ 는 $x = 0$ 에서 정의되지 않으며 $\lim_{x\to 0+} \log x = -\infty$ 이다. 따라서

$$\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \log x\, dx$$

이다. $u = \log x$, $dv = dx$ 라고 하고 부분적분을 이용하면 $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_t^1 \log x\, dx &= x\log x\Big|_t^1 - \int_t^1 x\frac{1}{x}\, dx \\ &= (x\log x - x)\Big|_t^1 = t - 1 - t\log t \end{aligned}$$

을 얻는다. $t \to 0+$ 일 때 극한값을 얻기 위하여 로피탈의 정리를 이용하면

$$\lim_{t\to 0+} t\log t = \lim_{t\to 0+} \frac{\log t}{1/t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1/t}{-1/t^2} = 0$$

임을 알 수 있다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{t\to 0+} (t - 1 - t\log t) = -1 \qquad \square$$

보기 6 $\displaystyle\int_{-1}^2 x^{-2/3}\, dx$ 을 구하여라.

Solution 함수 $f(x) = x^{-2/3}$ 는 $x = 0$ 에서 정의되지 않으며 수직점근선을 갖는다. 따라서

$$\int_{-1}^2 x^{-2/3}\, dx = \int_{-1}^0 x^{-2/3}\, dx + \int_0^2 x^{-2/3}\, dx$$

을 계산하여야 한다.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x^{-2/3}\,dx &= \lim_{t\to 0-}\int_{-1}^{t} x^{-2/3}\,dx \\
&= \lim_{t\to 0-}\frac{1}{1-2/3}x^{1/3}\Big|_{-1}^{t} \\
&= \lim_{t\to 0-} 3(t^{1/3}-(-1)^{1/3}) = 3 \\
\int_{0}^{2} x^{-2/3}\,dx &= \lim_{t\to 0+}\int_{t}^{2} x^{-2/3}\,dx \\
&= \lim_{t\to 0+}\frac{1}{1-2/3}x^{1/3}\Big|_{t}^{2} \\
&= \lim_{t\to 0+} 3(2^{1/3}-(t)^{1/3}) = 3(2^{1/3})
\end{aligned}$$

이므로 다음 값을 얻는다.

$$\int_{-1}^{2} x^{-2/3}\,dx = 3+3(2^{1/3}) = 3(1+2^{1/3}) \qquad \square$$

특이적분의 비교판정법

특이적분의 정확한 값을 구하는 것은 대부분의 경우 아주 어렵거나 불가능하다. 이런 경우 특이적분의 수렴여부는 다른 함수의 특이적분과 비교하여 판정할 수 있다. 이러한 판정법을 특이적분에 대한 **비교판정법(comparison test)**이라고 한다.

비교판정법

두 연속함수 f, g 가 $x \geq a$ 일 때 $f(x) \geq g(x) \geq 0$ 이라고 하자. 그러면

- $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 가 수렴하면 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 도 수렴한다.
- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 가 발산하면 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 도 발산한다.

양의 값을 갖는 함수의 적분은 함수의 그래프와 x 축 사이의 넓이로 이해할 수 있으므로 비교판정법은 작은 함수의 넓이가 큰 함수의 넓이보다 작다는 사실로부터 유추할 수 있다.

보기 7 다음 특이적분의 수렴여부를 판정하여라.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

Solution (a) $0 < x < 1$ 이면 $0 \le \sin x \le x$ 이므로

$$0 \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x} \tag{7.4}$$

이다.

$$\lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+} \log x\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+}(-\log(t)) = \infty$$

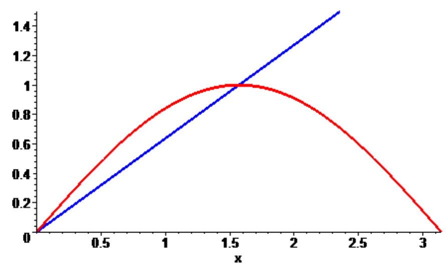
이므로 비교판정법에 의하여 주어진 특이적분은 발산한다.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 는 수렴하지만 이 경우 부등식 (7.4) 는 비교판정법에서는 아무 역할을 하지 못한다. 작은 함수가 수렴한다고 해서 큰 함수가 수렴한다고는 할 수 없기 때문이다. 따라서 다른 방향의 부등식이 필요하다. $y = \sin x$ 는 구간 $[0, \pi/2]$ 에서

$$(\sin x)'' = -\sin x \le 0$$

이므로 위로 볼록하다. 따라서 $y = \sin x$ 의 그래프는 $[0, 0]$ 과 $[\pi/2, \sin(\pi/2)] = [\pi/2, 1]$ 를 잇는 직선 $y = \dfrac{2}{\pi}x$ 보다 위에 있다. 즉, 다음 부등식이 성립한다.

$$\sin x \ge \frac{2}{\pi}x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



따라서 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \le \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 이고

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 < \infty$$

이므로 주어진 특이적분은 비교판정법에 의하여 수렴한다. □

제 4 절 부피

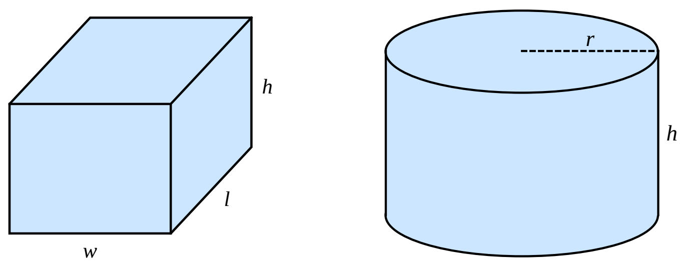
가로, 세로, 높이가 각각 w, l, h 인 직육면체의 부피는

$$V = wlh$$

이다. 또한 반지름이 r, 높이가 h 인 원기둥의 부피는

$$V = \pi r^2 h$$

이다.



직육면체나 원기둥과 같이 윗면과 밑면이 합동이고 두 면을 수직으로 연결한 입체도형을 **기둥면**(**cylinder**)이라고 한다. 기둥면의 부피는 밑면의 넓이 A 와 높이 h 의 곱으로 주어진다.

$$V = A \cdot h$$

부피

이 사실을 이용하여 일반적인 입체도형의 부피를 구하여 보기로 한다. $x = a$ 와 $x = b$ 사이에 있는 입체도형 S 의 x 축에 수직인 단면의 넓이가 연속함수 $A(x)$ 로 주어졌다고 하자. 구간 $[a, b]$ 을 n 등분하여 양 끝점과 각 분점의 x 좌표를

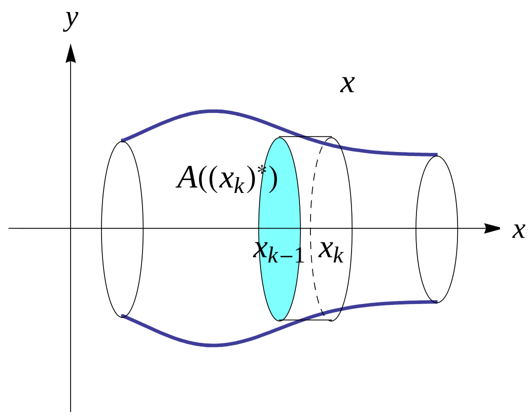
$$x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n(= b)$$

이라 하고 부분구간의 길이를

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

이라 하자. 그러면 k 번째 구간의 입체 S_k 의 부피는 단면적이 $A(x_k^*)$ $(x_k^* \in [x_{k-1}, x_k])$ 이고 높이는 Δx 인 기둥면의 부피로 근사시킬 수 있다.

$$V(S_k) \approx A(x_k^*)\Delta x$$



따라서 입체의 부피는 이 부분기둥들의 부피의 합으로 근사시킬 수 있다.

$$V \approx V_n = \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x$$

n 이 커질수록 근사값은 좋아지며 그 극한값이 존재하는데 그 극한값으로 입체의 부피를 정의한다.

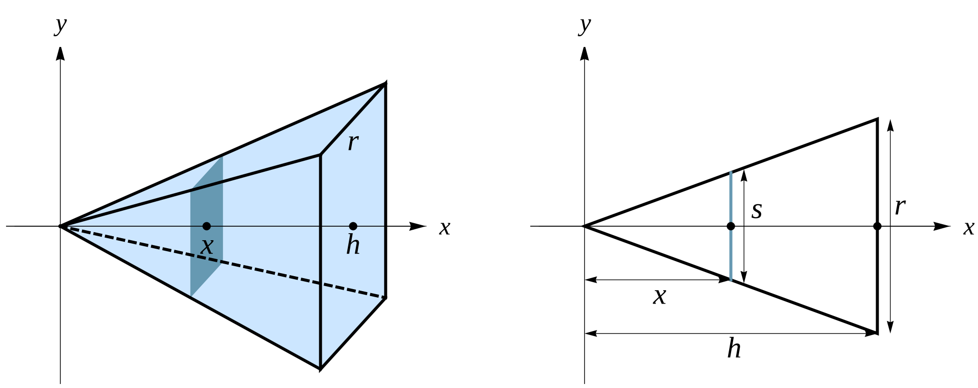
입체의 부피

$x = a$ 와 $x = b$ 사이에 있는 입체도형 S 의 x 축에 수직인 단면의 넓이를 $A(x)$ 라고 하자. $A(x)$ 가 연속함수이면 S 의 부피는 다음과 같다.

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

보기 1 밑면의 한 변이 r 인 정사각형이고 높이가 h 인 **사각뿔(pyramid)**의 부피를 구하여라.

Solution 사각뿔을 다음과 같이 그리자.



x 에서 단면의 한 변의 길이를 s 라고 하면 삼각형의 닮음비에서

$$h : r = x : s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{rx}{h}$$

이다. 따라서 단면의 넓이는

$$A(x) = \frac{r^2x^2}{h^2}$$

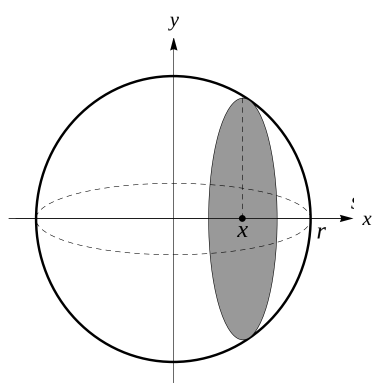
이고 사각뿔의 부피는

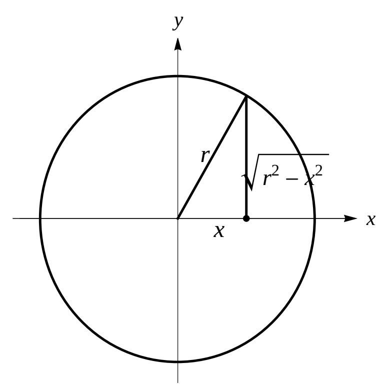
$$\begin{aligned}\int_0^h A(x)\,dx &= \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\,dx \\ &= \frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{1}{3}r^2h\end{aligned}$$

이다.[2] □

보기 2 반지름이 r 인 구의 부피를 구하여라.

Solution 구의 중심을 원점으로 잡자. x 에서의 단면은 원이고 이 원의 반지름은 $\sqrt{r^2 - x^2}$ 이다.





단면의 넓이는

$$A(x) = \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

이다. 따라서 구의 부피는

$$\begin{aligned}V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \;=\; 2\pi\Big[r^2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^r \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

이 된다. □

[2] 일반적으로 기둥면과 같은 모양의 밑면을 갖는 뿔면의 부피는 기둥면 부피의 $\frac{1}{3}$ 이다.

회전체의 부피 I

구는 원을 회전하면 얻어진다. 이렇게 곡선을 회전하여 얻어지는 회전체의 부피는 단면이 항상 원이므로 단면의 넓이를 쉽게 구할 수 있다. 다시 말해서, 곡선 $y = f(x)$, $a \le x \le b$ 를 x 축으로 회전하였을 때 생기는 회전체의 x 에서의 단면적은

$$A(x) = \pi[f(x)]^2$$

이고 이 회전체의 부피는

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

가 된다.

성취도평가 (2007년 정시 12번)

좌표공간에서 $x^2 + z^2 \le 1$, $y^2 + z^2 \le 1$ 으로 결정되는 입체 도형의 부피를 구하여라.

> **회전체의 부피 I**
>
> $y = f(x)$, $a \le x \le b$ 를 x 축으로 회전하였을 때 생기는 회전체의 부피는 다음과 같다.
>
> $$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

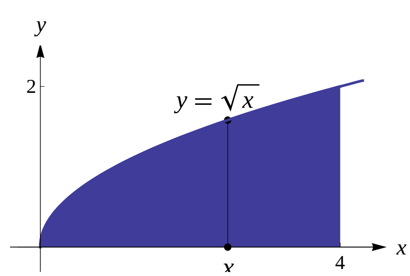
Note 마찬가지로 곡선 $x = g(y)$, $c \le y \le d$ 를 y 축 둘레로 회전한 회전체의 부피는 다음과 같이 주어진다.

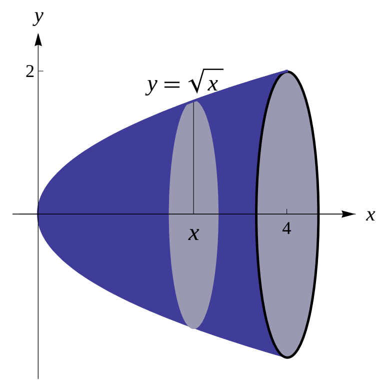
$$V = \pi \int_c^d x^2\,dy = \pi \int_c^d [g(y)]^2\,dy$$

보기 3 다음 곡선을 각각 x 축과 y 축 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

$$y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$$

Solution x 축 둘레로 회전하면 단면은 반지름이 $y = \sqrt{x}$ 인 원이다.

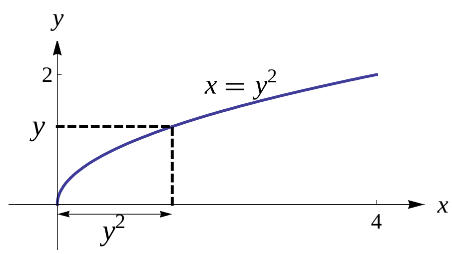


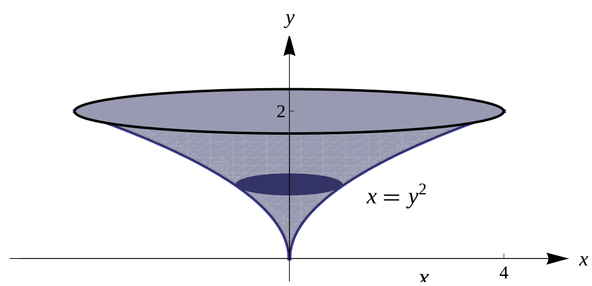


부피는

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \int_0^4 x\,dx = 8\pi$$

이다. 반면 y 축 둘레로 회전하면 생기는 단면의 반지름은 $x = y^2$ 이고 이때 $0 \le y \le 2$ 이다.





그러므로 부피는

$$V = \pi \int_0^2 x^2\,dy = \pi \int_0^2 (y^2)^2\,dy = \frac{2^5}{5}\pi = \frac{32}{5}\pi$$

가 된다. □

성취도평가 (2009년 정시 8번)

주어진 부등식으로 나타내어진 영역을 y-축의 둘레로 회전하여 얻은 입체의 부피를 구하시오.

$$0 \leqq x \leqq 3, \quad y(x^2 - 3x + 2 - y) \geqq 0$$

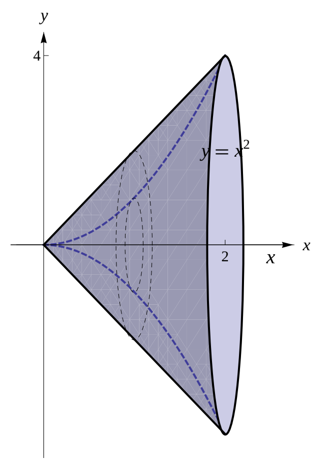
성취도평가 (2006년 수시 13번)

길이가 각각 $30cm$, $40cm$, $50cm$ 인 막대기로 삼각형을 만들어 수평이 되게 놓고, 그 위에 반지름이 $20cm$ 인 공을 삼각형의 세 변에 접하도록 올려 놓았을 때, 삼각형 밑에 있는 공의 부분의 부피를 구하라.

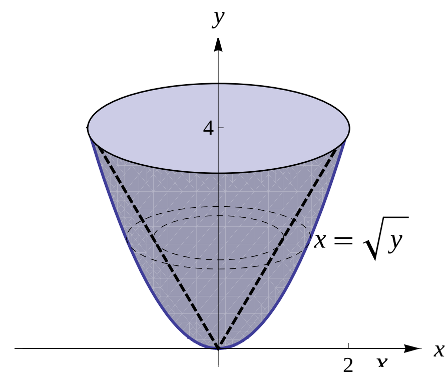
두 곡선으로 둘러싸인 영역을 회전하여 생긴 회전체의 부피는 외부곡선으로 생긴 회전체의 부피에서 내부곡선에 의하여 생긴 회전체의 부피를 빼면 된다.

보기 4 두 곡선 $y = 2x,\ y = x^2,\ 0 \le x \le 2$ 으로 둘러싸인 영역을 다음과 같이 회전했을 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

(a) x 축 둘레

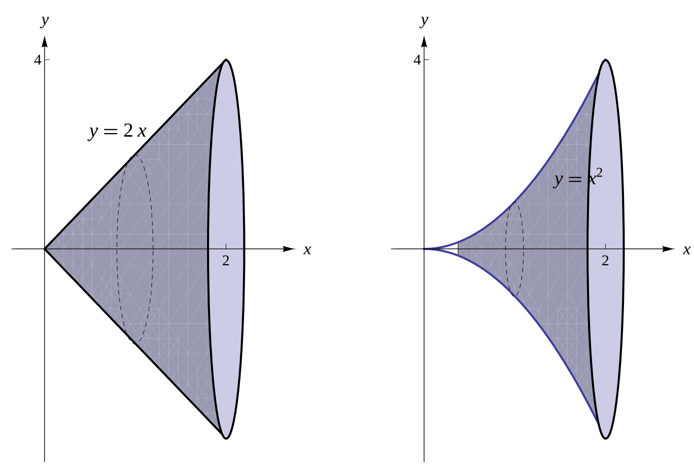


(b) y 축 둘레



Solution

(a) x 축 둘레로 회전하면 $y = 2x$ 가 외부곡선이 되고 $y = x^2$ 이 내부곡선이 된다.

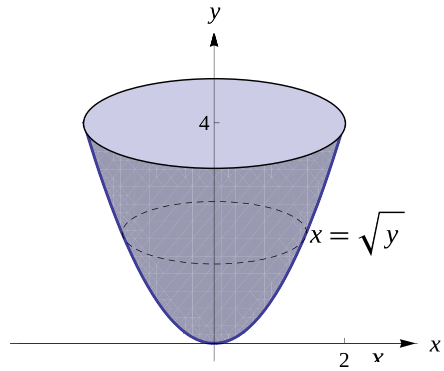


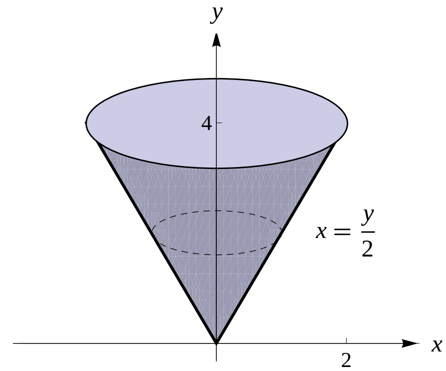
따라서 첫 번째 입체의 부피에서 두 번째 입체의 부피를 빼면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (2x)^2\, dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2\, dx \\ &= \pi\Big[\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\Big] = \frac{64}{15}\pi \end{aligned}$$

가 된다.

(b) y 축 둘레로 회전하면 $x = \sqrt{y}$ 가 외부곡선이 되고 $x = \dfrac{y}{2}$ 가 내부곡선이 된다.





y 는 0 부터 4 까지 변하므로

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^4 (\sqrt{y})^2\,dy - \pi\int_0^4 (\frac{y}{2})^2\,dy \\ &= \pi\int_0^4 y\,dy - \pi\int_0^4 \frac{y^2}{4}\,dy \\ &= \pi\Big[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big]_0^4 \\ &= \pi\Big(8 - \frac{16}{3}\Big) \;=\; \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

이다. □

성취도평가 (2008년 정시 10번)

밑면의 반지름의 길이가 a, 높이가 h 인 직원기둥을, 그 밑면의 한 지름을 축으로 하여 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 구하라.

성취도평가 (2006년 정시 9번)

$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ 의 범위에서 곡선 $y = \cos x$ 및 세 직선 $y = c$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 영역을 직선 $y = c$ 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피가 최소가 되도록 상수 c의 값을 구하라.

성취도평가 (2008년 정시 10번)

평면 위의 세 점 $A = (1, 0)$, $B = (0, \frac{3}{2})$, $C = (-1, 0)$ 에 대하여, 두 점 P, Q 가 다음 두 조

건을 만족시킨다.

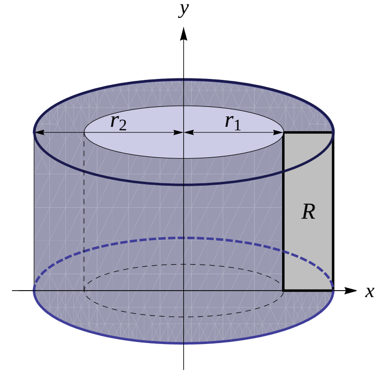
$$\overline{PB} = 1 \qquad (\text{단, } P = (x,y) \text{ 에서 } y \geqq \tfrac{3}{2})$$
$$\overline{QA} + \overline{QC} = 4 \qquad (\text{단, } Q = (x,y)\text{에서 } |x| \geqq 1,\ y \geqq 0)$$

(가) 점 P, Q 의 자취와 x-축으로 둘러싸인 도형의 개형을 그리라.

(나) (가)의 도형을 x-축의 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 구하라.

회전체의 부피 II*

직사각형 $\mathcal{R}$ 을 회전하여 생기는 회전체의 부피는 가운데 구멍이 난 원기둥 모양이다. 따라서 그 부피는 바깥 원기둥의 부피에서 안쪽 원기둥의 부피를 빼면 된다.



안 쪽 원의 반지름이 r_1, 바깥 원의 반지름이 r_2 라면 이 회전체의 부피는

$$\begin{aligned} V &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\ &= \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)h \ = \ 2\pi \Delta r \overline{r} h \end{aligned}$$

가 된다. 여기서

$$\Delta r = r_2 - r_1, \qquad \overline{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

이다. 이 사실을 이용하여 부피를 구하는 새로운 방법을 생각해 보자. 곡선

$$y = f(x), \quad a \le x \le b$$

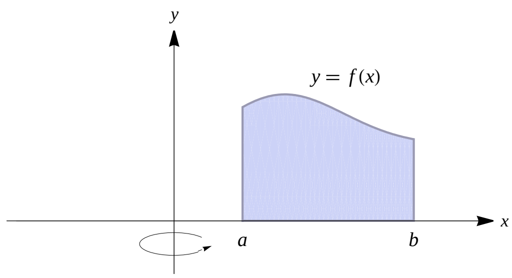
을 y 축 둘레로 회전한 회전체의 부피를 구하여 보기로 하자.

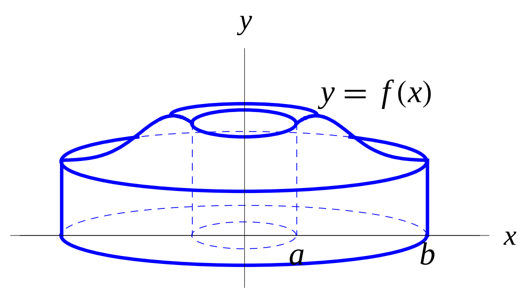
f 가 일대일 함수이어서 역함수 g 가 존재하면 $x = g(y)$, $c \le y \le d$ 로 쓸 수 있고

$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 \, dy$$

로 부피를 구할 수 있다. 그러나 f 가 다음과 같이 일대일 함수가 아닌 경우는 이 방법을 쓸 수 없고 문제가 훨씬 복잡해진다.[3]

[3]또한 일대일함수에 대하여 역함수를 항상 구할 수 있는 것도 아니다.





이제 회전체를 다음과 같이 잘라서 생각해 보자. 구간 $[a,b]$ 을 n 등분하여 양 끝점과 각 분점의 x 좌표를

$$x_0(=a), x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n(=b)$$

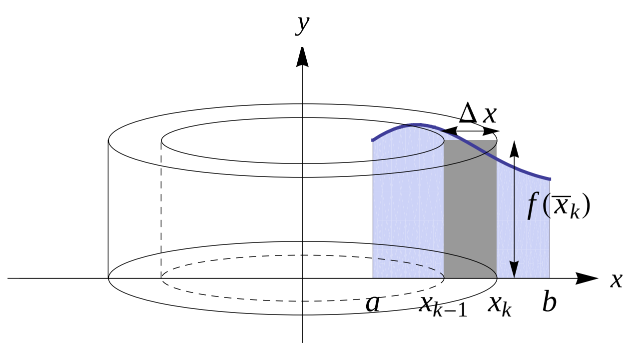
이라 하고 부분구간의 길이를

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

이라 하자. k 번째 영역을 높이가 $f(\overline{x}_k)$ 인 사각형으로 근사시킬 수 있다. 여기서

$$\overline{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$$

이다. 이 사각형을 y 축 둘레로 회전하여 생긴 회전체는 바깥원의 반지름이 x_k, 안쪽 원의 반지름은 x_{k-1} 이고 높이는 $f(\overline{x}_k)$ 인 구멍이 난 원기둥이다.



따라서 그 부피는

$$V_k = 2\pi \overline{x}_k f(\overline{x}_k)\Delta x$$

로 근사시킬 수 있다. 따라서 회전체의 부피는

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k f(\overline{x}_k)\Delta x$$

로 근사시킬 수 있고 n 이 커지면 이 값은

$$2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

으로 수렴한다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

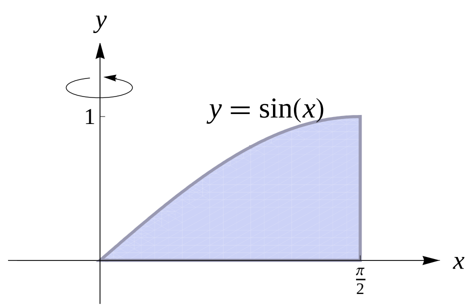
회전체의 부피 II

곡선 $y = f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b$ 를 y 축으로 회전하여 생긴 회전체의 부피는 다음과 같다.

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

보기 5 다음 곡선으로 둘러싸인 영역을 y 축 둘레로 회전한 회전체의 부피를 구하여라.

$$y = \sin x, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$



Solution 두 번째 공식을 이용하면 회전체의 부피는

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$$

이다. 부분적분법을 이용하면

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

이므로 구하는 부피는

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx = 2\pi(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

이다. □

Note 위의 보기를 첫 번째 방법으로 구하면

$$x = \arcsin y$$

이므로 구하는 부피는 y 의 구간 $[0, 1]$ 에 대하여 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 을 회전한 입체의 부피 $\dfrac{\pi^3}{4}$ 에서 $x = \arcsin y$ 를 회전한 입체의 부피를 빼야 한다. 다시 말해서

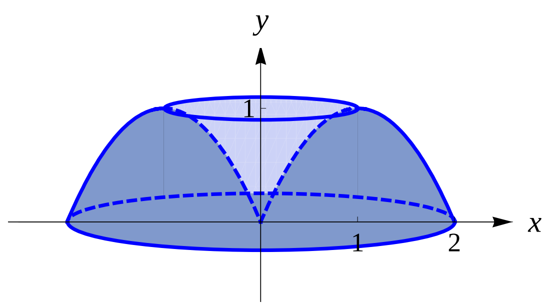
$$V = \frac{\pi^3}{4} - \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2\, dy$$

을 구하여야 한다. 이렇게 같은 부피를 구하더라도 계산 방법에 따라 계산이 간단하여질 수도 복잡해질 수도 있다.

보기 6 다음 곡선과 x 축으로 둘러싸인 영역을 y 축 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피를 두 가지 방법으로 구하여라.

$$y = 2x - x^2$$

Solution



방법 1. 외부곡선은 x 의 구간 $[1,2]$ 에서

$$x = 1 + \sqrt{1-y}, \quad 0 \le y \le 1$$

이고 이 곡선을 y 축으로 회전한 회전체의 부피는

$$V_1 = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1-y})^2 \, dy$$

이다. 내부곡선은 x 의 구간 $[0,1]$ 에서

$$x = 1 - \sqrt{1-y}, \quad 0 \le y \le 1$$

이고 이 곡선을 y 축으로 회전한 회전체의 부피는

$$V_2 = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-y})^2 \, dy$$

이다. 따라서 구하는 부피는

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 4\sqrt{1-y} \, dy = 4\pi \int_0^1 \sqrt{u} \, du = \frac{8\pi}{3}$$

이다.

방법 2. 곡선은 x 축과 $x = 0, 2$ 에서 만나므로 구하는 부피는

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) \, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3) \, dx \\ &= 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

이다. □

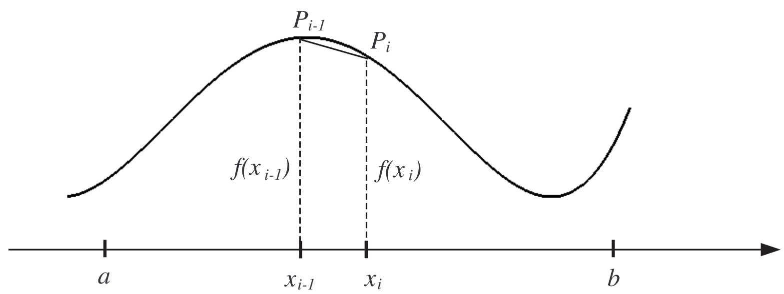
제 5 절 곡선의 길이와 곡면의 넓이

함수의 그래프로 만들어지는 영역의 넓이는 직사각형을 이용하여 구하였다. 함수의 그래프의 길이는 직선을 이용하여 근사적으로 구한다.

구간 $[a,b]$ 를 n 등분하여

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x,\ x_n = b$$

라고 하자. 여기서 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ 이다. $x = x_i$ 에 대응하는 곡선 위의 점을 $P_i = (x_i, f(x_i))$ 라고 하자.



$P_0, P_1, \ldots, P_n$ 을 연결하여 얻어진 곡선의 길이는 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ 의 길이의 근사값으로 사용할 수 있으며 그 극한값을 곡선의 길이로 정의한다.

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

여기서 i 번째 구간의 선분 $P_{i-1}P_i$ 의 길이는

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

이다. f 가 미분가능한 함수라면 평균값 정리에 의하여

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i^*)\Delta x$$

을 만족하는 값 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ 가 존재한다. 따라서

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

이므로 f' 이 연속이라면

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

을 얻는다.

곡선의 길이

구간 $[a,b]$ 에서 f' 이 연속이라고 하자. 그러면 곡선 $y = f(x)$, $a \le x \le b$ 의 길이는 다음과 같다.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Note 같은 방법으로 곡선 $x = g(y)$, $c \le y \le d$ 의 길이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

보기 1 포물선 $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ 의 길이를 구하여라.

Solution $y' = 2x$ 이므로 구하는 길이는

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

이다. $2x = \tan t$ 로 치환하면

$$2dx = \sec^2 t\, dt, \quad \sqrt{1 + 4x^2} = \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sec t$$

이므로

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec^3 t\, dt \\ &= \frac{1}{4}(\tan t \sec t + \log(\tan t + \sec t))\Big|_{t=0}^{\arctan 2} \\ &= \frac{1}{4}(2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})) \\ &\approx 1.48 \end{aligned}$$

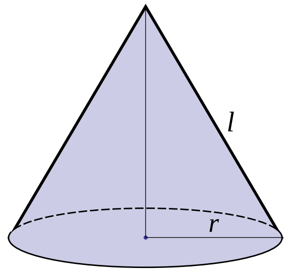
이다. □

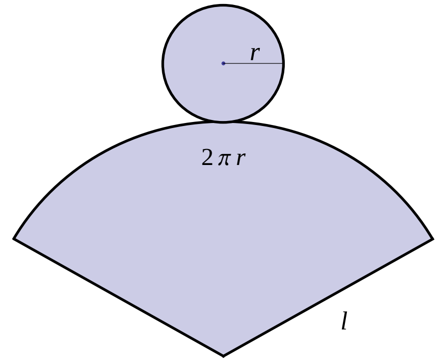
원뿔대의 겉넓이*

반지름이 r 이고 높이가 h 인 원기둥의 옆넓이는 전개도에서 구할 수 있다. 즉, 옆넓이는 가로 $2\pi r$, 높이 h 인 직사각형의 넓이이므로

$$A = 2\pi r h$$

이다. 원뿔의 옆넓이도 전개도에서 구할 수 있다. 반지름이 r 이고 모선의 길이가 l 인 원뿔의 전개도는 반지름이 l 이고 호의 길이가 $2\pi r$ 인 부채꼴이다.





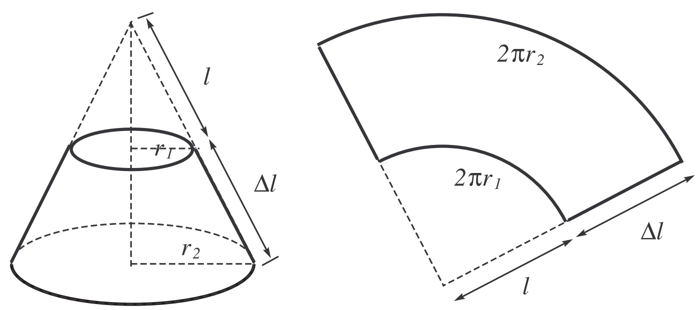
따라서 옆넓이는

$$A = \pi r l$$

이다. 그렇다면 좀 더 일반적인 회전체의 겉넓이는 어떻게 구할까? 우선 직선의 일부를 x 축 주위로 회전한 회전체의 겉넓이를 구하여 보자.

원점을 지나는 직선을 x 축 주위로 회전하면 원뿔이 되지만 원점을 지나지 않는 직선의 경우는 **원뿔대**가 된다. 반지름이 $r_1, r_2(r_1 < r_2)$ 인 원뿔대의 옆넓이 A 는 다음과 같이 원뿔의 옆넓이에서 구할 수 있다.

$$A = \pi r_2(l + \Delta l) - \pi r_1 l = \pi[(r_2 - r_1)l + r_2 \Delta l] \tag{7.5}$$



원뿔대에 그린 두 직각삼각형은 닮은 꼴이므로

$$\frac{l}{r_1} = \frac{l + \Delta l}{r_2}$$

이다. 따라서

$$r_2 l = r_1(l + \Delta l) \quad \text{또는} \quad (r_2 - r_1)l = r_1 \Delta l$$

이고 이 식을 식 (7.5) 에 대입하면

$$A = \pi(r_1 + r_2)\Delta l \tag{7.6}$$

을 얻는다.

회전체의 겉넓이*

원기둥이나 원뿔의 경우처럼 전개도를 그릴 수 있다면 입체도형의 겉넓이를 구하는 문제는 평면도형의 넓이를 구하는 문제가 된다. 그러나 일반적인 입체도형의 경우 전개도를 그리는 것은 불가능하다. 그렇다면 회전체의 겉넓이는 어떻게 정의하고 어떻게 구할까? 곡선을 회전시켜 얻어지는 회전체의 겉넓이는 곡선의 길이를 구할 때와 마찬가지로 곡선을 직선으로 근사시켜서 그 회전체의 겉넓이의 극한값으로 정의한다.

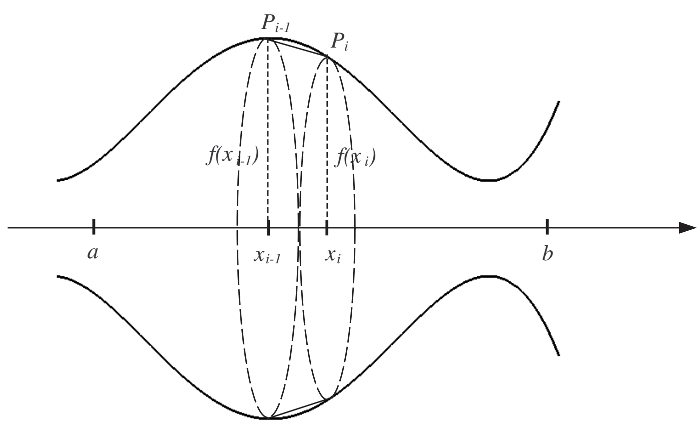
미분가능한 함수 $y = f(x)$ 를 구간 $[a, b]$ 에서 x 축 주위로 회전한 회전체의 겉넓이는 다음과 같이 정의한다. 곡선의 길이를 구할 때와 마찬가지로 구간 $[a, b]$ 를 n 등분하여

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x,\ x_n = b$$

라고 하고 $x = x_i$ 에 대응하는 곡선 위의 점을 $P_i = (x_i, f(x_i))$ 라고 하자. 여기서 $P_0, P_1, \ldots, P_n$ 을 연결하여 얻어지는 곡선을 회전하여 얻어지는 곡면의 넓이를 S_n 이라고 하면 회전체의 겉넓이는 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 으로 정의한다. 선분 $P_{i-1}P_i$ 를 x 축 주위로 회전한 회전체는 반지름이 각각 $f(x_{i-1}), f(x_i)$ 이고 옆선의 길이가

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x, \quad x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

인 원뿔대이다.



따라서 i 번째 부분곡면의 넓이는 식 (7.6) 으로부터

$$\pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))|P_{i-1}P_i| = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

임을 알 수 있다. 따라서 회전체의 겉넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S = \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \\ &= \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \end{aligned}$$

이 식을 길이함수 $s(t) = \displaystyle\int_a^t \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ 를 이용하면, 즉,

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\, ds$$

x 축 주위로 회전한 회전체의 겉넓이

미분가능한 함수 $y = f(x)$, $a \le x \le b$ 을 x 축 주위로 회전하여 생긴 회전체의 겉넓이는

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b 2\pi y\, ds$$

이다.

보기 2 반지름이 a 인 구의 겉넓이를 구하여라.

Solution 반지름이 a 인 구는 반원 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$ 을 x 축 둘레로 회전하면 얻어진다.

$$(\sqrt{a^2 - x^2})' = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

이므로 구의 겉넓이는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^{a} 2\pi\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \\ &= \int_{-a}^{a} 2\pi a\, dx \\ &= 4\pi a^2 \end{aligned}$$

가 된다. □

같은 방법으로 y 축 주위로 회전한 회전체의 겉넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

y 축 주위로 회전한 회전체의 겉넓이

미분가능한 함수 $x = g(y)$, $c \le x \le d$ 을 y 축 주위로 회전하여 생긴 회전체의 겉넓이는

$$S = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

이다.

보기 3 포물선 $y = x^2,\ 0 \le x \le 2$ 를 y 축 주위로 회전했을 때 겉넓이를 구하여라.

Solution $x = \sqrt{y},\ 0 \le y \le 4$ 이므로

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

이다. 따라서 주어진 포물선을 y 축 주위로 회전한 회전체의 겉넓이는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \\ &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{y}\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy \\ &= \pi \int_0^4 \sqrt{4y+1}\, dy \\ &= \frac{\pi}{4}\int_1^{17} \sqrt{u}\, du \\ &= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1) \end{aligned}$$

가 된다. □

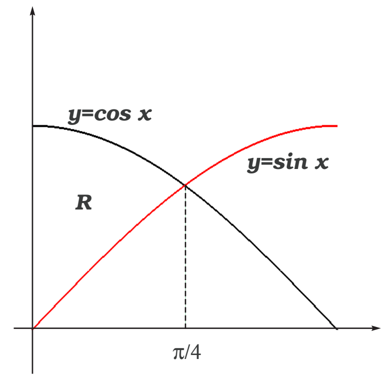
도형의 중심*

$a \le x \le b$ 에 대하여 $0 \le g(x) \le f(x)$ 라고 하자. 두 곡선 $y = f(x),\ y = g(x)$ 와 두 직선 $x = a,\ x = b$ 으로 둘러싸인 영역을 $\mathcal{R}$ 이라고 하자. 이 영역의 **중심**, 또는 **도심(centroid)**을 $(\overline{x}, \overline{y})$ 로 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{A}\int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx \ \left(= \frac{1}{A}\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} x\, dy\, dx\right) \\ \overline{y} &= \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}(f^2(x) - g^2(x))\, dx \ \left(= \frac{1}{A}\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} y\, dy\, dx\right) \end{aligned}$$

여기서 $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ 는 영역 $\mathcal{R}$ 의 넓이이다.

보기 4 두 곡선 $y = \sin x,\ y = \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 와 y 축으로 둘러싸인 영역 $\mathcal{R}$ 의 중심을 구하여라.



Solution 영역 $\mathcal{R}$ 의 넓이는

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = \sqrt{2} - 1$$

이다. 따라서 정의에 의하여

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\cos x - \sin x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left[x(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)\, dx\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - 1\right) \\
&= (\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - 1\right) \\
\overline{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos 2x\, dx \\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

을 얻는다. □

부피에 대한 파푸스의 정리*

곡선 $y = f(x), a \le x \le b\ (a > 0)$ 을 y 축 주위로 회전한 회전체의 부피는

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

이다. 다시 두 곡선 $y = f(x),\ y = g(x)$ 와 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 영역을 $\mathcal{R}$ 이라고 하자. 여기서 $g(x) \le f(x)$ 라고 가정한다. 영역 $\mathcal{R}$ 을 y 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피 V 는

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx \\
&= 2\pi \overline{x} \cdot A
\end{aligned}$$

가 된다. 다시 말해서, 회전체의 부피 V 는 영역의 중심의 x 좌표 $\overline{x}$ 가 반지름인 원의 둘레 $2\pi\overline{x}$ 에 영역 $\mathcal{R}$ 의 넓이 A 를 곱한 것이다. 마찬가지로 $f(x) \geq g(x) \geq 0$ 일 때 영역 $\mathcal{R}$ 을 x 축 둘레로 회전한 회전체의 부피는

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx \\ &= 2\pi\overline{y} \cdot A \end{aligned}$$

이다. 즉, x 축 둘레로 회전한 회전체의 부피 V 는 영역 $\mathcal{R}$ 의 중심의 y 좌표 $\overline{y}$ 를 반지름으로 하는 원의 길이 $2\pi\overline{y}$ 에 영역 $\mathcal{R}$ 의 넓이 A 를 곱한 것이다. 이 결과는 3 세기경 그리스의 수학자 파푸스의 이름을 따라 **파푸스의 정리(Pappus's Theorem for Volume)**라고 부른다.

파푸스의 정리 I

$0 \leq g(x) \leq f(x)$ 일 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$, $a \leq x \leq b$ 로 둘러싸인 영역 $\mathcal{R}$ 의 중심을 $(\overline{x}, \overline{y})$ 라고 하자. 영역 $\mathcal{R}$ 을 y 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는

$$V = 2\pi\overline{x} \cdot A$$

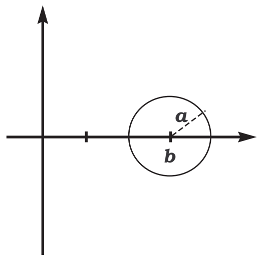
이고, x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는

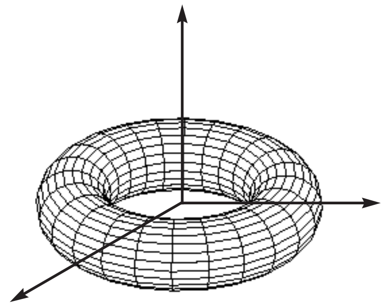
$$V = 2\pi\overline{y} \cdot A$$

이다. 여기서 $A = (\mathcal{R}$ 의 넓이$)$이다.

보기 5 중심이 $(b, 0)$ 이고 반지름이 a, $(a < b)$ 인 원을 y 축 둘레로 회전시켜서 얻어지는 회전체의 부피를 구하여라.[4]

[4] 이렇게 도우넛 모양으로 생긴 회전체를 **원환체(torus)**라고 부른다.





Solution 원의 중심은 $(\overline{x},\overline{y}) = (b,0)$ 이다. 원의 넓이는 πa^2 이므로 파푸스의 정리에 의하면

$$V = 2\pi b \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b$$

이다. □

곡선의 중심*

곡선 $y = f(x),\ a \le x \le b$ 에 대하여 다음 식을 만족하는 점 $(\overline{x},\overline{y})$ 을 곡선의 **중심(centroid)**이라고 한다.

$$\int_a^b (x-\overline{x})\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 0, \quad \int_a^b (f(x)-\overline{y})\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 0$$

곡선의 길이를

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

이라고 하면 곡선의 중심은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \\ \overline{y} &= \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\end{aligned}$$

곡선의 중심은 일반적으로 곡선 위의 점이 아니다.

보기 6 반원 $y = \sqrt{1-x^2},\ y \ge 0$ 의 중심을 구하여라.

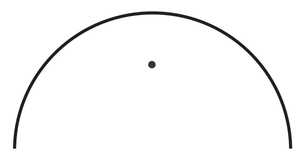
Solution 곡선이 y 축 대칭이므로 $\overline{x} = 0$ 이다. 곡선의 길이는 $L = \pi$ 이고

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} dx \;=\; \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

이다. 따라서 중심은 $\left(0, \dfrac{2}{\pi}\right)$ 이다. □



겉넓이에 대한 파푸스의 정리*

곡선 $y = f(x)$, $a \le x \le b$ 을 x 축 둘레로 회전한 회전체의 겉넓이 S 는

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

이므로

$$S = 2\pi\overline{y}\cdot L$$

이다. 다시 말해서, 회전체의 겉넓이 S 는 곡선의 중심의 y 좌표 $\overline{y}$ 을 반지름으로 하는 원의 길이 $2\pi\overline{y}$ 에 곡선의 길이 L 을 곱한 것이다. 마찬가지로 $y = f(x)$ 가 일대일함수일 때, 이 곡선을 y 축 둘레로 회전한 회전체의 겉넓이 S 는

$$S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

가 됨을 보일 수 있다.(연습문제) 따라서

$$S = 2\pi\overline{x}\cdot L$$

이다. 다시 말해서, 회전체의 겉넓이 S 는 곡선의 중심의 x 좌표 $\overline{x}$ 을 반지름으로 하는 원의 길이 $2\pi\overline{x}$ 에 곡선의 길이 L 을 곱한 것이다. 이 결과도 파푸스의 정리라고 부른다.

파푸스의 정리 II

곡선 $y = f(x),\ a \le x \le b$ 로 주어진 곡선의 중심을 $(\overline{x}, \overline{y})$, 길이를 L 이라고 하자. 이 곡선을 y 축 둘레로 회전시킨 회전체의 겉넓이는

$$S = 2\pi\overline{x} \cdot L$$

이고, x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 겉넓이는

$$S = 2\pi\overline{y} \cdot L$$

이다.

보기 7 중심이 $(b, 0)$ 이고 반지름이 $a\,(a < b)$ 인 원을 y 축 둘레로 회전시켜서 얻어지는 원환체의 겉넓이를 구하여라.

Solution 원의 길이는 $L = 2\pi a$ 이므로 파푸스의 정리에 의하여

$$S = 2\pi\overline{x} \cdot L = 2\pi b \cdot (2\pi a) = 4\pi^2 ab$$

이다. □