정답과 풀이

Ⅰ. 방정식과 부등식

pp.4~7

1 ①	2 ①	3 ③	4 ④	5 ②
6 ③	7 ①	8 ②	9 ①	10 ⑤
11 ④	12 ②	13 ③	14 ③	15 ④

1

$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{x^2+a}{x^2-3x+2}$ …… ㉠

주어진 분수방정식의 양변에 $(x-1)(x-2)$를 곱하면

$x-2+5(x-1)=x^2+a$

$x^2-6x+a+7=0$ …… ㉡

㉠이 오직 한 개의 실근을 갖는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) ㉡이 중근을 갖고, ㉠의 분모를 0이 되게 하지 않는 경우

$a=2$일 때 ㉡은 중근 $x=3$을 갖고, 이것은 ㉠의 분모를 0이 되게 하지 않는다.

(ii) ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖고, 그 중 하나가 ㉠의 분모를 0이 되게 하는 경우

$D>0$이어야 하므로 $\dfrac{D}{4}=9-(a+7)>0$ $\quad\therefore a<2$

㉡의 두 근의 합은 6이므로 두 근이 모두 ㉠의 분모를 0이 되게 하지 않는다.

$x=1$이 ㉡의 근이 되는 경우 : $1-6+a+7=0$ $\quad\therefore a=-2$

$x=2$가 ㉡의 근이 되는 경우 : $4-12+a+7=0$ $\quad\therefore a=1$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 $2,\ -2,\ 1$이다.

따라서 a의 값의 합은 1이다.

2

$\dfrac{a}{(x+2)(x-1)}+\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}=0$ …… ㉠

㉠의 양변에 분모의 최소공배수 $(x+2)(x-1)(x-3)$을 곱하면

$a(x-3)+(x-1)=0$, 즉 $(a+1)x=3a+1$ …… ㉡

(i) ㉡을 만족시키는 근이 없을 때, ㉠은 근을 갖지 않으므로

$a=-1$이면 ㉠은 근을 갖지 않는다. $\quad\therefore a=-1$

(ii) 한편 $a\neq-1$일 때, ㉡의 해는 $x=\dfrac{3a+1}{a+1}$이고 이것이 ㉠의 분모를 0이 되게 하면 ㉠은 근을 갖지 않는다.

$x=\dfrac{3a+1}{a+1}=-2$에서 $3a+1=-2a-2$ $\quad\therefore a=-\dfrac{3}{5}$

$x=\dfrac{3a+1}{a+1}=1$에서 $3a+1=a+1$ $\quad\therefore a=0$

$x=\dfrac{3a+1}{a+1}=3$에서 $3a+1=3a+3$인 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 $-1,\ -\dfrac{3}{5},\ 0$이다.

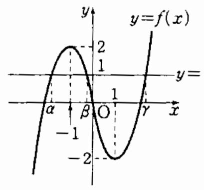
따라서 a의 값의 합은 $-1-\dfrac{3}{5}+0=-\dfrac{8}{5}$이다.

3

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 방정식 $x^3-3x-1=0$의 근이므로

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=1$

$\dfrac{1}{x-\alpha}+\dfrac{1}{x-\beta}+\dfrac{1}{x-\gamma}=0$ …… ㉠



㉠의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하면

$(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)$

$+(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$

$3x^2-3=0$ $\quad\therefore x=\pm1$ …… ㉡

이 때, $x=\pm1$은 방정식 $x^3-3x-1=0$의 근이 아니므로 ㉠의 분모를 0으로 하지 않는다.

따라서 구하는 모든 실근의 합은 0이다.

4

원래의 열차의 속도를 x(km/시)라고 하면

$\dfrac{20}{x-40}+\dfrac{80}{x+20}=\dfrac{100}{x}$

양변에 $x(x+20)(x-40)$을 곱하여 정리하면

$x(x+20)+4x(x-40)=5(x-40)(x+20)$

$-40x=-4000$

$\therefore x=100$(km/시)

5

$f(x)+g(x)=2\sqrt{f(x)g(x)}$ …… ㉠

양변을 제곱하여 정리하면

$\{f(x)-g(x)\}^2=0$ $\quad\therefore f(x)=g(x)$ …… ㉡

㉡을 만족시키는 x의 값은 그래프에서 $x=-5,\ x=1,\ x=6$이다.

그런데 $f(x)+g(x)\geq0$이고 $f(x)g(x)\geq0$인 조건을 만족시키는 x의 값은 $x=-5$와 $x=6$이다.

따라서 ㉠의 실근의 합은 $(-5)+6=1$이다.

6

$x-1=\sqrt{x-a}$ …… ㉠

$x-1=-\sqrt{x-a}$ …… ㉡

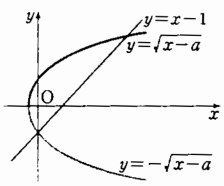
ㄱ. $A\cup B$는 $(x-1)^2=x-a$가 실근을 갖게 되는 a의 값의 범위이다.

$x^2-3x+a+1=0$에서 $D=9-4(a+1)\geq0$

$\therefore a\leq\dfrac{5}{4}$ (참)

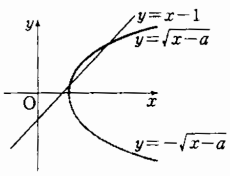
ㄴ. 곡선 $y=-\sqrt{x-a}$와 직선 $y=x-1$이 만나면, 곡선 $y=\sqrt{x-a}$와 직선 $y=x-1$은 반드시 만난다.

따라서 $B\subset A$이다. (참)



ㄷ. 곡선 $y=\sqrt{x-a}$와 직선 $y=x-1$이 만나지만, 곡선 $y=-\sqrt{x-a}$와 직선 $y=x-1$이 만나지 않는 경우가 있다.

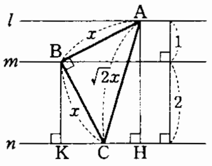
따라서 $A\not\subset B$이다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

7

$\overline{AB}=x$라 하면 $\overline{AC}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$



두 점 A, B에서 직선 n 위에 내린 수선의 발을 각각 H, K라고 하면

$\overline{KC}+\overline{CH}=\overline{KH}$이므로

$$\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x^2-9}=\sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{2x^2-9}=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-4}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2x^2-9=(x^2-1)+(x^2-4)-2\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-4}$$

$$\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-4}=2$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^4-5x^2=0$$

$x^2>0$이므로 $x^2=5$ $\quad\therefore x=\sqrt{5}$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}x^2=\frac{5}{2}$이다.

8

$(x-1)(x+1)(x+2)>0$을 풀면

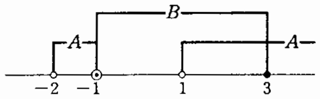
$$-2<x<-1 \text{ 또는 } x>1$$

이므로

$$A=\{x\mid -2<x<-1 \text{ 또는 } x>1\}$$

이 때, $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$, $A\cap B=\{x\mid 1<x\leq 3\}$이므로

$$B=\{x\mid -1\leq x\leq 3\}$$



따라서

$$-1\leq x\leq 3 \iff (x+1)(x-3)\leq 0$$

$$\iff x^2-2x-3\leq 0$$

이므로 $a=-2$

9

$A=\{x\mid (x-1)(x-2)(x-a)\geq 0\}$, $B=\{x\mid (x-1)(x-2)\geq 0\}$으로 놓으면 $A\subset B$가 성립하기 위한 a의 값의 범위를 찾아야 한다.

그런데 $A\subset B$는 $B^C\subset A^C$와 동치이므로 $B^C\subset A^C$가 성립하는 a의 값의 범위를 찾아도 된다.

$B^C=\{x\mid (x-1)(x-2)<0\}$이므로

$$(x-1)(x-2)(x-a)<0 \Longrightarrow x-a>0 \Longrightarrow x>a$$

$(x-1)(x-2)<0$의 해는 $1<x<2$이므로 다음 두 명제

「$(x-1)(x-2)<0$이면 $(x-1)(x-2)(x-a)<0$」,

「$1<x<2$이면 $x>a$」 …… ㉠

는 동치이다.

㉠이 성립하기 위한 실수 a의 값의 범위는 $a\leq 1$이다.

10

$x^3-2x^2-ax<0$에서 $x(x^2-2x-a)<0$

방정식 $x^2-2x-a=0$의 근은 $x=1\pm\sqrt{1+a}$이므로

$x^3-2x^2-ax<0$의 해는 다음과 같다.

(i) $a\geq 0$이면 $x<1-\sqrt{1+a}$, $0<x<1+\sqrt{1+a}$

(ii) $-1<a<0$이면 $x<0$, $1-\sqrt{1+a}<x<1+\sqrt{1+a}$

(iii) $a\leq -1$이면 $x<0$

ㄱ. $a<0$이면 $\{x\mid x<0\}\subset S$이다. (참)

ㄴ. $a>0$이면 $x<1-\sqrt{1+a}$, $0<x<1+\sqrt{1+a}$이므로 $\{x\mid 0<x<1\}\subset S$이다. (참)

ㄷ. (i)에서 $8<a<15$이면 $4<1+\sqrt{1+a}<5$

이 때, $4\in S$이지만 $5\notin S$이다.

즉, $8<a<15$일 때 $4\in S$이지만 $5\notin S$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11

$$\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}>\frac{\{g(x)\}^2}{f(x)} \iff \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}-\frac{\{g(x)\}^2}{f(x)}>0$$

$$\iff \frac{\{f(x)\}^3-\{g(x)\}^3}{f(x)g(x)}>0$$

$$\iff \frac{\{f(x)-g(x)\}[\{f(x)\}^2+f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]}{f(x)g(x)}>0$$

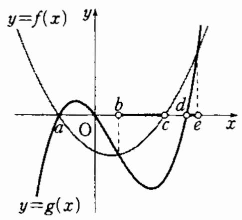
이 때, $\{f(x)\}^2+f(x)g(x)+\{g(x)\}^2\geq 0$이고 등호는 $f(x)=g(x)=0$일 때만 성립한다.

따라서 주어진 부등식은

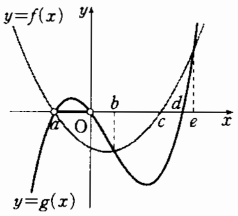
$$\frac{f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}>0,\ \text{즉 } \{f(x)-g(x)\}f(x)g(x)>0$$

와 같다.

(i) $f(x)>g(x)$이고 $f(x)g(x)>0$일 때 $b<x<c$, $d<x<e$



(ii) $f(x)<g(x)$이고 $f(x)g(x)<0$일 때 $a<x<0$



(i), (ii)에서 $a<x<0$, $b<x<c$, $d<x<e$

12

$x^2+x+1>0$이므로 주어진 부등식의 양변에 x^2+x+1을 곱하여도 부등호는 바뀌지 않는다.

$$\frac{1}{x+1}\geq\frac{x+a}{x^2+x+1} \iff \frac{x^2+x+1}{x+1}\geq x+a$$

$$\iff \frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{(x+1)(x+a)}{x+1}\geq 0$$

$$\iff \frac{-ax+1-a}{x+1}\geq 0$$

$$\iff \frac{ax-1+a}{x+1}\leq 0$$

ㄱ. $a=0$일 때 $\frac{-1}{x+1}\leqq 0 \quad \therefore x>-1$ (참)

ㄴ. $a>0$일 때 $\frac{x-\frac{1}{a}+1}{x+1}\leqq 0 \quad \therefore -1<x\leqq \frac{1}{a}-1$ (참)

ㄷ. $a<0$일 때 $\frac{x-\frac{1}{a}+1}{x+1}\geqq 0 \quad \therefore x\leqq \frac{1}{a}-1$ 또는 $x>-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

(i) 부등식 $\frac{x-1}{x-a}>2$를 풀면

$$\frac{x-1}{x-a}-2>0,\ \frac{x-1-2(x-a)}{x-a}>0$$

$$\frac{-x-1+2a}{x-a}>0,\ (x+1-2a)(x-a)<0$$

이 때,

$2a-1>a$, 즉 $a>1$이면 $a<x<2a-1$

$2a-1<a$, 즉 $a<1$이면 $2a-1<x<a$

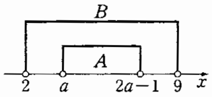
(ii) 부등식 $\frac{x-2}{x-9}<0$을 풀면

$$(x-2)(x-9)<0 \quad \therefore 2<x<9$$

(i), (ii)에서 $A\subset B$가 성립하려면 $a>1$이어야 하며

$2\leqq a,\ 2a-1\leqq 9$

$\therefore 2\leqq a\leqq 5$



집합 A에서

$x^2-4x+3\leqq 0,\ (x-1)(x-3)\leqq 0$

$\therefore A=\{x\,|\,1\leqq x\leqq 3\}$

집합 B에서

$1-\frac{a}{x-2}\leqq 0,\ \frac{x-(a+2)}{x-2}\leqq 0$

$(x-2)\{x-(a+2)\}\leqq 0,\ x\neq 2$

$a>0$이므로 $a+2>2$

$\therefore B=\{x\,|\,2<x\leqq a+2\}$

조건에서 $A\cup B=\{x\,|\,1\leqq x\leqq 5\}$이므로 $a+2=5$

$\therefore a=3$

해가 $x\leqq -1$ 또는 $1\leqq x\leqq 2$인 삼차부등식은

$(x+1)(x-1)(x-2)\leqq 0$

해가 $x\leqq -1$ 또는 $1<x<2$인 분수부등식은

$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\leqq 0,\ \frac{x+1}{x^2-3x+2}\leqq 0$

$\therefore a=-3,\ b=2,\ c=1$

$$\therefore \frac{x^2+bx+a}{x+c}\geqq 0 \iff \frac{x^2+2x-3}{x+1}\geqq 0$$

$$\iff (x^2+2x-3)(x+1)\geqq 0,\ x\neq -1$$

$$\iff (x+3)(x+1)(x-1)\geqq 0,\ x\neq -1$$

$$\iff -3\leqq x<-1,\ x\geqq 1$$

⑤	⑤	①	③	③
①	②	⑤	4	④
①	③	②	⑤	③

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+4}+ax+b}{x^2}=c$에서 $\lim_{x\to 0}x^2=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+x+4}+ax+b)=2+b=0$

$\therefore b=-2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+4}+ax-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+x+4}+ax-2)\{\sqrt{x^2+x+4}-(ax-2)\}}{x^2\{\sqrt{x^2+x+4}-(ax-2)\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a^2)x^2+(1+4a)x}{x^2\{\sqrt{x^2+x+4}-(ax-2)\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a^2)x+(1+4a)}{x\{\sqrt{x^2+x+4}-(ax-2)\}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 때, $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

$\lim_{x\to 0}\{(1-a^2)x+(1+4a)\}=1+4a=0$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$

$a=-\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{15}{16}}{\sqrt{x^2+x+4}+\frac{1}{4}x+2}=\frac{15}{64} \quad \therefore c=\frac{15}{64}$$

$$\therefore abc=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-2)\cdot\frac{15}{64}=\frac{15}{128}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to a}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}$$

(i) $a=-2$이면

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x-2}=\frac{3}{4}$$

(ii) $a=2$이면

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-2} \quad \text{(발산)}$$

(iii) $a\neq \pm 2$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to a}\frac{x-1}{x-2}=\frac{a-1}{a-2}=2\text{에서}$$

$a-1=2a-4 \quad \therefore a=3$

$\lim_{x\to -1+0}[x]^2=(-1)^2=1,\ \lim_{x\to -1+0}[x^2]=0$이므로

$\lim_{x\to -1+0}f(x)=1$

또, $\lim_{x\to -1-0}[x]^2=(-2)^2=4,\ \lim_{x\to -1-0}[x^2]=1$이므로

$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 4+a$

이 때, $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값이 존재하기 위해서는 $\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} f(x)$이어야 하므로

$1 = 4+a$

$\therefore a = -3$

19

ㄱ. $\lim_{x \to a} g(x)$의 값이 β(β는 실수)로 존재한다고 하면 가정에서 $\lim_{x \to a} f(x)$의 값이 존재하므로 그 값을 α(α는 실수)라 하면

$\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$

따라서 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다. (참)

ㄴ. $f(x)+2g(x) = h(x)$ ...... ㉠

$2f(x)+g(x) = i(x)$ ...... ㉡

로 놓고

$\lim_{x \to a} \{f(x)+2g(x)\} = \alpha$, $\lim_{x \to a} \{2f(x)+g(x)\} = \beta$ (α, β는 실수)

라 하면 $2 \times$㉡$-$㉠에서 $f(x) = \frac{2i(x)-h(x)}{3}$이므로

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{2i(x)-h(x)}{3} = \frac{2\beta-\alpha}{3}$

즉, $\lim_{x \to a} f(x)$의 값은 존재한다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+2 & (x \geq 0) \\ 3x-2 & (x<0) \end{cases}$이면

$2f(x)-g(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$이므로 $\lim_{x \to 0} \{2f(x)-g(x)\} = 0$이지만

$\lim_{x \to 0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20

ㄱ. $\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} ([x]^2+[x]) = 1+1=2$

$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} ([x]^2+[x]) = 0+0=0$

이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} ([x]^2-[x]) = 1-1=0$

$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} ([x]^2-[x]) = 0-0=0$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 0$ (참)

ㄷ. $\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (a[x]^2+b[x]) = 4a+2b=3$ ...... ㉠

$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (a[x]^2+b[x]) = a+b=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$

즉, $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$이기 위한 실수 a, b의 값은 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21

ㄱ. $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = \lim_{x \to 0} f(x) \lim_{x \to 0} g(x) = f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. (반례) $f(x)=0$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$이면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이지만 $f(x)g(x)=0$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x<0) \end{cases}$이면 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=0$에서 불연속이지만 $f(x)g(x) = -1$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (거짓)

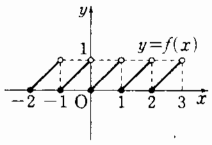
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

22

ㄱ. $n \leq x < n+1$일 때 $[x]=n$이므로

$f(x) = x-[x] = x-n$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로 $\lim_{x \to n} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.



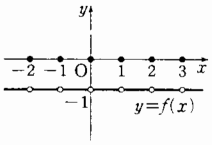
ㄴ. (i) $x=n$일 때 $[x]=n$, $[-x]=-n$이므로

$f(x) = [x]+[-x] = 0$

(ii) $n<x<n+1$일 때 $[x]=n$, $[-x]=-n-1$이므로

$f(x) = [x]+[-x] = -1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로 $\lim_{x \to n} f(x)$의 값은 존재하지만 그 값이 $f(n)$과 같지는 않다.



ㄷ. $n-\frac{1}{2} \leq x < n+\frac{1}{2}$일 때 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$, $\left[x-\frac{1}{2}\right]=n-1$이므로

$f(x) = x\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x-\frac{1}{2}\right] = nx+n-1$

즉, $n-\frac{1}{2} \leq x < n+\frac{1}{2}$에서 함수 $y=f(x)$는 직선이므로 $x=n$에서 연속이다.

$\therefore \lim_{x \to n} f(x) = f(n)$

따라서 주어진 조건을 만족하는 것은 ㄴ이다.

23

ㄱ. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (참)

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 1-0$일 때 $t \to 0$이므로

$\lim_{x \to 1-0} f(f(x)) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (참)

ㄷ. $x \to 1+0$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 1+0} f(f(x)) = f(1) = 1$ ...... ㉠

$x \to 1-0$일 때

$\lim_{x \to 1-0} f(f(x)) = 1$ ($\because$ ㄴ에 의해) ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x \to 1} f(f(x)) = 1$

한편, $f(f(1)) = f(1) = 1$이므로 $\lim_{x \to 1} f(f(x)) = f(f(1))$

따라서 $f(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24

(i) $0<x<1$에서 $g(x)=1$이므로 $f(g(x))=f(1)=2$

$\therefore \lim_{x\to 1-0} f(g(x))=2$ ······ ㉠

$1<x<2$에서 $g(x)=2$이므로 $f(g(x))=f(2)=2$

$\therefore \lim_{x\to 1+0} f(g(x))=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 1} f(g(x))=2$

(ii) $0<x<1$에서 $f(x)=3-x$

$3-x=t$라 하면 $2<t<3$이고, 이 때 $g(t)=2$이므로

$g(f(x))=g(3-x)=g(t)=2$

$\therefore \lim_{x\to 1-0} g(f(x))=2$ ······ ㉢

$1<x<2$에서 $f(x)=x$이고 $g(x)=2$이므로

$g(f(x))=g(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to 1+0} g(f(x))=2$ ······ ㉣

㉢, ㉣에서 $\lim_{x\to 1} g(f(x))=2$

따라서 (i), (ii)에서

$$\lim_{x\to 1} f(g(x))+\lim_{x\to 1} g(f(x))=2+2=4$$

25

구간 $\left(\frac{1}{100},\ 100\right)$에서 $(f\circ g)(x)=1$을 만족하는 x의 값들의 집합을 A라고 하면

$$A=\{2^{-6},\ 2^{-5},\ \cdots,\ 2^{-1},\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{6}\}$$

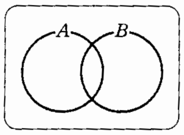
$$\therefore (f\circ g)(x)=\begin{cases} 1 & (x\in A) \\ -1 & (x\notin A)\end{cases}$$

또, 구간 $\left(\frac{1}{100},\ 100\right)$에서 $(f\circ h)(x)=1$을 만족하는 x의 값들의 집합을 B라고 하면

$$B=\{3^{-4},\ 3^{-3},\ 3^{-2},\ 3^{-1},\ 1,\ 3,\ 3^{2},\ 3^{3},\ 3^{4}\}$$

$$\therefore (f\circ h)(x)=\begin{cases} 1 & (x\in B) \\ -1 & (x\notin B)\end{cases}$$

$$\therefore i(x)=\begin{cases} 1 & (x\in A\cap B \text{ 또는 } x\in (A\cup B)^{C}) \\ -1 & (x\in A-B \text{ 또는 } x\in B-A)\end{cases}$$



$$A-B=\{2^{-6},\ 2^{-5},\ \cdots,\ 2^{-1},\ 2,\ \cdots,\ 2^{6}\},$$
$$B-A=\{3^{-4},\ 3^{-3},\ 3^{-2},\ 3^{-1},\ 3,\ 3^{2},\ 3^{3},\ 3^{4}\}$$

이므로 $i(x)$의 구간 $\left(\frac{1}{100},\ 100\right)$에서의 불연속점의 개수는 20개이다.

26

원 C의 반지름의 길이를 r라고 하면 원 C의 방정식은

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{1}{a}\right)^2=r^2$$

원 C가 직선 $4x-3y=0$에 접하므로

중심 $\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$에서 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\therefore r=\frac{\left|4a-\frac{3}{a}\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4a-\frac{3}{a}}{5}\quad (\because a>1)$$

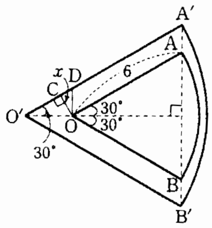
$f(a)=\overline{\text{OA}}-r$이므로

$$f(a)=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\frac{4a-\frac{3}{a}}{5}$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{f(a)}{a}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}}{a}-\frac{4a-\frac{3}{a}}{5a}\right)$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{a^4}}-\frac{4a^2-3}{5a^2}\right)$$
$$=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

27

O에서 $\overline{\text{O}'\text{A}'}$에 내린 수선의 발을 C라 하고 $\overline{\text{AA}'}/\!/\overline{\text{OD}}$가 되도록 $\overline{\text{O}'\text{A}'}$ 위에 점 D를 잡으면



$$\overline{\text{O}'\text{D}}=\overline{\text{O}'\text{C}}+\overline{\text{CD}}$$
$$=\frac{x}{\tan 30^\circ}+\frac{x}{\tan 60^\circ}$$
$$=\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}x$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}x$$
$$\therefore \overline{\text{O}'\text{A}'}=\frac{4}{\sqrt{3}}x+6$$

따라서 부채꼴 $\text{O}'\text{A}'\text{B}'$의 넓이는

$$f(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}x+6\right)^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\left(\frac{16}{3}x^2+\frac{48}{\sqrt{3}}x+36\right)$$
$$=\frac{8}{9}\pi x^2+\frac{8}{\sqrt{3}}\pi x+6\pi$$
$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{9}\pi x^2+\frac{8}{\sqrt{3}}\pi x+6\pi}{x^2+2x}=\frac{8}{9}\pi$$

28

$x=a$는 방정식 $x^3-2x^2+2x=4-2^x$의 실근이다.

$f(x)=x^3-2x^2+2x-4+2^x$으로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

$f(0)=-4+1<0$

$f(1)=1-2+2-4+2<0$

$f(2)=8-8+4-4+4>0$

$f(3)=27-18+6-4+8>0$

$f(4)=64-32+8-4+16>0$

$f(5)=125-50+10-4+32>0$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 구간 $(1,\ 2)$에 존재한다.

$\therefore n=1$

29

ㄱ. $f(x)=x^3+3x^2-2x-1$로 놓으면 $f(x)$는 폐구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 연속이다.

이 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$, $f(1)>0$이므로 중간값의 정리에 의하여 구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에 적어도 하나의 실근이 존재한다.

ㄴ. $f(x)=\log_2 x^2+x^2=2\log_2|x|+x^2$으로 놓으면 $f(x)$는 폐구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 연속이다.

이 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2+\frac{1}{4}<0$, $f(1)=0+1>0$이므로 중간값의 정리에 의하여 구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에 적어도 하나의 실근이 존재한다.

ㄷ. $f(x)=\cos x-x$로 놓으면 $f(x)$는 폐구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 연속이다.

$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{3}$이므로 $\cos\frac{1}{2}>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>0$

또, $1=\cos 0>\cos 1$이므로

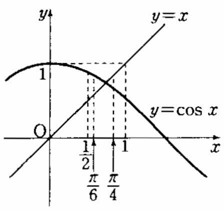
$f(1)=\cos 1-1<0$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$

따라서 중간값의 정리에 의하여 구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에 적어도 하나의 실근이 존재한다.

따라서 구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고 오른쪽 그림에서 방정식 $\cos x=x$는 구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에 적어도 하나의 실근이 존재함을 알 수 있다.



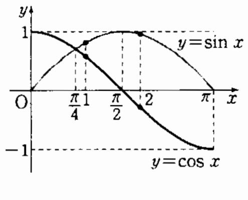
30

ㄱ. $f(x)=\sin x\cos x$로 놓으면 $f(x)$는 폐구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=\sin 1\cos 1>0$

$f(2)=\sin 2\cos 2<0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



ㄴ. $g(x)=\cos^2 x+\cos x$로 놓으면 $g(x)$는 폐구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$0<\cos 1<1$에서 $g(1)=\cos^2 1+\cos 1>0$

$-1<\cos 2<0$에서 $g(2)=\cos^2 2+\cos 2=\cos 2(\cos 2+1)<0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 $g(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $h(x)=\tan^2 x-\tan x$로 놓으면 $h(x)$는 폐구간 $[1,\ 2]$에서 불연속 함수이므로 중간값의 정리를 적용할 수 없다.

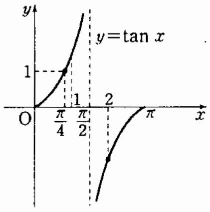
$h(x)=\tan x(\tan x-1)=0$에서 $\tan x=0$ 또는 $\tan x=1$

구간 $(1,\ 2)$에서 $\tan x$의 값의 범위는 다음과 같다.

(i) $1<x<\frac{\pi}{2}$일 때,

$\tan x>\tan 1>\tan\frac{\pi}{4}=1$

(ii) $\frac{\pi}{2}<x<2$일 때, $\tan x<\tan 2<0$



즉, 구간 $(1,\ 2)$에서 $\tan x=0$ 또는 $\tan x=1$을 만족하는 x의 값이 존재하지 않으므로 $h(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 근을 갖지 않는다.

따라서 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⅲ. 다항함수의 미분법

pp.12~18

31 ②	32 ③	33 ①	34 ②	35 ③
36 ④	37 ③	38 ②	39 ③	40 458
41 ④	42 ③	43 ⑤	44 ②	45 ⑤
46 4	47 ②	48 9	49 ④	50 ③
51 ②	52 27	53 ③	54 ④	55 ①

31

$$\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-\{xf(1)\}^2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)+xf(1)\}\{f(x)-xf(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\{f(x)+xf(1)\}\frac{\{f(x)-xf(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\{f(x)+xf(1)\}\frac{\{f(x)-f(1)-(x-1)f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\{f(x)+xf(1)\}\cdot\left\{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-f(1)\right\}$$
$$=2f(1)\cdot\{f'(1)-f(1)\}$$
$$=-12$$

32

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 $x=1$, $x=3$에서 접하고 있으므로 $f(x)-g(x)=a(x-1)^2(x-3)^2$으로 놓을 수 있다.

그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $a=1$

따라서 $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-3)^2$이므로

$f'(x)-g'(x)=2(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)$

$\therefore f'(2)-g'(2)=2-2=0$

33

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n(단, n은 자연수, $a\neq 0$)으로 놓으면 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이다.

$(x-1)f'(x)=f(x)$에서 좌변의 최고차항은 anx^n, 우변의 최고차항은 ax^n이므로 $an=a$에서 $n=1$

따라서 $f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$로 놓으면 $f'(x)=a$

$(x-1)f'(x)=f(x) \iff (x-1)a=ax+b$

$\iff a+b=0$

$\therefore f(x)=ax-a=a(x-1)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선이므로 ①이 가장 적당하다.

34

ㄱ. $x^2=-x^2+ax+\frac{1}{2}$에서 $2x^2-ax-\frac{1}{2}=0$

이 때, 판별식 $D=(-a)^2-4\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=a^2+4>0$이므로 두 곡선은 항상 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄴ. 한 교점을 (α, α^2)으로 놓으면

$$2\alpha^2-a\alpha-\frac{1}{2}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$y=x^2$에서 $y'=2x$

$$y=-x^2+ax+\frac{1}{2}\text{에서 } y'=-2x+a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $a\alpha=2\alpha^2-\frac{1}{2}$

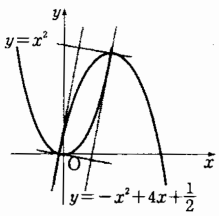
㉡에서 $2\alpha(-2\alpha+a)=-4\alpha^2+2a\alpha$

$$=-4\alpha^2+2\left(2\alpha^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-1$$

따라서 각 교점에서의 두 곡선의 접선은 항상 수직이다. (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 두 교점에서의 각 곡선의 접선 4개로 둘러싸인 도형은 직사각형이다.
예를 들어 $a=4$일 때, 두 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 네 접선으로 둘러싸인 도형은 정사각형이 아니다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

35

두 곡선이 점 (α, β)에서 만나므로

$$\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha+2=\alpha^2-k\alpha+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 (α, β)에서 미분계수가 서로 같으므로

$$3\alpha^2-6\alpha+3=2\alpha-k$$

$k=-3\alpha^2+8\alpha-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\alpha^3-2\alpha^2+1=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha^2-\alpha-1)=0$$

이 때, α는 정수이므로 $\alpha=1$

$$\therefore k=2$$

$$\therefore \alpha+k=1+2=3$$

36

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)f(y)-g(x)g(y)-f(x)}{y}$$
$$=f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-1}{y}-g(x)\lim_{y\to 0}\frac{g(y)}{y}$$
$$=f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}-g(x)\lim_{y\to 0}\frac{g(y)-g(0)}{y}$$
$$=f(x)f'(0)-g(x)g'(0)$$
$$=2f(x)-g(x)$$

$$g'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{g(x+y)-g(x)}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)g(y)+f(y)g(x)-g(x)}{y}$$
$$=f(x)\lim_{y\to 0}\frac{g(y)}{y}+g(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-1}{y}$$
$$=f(x)\lim_{y\to 0}\frac{g(y)-g(0)}{y}+g(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}$$
$$=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)$$
$$=f(x)+2g(x)$$
$$\therefore a+b+c+d=2+(-1)+1+2=4$$

37

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{x}=1,$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{-x}=-1$

이므로 $x=0$에서 $f(x)$는 불연속이다.

따라서 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+x)}{x}=0,\ \lim_{x\to-0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-x)}{-x}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+x)}{x^2}=1,$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-x)}{-x^2}=-1$

따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지는 않다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1+x)}{x}=0,\ \lim_{x\to-0}h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1-x)}{-x}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1+x)}{x^2}=0,$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1-x)}{-x^2}=0$

따라서 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 것은 ㄷ이다.

38

$f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$로 놓으면

$$f(-1)=a-b+c,\ f(0)=c,\ f(1)=a+b+c$$

$$\therefore a=\frac{f(1)+f(-1)-2f(0)}{2},\ b=\frac{f(1)-f(-1)}{2},\ c=f(0)$$

$|x|\leq 1$인 범위에서 $|f(x)|\leq 1$이므로

$|f(-1)|\leq 1,\ |f(0)|\leq 1,\ |f(1)|\leq 1$이 성립한다.

$$\therefore |f'(1)|=|\boxed{2a+b}|$$
$$=\left|\frac{3}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)-\boxed{2}f(0)\right|$$
$$\leq\frac{3}{2}|f(1)|+\frac{1}{2}|f(-1)|+2|f(0)|\leq\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2=\boxed{4}$$

따라서 $|f'(1)|$의 최대값은 $\boxed{4}$이다.

39

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$에서

$$f'(x)=(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-10)$$
$$+(x-1)(x-3)(x-4)\cdots(x-10)$$
$$+(x-1)(x-2)(x-4)\cdots(x-10)$$
$$+\cdots+(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-9)$$
$$f'(1)=(-1)\times(-2)\times(-3)\times\cdots\times(-9)=-9!$$
$$f'(10)=1\times 2\times 3\times\cdots\times 9=9!$$
$$\therefore f'(1)+f'(10)=0$$

40

$f_n(x)=x^2+a_nx+b_n\,(a_1=0,\ b_1=0)$에서 $f_n'(x)=2x+a_n$

$$f_{n+1}(x)=x^2+a_{n+1}x+b_{n+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+f_n'(x)$$
$$=x^2+a_nx+b_n+(2x+a_n)$$
$$=x^2+(a_n+2)x+(a_n+b_n) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a_{n+1}=a_n+2$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열이다.

$\therefore a_n=0+2(n-1)=2(n-1)$

$\therefore a_{20}=38$

$b_{n+1}=a_n+b_n$에서 $b_{n+1}=b_n+2(n-1)$

$\therefore b_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}2(k-1)=2\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$=(n-1)(n-2)\ (n\geq 2)$

$\therefore b_{22}=21\times 20=420$

따라서 $a_{20}+b_{22}=38+420=458$

41

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하기 위해서는 $f(x)$는 증가함수이어야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=x^2-2ax+(a+6)\geq 0$

이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-(a+6)=(a-3)(a+2)\leq 0$

$\therefore -2\leq a\leq 3$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 6개이다.

42

ㄱ. $y'=3x^2+4x+3$

$\frac{D}{4}=2^2-3\times 3=-5<0$

따라서 실수 a의 값에 관계없이 항상 $y'>0$이므로 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하는 함수이다.

ㄴ. $y'=3x^2-2ax+(a^2+1)$

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2+1)=-2a^2-3<0$

따라서 실수 a의 값에 관계없이 항상 $y'>0$이므로 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하는 함수이다.

ㄷ. (반례) $y'=3x^2+2ax-1$

$a=5$이면 $x=-1$일 때 $y'<0$이므로 감소상태이다.

따라서 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 항상 증가하는 함수가 아니다.

따라서 실수 a의 값에 관계없이 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 항상 증가하는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

43

$F(x)=\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$이므로

$F'(x)=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)$

$=2f(x)f'(x)$

ㄱ. $F'(x)=2f(x)f'(x)=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $f'(x)=0$

(ⅰ) $f(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $x=a,\ c,\ e$

(ⅱ) $f'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $x=b,\ d$

따라서 방정식 $F'(x)=0$은 서로 다른 5개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 구간 $(b,\ c)$에서 $f(x)>0$, $f'(x)<0$

$\therefore F'(x)=2f(x)f'(x)<0$

구간 $(c,\ d)$에서 $f(x)<0$, $f'(x)<0$

$\therefore F'(x)=2f(x)f'(x)>0$ (거짓)

ㄷ. 구간 $(d,\ e)$에서 $f(x)<0$, $f'(x)>0$

$F'(x)=2f(x)f'(x)<0$

구간 $(e,\ \infty)$에서 $f(x)>0$, $f'(x)>0$

$F'(x)=2f(x)f'(x)>0$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=e$에서 극소이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

44

주어진 그래프에서 $x\to\infty$일 때 $y\to-\infty$이고, y절편이 음수이므로

$a<0,\ d<0$

한편, 극대, 극소가 되는 x의 값이 모두 양수이므로

$y'=3ax^2+2bx+c$에서

$b^2-3ac>0,\ -\frac{2b}{3a}>0,\ \frac{c}{3a}>0$

$\therefore b>0,\ c<0$

따라서 곡선 $y=bx^3+cx^2-a$는 y절편이 양수이고,

$b>0$이므로 $x\to\infty$일 때 $y\to\infty$이다.

또, 삼차함수 $y=bx^3+cx^2-a$에서

$y'=3bx^2+2cx=x(3bx+2c)$

$x=0,\ x=-\frac{2c}{3b}$

그러므로 $x=0$에서 극대이고, $x=-\frac{2c}{3b}>0$에서 극소이므로 그래프의 개형은 ②와 같이 될 수 있다.

45

$y=x(x-k)^2$에서

$y'=(x-k)^2+2x(x-k)=(x-k)(3x-k)$

$y'=0$에서 $x=k$ 또는 $x=\frac{k}{3}$

증감을 조사하면 $x=\frac{k}{3}$에서 극대값을 가지므로

$a=\frac{k}{3},\ b=\frac{k}{3}\left(\frac{k}{3}-k\right)^2=\frac{4}{27}k^3$

이 때, 방정식 $x(x-k)^2=\frac{4}{27}k^3$에서

$x(x-k)^2-\frac{4}{27}k^3=0$

$\left(x-\frac{1}{3}k\right)^2\left(x-\frac{4}{3}k\right)=0$

$\therefore \alpha=\frac{4}{3}k$

$\therefore \frac{\alpha}{a}=\frac{\frac{4}{3}k}{\frac{1}{3}k}=4$

46

함수 $y=x(x-a)(x-b)$에서

$y'=(x-a)(x-b)+x(x-b)+x(x-a)$

$x=2$에서 극값을 가지므로

$(2-a)(2-b)+2(2-b)+2(2-a)=0$

$4-2a-2b+ab+4-2b+4-2a=0$

$12-4a-4b+ab=0$

즉, $ab-4a-4b=-12$이므로

$$\begin{aligned}(a-4)(b-4)&=ab-4a-4b+16\\&=-12+16\\&=4\end{aligned}$$

직선 $y=-4$와 곡선 $y=ax^3+bx^2+cx-4$가 $x=6$에서 접하고 $x=0$에서 만나므로

$$ax^3+bx^2+cx-4=-4$$

$$ax^3+bx^2+cx=ax(x-6)^2$$

$$\begin{aligned}\therefore y&=ax^3+bx^2+cx-4\\&=ax(x-6)^2-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'&=a(x-6)^2+2ax(x-6)\\&=a(x-6)(x-6+2x)\\&=3a(x-2)(x-6)\end{aligned}$$

$y'=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$

따라서 주어진 함수는 $a>0$이므로 $x=2$에서 극대이고, $x=6$에서 극소이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=x^3+ax^2+bx+1-x^3+ax^2-bx+1\\&=2(ax^2+1)\end{aligned}$$

$$2f(0)=2$$

이므로

$$ax^2+1=1$$

$$\therefore a=0$$

함수 $f(x)=x^3+bx+1$에서 $f'(x)=3x^2+b=0$

따라서 $x=\sqrt{-\frac{b}{3}}$ $(b<0)$에서 극소값을 갖는다.

$$f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3+b\sqrt{-\frac{b}{3}}+1=-1$$

$$\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3}}=-2,\quad \sqrt{-\frac{b}{3}}=-\frac{3}{b}$$

$$b^3=-27$$

$$\therefore b=-3$$

$$\therefore a^2+b^2=0+9=9$$

$y=(x-2)^2$에서

$$y'=2(x-2)$$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 $2(a-2)$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a-2)^2=2(a-2)(x-a)$$

이 접선의 x절편은

$$x=a-\frac{a-2}{2}=\frac{a+2}{2}$$

이 접선의 y절편은

$$y=(a-2)^2-2a(a-2)=-(a-2)(a+2)$$

$$\begin{aligned}\therefore S(a)&=\frac{1}{2}\times\frac{a+2}{2}\times\{-(a-2)(a+2)\}\\&=-\frac{1}{4}(a-2)(a+2)^2\ \ (0<a<2)\end{aligned}$$

$$S'(a)=-\frac{1}{4}(a+2)(3a-2)$$

함수 $S(a)$의 증감을 조사하면 $a=\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 최대값을 갖는다.

따라서 최대값은

$$S\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{64}{27}$$

50

$x>1,\ y>1,\ xy=8$에서

$$\log_2 x+\log_2 y=3,\ \ 0<\log_2 x<3$$

$\log_2 x=t$로 치환하면

$$\log_2 y=3-t,\ \ 0<t<3$$

따라서

$$\frac{8}{3}(\log_2 x)^3+(\log_2 y)^2=\frac{8}{3}t^3+(3-t)^2$$

$f(t)=\frac{8}{3}t^3+(3-t)^2$으로 놓으면

$$f'(t)=8t^2+2t-6=2(4t-3)(t+1)$$

따라서 증감을 조사하면 $t=\frac{3}{4}$일 때 $f(t)$는 최소값을 갖는다.

즉, $\log_2 x=\frac{3}{4}$일 때 최소값을 가지므로

$$x=\sqrt[4]{8}$$

$x^4-4x^3-2x^2+12x+6=a$에서

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+6$으로 놓으면

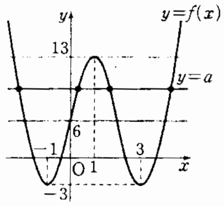
$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3-12x^2-4x+12\\&=4(x+1)(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

$f(x)$의 증가, 감소를 조사하면

$x=-1$에서 극소, $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이다.

$$f(-1)=-3,\ f(1)=13,\ f(3)=-3$$

또, $f(0)=6$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 서로 다른 세 개의 양의 근과 하나의 음의 근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는

$$6<a<13$$

$f(x)=-\frac{1}{2}x^4-x^3+6x^2+kx-1$에서

$$f'(x)=-2x^3-3x^2+12x+k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

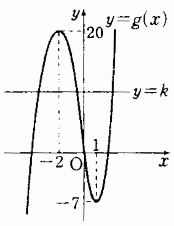
방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 개의 실근을 가질 때 사차함수 $f(x)$는 극대점을 2개 갖는다.

$k=2x^3+3x^2-12x$에서

$g(x)=2x^3+3x^2-12x$로 놓으면

$$g'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극대값 20을 갖고, $x=1$에서 극소값 -7을 갖는다.



따라서 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 개의 실근을 갖기 위해서는

$$-7<k<20$$

$$\therefore b-a=20-(-7)=27$$

53

$f(x)=2003x^{2005}-2005x^{2003}+a$로 놓으면

$f'(x)=2003\times2005(x^{2004}-x^{2002})$

$=2003\times2005x^{2002}(\boxed{x^2-1})$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ 1$

따라서 $x>-1$에서 $f(x)$의 증가, 감소를 조사하면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

$f(x)$는 $x=\boxed{1}$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 주어진 부등식이 성립하기 위해서는

$\boxed{f(1)}\geq0$

이어야 한다.

$f(1)=2003-2005+a=a-2\geq0$

$\therefore a\geq\boxed{2}$

54

$f(t)=t^3-3t^2+2t$로 놓으면

$t=1$에서 $t=7$까지의 점 P의 평균속도는

$\dfrac{f(7)-f(1)}{7-1}=\dfrac{210-0}{6}$

$=35$

시각 t에서의 점 P의 속도는

$f'(t)=3t^2-6t+2$

$f'(a)=3a^2-6a+2=35$에서

$a^2-2a-11=0$

$\therefore a=1+\sqrt{12}$

이 때, $3<\sqrt{12}<4$이므로

$4<a<5$

55

t초 후 직육면체의 밑면의 한 변의 길이와 높이는 각각

$6+t,\ 12-2t$

따라서 t초 후의 직육면체의 부피를 $V(t)$라 하면

$V(t)=(t+6)^2(12-2t)$

$V'(t)=2(t+6)(12-2t)-2(t+6)^2$

$=2(t+6)(6-3t)$

$t>0$에서 $V(t)$의 증가, 감소를 조사하면 $V(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이다.

한편, t초 후의 직육면체의 겉넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2(6+t)^2+4(6+t)(12-2t)$

$S'(t)=4(6+t)+4(12-2t)-8(6+t)=-12(t-2)$

$\therefore S'(2)=-12(2-2)$

$=0(\text{cm}^2/\text{초})$

Ⅳ. 다항함수의 적분법

Ⅲ pp.18~24

56 ④	57 ②	58 ①	59 2	60 ③
61 ③	62 12	63 ⑤	64 ②	65 ③
66 10	67 ②	68 ④	69 ④	70 54
71 ④	72 ④	73 ①	74 ⑤	75 ①
76 288	77 ①	78 ④	79 ③	80 ④

56

$f(x)=\int(3x^2-2x+1)dx$에서 $f'(x)=3x^2-2x+1$

$\therefore \lim_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2$

$=2f'(1)$

$=2(3-2+1)$

$=4$

57

접선의 기울기는 그 점에서 구한 미분계수이므로

$f'(x)=2x-1$

그러므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(2x-1)dx$

$=x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

$y=f(x)$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$f(1)=1-1+C=2$에서 $C=2$

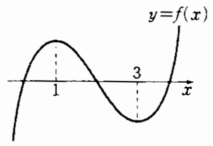
$\therefore f(x)=x^2-x+2$

따라서 $f(0)=2$이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(0,\ 2)$를 지난다.

$\therefore a=2$

58

삼차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 3이고 $x=1$과 $x=3$에서 x축과 만나므로



$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

그러므로

$f(x)=\int3(x-1)(x-3)dx$

$=\int(3x^2-12x+9)dx$

$=x^3-6x^2+9x+C$

$x=1$에서 극대값 1을 가지므로

$f(1)=1-6+9+C=1\quad\therefore C=-3$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

$x=3$에서 극소값을 가지므로

$f(3)=27-54+27-3=-3$

59

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$$

$$\therefore f'(x)=6x-2$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$$

$$=3x^2-2x+C$$

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+1$이므로

$$f(1)=3-2+1=2$$

60

주어진 식에 $x=y=0$을 대입하면

$$f(0+0)=f(0)+f(0)-0 \qquad \therefore f(0)=0$$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-xh}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-x\right\}\quad(\because f(0)=0)$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right\}-\lim_{h\to0}x$$

$$=f'(0)-x=2-x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2-x)dx=2x-\frac{1}{2}x^2+C$$

$f(0)=0$에서 $C=0$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$$

$$\therefore f(1)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

61

$f(x)=\begin{cases}3x^2+4x+1 & (x\leq0)\\ 1-2x & (x>0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}(3x^2+4x+1)dx+\int_{0}^{2}(1-2x)dx$$

$$=\Big[x^3+2x^2+x\Big]_{-2}^{0}+\Big[x-x^2\Big]_{0}^{2}$$

$$=0-(-2)+(-2)-0=0$$

62

$$\int_{-1}^{1}(x-2)f(x)dx=\int_{-1}^{1}xf(x)dx-2\int_{-1}^{1}f(x)dx$$

조건 Ⅰ에 의하여 $f(-x)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$xf(x)$는 $f(-x)=-f(x)$인 함수가 되므로

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

(주어진 식)$=0-4\int_{0}^{1}f(x)dx=-4\times(-3)=12$

63

$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+2 & (x\leq2)\\ -x+3 & (x>2)\end{cases}$에서

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}x^2+2x+C_1 & (x\leq2)\\ -\frac{1}{2}x^2+3x+C_2 & (x>2)\end{cases}$$

$f(1)=1$에서 $-\frac{1}{4}+2+C_1=1 \quad \therefore C_1=-\frac{3}{4}$

$x=2$에서 $y=f(x)$가 연속이므로

$$-1+4-\frac{3}{4}=-2+6+C_2 \quad \therefore C_2=-\frac{7}{4}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{3}{4} & (x\leq2)\\ -\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{7}{4} & (x>2)\end{cases}$$

$$\therefore f(4)=-8+12-\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$$

64

$$f_1(x)=x$$

$$f_2(x)=x+\frac{1}{2}\int_0^1 f_1(x)\,dx=x+\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx$$

$$=x+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=x+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f_3(x)=x+\frac{1}{2}\int_0^1 f_2(x)\,dx=x+\frac{1}{2}\int_0^1\left\{x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}dx$$

$$=x+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2x\right]_0^1=x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$\vdots$

$$f_n(x)=x+\frac{1}{2}\int_0^1 f_{n-1}(x)\,dx=x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

그러므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=x+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=x+\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(0)=\frac{1}{2}$$

65

(i) $\int f(x)dx=F(x)+C_1$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}(F(x)+C_1)=\boxed{f(x)}$$

(ii) $\int\frac{d}{dx}f(x)dx=G(x)$로 놓으면

$$\frac{d}{dx}G(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\boxed{f'(x)}$$

따라서 $\frac{d}{dx}\{G(x)-f(x)\}=0$에서 $G(x)-f(x)=C_2$이므로

$$G(x)=f(x)+C_2$$

$$\therefore \int\frac{d}{dx}f(x)dx=G(x)=f(x)+C_2$$

따라서 (i), (ii)에서 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx\neq\int\frac{d}{dx}f(x)dx$

66

$h=\frac{1}{n}$이라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)dx\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(-h)}{h} \quad (\text{단, } F'(x)=f(x))\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(h)-F(0)\}-\{F(-h)-F(0)\}}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(h)-F(0)}{h}+\frac{F(-h)-F(0)}{-h}\right\}\\ &=2F'(0)\\ &=2f(0)\\ &=2\cdot 5=10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(x^2+4x+5)dx &= 2\int_0^{\frac{1}{n}}(x^2+5)dx\\ &=2\left[\frac{x^3}{3}+5x\right]_0^{\frac{1}{n}}\\ &=2\left(\frac{1}{3n^3}+\frac{5}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{n\to\infty} 2n\left(\frac{1}{3n^3}+\frac{5}{n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{3n^2}+5\right)\\ &=10\end{aligned}$$

67

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} &= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}\\ &=\frac{1}{4}\int_1^5 f(x)dx\end{aligned}$$

이 때, $f(x)=f(x+2)$에서 $y=f(x)$는 주기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx &= \int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\\ &=2\int_{-1}^{1} f(x)dx\\ &=40\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} &= \frac{1}{4}\int_1^5 f(x)dx\\ &=\frac{1}{4}\cdot 40=10\end{aligned}$$

68

$$\begin{aligned}g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_0^{x+h-1} f(t)dt-\int_0^{x-1} f(t)dt\right\}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-1}^{x-1+h} f(t)dt\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{F(x-1+h)-F(x-1)}{h} \quad (\text{단, } F'(x)=f(x))\\ &=F'(x-1)\\ &=f(x-1)\end{aligned}$$

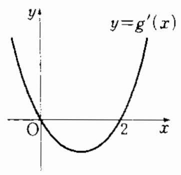
이므로 $g(x)$는 삼차함수이고,

$g(1)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이다.

(i) $x\leq 0$일 때, $g'(x)=f(x-1)\geq 0$이므로
$y=g(x)$는 증가

(ii) $0<x\leq 2$일 때, $g'(x)=f(x-1)\leq 0$이므로
$y=g(x)$는 감소

(iii) $x>2$일 때, $g'(x)=f(x-1)\geq 0$이므로
$y=g(x)$는 증가



따라서 그래프의 개형으로 적당한 것은 ④이다.

69

$\int_0^1 f(t)\,dt=C$ ······ ㉠

라 하면

$f(x)=4x^3-6x-C$

㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}&\int_0^1(4t^3-6t-C)\,dt=C\\ &\left[t^4-3t^2-Ct\right]_0^1=C\\ &1-3-C=C\\ &\therefore C=-1\end{aligned}$$

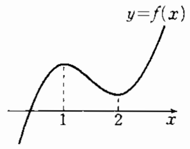
따라서 $f(x)=4x^3-6x+1$이므로

$f(0)=1$

70

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6(x^2-3x+2)\\ &=6(x-1)(x-2)=0\end{aligned}$$

에서 $x=1$일 때 극대값, $x=2$일 때 극소값을 갖는다.



$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x 6(t^2-3t+2)dt\\ &=\left[2t^3-9t^2+12t\right]_0^x\\ &=2x^3-9x^2+12x\end{aligned}$$

이므로

$f(1)=5,\ f(2)=4$

$\therefore\ 10M+m=50+4=54$

71

ㄱ. 그래프에서 k번째 직사각형의 세로의 길이는 $f(x_k)-g(x_k)$이고 가로의 길이는 $\frac{b-a}{n}$이므로 그 넓이는

$\{f(x_k)-g(x_k)\}\times\frac{b-a}{n}$

따라서 어두운 부분의 넓이는

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)-g(x_k)\}\times\frac{b-a}{n}$

ㄴ. 그래프에서 각각의 직사각형은 가로의 길이가 일정한데 반하여 주어진 식은 가로의 길이가 k의 값에 따라 늘어나고 있으므로 어두운 부분을 나타내는 식이 될 수 없다.

ㄷ. $\dfrac{b-a}{n}$는 x의 변화량이므로 $\dfrac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$

따라서 어두운 부분의 넓이를 나타내는 식은 ㄱ과 ㄷ이다.

72

$y=f(x)$의 역함수가 $y=g(x)$이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

그러므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_a^c |f(x)-g(x)|dx$이다.

ㄱ. $\int_a^c |f(x)|dx-\int_a^c |g(x)|dx \neq \int_a^c |f(x)-g(x)|dx$

ㄴ. $a \leq x < b$에서는 $f(x) \geq g(x)$이고 $b \leq x \leq c$에서는 $f(x) \leq g(x)$이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx+\int_b^c \{g(x)-f(x)\}dx$$

로 나타낼 수 있다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_a^c |x-f(x)|dx=2\int_a^c |x-g(x)|dx$$

따라서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 나타낸 식은 ㄴ과 ㄷ이다.

73

$$\int_0^b x(x-a)(x-b)\,dx$$

$$=\int_0^b \{x^3-(a+b)x^2+abx\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+b)x^3+\frac{1}{2}abx^2\right]_0^b$$

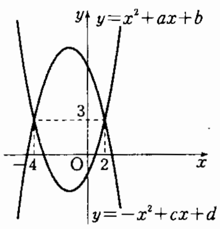
$$=\frac{1}{4}b^4-\frac{1}{3}(a+b)b^3+\frac{1}{2}ab^3$$

$$=\frac{1}{6}ab^3-\frac{1}{12}b^4=0$$

$\therefore\ 2a=b$

$\therefore\ a:b=1:2$

74



곡선 $y=x^2+ax+b$가 점 $(-4,\ 3)$과 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$16-4a+b=3$ ……㉠

$4+2a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$a=2,\ b=-5$

곡선 $y=-x^2+cx+d$가 점 $(-4,\ 3)$과 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$-16-4c+d=3$ ……㉢

$-4+2c+d=3$ ……㉣

㉢, ㉣에서

$c=-2,\ d=11$

그러므로 두 곡선의 식은

$y=x^2+2x-5,\ y=-x^2-2x+11$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-4}^2 \{(-x^2-2x+11)-(x^2+2x-5)\}dx$$

$$=\int_{-4}^2 (-2x^2-4x+16)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-2x^2+16x\right]_{-4}^2$$

$$=\left(-\frac{16}{3}-8+32\right)-\left(\frac{128}{3}-32-64\right)$$

$$=72$$

두 곡선의 교점의 x좌표가 $x=-4,\ 2$이므로 구하는 넓이는

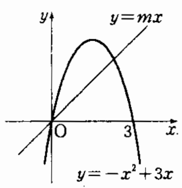
$$\int_{-4}^2 |(-x^2+cx+d)-(x^2+ax+b)|dx$$

$$=\int_{-4}^2 |-2x^2+(c-a)x+(d-b)|dx$$

$$=\left|-\frac{2}{6}\{2-(-4)\}^3\right|$$

$$=72$$

75



이차항의 계수가 -1이고 x축과 교점의 x좌표가 0과 3인 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=-x(x-3)=-x^2+3x$

원점을 지나는 직선을 $y=mx$라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x=mx$에서

$x^2+(m-3)x=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3-m$

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

이므로 위의 그래프에서 어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$이다.

$$\therefore \int_0^{3-m}(-x^2+3x-mx)\,dx=\int_0^{3-m}\{-x^2+(3-m)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{(3-m)}{2}x^2\right]_0^{3-m}$$

$$=-\frac{1}{3}(3-m)^3+\frac{(3-m)}{2}\cdot(3-m)^2$$

$$=\frac{(3-m)^3}{6}=\frac{9}{4}$$

$(3-m)^3=\dfrac{27}{2}$에서 $3-m=\sqrt[3]{\dfrac{27}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$이므로

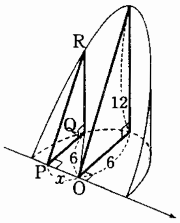
$$m=3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

참고 $f(x)=0$의 근이 0, 3이고 이차항의 계수가 -1이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\left|-\frac{1}{6}(3-0)^3\right|=\frac{9}{2}$이다.

또, 직선 $y=mx$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이도 $f(x)-mx=0$의 근이 $3-m$과 0이고 이차항의 계수가 -1이므로

$\left|-\frac{1}{6}(3-m-0)^3\right|=\frac{1}{6}(3-m)^3$이다.

76



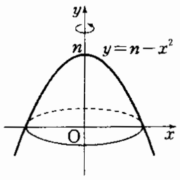
오른쪽 그림과 같이 밑면을 좌표평면 위에 놓고 밑면의 지름을 x축, 중심을 원점, x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 6cm, 높이는 12cm이므로 $\overline{QR}=2\overline{PQ}$이다.

$$\therefore\ S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{QR}=\overline{PQ}^2=36-x^2$$

따라서 남아 있는 물의 부피 V는

$$V=\int_{-6}^{6}S(x)\,dx=2\int_0^6(36-x^2)\,dx$$
$$=2\left[36x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6=288(\text{cm}^3)$$

77



$x^2=n-y$이므로 곡선을 y축 둘레로 회전시킬 때의 부피 a_n은

$$a_n=\pi\int_0^n x^2\,dy=\pi\int_0^n(n-y)dy$$
$$=\pi\left[ny-\frac{1}{2}y^2\right]_0^n=\frac{\pi}{2}n^2$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{12}a_k=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{12}k^2=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{12\cdot13\cdot25}{6}=325\pi$$

78

$x^2+(y-2)^2=1$을 y에 대하여 풀면

$$y=2\pm\sqrt{1-x^2}$$

따라서 원 $x^2+(y-2)^2=1$에서 직선 $y=2$ 위에 있는 반원을 $y=f(x)$, 직선 $y=2$ 밑에 있는 반원을 $y=g(x)$라 하면 구하는 회전체의 부피는

$$V=\pi\int_{-1}^{1}[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]\,dx$$
$$=\pi\int_{-1}^{1}\{(2+\sqrt{1-x^2})^2-(2-\sqrt{1-x^2})^2\}\,dx$$
$$=\boxed{8\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

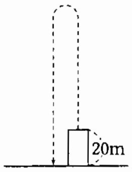
그런데 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$는 반지름의 길이가 1인 반원의 넓이이므로

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

따라서 구하는 회전체의 부피는

$$8\pi\times\frac{\pi}{2}=\boxed{4\pi^2}$$

79



최고 높이에 도달할 때 이 로켓의 속도는 0이므로

$$v(t)=49-9.8t=0\quad\therefore\ t=5$$

이 때, 지면으로부터의 높이를 h라 하면

$$h=20+\int_0^5(49-9.8t)\,dt$$
$$=20+\left[49t-4.9t^2\right]_0^5=142.5\,(\text{m})$$

즉, 로켓은 지면으로부터 20 m의 높이에서 142.5 m의 높이까지 올라갔다가 지면으로 떨어지므로 움직인 거리는

$$122.5+142.5=265(\text{m})$$

80

경사면에서 은주가 내려가는 속도는 $2t$ m/초이다.
따라서 경사면을 따라 내려가는 데 걸린 시간을 x초라 하면

$$\int_0^x 2t\,dt=x^2=100\quad\therefore\ x=10\,(\text{초})$$

또, 평지에서 처음 속도는 20 m/초이고, 매초 1 m/초씩 속도가 감소하므로 은주가 출발하고 $t\,(t\geq10)$초 후의 속도는

$$20-(t-10)=30-t\,(\text{m/초})$$

따라서 은주는 출발하고 30초 후에 멈추게 되고, 이때까지 움직인 거리는

$$100+\int_{10}^{30}(30-t)dt=100+\left[30t-\frac{1}{2}t^2\right]_{10}^{30}$$
$$=100+(900-450)-(300-50)$$
$$=300(\text{m})$$

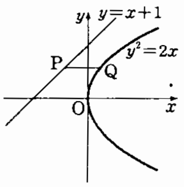
V. 이차곡선

pp.25~31

81 ⑤	82 8	83 ⑤	84 9	85 ⑤
86 ④	87 ③	88 ③	89 31	90 ③
91 ②	92 34	93 ①	94 ④	95 ③
96 ③	97 ⑤	98 50	99 ⑤	100 ②
101 ④	102 60	103 96	104 ①	105 18

81

오른쪽 그림과 같이 $y^2=2x$ 위의 한 점 Q를 $\mathrm{Q}\left(\frac{a^2}{2},\ a\right)$라 하면 $y=x+1$ 위의 점 P는 $\mathrm{P}(a-1,\ a)$ 이므로

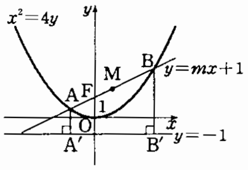


$$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{a^2}{2}-a+1$$
$$=\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}$$

따라서 $a=1$일 때 최소값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

82

직선 $y=mx+1$은 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(0,\ 1)$이므로 직선은 포물선의 초점 F를 지난다.



두 점 A, B의 좌표를 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 하고 두 점 A, B에서 준선 $y=-1$에 내린 수선의 발을 A′, B′라 하면 포물선의 정의로부터

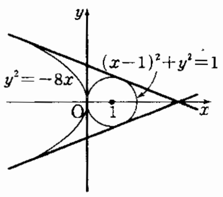
$$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AA'}}=y_1+1$$
$$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BB'}}=y_2+1$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=y_1+y_2+2$$

이 때, 선분 AB의 중점 M의 y좌표가 3이므로

$$\frac{y_1+y_2}{2}=3 \quad \therefore y_1+y_2=6$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=y_1+y_2+2=6+2=8$$

83

오른쪽 그림과 같이 y축은 원과 포물선의 공통접선이다.



$y^2=-8x=4\cdot(-2)x$의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx-\frac{2}{m}$ 로 놓을 수 있고 접선이

원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(1,\ 0)$

에서 접선 $mx-y-\frac{2}{m}=0$까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\therefore \frac{\left|m-\frac{2}{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$\left|m-\frac{2}{m}\right|=\sqrt{m^2+1}$의 양변을 제곱하면

$$m^2-4+\frac{4}{m^2}=m^2+1,\ m^2=\frac{4}{5}$$
$$\therefore m=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

따라서 세 접선의 방정식은

$$y=\frac{2}{\sqrt{5}}x-\sqrt{5}$$
$$y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\sqrt{5}$$
$$x=0\ (y\text{축})$$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

84

포물선의 초점이 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이므로

$$y^2=4\cdot3x=12x$$

점 P의 x좌표가 12이므로 y의 좌표는

$$y^2=12\cdot12=144 \quad \therefore y=12$$

따라서 두 점 $\mathrm{P}(12,\ 12)$, $\mathrm{F}(3,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{12}{12-3}(x-3)$$
$$y=\frac{4}{3}(x-3)$$

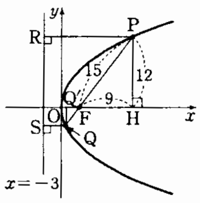
이 식을 $y^2=12x$에 대입하면

$$y^2=12\left(\frac{3}{4}y+3\right)=9y+36$$
$$\therefore y^2-9y-36=0$$

y_1, y_2는 $y^2-9y-36=0$의 해이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$y_1+y_2=9$$

오른쪽 그림에서 포물선의 초점이 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이므로 포물선의 방정식은



$$y^2=12x$$

두 점 P, Q에서 포물선의 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면

$$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PR}}=3+3+9=15$$

이므로

$$y_1=\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{FH}}^2}$$
$$=\sqrt{15^2-9^2}=12$$

점 $\mathrm{Q}\left(\frac{y_2^2}{12},\ y_2\right)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면

$y_2<0$이고 $\triangle\mathrm{PFH} \backsim \triangle\mathrm{QFQ'}$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{FH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{\overline{\mathrm{FQ'}}}{\overline{\mathrm{QQ'}}}$$
$$\frac{9}{12}=\frac{3-\frac{y_2^2}{12}}{-y_2}$$

즉, $y_2^2-9y_2-36=0$

$$(y_2-12)(y_2+3)=0$$

$y_2<0$이므로 $y_2=-3$

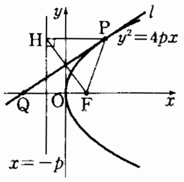
$$\therefore y_1+y_2=12+(-3)=9$$

85

ㄱ. 준선의 방정식이 $x=-p$이므로

$\overline{PF}=\overline{PH}=x_1-(-p)$

$=x_1+p$ (참)



ㄴ. 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선 l의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$ …… ㉠

이므로 접선 l의 기울기는 $\frac{2p}{y_1}$

직선 HF가 두 점 $H(-p,\ y_1)$, $F(p,\ 0)$을 지나므로 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{0-y_1}{p-(-p)}(x-p)$$

$$\therefore y=-\frac{y_1}{2p}(x-p)$$

따라서 직선 HF의 기울기는 $-\frac{y_1}{2p}$이다.

이 두 직선의 기울기를 곱하면

$$\frac{2p}{y_1}\times\left(-\frac{y_1}{2p}\right)=-1$$

$\therefore \overline{PQ}\perp\overline{HF}$ (참)

ㄷ. ㉠에서 $y=0$일 때, $x=-x_1$이므로 $Q(-x_1,\ 0)$

$\therefore \overline{QF}=p-(-x_1)=x_1+p$

따라서 $\overline{PF}=\overline{QF}$이므로 $\triangle PQF$는 이등변삼각형이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

86

두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$에서의 접선의 방정식은 각각

$y_1y=2a(x+x_1)$, $x_2x=2b(y+y_2)$

두 접선은 평행하므로 기울기는 같다.

$\therefore \frac{2a}{y_1}=\frac{x_2}{2b}\quad \therefore x_2y_1=\boxed{4ab}$ …… ㉠

점 $P(x_1,\ y_1)$은 $y^2=4ax$, 점 $Q(x_2,\ y_2)$는 $x^2=4by$ 위의 점이므로

${y_1}^2=4ax_1$, ${x_2}^2=4by_2$에서

$$x_1y_2=\frac{{y_1}^2}{4a}\cdot\frac{{x_2}^2}{4b}$$

$$=\frac{(x_2y_1)^2}{16ab}$$

$$=\frac{16a^2b^2}{16ab}\ (\because ㉠에\ 의해)$$

$$=\boxed{ab}$$

따라서 $\triangle POQ$의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}|ab-4ab|$$

$$=\boxed{\frac{3}{2}ab}$$

참고 원점 O와 두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$으로 이루어진 $\triangle OPQ$의 넓이 S는

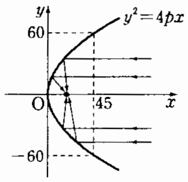
$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

87

반사경의 단면이 포물선이므로 포물선의 축과 평행하게 들어오는 모든 빛들은 초점에 모이게 된다.

즉, 성화봉을 초점에 위치시키면 가장 빠른 시간 내에 채화할 수 있다.

이 포물선의 방정식을 $y^2=4px(p>0)$라 하면 포물선은 점 $(45,\ 60)$을 지나므로



$60^2=4\cdot p\cdot 45$

$\therefore p=\frac{3600}{180}=20$

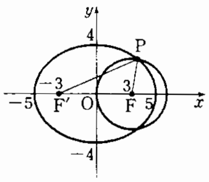
꼭지점에서 초점까지의 거리가 20이므로 반사경의 가장 깊은 지점으로부터 20cm 떨어진 곳에 성화봉을 놓아야 한다.

88

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점의 좌표는

$c^2=a^2-b^2=25-16=9$에서

$F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$



원 $x^2+y^2-6x=0$, 즉 $(x-3)^2+y^2=3^2$의 중심은 $F(3,\ 0)$이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$, $\overline{PF}=3$

$\therefore \overline{PF'}=10-3=7$

$\therefore |\overline{PF}-\overline{PF'}|=|3-7|=4$

89

초점을 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$이라 하면

$\triangle APA'=4\triangle FPF'$에서 $\overline{AA'}=4\overline{FF'}$

$\therefore 2a=4\cdot 2c$

$\therefore a=4c$ …… ㉠

$\triangle FPF'$의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{FF'}=2a+2c=10$

$\therefore a+c=5$ …… ㉡

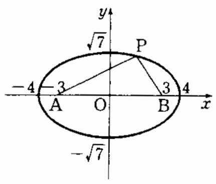
㉠, ㉡에서 $a=4$, $c=1$

또, $c^2=a^2-b^2$에서 $b^2=15$

$\therefore a^2+b^2=16+15=31$

90

타원의 초점의 좌표는 $c^2=16-7=9$에서 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로 두 점 A, B는 타원의 초점이다.



$\therefore \overline{PA}+\overline{PB}=2\cdot 4=8$

이고 $1\le\overline{PA}\le 7$이다.

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA}(8-\overline{PA})$

$=-(\overline{PA}-4)^2+16$

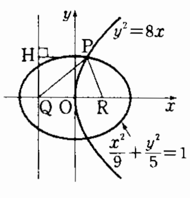
이므로 최대값은 $\overline{PA}=4$일 때 16이고,

최소값은 $\overline{PA}=1$ 또는 $\overline{PA}=7$일 때 7이다.

따라서 최대값과 최소값의 합은 $16+7=23$

91

주어진 타원의 초점의 좌표는 $c^2=9-5=4$에서 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이므로 점 $Q(-2,\ 0)$은 타원의 초점이다.



한편, $y^2=8x$에서 포물선의 초점은 $(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

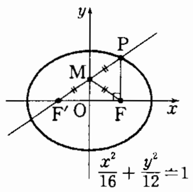
따라서 점 $(2,\ 0)$을 R라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PR}=\overline{PH}$

또, 타원에서 $\overline{PQ}+\overline{PR}=2\cdot3=6$이므로

$\overline{PQ}+\overline{PH}=\overline{PQ}+\overline{PR}=6$

92



오른쪽 그림에서

$\overline{PM}=\overline{F'M}=\overline{FM}$

점 M은 $\triangle PF'F$의 외심이므로 $\triangle PF'F$는 $\angle F'FP=90°$인 직각삼각형이다.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$에서 $c^2=16-12=4$이므로

$F'(-2,\ 0),\ F(2,\ 0)$

따라서 타원 위의 점 $P(x,\ y)$에서

$x=2$일 때 $y=\pm3$이므로 $P(2,\ 3)$

$\therefore \overline{PF}=3$

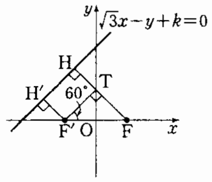
$\overline{PF'}+\overline{PF}=8$ ($\because$ 장축의 길이)에서 $\overline{PF'}=5$

$\therefore \overline{PF'}:\overline{PF}=5:3$

$\therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m^2+n^2=25+9=34$

93



타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$에 대하여 기울기가 $\sqrt{3}$인 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2\times10+6}$

$=\sqrt{3}x\pm6$

$k>0$이므로 $k=6$

두 초점은 $c^2=10-6=4$에서

$F(2,\ 0),\ F'(-2,\ 0)$

점 F′에서 직선 FH에 내린 수선의 발을 T라 하면 직선 $y=\sqrt{3}x+6$이 x축과 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\angle TF'F=60°$

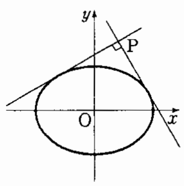
$\therefore \overline{HH'}=\overline{TF'}$

$=\overline{FF'}\cos60°$

$=4\times\frac{1}{2}=2$

$\therefore k+\overline{HH'}=6+2=8$

94



$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$에서

$y-mx=\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(y-mx)^2=m^2a^2+b^2$

$(x^2-a^2)m^2-2xym+y^2-b^2=0$

m에 대한 이차방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$라 하면

이것은 두 접선의 기울기가 된다.

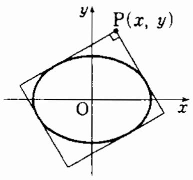
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1\times m_2=\boxed{\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}}$

한편, 두 접선은 수직이므로 $m_1\times m_2=-1$에서

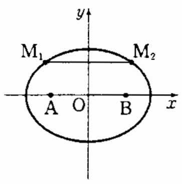
$\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}=-1$

$\therefore x^2+y^2=\boxed{a^2+b^2}$



참고 위의 성질을 이용하면 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에 외접하는 직사각형의 한 꼭지점 $P(x,\ y)$의 자취의 방정식은 원 $x^2+y^2=4^2+3^2=5^2$이고 자취의 길이는 $2\pi r=10\pi$임을 알 수 있다.

95



오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 처음 위치를 M_1, 10초 후의 위치를 M_2로 나타내면 $M_1,\ M_2$는 A, B를 초점으로 하고 장축의 길이가 30m인 타원 위에 있다.

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(단, $a>b>0$)이라 하면

$\overline{M_1A}+\overline{M_1B}=2a=30$

$\therefore a=15$

$b^2=15^2-9^2=12^2$

$\therefore b=12$

따라서 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{15^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$ …… ㉠

한편, 갑이 M_1에서 M_2까지 2m/초의 속도로 10초 동안 걷고 있으므로

$\overline{M_1M_2}=20$

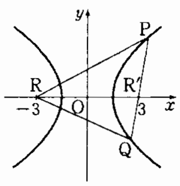
따라서 M_2의 x좌표는 10이므로 $x=10$을 ㉠에 대입하면

$\frac{10^2}{15^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$에서 $y^2=80$

이 때, $y>0$이므로 $y=4\sqrt{5}$

따라서 도로의 폭은 $4\sqrt{5}$m이다.

96



쌍곡선의 초점의 좌표는 $c^2=3+6=9$에서

$(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$

점 $(3,\ 0)$을 R′이라 하면 점 R과 R′은 쌍곡선의 초점이므로

$\overline{PR}-\overline{PR'}=2\sqrt{3},\ \overline{QR}-\overline{QR'}=2\sqrt{3}$

두 식을 변변 더하면

$\overline{PR}+\overline{QR}-(\overline{PR'}+\overline{QR'})=4\sqrt{3}$

$\overline{PQ}=\overline{PR'}+\overline{R'Q}=7$이므로

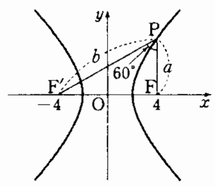
$\overline{PR}+\overline{QR}-7=4\sqrt{3}$

$\therefore \overline{PR}+\overline{QR}=7+4\sqrt{3}$

따라서 $\triangle PQR$의 둘레의 길이는

$\overline{PR}+\overline{QR}+\overline{PQ}=7+4\sqrt{3}+7=14+4\sqrt{3}$

97



쌍곡선의 초점의 좌표는 $c^2=4+12=16$에서

$F(4,\ 0),\ F'(-4,\ 0)$

$\overline{PF}=a,\ \overline{PF'}=b$라 하면 코사인법칙에 의하여

$8^2=a^2+b^2-2ab\cos60°$

$64=a^2+b^2-ab$ …… ㉠

쌍곡선의 정의에 의하여 $|a-b|=4$이므로

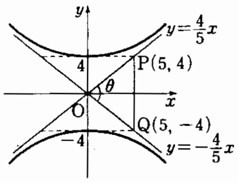
양변을 제곱하면

$a^2-2ab+b^2=16$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $ab=48$

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$$
$$=16+4\cdot 48=208$$
$$\therefore \overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=a+b=\sqrt{208}=4\sqrt{13}$$

98



쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{4}{5}x$이다.

두 점근선 위의 점을 $\mathrm{P}(5,\ 4)$, $\mathrm{Q}(5,\ -4)$라 할 때, $\triangle\mathrm{OPQ}$에서

$$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41},$$
$$\overline{\mathrm{PQ}}=8$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{41})^2+(\sqrt{41})^2-8^2}{2\cdot\sqrt{41}\cdot\sqrt{41}}$$
$$=\frac{9}{41}=\frac{q}{p}$$
$$\therefore p+q=50$$

99

$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$에서 $2x^2-5y^2=10$이므로

직선 $y=x+k$를 쌍곡선 $2x^2-5y^2=10$에 대입하면

$$2x^2-5(x+k)^2=10$$
$$3x^2+10kx+5(k^2+2)=0$$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=25k^2-15(k^2+2)=10k^2-30$이므로

(i) $\frac{D}{4}>0$, 즉 $k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$일 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $\frac{D}{4}=0$, 즉 $k=-\sqrt{3}$ 또는 $k=\sqrt{3}$일 때 한 점에서 만난다. (접한다.)

(iii) $\frac{D}{4}<0$, 즉 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$일 때 만나지 않는다.

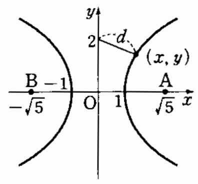
ㄱ. $k=\sqrt{2}$이면 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$이므로 만나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $k=3$이면 $k>\sqrt{3}$이므로 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $k=-\frac{1}{2}$이면 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$이므로 만나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

100



점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 자취를 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 점 P에서 두 정점 $\mathrm{A}(\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{5},\ 0)$에 이르는 거리의 차가 2이므로

$$2a=2 \quad \therefore a=1$$

또, $a^2+b^2=(\sqrt{5})^2$에서

$$1+b^2=5 \quad \therefore b^2=4$$

따라서 곡선 C의 방정식은

$$x^2-\frac{y^2}{4}=1$$

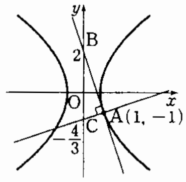
이 때, 점 (0, 2)로부터 곡선 C 위의 점 $(x,\ y)$에 이르는 거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{4}\right)+(y-2)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{5}{4}y^2-4y+5}=\sqrt{\frac{5}{4}\left(y-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$$

따라서 구하는 거리의 최소값은

$$\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

101



쌍곡선 $3x^2-y^2=2$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$$3\cdot 1\cdot x-(-1)\cdot y=2$$
$$\boxed{3x+y=2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 때, ㉠에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로

접선에 수직이고 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$을 지나는 직선은

$$y-(-1)=\frac{1}{3}(x-1)$$
$$\therefore \boxed{x-3y=4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

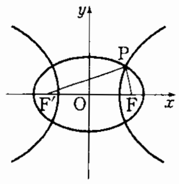
㉠, ㉡에서 y절편을 구하면

$$\mathrm{B}(0,\ 2),\ \mathrm{C}\left(0,\ -\frac{4}{3}\right)$$

따라서 구하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{4}{3}\right)\times 1=\boxed{\frac{5}{3}}$$

102



쌍곡선과 타원이 초점을 공유하므로

$$9+4=a-12$$
$$\therefore a=25$$

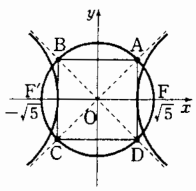
점 P는 쌍곡선 위의 점이므로

$$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2\cdot 3=6$$

또한, 점 P는 타원 위의 점이므로

$$|\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}|=2\cdot 5=10$$
$$\therefore |\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2|=|\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}|\,|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|$$
$$=6\cdot 10=60$$

103



쌍곡선의 두 초점은 $c^2=3+2=5$에서

$$\mathrm{F}(\sqrt{5},\ 0),\ \mathrm{F'}(-\sqrt{5},\ 0)$$

따라서 원의 방정식은

$$x^2+y^2=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$이므로

$$y^2=\frac{2}{3}x^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x^2+\frac{2}{3}x^2=5$에서 $x^2=3$

$$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{2}$$

원이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 네 점의 좌표는 각각

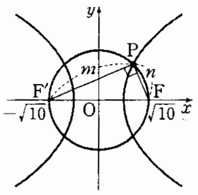
$$\mathrm{A}(\sqrt{3},\ \sqrt{2}),\ \mathrm{B}(-\sqrt{3},\ \sqrt{2}),\ \mathrm{C}(-\sqrt{3},\ -\sqrt{2}),\ \mathrm{D}(\sqrt{3},\ -\sqrt{2})$$

따라서 구하는 사각형 ABCD의 넓이 S는

$$S=2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{6}$$
$$\therefore S^2=96$$

104

$3x^2-2y^2=12$에서 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$이므로



주축의 길이는 4이고, 초점은

$F(\sqrt{10},\ 0)$, $F'(-\sqrt{10},\ 0)$

$\therefore \overline{FF'}=2\sqrt{10}$

$\overline{PF'}=m$, $\overline{PF}=n$이라 하면

쌍곡선의 정의에 의하여

$m-n=4$ …… ㉠

한편, 두 초점 F, F'은 원의 지름의 양 끝이므로

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle FPF'=90°$

즉, $\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=\overline{FF'}^2$

$\therefore m^2+n^2=40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=6,\ n=2$

따라서 구하는 $\triangle PFF'$의 넓이는

$\frac{1}{2}mn=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$

원과 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점을

$P(x,\ y)$라 하면

$x^2+y^2=10$ ……㉠

$3x^2-2y^2=12$ ……㉡

㉠×3−㉡에서

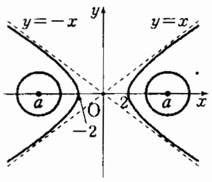
$5y^2=18,\ y^2=\frac{18}{5}$ $\quad\therefore y=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

따라서 $\triangle PFF'$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{5}=6$

105

$x^2-y^2\geq 4$가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분이다.



또, $(x-a)^2+y^2\leq 5$는 중심이 $(a,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원의 내부(경계선 포함)를 나타낸다.

$A\cap B=B$, 즉 $B\subset A$가 성립하려면

원이 쌍곡선의 어두운 부분에 포함되어야 한다.

$y^2=x^2-4$를 $(x-a)^2+y^2=5$에 대입하여 정리하면

$2x^2-2ax+a^2-9=0$

$\frac{D}{4}=a^2-2(a^2-9)\leq 0,\ -a^2+18\leq 0$

$\therefore\ a^2\geq 18$

따라서 구하는 a^2의 최소값은 18이다.

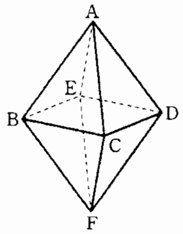
VI. 공간도형과 공간좌표

pp.31~36

106 ③	107 ②	108 ①	109 ③	110 ④
111 800	112 64	113 ①	114 ③	115 ⑤
116 ⑤	117 ④	118 ①	119 ④	120 2
121 ⑤	122 ②	123 ②	124 16	125 ⑤

106

오른쪽 정팔면체에서 □ABFD, □ACFE, □BCDE는 모두 정사각형이다.



ㄱ. 선분 AC와 꼬인 위치에 있는 선분은 $\overline{BE}$, $\overline{ED}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$로 모두 4개이다. (참)

ㄴ. □BCDE가 정사각형이므로 $\overline{CD}/\!/\overline{BE}$

따라서 선분 AB와 선분 CD가 이루는 각은 선분 AB와 선분 BE가 이루는 각과 같다.

이 때, $\triangle ABE$는 정삼각형이므로 $\angle ABE=\frac{\pi}{3}$

이다. (거짓)

ㄷ. 3개의 점이 하나의 평면을 결정하므로 6개의 점으로 만들 수 있는 평면의 최대 개수는 ${}_6C_3$개이다.

이 때, 네 점 A, B, F, D와 A, C, F, E와 B, C, D, E는 같은 평면 위에 있으므로 한 평면만 결정한다.

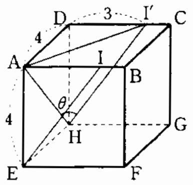
따라서 평면의 개수는

${}_6C_3-3\times{}_4C_3+3=20-12+3=11$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

107

$\overline{DC}$를 3 : 1로 내분하는 점을 I'이라 하면



$\overline{EI}/\!/\overline{HI'}$이므로 $\overline{AH}$와 $\overline{EI}$가 이루는 각의 크기는 $\overline{AH}$와 $\overline{HI'}$이 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{AH}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\overline{DI'}=\frac{3}{4}\times\overline{DC}=\frac{3}{4}\times 4=3$

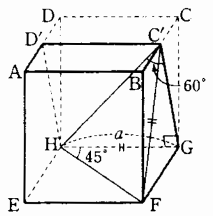
이므로 $\overline{AI'}=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\overline{HI'}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 $\triangle AHI'$에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{AH}^2+\overline{HI'}^2-\overline{AI'}^2}{2\overline{AH}\cdot\overline{HI'}}=\frac{(4\sqrt{2})^2+5^2-5^2}{2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

108

$\overline{HG}=a$라 하면 $\overline{C'F}=a$



$\triangle HFG$에서 $\angle FHG=45°$이므로 $\overline{FG}=a$

$\triangle HC'G$에서 $\angle HGC'=90°$이므로

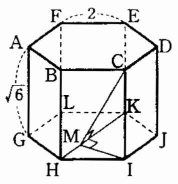
$\tan 60°=\frac{\overline{HG}}{\overline{C'G}}$

$\therefore\ \overline{C'G}=\frac{\overline{HG}}{\tan 60°}=\frac{\overline{HG}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}a}{3}$

따라서 $\triangle C'FG$에서

$$\cos(\angle C'GF)=\frac{\overline{FG}^2+\overline{C'G}^2-\overline{C'F}^2}{2\cdot\overline{FG}\cdot\overline{C'G}}=\frac{a^2+\frac{a^2}{3}-a^2}{2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}a}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

109



$\overline{CI}\perp$(평면 GHIJKL), $\overline{CM}\perp\overline{HK}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IM}\perp\overline{HK}$이다.

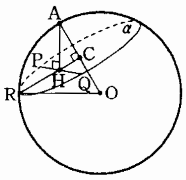
$\angle IHM=60^\circ$이므로

$$\overline{IM}=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$$

$\triangle CIM$에서

$$\overline{CM}=\sqrt{\overline{CI}^2+\overline{IM}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2}=3$$

110



오른쪽 그림에서 구를 자른 단면을 α라 하면 $\overline{AC}\perp\alpha$, $\overline{AH}\perp\overline{PQ}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{CH}\perp\overline{PQ}\qquad\therefore\ \overline{PH}=\overline{HQ}$$

이 때, 선분 CH의 연장선이 구와 만나는 점을 R라 하면 $\overline{CR}\perp\overline{OA}$, $\overline{OC}=1$, $\overline{OR}=2$이므로

$$\overline{CR}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \overline{CQ}=\sqrt{3}$$

$\triangle CHQ$에서

$$\overline{HQ}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

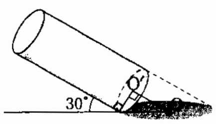
$\triangle AHC$에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

따라서 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\overline{HQ}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

111



원기둥의 밑면과 지면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\theta=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

그림자의 넓이를 S, 원기둥 밑면의 넓이를 S'이라 하면

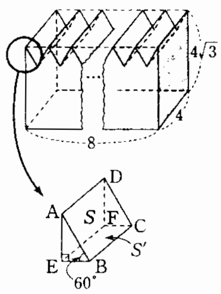
$$S'=S\times\cos 60^\circ$$

$$\therefore\ S=\frac{S'}{\cos 60^\circ}=\frac{S'}{\frac{1}{2}}=2S'$$

이 때, $S'=\pi\cdot 20^2=400\pi$이므로 그림자의 넓이는 $2\times 400\pi=800\pi$이다.

$$\therefore\ a=800$$

112



오른쪽 그림과 같이 'V' 자형 홈의 일부분인 직사각형 ABCD의 넓이를 S, 직사각형 ABCD의 직육면체의 밑면 위로의 정사영 EBCF의 넓이를 S'이라 하면

$$S'=S\times\cos 60^\circ=\frac{1}{2}S$$

$$\therefore\ S=2S'$$

이 때, 직사각형 ABCD와 같은 모양이 n개 있다면 'V' 자형인 위쪽 면의 넓이는 $nS=2nS'$이고, $nS'=8\times 4=32$이므로 구하는 넓이는

$$nS=2\times 32=64$$

113

평면끼리 이루는 이면각의 크기가 모두 같으므로 두 평면이 이루는 이면각의 크기는 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

$$(F_1\text{의 넓이})=(F\text{의 넓이})\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}S$$

$$(F_2\text{의 넓이})=(F_1\text{의 넓이})\times\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2S$$

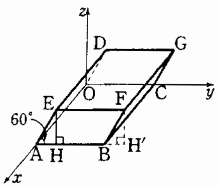
$$(F_3\text{의 넓이})=(F_2\text{의 넓이})\times\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3S$$

$$\vdots$$

따라서 정사영 $F_i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 넓이의 합은

$$\frac{1}{2}S+\left(\frac{1}{2}\right)^2S+\left(\frac{1}{2}\right)^3S+\cdots=S\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right\}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}S=S$$

114



$\angle DOA=90^\circ$이므로 평행사변형 DOCG는 yz평면 위에 있다.

꼭지점 E에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle EAH=60^\circ$이므로

$$\overline{AH}=2\cos 60^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\overline{EH}=2\sin 60^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

점 F에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

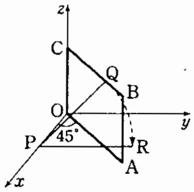
$$\overline{AH'}=4+1=5$$

또한, $\overline{OA}=\overline{GF}=6$이므로 꼭지점 F의 좌표는

$$(6,\ 5,\ \sqrt{3})$$

115

선분 BC 위의 한 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 P라 하고, 점 Q를 오른쪽 그림과 같이 x축 둘레로 회전시킬 때 xy평면과 만나는 점을 R라 하자.



이 때, 점 Q를 Q$(x,\ x,\ 2)(0\leq x\leq\sqrt{2})$라 하면 P$(x,\ 0,\ 0)$, R$(x,\ y,\ 0)$이다.

그런데 $\overline{PQ}=\overline{PR}$이므로

$$\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{y^2},\ x^2+4=y^2$$

$$x^2-y^2=-4\ (\text{단, } 0\leq x\leq\sqrt{2})$$

따라서 선분 BC가 회전하여 생기는 도형과 xy평면의 교선의 자취는 쌍곡선의 일부이다.

ㄱ. $g(2,\ -4,\ 2)$는 점 $(2,\ -4,\ 2)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점이므로
$(-2,\ -4,\ 2)$ (참)

ㄴ. $(g\circ h)(a,\ b,\ c)$는 점 $(a,\ b,\ c)$를 zx평면에 대하여 대칭이동한 후 이 점을 다시 yz평면에 대하여 대칭이동한 점이므로
$(a,\ b,\ c)\to(a,\ -b,\ c)\to(-a,\ -b,\ c)$
그러므로 점 $(g\circ h)(a,\ b,\ c)$는 점 $(-a,\ -b,\ c)$이다.
$(h\circ g)(a,\ b,\ c)$는 점 $(a,\ b,\ c)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 후 이 점을 다시 zx평면에 대하여 대칭이동한 점이므로
$(a,\ b,\ c)\to(-a,\ b,\ c)\to(-a,\ -b,\ c)$
그러므로 점 $(h\circ g)(a,\ b,\ c)$는 점 $(-a,\ -b,\ c)$이다.
따라서 $(g\circ h)(a,\ b,\ c)$와 $(h\circ g)(a,\ b,\ c)$은 같은 점이다. (참)

ㄷ. $f(a,\ b,\ c)$는 $(a,\ b,\ -c)$이고 $h(a,\ b,\ c)$는 $(a,\ -b,\ c)$이므로
점 $(a,\ b,\ c)$와 점 $(a,\ b,\ -c)$ 사이의 거리는 $2c$
점 $(a,\ b,\ c)$와 점 $(a,\ -b,\ c)$ 사이의 거리는 $2b$
$\therefore 2c>2b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

점 A$(1,\ 1,\ 1)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

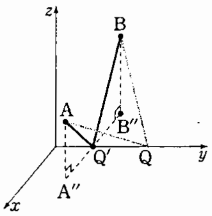
$$A'(1,\ 1,\ -1)$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최소값은 두 점 A′$(1,\ 1,\ -1)$과 B$(-1,\ 1,\ 3)$ 사이의 거리와 같으므로

$$a=\sqrt{(-1-1)^2+(1-1)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$$

또한, 두 점 A$(1,\ 1,\ 1)$, B$(-1,\ 1,\ 3)$을 xy평면 위에 정사영시킨 점의 좌표가 각각

$$A''(1,\ 1,\ 0),\ B''(-1,\ 1,\ 0)$$



이므로 $\overline{AQ}+\overline{BQ}$가 최소가 될 때의 점 Q의 좌표는 Q′$(0,\ 1,\ 0)$이다.

$$\therefore b=\overline{AQ'}+\overline{BQ'}$$
$$=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}+\sqrt{1^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{10}$$
$$\therefore ab=2\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{10})=2(5\sqrt{2}+\sqrt{10})$$

참고 점 Q의 좌표를 $(0,\ y,\ 0)$이라 하면

$$\overline{AQ}+\overline{BQ}=\sqrt{(-1)^2+(y-1)^2+(-1)^2}+\sqrt{1^2+(y-1)^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{(y-1)^2+2}+\sqrt{(y-1)^2+10}$$
$$\geq\sqrt{2}+\sqrt{10}$$

따라서 $y=1$일 때 $\overline{AQ}+\overline{BQ}$가 최소가 되므로 점 Q의 좌표는 $(0,\ 1,\ 0)$이다.

118

zx평면이 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하므로 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 y좌표는 0이다.

$$\frac{2\cdot 4+1\cdot a}{2+1}=0,\ 8+a=0$$
$$\therefore a=-8$$

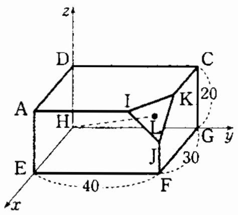
또한, xy평면이 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하므로 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 z좌표는 0이다.

$$\frac{1\cdot b+3\cdot(-1)}{1+3}=0,\ b-3=0$$
$$\therefore b=3$$
$$\therefore a+b=-5$$

119

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 꼭지점 H를 좌표공간에서 원점으로 놓으면 점 B의 좌표는

$$B(30,\ 40,\ 20)$$



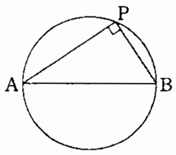
이 때, I, J, K의 좌표가

$$I(30,\ 30,\ 20),\ J(30,\ 40,\ 10),$$
$$K(20,\ 40,\ 20)$$

이므로 잘린 삼각형 IJK의 무게중심을 L이라 하면

$$L\left(\frac{80}{3},\ \frac{110}{3},\ \frac{50}{3}\right)$$
$$\therefore l^2=\overline{LH}^2=\frac{6400}{9}+\frac{12100}{9}+\frac{2500}{9}$$
$$=\frac{21000}{9}=\frac{7000}{3}$$

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\triangle ABP$는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이다.



따라서 점 P의 자취는 지름이 $\overline{AB}$인 구이므로 반지름의 길이를 r라 하면

$$4\pi r^2=36\pi,\ r^2=9$$
$$\therefore r=3$$
$$\overline{AB}^2=(a+2)^2+(-a-2)^2+(-2)^2$$
$$=2a^2+8a+12=36$$
$$a^2+4a-12=0,\ (a+6)(a-2)=0$$
$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

구 C_2는 반지름의 길이가 9이고 xy평면과 zx평면에 모두 접하므로 중심의 좌표를 $(a,\ 9,\ 9)$로 놓을 수 있다.

또, 구 C_1의 중심의 좌표는 $(3,\ 3,\ 3)$이고 두 구가 외접하므로 두 구의 중심거리는 반지름의 길이의 합과 같다. 따라서

$$\sqrt{(a-3)^2+(9-3)^2+(9-3)^2}=3+9$$
$$(a-3)^2=72$$
$$a-3=\pm 6\sqrt{2}$$
$$a=3+6\sqrt{2}\ (\because a>0)$$

122

$x^2+y^2+z^2-4x-8y-2az+4a-9=0$

$\Longleftrightarrow\ (x-2)^2+(y-4)^2+(z-a)^2=a^2-4a+29$

xy평면과 만나는 교선의 방정식은 $z=0$일 때이므로

$$(x-2)^2+(y-4)^2=-4a+29 \quad \cdots\cdots ㉠$$

zx평면과 만나는 교선의 방정식은 $y=0$일 때이므로

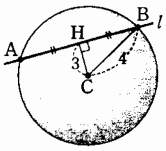
$$(x-2)^2+(z-a)^2=a^2-4a+13$$

따라서

$$S_1+S_2=(-4a+29)\pi+(a^2-4a+13)\pi$$
$$=\{(a-4)^2+26\}\pi$$

이므로 $a=4$일 때 최소값은 26π이다.

123



$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$$

이므로 구의 중심을 C라 하면 $\overline{CB}=4$이다.

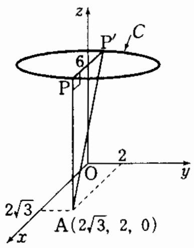
또한, 구의 중심 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 H는 $\overline{AB}$의 중점이고 $\overline{CH}=3$이다.

따라서

$$\overline{BH}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

이므로 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하는 원의 넓이는 7π이다.

124



$\overline{OA}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2+0^2}=4$

이므로 점 A에서 평면 $z=6$ 위에 내린 수선의 발 P는 원 C 위에 있다.

따라서 점 A에서 원 C까지 거리의 최소값 m은

$$m=6$$

또, 점 P와 원 C의 중심을 잇는 직선이 원 C와 만나는 점을 P'이라 하면 $\overline{AP'}$이 점 A에서 원 C까지 거리의 최대가 되므로

$$M=\overline{AP'}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PP'}^2}$$
$$=\sqrt{6^2+8^2}=10$$
$$\therefore M+m=16$$

125

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$라 하면

$$X=\frac{x}{2},\ Y=\boxed{\frac{y-2}{2}},\ Z=\boxed{\frac{z+2}{2}}$$

즉, $x=2X$, $y=\boxed{2Y+2}$, $z=\boxed{2Z-2}$이므로 구의 방정식에 대입하면

$$(2X)^2+(2Y+2-1)^2+(2Z-2+1)^2=8$$
$$4X^2+(2Y+1)^2+(2Z-1)^2=8$$
$$X^2+\left(Y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Z-\frac{1}{2}\right)^2=2$$

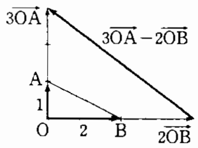
따라서 점 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$의 자취는 중심이 $\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\boxed{\sqrt{2}}$인 구이다.

Ⅶ. 벡터

pp.36~43

126 ①	127 ⑤	128 ③	129 ③	130 10
131 ②	132 ③	133 25	134 ⑤	135 ①
136 ③	137 98	138 ①	139 ④	140 ③
141 ④	142 5	143 ①	144 54	145 ③
146 20	147 ⑤	148 ②	149 78	150 ⑤

126



점 C가 직선 AB 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (단, k는 실수)로 놓을 수 있다.

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$$\therefore \overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB} \quad \cdots\cdots ㉠$$

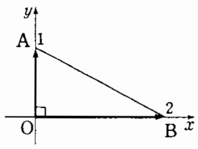
㉠과 주어진 등식으로부터

$$(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}=(2-t)\overrightarrow{OA}+2t\overrightarrow{OB}$$
$$\therefore 1-k=2-t,\ k=2t$$
$$\therefore t=-1,\ k=-2$$

따라서 $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$이고

위의 그림에서 $|3\overrightarrow{OA}|=3,\ |2\overrightarrow{OB}|=4$이므로

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$



오른쪽 그림과 같이 점 O를 원점으로 하는 좌표평면에서

$$\overrightarrow{OA}=(0,\ 1),\ \overrightarrow{OB}=(2,\ 0)$$
$$\overrightarrow{OC}=(2-t)(0,\ 1)+2t(2,\ 0)$$
$$=(4t,\ 2-t)$$

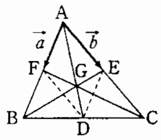
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식이 $\frac{x}{2}+y=1$이고

C가 직선 위의 점이므로 $\frac{4t}{2}+2-t=1 \qquad \therefore t=-1$

따라서 $\overrightarrow{OC}=(-4,\ 3)$이므로

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$$

127



오른쪽 그림에서

ㄱ. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}=-\vec{a}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=2\vec{b}-\vec{a}$ (참)

ㄷ. $\overrightarrow{DG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{3}(-\overrightarrow{AD})=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE})$

$$=-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

128

$$\vec{x}-3\vec{y}=\vec{p} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{q} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$+3\times$㉡을 하면 $7\vec{x}=\vec{p}+3\vec{q}$에서

$$\vec{x}=\frac{1}{7}\vec{p}+\frac{3}{7}\vec{q} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$\vec{y}=-\frac{2}{7}\vec{p}+\frac{1}{7}\vec{q} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢+㉣을 하면

$$\vec{x}+\vec{y}=-\frac{1}{7}\vec{p}+\frac{4}{7}\vec{q}$$

따라서 벡터 $\vec{x}+\vec{y}$의 종점은 (라)에 위치한다.

$\triangle ABC$의 무게중심이 O이므로

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}&=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})\\&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-3\overrightarrow{OP}\\&=-3\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=|-3\overrightarrow{OP}|=3|\overrightarrow{OP}|=15$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}|=5$$

따라서 점 P는 정삼각형 ABC의 크기에 관계없이 중심이 O이고 반지름의 길이가 5인 원을 나타낸다.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\\&=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{a}\\&=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

$$\therefore p=-\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2},\ r=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 20(p+q+r)=20\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=10$$

벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내면

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+3\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=3\vec{a}+2\vec{c},\ \overrightarrow{OC}=2\vec{a}+3\vec{c},\ \overrightarrow{OD}=2\vec{b}+2\vec{c}$$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CD}$는

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}+2\vec{c})-(2\vec{a}+3\vec{b})=\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(2\vec{b}+2\vec{c})-(2\vec{a}+3\vec{c})=-2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}&=(\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c})+(-2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\\&=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha=-1,\ \beta=-1,\ \gamma=1$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=(-1)+(-1)+1=-1$$

조건 Ⅰ에서 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}$이므로

$$\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}$$

$$\therefore \overrightarrow{PB}=-3\overrightarrow{PA}$$

즉, 점 P는 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

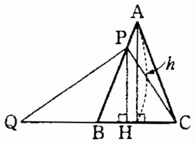
또, 조건 Ⅱ에서 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QA}$이므로

$$\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QA}=2\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QA}$$

$$\therefore \overrightarrow{QC}=2\overrightarrow{QB}$$

즉, 점 Q는 선분 BC를 1 : 2로 외분하는 점이다.

그러므로 $\triangle ABC$와 점 P, Q의 위치는 오른쪽 그림과 같다.



$\triangle ABC$의 높이를 h, 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot h$$

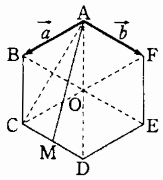
점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\frac{3}{4}h$이고, $\overline{QC}=2\overline{BC}$이므로 $\triangle PQC$의 넓이를 S_2라 하면

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\overline{QC}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\cdot 2\overline{BC}\cdot\frac{3}{4}h\\&=\frac{3}{2}S_1\end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABC : \triangle PQC=S_1 : \frac{3}{2}S_1=2 : 3$$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=2\vec{a}+\vec{b}$이므로



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=(2\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{b}\\&=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

한편, $\triangle ADM$에서 $\overline{AD}=2$, $\overline{DM}=\frac{1}{2}$이고,

$\angle ADM=60^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2&=\overline{AD}^2+\overline{DM}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DM}\cdot\cos 60^\circ\\&=2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

그러므로 방향이 $\overrightarrow{AM}$과 같은 단위벡터는

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|}=\frac{4}{\sqrt{13}}\vec{a}+\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{b}$$

따라서 $m=\frac{4}{\sqrt{13}}$, $n=\frac{3}{\sqrt{13}}$이므로

$$13(m^2+n^2)=4^2+3^2=25$$

참고 $|\overrightarrow{AM}|^2=\left(2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)$

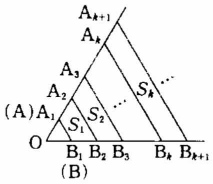
$$\begin{aligned}&=4|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{9}{4}|\vec{b}|^2\\&=4+6|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ+\frac{9}{4}\\&=4+6\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{4}\\&=\frac{13}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}\\&=(x+y)\left(\frac{x}{x+y}\overrightarrow{OA}+\frac{y}{x+y}\overrightarrow{OB}\right)\end{aligned}$$

에서 $\overrightarrow{OQ}=\frac{x}{x+y}\overrightarrow{OA}+\frac{y}{x+y}\overrightarrow{OB}$로 놓을 때, 점 Q는 선분 AB 위의 점을 나타낸다.

즉, $\overrightarrow{OP}=(x+y)\overrightarrow{OQ}$이므로 $k\leq x+y\leq k+1$일 때 점 P가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분이고 그 넓이를 S_k라 하면



$$\overline{OA_{k+1}}=(k+1)\overline{OA}=k+1$$
$$\overline{OB_{k+1}}=(k+1)\overline{OB}=k+1$$

이므로

$$S_k=(\triangle OA_{k+1}B_{k+1}\text{의 넓이})-(\triangle OA_kB_k\text{의 넓이})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(k+1)^2\cdot\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\cdot k^2\cdot\sin 60^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(k+1)^2-k^2\}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{3}}{4}\{(k+1)^2-k^2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+(4^2-3^2)+\cdots+(11^2-10^2)\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(11^2-1^2)=30\sqrt{3}$$

135

$3x-y+5=0$에서 $y=3x+5$

점 Q는 직선 $y=3x+5$ 위의 점이므로 $Q(x,\ 3x+5)$라 하면

점 $P(3,\ 4)$에 대하여 $\overrightarrow{PQ}=(x-3,\ 3x+1)$

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(x-3)^2+(3x+1)^2}$$
$$=\sqrt{10x^2+10}=10$$

에서 $x^2=9$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

이 때, 점 Q는 제3사분면 위의 점이므로 $x=-3$

$$\therefore \overrightarrow{PQ}=(-6,\ -8)$$

따라서 $a=-6$, $b=-8$이므로

$$a+b=-14$$

136

$B(4,\ 5,\ 2)$에서 x좌표가 4이고 $\overline{EH}=2$이므로 점 D의 x좌표는 2,

점 B의 y좌표가 5이고 $\overline{GH}=2$이므로 점 D의 y좌표는 3,

점 B의 z좌표가 2이므로 점 D의 z좌표는 2이다.

$$\therefore D(2,\ 3,\ 2)$$

또한, $B(4,\ 5,\ 2)$에서 $F(4,\ 5,\ 0)$이므로

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}(4-2,\ 5-3,\ 0-2)$$
$$=\frac{1}{2}(2,\ 2,\ -2)=(1,\ 1,\ -1)$$

점 E의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같고

점 E의 y좌표는 점 D의 y좌표와 같다.

또, 점 E의 z좌표는 0이므로 $E(4,\ 3,\ 0)$

$$\therefore \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=(4-4,\ 3-5,\ 0-2)$$
$$=(0,\ -2,\ -2)$$

따라서

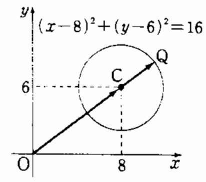
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}=(1,\ 1,\ -1)+(0,\ -2,\ -2)$$
$$=(1,\ -1,\ -3)$$

이므로

$$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{11}$$

137

원 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OC}$가 성립하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$의 연장선 위에 점 Q가 있다.

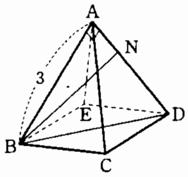


원의 반지름의 길이는 4, $|\overrightarrow{OC}|=10$이므로

$$|\overrightarrow{OQ}|=14$$
$$\therefore \overrightarrow{OQ}=\frac{7}{5}\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{7}{5}(8,\ 6)$$
$$=\left(\frac{56}{5},\ \frac{42}{5}\right)$$
$$\therefore 5(a+b)=5\left(\frac{56}{5}+\frac{42}{5}\right)=98$$

138

사각형 BCDE는 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로



$$\overline{BD}=3\sqrt{2}$$

또, $\overline{AB}=\overline{AD}=3$이므로 $\triangle ABD$는 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형이다.

$$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BD})$$
$$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BN}|\cos(\angle ABN)+|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|\cos(\angle ABD)$$
$$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BN}|\cdot\frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BN}|}+|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|\cdot\frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BD}|}$$
$$=|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BA}|^2$$
$$=2|\overrightarrow{BA}|^2=2\times 9=18$$

139

세 점 $A(0,\ 2,\ -1)$, $B(1,\ -1,\ -3)$, $C(p,\ 0,\ 0)$에 대하여

$\overrightarrow{AB}=(1,\ -3,\ -2)$, $\overrightarrow{AC}=(p,\ -2,\ 1)$이므로

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=p+6-2=p+4$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{p^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{p^2+5}$$

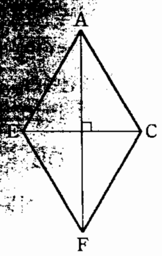
$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$에서

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{p+4}{\sqrt{14}\sqrt{p^2+5}}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{p+4}{\sqrt{14}\sqrt{p^2+5}},\quad 2(p+4)^2=7(p^2+5)$$
$$5p^2-16p+3=0,\quad (p-3)(5p-1)=0$$

이 때, p는 정수이므로 $p=3$

140

ㄱ. 사각형 AEFC는 마름모이므로 두 대각선은 오른쪽 그림과 같이 서로 수직이등분한다.



즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AF}$와 $\overrightarrow{CE}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=0\ (\text{참})$$

ㄴ. 사각형 BCDE는 정사각형이므로

$$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$$

그러므로 $\triangle ABD$는 정삼각형이다.

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|\cos\frac{2\pi}{3}$

$=2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-2$ (거짓)

ㄷ. $\overline{BD}$와 $\overline{CE}$의 교점이 점 H이므로

$|\overrightarrow{BH}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|=1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BH}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BH}|\cos\frac{2\pi}{3}$

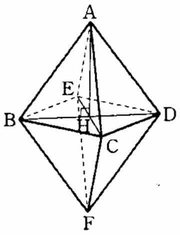
$=2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$\therefore |2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BH}|^2$

$=4|\overrightarrow{AB}|^2-12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BH}+9|\overrightarrow{BH}|^2$

$=16+12+9$

$=37$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$라 하면

$\overrightarrow{MN}=\boxed{\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}}$

$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{a}$

$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$

이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{a}\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{a})$

$=\frac{1}{2}(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+|\vec{a}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}-|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0)$

$=\frac{1}{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}|\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2}\right)$

$=0$

$\therefore \overline{AB}\perp\overline{MN}$

A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 물체가 이동하는 방향, 즉 $\overrightarrow{OB}$의 방향으로 작용한 힘의 크기는

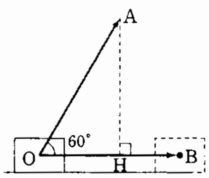
$|\overrightarrow{OH}|=|\overrightarrow{OA}|\cos60^\circ$

이고 물체가 움직인 거리는 $|\overrightarrow{OB}|$이므로 한 일 W는

$W=|\overrightarrow{OH}|\times|\overrightarrow{OB}|$

$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos60^\circ$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$



그런데 조건에서

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=25$이고 $|\overrightarrow{OA}|=10$이므로

$25=10\times|\overrightarrow{OB}|\times\frac{1}{2}$에서 $|\overrightarrow{OB}|=5$

따라서 물체가 이동한 거리는 5m이다.

$\therefore a=5$

직선 l_1 : $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-a}=\frac{z+1}{5}$의 방향벡터 $\vec{u_1}$은 $\vec{u_1}=(3,\ -a,\ 5)$이고,

점 A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}$, $z=0$

이므로 이 직선의 방향벡터 $\vec{u_2}$는 $\vec{u_2}=(-1,\ 2,\ 0)$이다.

그런데 두 방향벡터 $\vec{u_1}$과 $\vec{u_2}$의 x성분과 y성분의 비가 같아야 하므로

$\frac{3}{-1}=\frac{-a}{2}$에서 $a=6$

따라서 직선 l_1을 x, y, z축의 양의 방향으로 각각 2, -1, -3만큼 평행이동한 직선 l_2의 방정식은

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z+4}{5}$

한편, 직선 l_2가 점 $(5,\ b,\ c)$를 지나므로

$1=\frac{b-1}{-6}=\frac{c+4}{5}$ $\quad\therefore b=-5,\ c=1$

$\therefore a+b+c=6+(-5)+1=2$

직선 l의 방정식 $\frac{x}{2}=y=\frac{z-2}{-1}$에서

$\frac{x}{2}=y=\frac{z-2}{-1}=t$로 놓으면

$x=2t,\ y=t,\ z=-t+2$

직선 l 위의 점을 점 $(2t,\ t,\ -t+2)$라 하면

점 A까지의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(2t-1)^2+(t-2)^2+(-t+2-3)^2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{6t^2-6t+6}=3\sqrt{2}$

$t^2-t-2=0,\ (t-2)(t+1)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=-1$

따라서 구하는 두 점은 P$(4,\ 2,\ 0)$, Q$(-2,\ -1,\ 3)$이므로

$\overline{PQ}^2=(-2-4)^2+(-1-2)^2+3^2=54$

두 직선 l_1과 l_2의 방향벡터는 각각

$\vec{u_1}=(a+2,\ -1,\ 1)$, $\vec{u_2}=(4,\ 2a,\ 0)$이다.

ㄱ. $l_1\perp l_2$이므로 $\vec{u_1}\perp\vec{u_2}$, 즉 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=4(a+2)-2a$

$=2a+8=0$

$\therefore a=-4$ (참)

ㄴ. $\vec{u_1}=k\vec{u_2}$인 실수 k는 존재할 수 없으므로 두 직선 l_1과 l_2가 평행할 때의 a의 값은 존재할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $a=-1$일 때

$\vec{u_1}=(1,\ -1,\ 1)$, $\vec{u_2}=(4,\ -2,\ 0)$

이므로

$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$

$=\frac{|1\cdot4+(-1)\cdot(-2)+1\cdot0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{4^2+(-2)^2+0^2}}$

$=\frac{\sqrt{15}}{5}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

146

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각

$\vec{u_1}=(1,\ 2,\ -1)$, $\vec{u_2}=(1,\ -1,\ 1)$

임의의 실수 t, s에 대하여

$$l_1 : x=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}=t$$

$$l_2 : x-1=\frac{y}{-1}=z-2=s$$

라 하면 $A(t,\ 2t+1,\ -t-1)$, $B(s+1,\ -s,\ s+2)$로 나타낼 수 있다.

이 때, $\overrightarrow{OA}\perp\vec{u_1}$이므로

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u_1}=t+2(2t+1)+(-1)(-t-1)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{2}$$

또한, $\overrightarrow{OB}\perp\vec{u_2}$이므로

$$\overrightarrow{OB}\cdot\vec{u_2}=(s+1)+(-1)(-s)+(s+2)=0$$

$$\therefore s=-1$$

$$\therefore \overrightarrow{OA}=\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right),\ \overrightarrow{OB}=(0,\ 1,\ 1)$$

$\angle AOB=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$$

따라서 $\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$$\therefore 30a=20$$

147

두 점 $A(a,\ 4,\ 1)$, $B(3,\ 2,\ -2)$를 지나는 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(3-a,\ -2,\ -3)$이다.

따라서 구하는 평면은 $\vec{u}=(3-a,\ -2,\ -3)$에 수직이고 점 $C(1,\ -2,\ b)$를 지나므로

$$(3-a)(x-1)-2(y+2)-3(z-b)=0,\ \text{즉}$$

$$(3-a)x-2y-3z+a+3b-7=0$$

이 식은 $x-2y-3z+4=0$과 일치하여야 하므로

$$3-a=1,\ a+3b-7=4$$

$$\therefore a=2,\ b=3$$

$$\therefore a+b=2+3=5$$

148

구 $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z+5=0$에서

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=1$$

이므로 구의 중심 C의 좌표는 $C(1,\ -1,\ -2)$이다.

한편, 평면 $\alpha : 2x+3y+2z=12$의 법선벡터 $\vec{n}$은 $\vec{n}=(2,\ 3,\ 2)$이므로 구의 중심 $C(1,\ -1,\ -2)$를 지나고 평면에 수직인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$$

임의의 실수 t에 대하여 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}=t$라 하면 이 직선과 평면 α의 교점 H의 좌표는

$$H(2t+1,\ 3t-1,\ 2t-2)$$

점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$2(2t+1)+3(3t-1)+2(2t-2)=12 \qquad \therefore t=1$$

$$\therefore H(3,\ 2,\ 0)$$

$$\therefore a+b+c=5$$

149

$x-y-z+2=0$ ...... ㉠

$2x-3y+z+5=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 z를 소거하면

$3x-4y+7=0$, 즉 $3(x+1)=4(y-1)$ ...... ㉢

㉠, ㉡에서 x를 소거하면

$y-3z-1=0$, 즉 $y-1=3z$ ...... ㉣

㉢과 ㉣에서 교선의 방정식은

$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3}=z$이고 방향벡터는 $\vec{u}=(4,\ 3,\ 1)$

임의의 실수 t에 대하여 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3}=z=t$라 하면

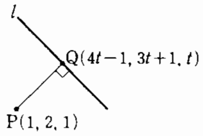
교선 위의 점 Q의 좌표는 $Q(4t-1,\ 3t+1,\ t)$이므로

$$\overrightarrow{PQ}=(4t-2,\ 3t-1,\ t-1)$$

$\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때, $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0$이므로

$$4(4t-2)+3(3t-1)+(t-1)=0$$

$$\therefore t=\frac{6}{13}$$



따라서 $\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{2}{13},\ \frac{5}{13},\ -\frac{7}{13}\right)$이므로

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\frac{4+25+49}{13^2}}=\frac{\sqrt{78}}{13}$$

$$\therefore k=78$$

150

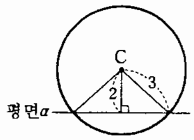
구 $S : (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=r^2$의 중심 $C(1,\ -2,\ 0)$에서

평면 $\alpha : x+2y+2z+9=0$까지의 거리 d는

$$d=\frac{|1-4+9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2$$

ㄱ. 구의 중심에서 평면까지의 거리가 2이므로 구의 반지름의 길이가 2이면 구와 평면은 접한다. (참)

ㄴ. 오른쪽 그림에서 평면 α에 의하여 잘린 구 S의 단면은 원이고 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$이므로 넓이는 5π이다. (참)



ㄷ. 구의 중심 C의 좌표가 $C(1,\ -2,\ 0)$이므로 $\overrightarrow{OC}=(1,\ -2,\ 0)$이고 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$이다.

$\overrightarrow{OC}$와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\vec{n}$과 $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{OC}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{|1-4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.