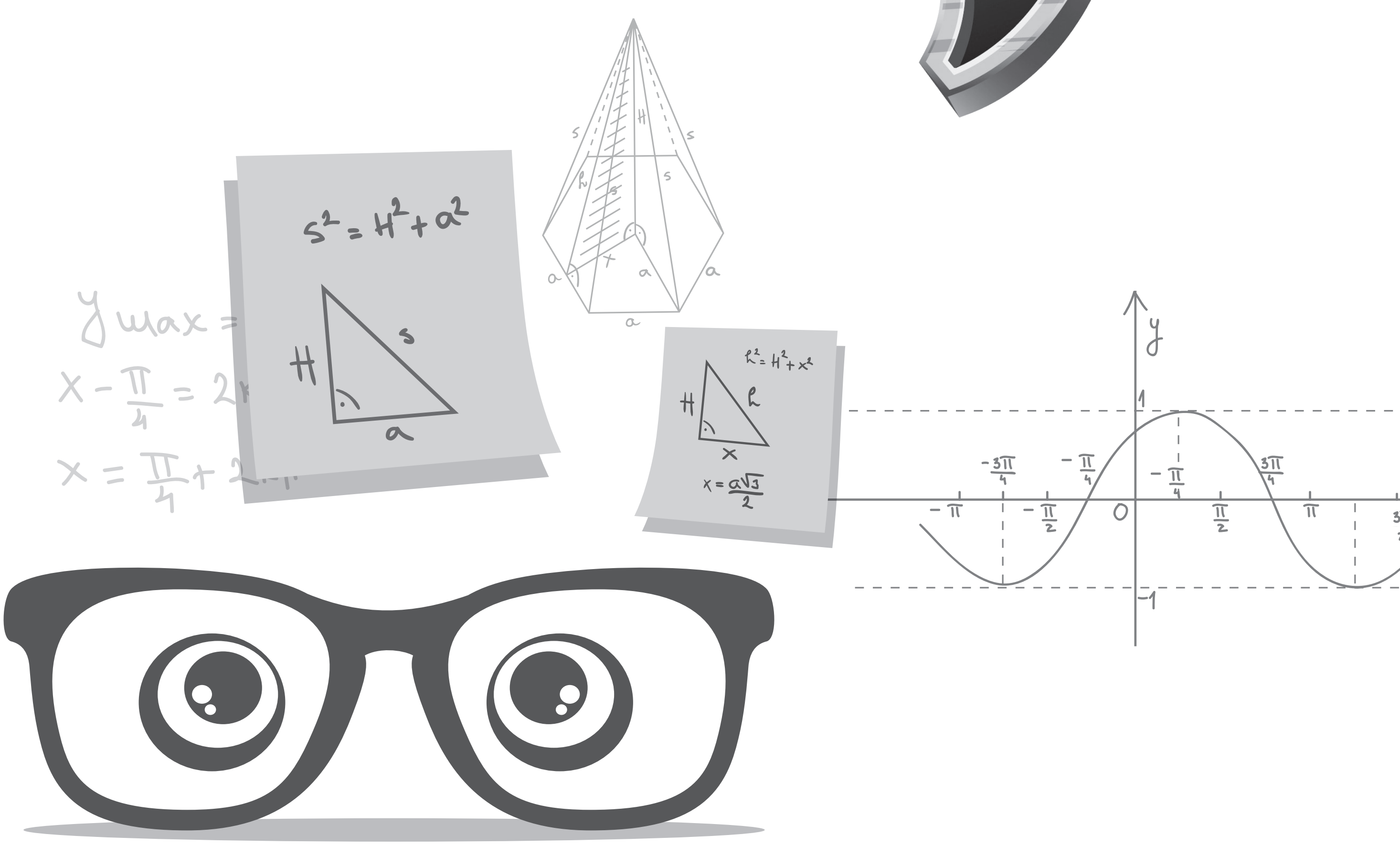
부산교육 2013-99

수리심층구술면접

나침반



Math Compass

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

발/간/사

21세기 지식정보 사회는 넘쳐나는 정보 속에서 상황에 따라 정보를 선택, 조직, 적용할 수 있는 통합적 사고력과 문제해결력을 요구하고 있습니다. 시대의 흐름에 따라 대학에서도 입시 전형을 다양화하여 심층 구술면접이나 논술고사 등을 통해 새로운 사회가 필요로 하는 인재를 선발하고 있습니다.

특히 쉬운 수능 시험과 대학 수시 모집 확대로 인해 논·구술 전형이 갈수록 중요해지고 있어 학교 교육에서 논·구술 능력 신장이 강력히 요청되고 있습니다. 이에 우리 교육청에서는 학생들의 통합적 사고력과 문제 해결력을 신장하고 대학 수시 전형에 대비하기 위해 논술 캠프 운영, 모의 수시면접 교실, 논술교재 발간 사업 등을 진행하고 있습니다.

부산시 수리 논술 교육을 위해서 『수리논술나침반』을 네 차례 발간하며 애써 오신 선생님들께서, 정기적인 연구회 활동을 하며 공부한 내용을 담아 처음으로 수리 심층구술면접 자료집을 발간하게 되었습니다. 그동안 진학 지도의 현장에서 치열하게 고민하고 노력해 온 선생님들의 지혜와 열정을 모아 면접 자료집 『수리 심층구술면접 나침반』으로 묶었습니다.

『수리 심층구술면접 나침반』은 여러 대학의 심층구술면접 기출 문제를 2005학년도부터 2013학년도 자료까지 수집하여 출제 경향을 분석하고 선생님 클리닉, 관련 학습, 다양한 풀이 등을 덧붙인 장학 자료입니다. 이 자료는 학교 현장에서 대학 수시 전형 지도뿐만 아니라 교과 심화 학습 자료로서도 유용하게 쓰일 것입니다. 선생님과 학생들이 이 자료를 활용하여 배움의 넓이와 깊이를 확장하며 가르치고 배우는 즐거움이 더해지기를 바랍니다.

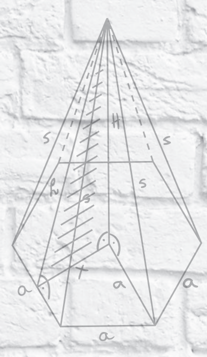
이 책이 학교교실 수업의 질을 제고하는 데 도움이 되기를 바라며 그동안 자료 개발을 위해 수고하신 수학나침반 교사동아리 여러분께 감사의 말씀을 드립니다.

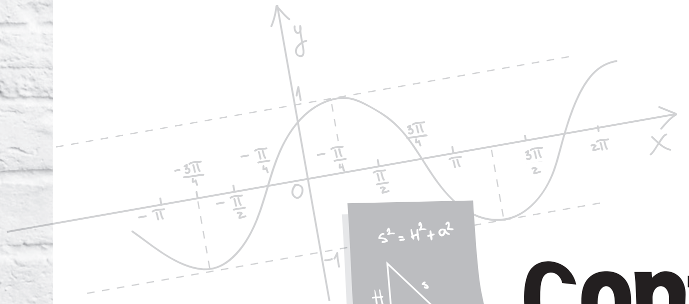
2013. 5. 10.

부산광역시교육감 **임 혜 경**

수리심층구술면접

나침반





Contens

$y_{max}=1$

$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi$

$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

유의사항

1. 이 책자의 면접문제들은 학생들의 복기에 의해 구성된 것이므로 복기상의 오류가 있을 수 있습니다.
2. 이 책자의 모집전형과 면접방법은 2012학년도를 기준으로 만들어진 것이므로 수시 대입 지도시에 필히 금년도 대학별 모집요강을 확인하시기 바랍니다.

01 고려대학교

I 심층면접 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 심층면접 순서

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 진행요원의 안내에 따라 출결, 신분증 확인을 하고, 면접에 대한 설명을 들음 • 수험번호, 지원과에 따라 20조로 나뉘어 대기	20분	면접전 대기실
⇩			
문제풀이	• 문제풀이실에서 제시된 면접문제(원서접수 시 선택한 과목, 2과목)를 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	각 과목별 15분	면접풀이실
⇩			
면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 면접문제 질의 응답 • 각 과목별로 따로 면접을 봄으로 수학 면접 후 다시 이동하여 과학 면접을 봄	각 과목별 15분	면접실
⇩			
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 귀가		

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.
• 수학 면접 시 유의사항	수학면접 시 답안을 제출하고 이를 토대로 질문 및 추가질문을 요구합니다. 따라서 답안을 서술형으로 서술하는 것을 권장합니다.

※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)

※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 수시

문제 1

1. $y=x^3+x$와 $y=\dfrac{f''(x)}{4}$가 $y=x$에 대하여 대칭이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) $f''(x^3+x)$는?

(2) $2f'(2)=f(2)$일 때, $f(0)$은?

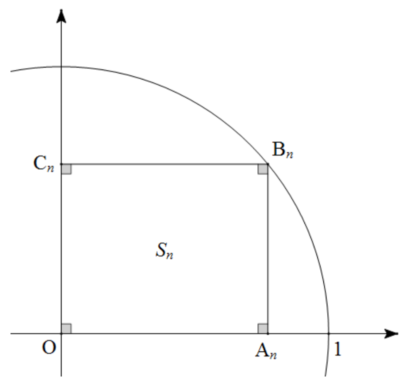
문제 2

그림과 같은 단위원에서 점 A_n, B_n, C_n을 잡고 S_n을 $\square OA_nB_nC_n$의 넓이라 하자. a_n을 $\overline{OA_n}$과 $\overline{OC_n}$ 중 긴 것이라 하자.

$$a_1=\cos\theta \ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right),\ S_n=2S_{n+1}a_n$$

일 때 다음 물음에 답하여라.

1. a_n과 a_{n+1}의 관계식을 구하여라.
2. a_n을 구하여라.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\times\cdots\times a_1$은?



선생님 클리닉

문제1은 $y=x$에 대칭인 관계식과 합성함수의 미분법을 이용하면 접근할 수 있는 문항이다. 문제2는 직사각형의 넓이를 이용하여 점화식을 찾고 a_n과 S_n의 관계를 이용하여 점화식을 변형한 후 삼각함수의 공식과의 유사점을 통해 일반항 a_n을 구할 수 있다.

관련 학습

1. 점화식

각 자연수 k에 대하여 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$에서 a_{k+1}을 정하는 방법이 주어져 있으면 수열 $\{a_n\}$이 정해진다. 이와 같은 방법으로 수열을 정의하는 것을 귀납적 정의라 하고, 이들 사이의 관계식을 점화식이라 한다.

2. 기본적인 점화식

수열 $\{a_n\}$에서 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때

(1) $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) ⇒ 공차가 d인 등차수열

(2) $a_{n+1} \div a_n = r$ (일정) ⇒ 공비가 r인 등비수열

(3) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ (a_{n+1} : 등차중항) ⇒ 등차수열

(4) $(a_{n+1})^2=a_n \cdot a_{n+2}$ (a_{n+1} : 등비중항) ⇒ 등비수열

(5) $\dfrac{2}{a_{n+2}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}$ (a_{n+1} : 조화중항) ⇒ 조화수열

예시 답안

문제 1

(1)

$y=x^3+x$이고 $4x=f''(y)$이므로 $f''(x^3+x)=4x$이다.

(2)

$f''(x^3+x)=4x$이므로 $f'(x^3+x)=3x^4+2x^2+c$이고

$f(x^3+x)=\dfrac{9}{7}x^7+\dfrac{9}{5}x^5+\dfrac{1}{3}(2+3c)x^3+cx+d$이다.

$2f'(2)=2(3+2+c)$와 $f(2)=\dfrac{9}{7}+\dfrac{9}{5}+\dfrac{1}{3}(2+3c)+c+d$이 같으므로

$d=10-\dfrac{9}{7}-\dfrac{9}{5}-\dfrac{2}{3}=10-\dfrac{394}{105}=\dfrac{656}{105}$이다. $f(0)=d=\dfrac{646}{105}$이다.

문제 2

(1)

$S_n = a_n\sqrt{1-a_n^2}$ $(n \geq 1)$과 $S_n = 2S_{n+1}a_n$에서

$$a_n\sqrt{1-a_n^2} = 2a_{n+1}\sqrt{1-a_{n+1}^2}\,a_n$$

이다. 양변을 제곱하면

$$1-a_n^2 = 4a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}^4$$

이고 $(2a_{n+1}^2-1)^2 = a_n^2$ 이므로

$$2a_{n+1}^2 - 1 = a_n \ (n \geq 1)$$

이다.

(2)

$2a_{n+1}^2 - 1 = a_n$ $(n \geq 1)$에서

$$a_{n+1}^2 = \frac{1+a_n}{2} \ (n \geq 1)$$

이고 $a_1 = \cos\theta$에서

$$a_2 = \cos\frac{1}{2}\theta,\ a_3 = \cos\frac{1}{2^2}\theta,\ \dots\ ,\ a_n = \cos\frac{1}{2^{n-1}}\theta$$

이다.

(3)

$S_n = 2S_{n+1}a_n$에서 $2a_n = \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$ 이므로

$$2a_1 \times \cdots \times 2a_n = \frac{S_1}{S_2} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{S_1}{S_{n+1}}$$

이고

$$a_1 \times \cdots \times a_n = \frac{1}{2^n} \times \frac{S_1}{S_{n+1}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{\cos\theta \times \sin\theta}{\cos\frac{1}{2^n}\theta \times \sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} a_n \times \cdots \times a_1 = \frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$

이다.

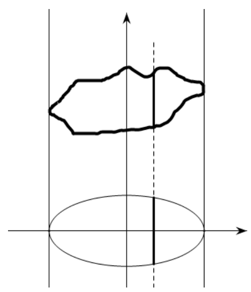
2012 수시

문제 1

사다리꼴의 윗변의 길이, 아랫변의 길이, 높이가 각각 일정할 때, 둘레의 길이가 최소가 되는 사다리꼴에 대해 설명하시오.

문제 2

그림과 같은 타원과 한 도형 F에 대하여, x축에 수직인 직선을 그었을 때 잘린 선분의 길이가 항상 같다고 한다.



1. 두 도형의 넓이를 비교하시오.
2. 두 도형의 둘레의 길이를 비교하시오.

선생님 클리닉

문제 1은 중학교에서 다룬 평면도형의 성질과 대칭이동을 이용하여 최소거리를 구하는 것을 기억한다면 비교적 쉽게 접근할 있다. 문제 2의 1을 보면 “카발리에리의 원리”를 떠올릴 수 있는데 그렇게 하면 문제 2의 2를 설명하기가 쉽지 않고 또한 문제 1의 의미가 없어진다. 문제2의 1은 구분구적법을 이용하여 직사각형 대신 사다리꼴을 사용하여 접근하는 것이 도움이 된다. 그렇게 하면 문제2의 2 또한 일관성 있게 사다리꼴을 이용하여 설명할 수 있다.

관련 학습

1. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이

함수 $y=f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$ 일 때, 두 직선 $x=a$, $x=b$ 와 x 축 및 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S를 구분구적법으로 구하면 직사각형의 넓이의 합은 다음과 같은 식으로 표현된다.

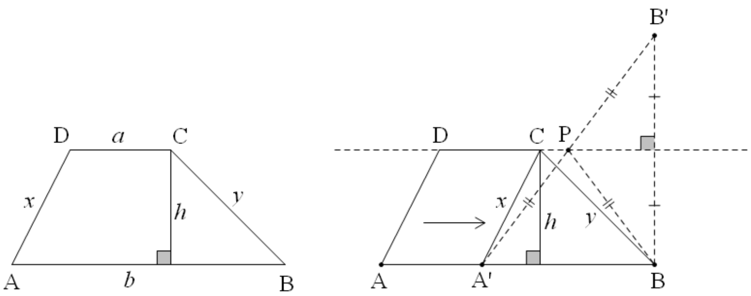
$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x,\ \left(\Delta x=\frac{b-a}{n},x_k=a+k\Delta x\right)$$

또한 구간의 양끝점을 이어서 만든 사다리꼴의 넓이의 합으로 넓이를 나타낼 수 있다.

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Delta x,\ \left(\Delta x=\frac{b-a}{n},x_k=a+k\Delta x\right)$$

예시 답안

문제 1



그림과 같이 사다리꼴의 윗변이 길이, 아랫변의 길이, 높이가 각각 a, b, h로 일정할 때, 둘레의 길이는 나머지 두 변의 길이 x, y에 의해 결정된다. 위의 그림과 같이 점 C에서 변 AD에 평행한 직선을 그어 변 AB와의 교점을 A′이라 하면 $x+y=\overline{\mathrm{A'C}}+\overline{\mathrm{CB}}$가 된다. 점 B의 직선 CD에 대한 대칭점을 B′이라 하면 $\overline{\mathrm{A'C}}+\overline{\mathrm{CB}}$의 값은 점 C가 선분 A′B′과 직선 CD의 교점 P에 있을 때 최소가 된다. 또한, $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로, 점 P는 직각삼각형 $B'A'B$의 외심이 되고 $\overline{PA'}=\overline{PB}$ 이므로 이 경우는 등변사다리꼴인 경우이다. 따라서, 사다리꼴의 둘레의 길이는 등변사다리꼴일 때 최소가 된다.

문제 2

(1)
두 도형의 넓이는 같다.
왜냐하면 x축의 주어진 구간을 n등분하여 각 구간에서 사다리꼴을 만들면 각 사다리꼴의 윗변의 길이, 아랫변의 길이, 높이가 같으므로 각 사다리꼴의 넓이는 같다. 따라서, 이를 n개 더한 넓이도 같고 두 도형의 넓이가 모두 유한하므로 그 극한값도 같다.

(2)
타원의 둘레의 길이가 도형 F의 둘레의 길이보다 항상 작거나 같다. 즉 도형 F의 둘레의 길이는 타원일 때 최소가 된다.
왜냐하면, (1)에서와 같이 n등분하여 사다리꼴을 만들면 윗변의 길이, 아랫변의 길이, 높이는 같으므로 나머지 두 변의 길이가 도형의 둘레의 길이를 결정하게 되는데 이는 1번에서 밝혔듯이 등변사다리꼴일 때 최소가 된다. 타원은 장축에 대하여 대칭인 도형이므로 위와 같이 만든 사다리꼴은 항상 등변사다리꼴이 되므로 둘레의 길이가 최소라고 할 수 있다.

02 서강대학교

I 알바트로스전형 심층면접 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 심층면접 순서

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 약 40명쯤의 인원으로 대기실에서 대기함	30분	면접전 대기실
	⇩		
문제풀이	• 문제풀이실에서 면접문제(원서접수 시 선택한 과목)를 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	15분	면접풀이실
	⇩		
면접 준비	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 면접문제 질의 응답 • 면접을 보시는 교수님은 2명이며, 상황에 따라 추가질문 등을 요구할 수 있음	15분	면접실 (가)
	⇩		
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 즉시 귀가		면접 후 대기실

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접 참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.

※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)

※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 알바트로스

문제 1

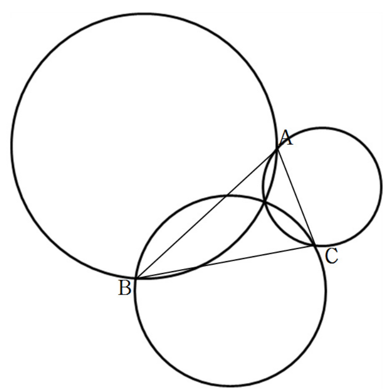
$x_k = \dfrac{k}{n}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 은 $[0,\ 1]$ 을 n 등분한 것이고 $L_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ 은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_n = L$ 로 수렴한다.

1. 함수 f 가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$ 에서 미분가능할 때 f' 을 이용하여 L 을 나타내시오.

2. 열린구간 $(0,\ 1)$ 에서 미분가능하고 $x=0$ 과 $x=1$ 에서 각각 우극한과 좌극한이 존재할 때 1.의 결과와 어떻게 다른지 설명하시오.

문제 2

각각의 원을 겹쳤을 때 생기는 교점을 이어 삼각형 ABC 를 만들자. 삼각형의 각 변은 각 원에 내접하는 정 $p,\ q,\ r$ 각형의 변이라 하자.
(정 $p,\ q,\ r$ 각형은 삼각형 내부를 영역으로 가지지 않는다.) 힌트 : 중심각은 원주각의 2 배이다.



1. $p,\ q,\ r$ 의 관계식을 구하시오.

2. 1.을 만족하는 $p,\ q,\ r$ 을 구하시오. (단, $p,\ q,\ r \geq 3$)

선생님 클리닉

문제 1 : 주어진 무한급수의 합을 직접 구하기가 복잡할 경우, 정적분의 형태로 바꿀 수 있는지 알아본다. 특히, 문제에서 주어진 함수는 연속이면서 미분가능하므로 함숫값의 차 $f(x_k)-f(x_{k-1})$를 평균값 정리를 이용하여 바꾸어 본다.

문제 2 : 중심각은 원주각의 두 배이므로 현AB가 원에 내접하는 정다각형임을 이용하여 중심각의 크기를 유추해보면 p, q, r사이의 관계식을 구할 수 있다.

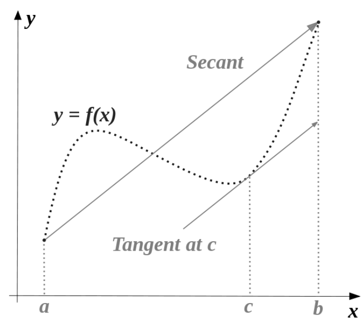
관련 학습

1. 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고
열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

를 만족하는 c가 a와 b사이에 존재한다.

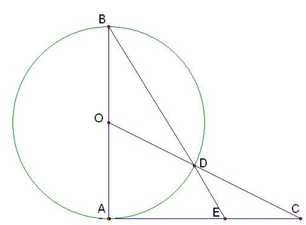


2. 원주각의 성질

▸호의 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이다.
▸반지름의 길이가 같고 호의 길이가 같은 두 원주각은 서로 크기가 같다.
▸반지름의 길이가 같고 크기가 같은 두 원주각의 호는 서로 길이가 같다.
▸점 D가 원 O 내부에 있고, 점 E가 원 O 외부에 있을 때,
$\angle ADB > \angle ACB > \angle AEB$ 가 성립한다.

추가 질문

$\overline{AB}$는 원 O의 지름이다. A에서 원에 접선을 긋고, 접선 위에서 $\overline{AC}=\overline{AB}$되게 점 C를 취한 다음 O와 C를 맺고, 원 O와 만나는 점을 D라고 한다. 그리고 $\overline{BD}$의 연장선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 E라고 한다. $\overline{AE}=\overline{CD}$를 증명하여라.



예시 답안

문제 1

(1)

f가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값정리에 의해 $f(x_k)-f(x_{k-1})=(x_k-x_{k-1})f'(y_k)$ 인 $y_k\in(x_{k-1},x_k)$가 존재한다. 따라서

$$\begin{aligned} L&=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|(x_k-x_{k-1})f'(y_k)| \\ &=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{n}f'(y_k)\right|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}|f'(y_k)|=\int_0^1|f'(y)|dy \end{aligned}$$

(2)

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=n$, $f(0)=a$, $f(1)=b$라 하자.

함수 g를 아래와 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases} m & x=0 \\ f(x) & x\in(0,\ 1) \\ n & x=1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=g(0)$, $\lim\limits_{x\to1-}g(x)=g(1)$이고 f의 정의에 의해 g는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값정리에 의해 $g(x_k)-g(x_{k-1})=(x_k-x_{k-1})g'(y_k)$ 인 $y_k\in(x_{k-1},x_k)$가 존재 한다. 따라서

$$\begin{aligned} L&=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \\ &=\lim_{n\to\infty}|f(x_1)-f(x_0)|+\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(x_{n-1})|+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+0+0 \\ &=|m-a|+|b-n|+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\lim_{n\to\infty}|g(x_1)-g(0)|+\lim_{n\to\infty}|g(x_{n-1})-g(1)| \\ &=|m-a|+|b-n|+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}|g(x_k)-g(x_{k-1})|+\lim_{n\to\infty}|g(x_1)-g(0)|+\lim_{n\to\infty}|g(x_{n-1})-g(1)| \\ &=|m-a|+|b-n|+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})| \end{aligned}$$

이다. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|$ 은 (1)에 의해 $\int_0^1|g'(y)|dy$ 이므로

$L=|m-a|+|b-n|+\int_0^1|g'(y)|dy$이다.

문제 2

(1)

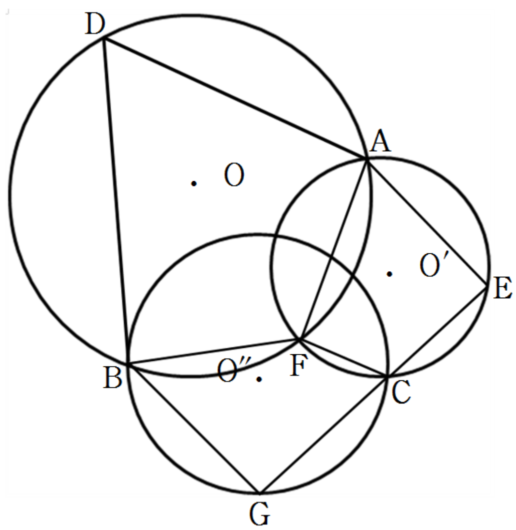
$\overline{AB}$에 의해 원 O에 정 p각형이, $\overline{AC}$에 의해 원 O′에 정 q각형이, $\overline{BC}$에 의해 원 O″에 정 r각형이 생긴다고 하자.

그러면, $\angle ADB = \frac{\pi}{p}$, $\angle AEC = \frac{\pi}{q}$, $\angle BGC = \frac{\pi}{r}$ 이므로 $\angle AFB = \pi - \frac{\pi}{p}$,

$\angle AFC = \pi - \frac{\pi}{q}$, $\angle BFC \geq \pi - \frac{\pi}{r}$ 가 성립하고

$\angle AFB + \angle AFC + \angle BFC = 2\pi \geq (\pi - \frac{\pi}{p}) + (\pi - \frac{\pi}{q}) + (\pi - \frac{\pi}{r})$이다.

따라서, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ (단, 등호는 세 원의 공통부분이 한 점일 때 성립)이다.



(2)

p, q, r이 각각 3 이상이므로 $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{3}$이고, 여기에서

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$$

임을 얻을 수 있다. 또한, 위의 (1)을 만족하기 위해서

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$$

을 동시에 만족시켜야 한다.

따라서, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ 이고, $p = q = r = 3$이다.

추가 질문

$\angle B = \alpha$라고 하면 $\angle AOC = 2\alpha$ 이다. 그러면 $\triangle ABE$와 $\triangle AOC$에서

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \tan\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}}{\frac{\overline{AC}}{\overline{OC}}} = \frac{\overline{OC}-\overline{OD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

따라서 $\overline{AE} = \overline{CD}$ 이다.

03 서울대학교

Ⅰ 일반전형 심층면접 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 면접순서

<오전>

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 진행요원의 안내에 따라 출결, 신분증 확인을 하고, 면접에 대한 설명을 들음 • 자기순서가 되면 5명씩 복도에 나가 문제 풀기 전까지 대기 • 고사장이 한 건물이고 층마다 지원학과가 같은 학생이 모임	30분~4시간	단과대별로 다름
⇩			
문제풀이	• 문제풀이실에서 필수과목(원서접수 시 선택한 과목)을 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	30분	복도
⇩			
필수과목 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 문제 질의 응답, 중간중간 질문도 함 • 문제풀이실에서 사용한 용지를 교수님께 보여드리고 설명을 함. (왠만하면 답지보고 넘어감) • 면접관을 보는 교수님은 2명	15분	면접실 (가)

<오후>

① 점심식사 후 1시까지 새로운 대기실로 감
② 과학은 물/화/생 별로 나뉘어져 있고 오전에 받은 번호를 무작위로 섞어서 순서를 결정
③ 공부를 하면서 대기

문제풀이	• 문제풀이실에서 선택과목(원서접수 시 선택한 과목)을 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	30분	복도
⇩			
선택과목 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 과학 문제 질의 응답, 중간중간 질문도 함 • 문제풀이실에서 사용한 용지를 교수님께 보여드리고 설명을 함. (왠만하면 답지보고 넘어감) • 면접관을 보는 교수님은 2명	15분	면접실 (나)
⇩			
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 설문조사에 답한 후 귀가		면접 후 대기실

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.

※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)

※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 수시 자연

문제 1

1-1. n, k는 자연수, $n \geq k$일 때, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$에서 x^k의 계수는?

1-2. a_n이 다음과 같을 때 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$을 구하시오.

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n < k) \\ \left(1+\dfrac{x}{n}\right)\text{에서 } x^k\text{의계수} & (n \geq k) \end{cases}$$

문제 2

예각 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b(a<b<c)$라 하고, $\triangle$ABC의 경계 및 내부에 위치한 점을 P라 하자. 점 P와 $\overline{BC}$사이의 거리와 P와 $\overline{CA}$사이의 거리를 합한 값을 $f(\mathrm{P})$라 한다.

2-1. $f(\mathrm{P})$가 최대가 되는 점 P는 $\overline{AB}$위에 있음을 보이시오.

2-2. P가 어디에 있을 때 $f(\mathrm{P})$가 최대가 되는가? 이 때 $f(\mathrm{P})$의 값을 삼각형의 넓이 S 와 a,b,c로 나타내시오.

문제 3

$[-a, a]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 미분가능이고 $f(-x)=f(x)$ 를 짝함수, $f(-x)=-f(x)$ 를 홀함수라 한다.

3-1. $f(x)$가 짝함수일 때, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, $f(x)$가 홀함수일 때, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$임을 설명하시오.

3-2. $(-\infty, \infty)$에서 $f'(x)$가 연속인 짝함수이고 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f'(x)dx = 0$일 때, $f(x)$는 홀함수임을 설명하고, $f(1)=f(-1)=0$ 임을 설명하시오.

선생님 클리닉

문제1은 이항계수의 성질을 이용하였고 문제2는 삼각형의 기본적인 성질과 넓이 공식을 이용하였으며 문제3 역시 짝함수와 홀함수의 정의를 이해한다면 쉽게 접근할 수 있는 문항이다.

관련 학습

1. 이항정리

n 이 양의 정수일 때, $(a+b)^n$ 을 전개하면,

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} b^r$$

2. 이항계수의 성질

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_2 x^2 + \cdots\cdots + {}_nC_n x^n \quad \cdots\cdots\cdots \quad ㉠$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^r$$

가. ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots\cdots + {}_nC_n = 2^n$

(설명) : ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$

나. ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots\cdots + (-1)^n\, {}_nC_n = 0$

(설명) : ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n\, {}_nC_n$

다. ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots\cdots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots\cdots = 2^{n-1}$

(설명) : (나)의 결과 식에서

$$({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots) - ({}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots) = 0$$
$$\therefore\ {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots\cdots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots$$

이것을 (가)의 결과 식에 대입하면

$$2^n = 2({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots) = 2({}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots)$$
$$\therefore\ {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots\cdots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots\cdots = 2^{n-1}$$

라. ${}_nC_1 + 2\cdot {}_nC_2 + 3\cdot {}_nC_3 + \cdots\cdots + n\cdot {}_nC_n = n\cdot 2^{n-1}$

(설명) : ㉠의 양변을 x 에 관하여 미분한 다음 $x=1$을 대입하면

$$n(1+x)^{n-1} = {}_nC_1 + {}_nC_2\cdot 2x + {}_nC_3\cdot 3x^2 + \cdots + {}_nC_n\cdot nx^{n-1}$$
$$\therefore\ n\cdot 2^{n-1} = {}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 + \cdots + n{}_nC_n$$

마. ${}_nC_0+\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{{}_nC_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

(설명) : ㉠의 양변을 구간 [0, 1]에서 정적분하면

$$\int_0^1(1+x)^n dx=\int_0^1({}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n)dx$$

$$\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\left[{}_nC_0x+{}_nC_1\frac{x^2}{2}+{}_nC_2\frac{x^3}{3}+\cdots+{}_nC_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\therefore\ \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)={}_nC_0+\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{3}+\cdots+\frac{{}_nC_n}{n+1}$$

3. 사인법칙

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

4. 삼각형의 넓이

$\triangle$ABC의 넓이를 S라고 하면

(1) 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어진 경우

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

(2) 세 각의 크기와 외접원의 반지름의 길이 R가 주어진 경우

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

(3) 세 변의 길이와 외접원의 반지름의 길이 R가 주어진 경우

$$S=\frac{abc}{4R}$$

(4) 세 변의 길이와 내접원의 반지름의 길이 r이 주어진 경우

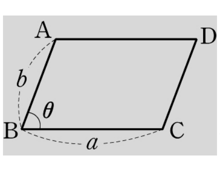
$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

(5) 헤론의 공식(세 변의 길이가 주어진 경우)

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

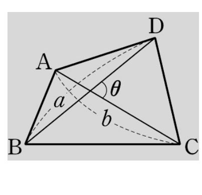
5. 사각형의 넓이

(1) 평행사변형의 넓이



$S=ab\sin\theta$

(2) 사각형의 넓이



$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

예시 답안

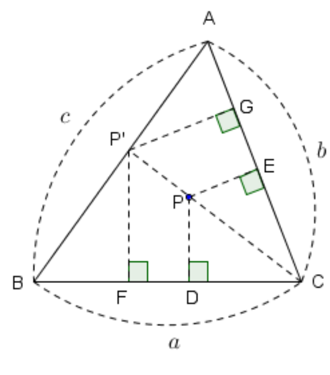
문제 1

1-1. $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\dfrac{x}{n}\right)^k$ 이므로 x^k의 계수는 ${}_nC_k\dfrac{1}{n^k}$ 이다.

1-2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} {}_nC_k\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} = \frac{1}{k!}$

문제 2

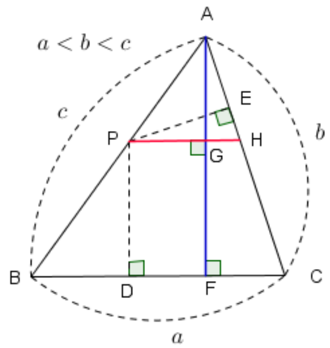
2-1. 다음 그림과 같이 삼각형ABC의 내부에 임의의 점P를 정하고 선분CP의 연장선이 선분AB와 만나는 점을 P′이라 하자. 항상 $\overline{\mathrm{PD}} < \overline{\mathrm{P'F}}$, $\overline{\mathrm{PE}} < \overline{\mathrm{P'G}}$를 만족한다. 따라서 $f(\mathrm{P})$의 최대가 되는 점 P는 항상 $\overline{\mathrm{AB}}$위에 있다.



2-2. 점A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 점 F라 두고 점P에서 선분 AF에 내린 수선이 선분 AF, 선분 AC와 만나는 점을 각각 점G, 점H라 두자. $a<b<c$이고$\triangle$ABC 와 $\triangle$APH는 닮음이므로 $\overline{\mathrm{AG}} > \overline{\mathrm{PE}}$이다. 또한 $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{GF}}$이므로

$f(\mathrm{P}) = \overline{\mathrm{PD}} + \overline{\mathrm{PE}} < \overline{\mathrm{PD}} + \overline{\mathrm{AG}} = \overline{\mathrm{AG}} + \overline{\mathrm{GF}} = \overline{\mathrm{AF}}$

이다. 따라서 $f(\mathrm{P})$의 최대가 되는 경우는 점P가 점A와 일치할 때이며 $f(\mathrm{P})$의 최댓값은 $\overline{\mathrm{AF}}$이다.



$S=\frac{1}{2}af(\mathrm{P})$이므로 $f(\mathrm{P})=\frac{2S}{a}$ 이다.

다른풀이

선분 AB위의 점 P에 대하여 $\mathrm{BP}=l$, $\mathrm{AP}=c-l$이라 하면

$f(\mathrm{P})=\overline{\mathrm{PD}}+\overline{\mathrm{PE}}=l\sin B+(c-l)\sin A=\frac{lb}{2R}+\frac{(c-l)a}{2R}=\frac{l(b-a)+ac}{2R}$ (R:외접원의 반지름)

여기서 $0\le l\le c$이고 $b>a$이므로 $f(\mathrm{P})$는 $l=c$ 일 때(즉, 점P가 점A가 될 때) 최댓값을 가진다. 그러므로 $f(\mathrm{P})\le\frac{bc}{2R}=\frac{2}{a}\times\frac{abc}{4R}=\frac{2S}{a}$

다른풀이

선분AB 위의 점 P에서 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$에 내린 수선의 길이를 각각 h_1, h_2 라고 하자.
$f(\mathrm{P})=h_1+h_2$ 가 된다.
(삼각형ABC의넓이)=(삼각형APC의넓이)+(삼각형BPC의넓이)이므로,

$2S=ah_1+bh_2=af(\mathrm{P})+(b-a)h_2$ 이고, 따라서 $f(\mathrm{P})=\frac{2S}{a}-\left(\frac{b-a}{a}\right)h_2$이다. $b>a$이므로 $h_2=0$일 때 $f(\mathrm{P})$가 최대가 된다. 따라서 점 P가 점 A가 될 때 최댓값 $f(\mathrm{P})=\frac{2S}{a}$를 가진다.

문제 3

3-1. $\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a}f(-x)dx$ 이므로 $\int_{-a}^{0}f(-x)dx=\int_0^a f(x)dx$ 이다.

$f(x)$가 짝함수이면

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(-x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

$f(x)$가 홀함수이면

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

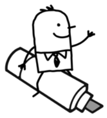
3-2. $f'(x) = f'(-x)$에서 양변을 부정적분하면 $f(x) = -f(-x) + C$ (C는 적분상수)

$f(x)+f(-x) = C$이고 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(-x) = 0$이므로 $C=0$이다.

따라서 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x)$는 홀함수이다.

$x=0$을 대입하면 $f(0) = -f(0)$에서 $f(0)=0$이다.

$\int_{-1}^{1} f'(x)dx = 0$ 에서 $f(1)-f(-1) = 0$이므로 $f(1) = f(-1) = k$라 두자. $f(x)$는 홀함수이므로 모든 x에 대해 $f(-x) = -f(x)$이다. 여기에 $x=1$을 대입하면 $k=-k$ 즉 $2k=0$이므로 $f(1) = f(-1) = 0$이다.



2013 수시 공대

문제 1

좌표평면에서 임의의 점(a,b)가 어떤 영역 안에 찍힐 확률은

$$\frac{s'(\text{해당영역의면적})}{s(\text{전체면적})}$$

로 나타낸다.

$-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$ 에 점 (a,b)가 존재한다.
$u+v=b, 3u-v=a$ 를 만족할 때 연립 방정식의 해를 (a,b)라고 하자. 이 때, $u \ge 0$ 일 사건을 A, $v \ge 0$ 일 사건을 B, $v \ge u$일 사건을 C라 하자

(1) P(A∩B)를 구하여라.

(2) A와 C사건이 독립임을 보여라

(3) $a \ge 0, b \ge 0$ 일 사건을 D 라고 할 때, P(D|A∩B)을 구하여라.

문제 2

좌표 공간에서 $x^2+y^2=1, z=0$ 인 원의 좌표는 $\mathrm{P}(\cos t, \sin t, 0)$이다. 그리고 xz평면위에 $x^2+\dfrac{z^2}{a^2}=1,\ y=0$ 이고 $(1,0,0), (-1,0,0), (0,0,a)$를 꼭짓점으로 가지는 타원이 존재한다. 그 위에 동점 $\mathrm{Q}(u(t),0,v(t))$가 존재한다. 선분PQ의 길이를 L이라고 할 때, 다음 세 조건을 만족한다. (단 a는 양의 실수, 점은 타원의 일정한 방향으로 움직인다.)

<1> L의 값은 일정하다.
<2> $u(t)$와 $v(t)$는 연속함수이다.
<3> $u(t)$ 는$[0,2\pi]$에서 정확히 2개의 실근을 가진다.

(1) 모든 t에 대해서 $L^2-(1+a^2)=u(t)\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}$임을 증명하고,
$L^2=1+a^2$임을 보여라.

(2) 모든 t에 대하여 $(1-a^2)u(t)-2\cos t=0$임을 보여라

(3) a, L의 값을 구하고, $v(t)$, $u(t)$를 구하고 그 과정을 설명하여라.

선생님 클리닉

문제1은 주어진 사건을 좌표평면위에 나타내어 확률을 구하고 독립의 정의를 기억하고 있다면 쉽게 접근할 수 있는 문항이다. 문제2는 원점을 중심으로 갖고 xy평면위의 지름이 2인 원위의 점과 zx평면위의 단축의 길이가 2인 타원위의 점 사이의 거리가 항상 일정하도록 하기 위해서는 그 거리가 원의 지름인 2가 되어야 한다는 사실에 주목해야 할 것이다.

관련 학습

1. 사건의 독립

가. 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부 확률이 사건 B가 일어날 확률과 같을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^{C})=\mathrm{P}(B)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **독립**이라고 한다.

나. 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

다. 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 즉

$$\mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(A) \text{ 또는 } \mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **종속**이라고 한다.

라. 두 사건의 독립성

두 사건 A와 B가 독립이면 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 각각 독립이다.

증명) 사건 A와 B^C이 독립임을 증명하자.

$A=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$, $(A\cap B^C)\cap(A\cap B)=\varnothing$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

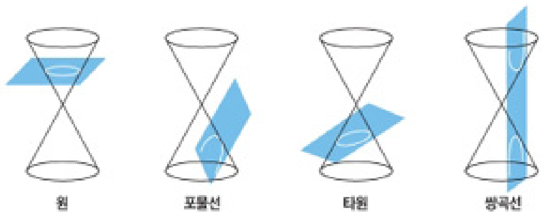
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B))\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

따라서, A와 B^C은 독립이다.

같은 방법으로, A^C와 B, A^C와 B^C이 독립임을 보일 수 있다.

2. 이차곡선의 광학적 성질

고등학교 수학에서 배우는 이차곡선의 역사는 원뿔에 대한 고대 그리스의 연구로 거슬러 올라간다. 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 [그림 1]과 같이 원뿔에 평면을 다양한 각도로 통과시켰을 때 나타나는 곡선으로 원뿔곡선이라 부른다. 현재 부르고 있는 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 어원은 고대 그리스의 수학자 아폴로니우스의 저서 '원뿔곡선론'에서 찾아볼 수 있다.



[그림 1]

아폴로니우스는 하나의 직원뿔을 여러 가지 평면으로 잘라 이 평면이 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면과 이루는 각보다 작은가, 같은가, 큰가에 따라서 포물선은 '같다'는 뜻에서 parabola의 원어를 썼고, 타원은 '부족하다'는 뜻의 ellipse, 쌍곡선은 '초과하다'는 뜻의 hyperbola를 썼다.

한편 기하학의 아버지라 불리는 유클리드 이후 많은 사람들이 도형을 연구하고 발전시켰다. 그 중에서도 데카르트는 좌표를 통하여 기하의 내용들을 그에 해당되는 대수적인 내용으로 해석하였다. 이것은 도형에 관한 연구에 획기적인 발견이고, 추상적인 도형 문제를 구체적인 계산 문제로 바꿔놓았다. 원뿔곡선 역시 좌표평면 위에서 대수적인 내용으로 해석되었다. 즉, 원뿔곡선을 좌표를 사용하여 나타낼 때 미지수가 2개인 이차방정식으로 표현된다. 그래서 원뿔곡선을 이차곡선이라고 부른다.

이차곡선의 광학적 성질은 포물선, 타원, 쌍곡선의 초점과 밀접한 관련이 있다. 포물선의 초점에서 나간 빛은 포물선 거울 면에 반사되어 축과 평행하게 나간다. 이를 이용한 것이 자동차의 전조등이다. 반대로 포물선의 축과 나란히 입사하는 전파는 포물면 모양의 안테나에 반사되어 초점으로 모인다. 접시 모양의 위성 중계 안테나를 파라볼라 안테나라고 부른다.

이제 이차곡선의 광학적 반사를 수학적으로 알아보자.

이차곡선의 반사는 다음 두 가지 법칙을 만족해야 한다.

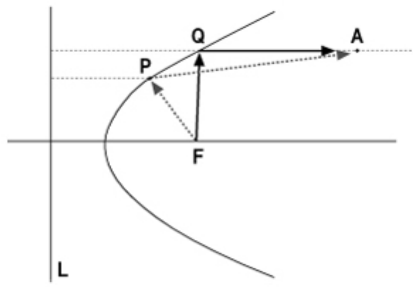
(1) 페르마의 법칙 (2) 반사의 법칙

포물선 초점에서 출발한 빛은 페르마의 법칙에 의해 최단거리의 경로를 따라 진행한다. 페르마의 법칙이란 빛이 어떤 지점에서 다른 지점으로 향할 때, 가장 짧은 시간의 경로를 따라 진행한다는 법칙이다. 같은 매질에서는 빛의 속도가 일정하기 때문에 가장 짧은 시간의 경로는 가장 짧은 거리임을 알 수 있다. 즉, 직선으로 진행한다. 따라서 포물선 초점에서 출발한 빛은 포물선 거울 면에 반사되어 축과 평행하게 진행한다.

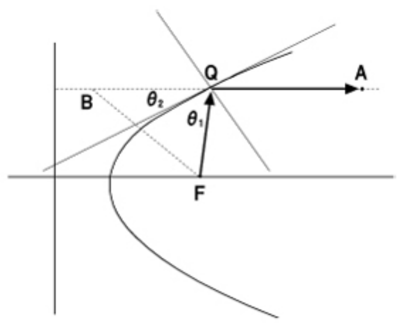
만약 [그림 3]과 같이 초점 F에서 출발한 빛이 점 P에 반사되어서 점 A에 도착한다고 하자. 그러면 빛이 점 F, P, A를 지나가는 경로가 페르마의 법칙을 만족하는지를 살펴봐

야 한다. 즉, $\overline{FP}+\overline{PA}$가 최소거리인지를 확인해야 한다. 만약 최소가 아니라면 포물선 거울 면의 어떤 점을 지나는 것이 최소거리인지 찾아야 한다.

[그림 3]에서 직선 L을 포물선의 준선이라 할 때, FP는 P에서 직선 L까지의 거리와 같다. 즉, $\overline{FP}+\overline{PA}$는 점 A에서 점 P를 지나 직선 L까지의 거리와 같다. 이와 같은 사실은 점 A에서 점 P를 지나 직선 L까지의 거리가 최단거리가 아니라는 것을 말한다. 따라서 [그림 3]과 같이 점 Q에서 빛이 반사하여 점 A를 향할 때, 이 경로가 페르마의 법칙을 만족함을 알 수 있다.



[그림 3]



[그림 4]

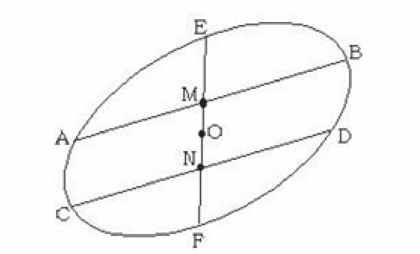
다음으로 포물선 초점에서 출발한 빛은 반사의 법칙에 의해 입사각과 반사각이 같아야 한다. [그림 4]와 같이 접선에 대해서 초점 F를 대칭이동한 점을 B라 하고 선분 FQ와 선분 BQ가 접선과 이르는 각을 각각 θ_1, θ_2이라 할 때, 초점 F와 점 B가 접선에 대해서 대칭이동한 점이므로 두 각 θ_1, θ_2가 같음을 알 수 있다. 따라서 초점 F에서 출발한 빛이 점 Q에 도달하면, 빛이 반사할 때 입사각$(\frac{\pi}{2}-\theta_1)$과 반사각$(\frac{\pi}{2}-\theta_1)$ 이 같기 때문에, Q에서 반사된 빛은 포물선의 축과 평행하게 진행하는 것이다. 따라서 포물선의 초점 F를 출발한 빛은 점 Q에서 반사하여 축과 나란하게 진행함을 알 수 있다.

➡ 자와 컴퍼스만으로 타원의 중심, 장축과 단축, 초점 구하기

① 타원의 중심 찾기

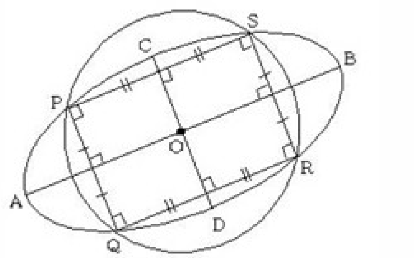
타원 위의 평행한 현들의 중점들이 타원의 중심을 지나는 일정한 직선 위에 있다는 타원의 기하학적 성질을 이용하여 중심을 찾을 수 있다. 먼저 그림과 같이 주어진 타원

위에 임의의 평행한 두 현 AB, CD를 그린다. 이어서 선분의 수직이등분선을 작도하는 방법으로 두 현 AB, CD의 중점 M, N을 각각 구한다. 이 때 두 점 M, N을 지나는 현 EF는 타원의 중심을 지나는 현이므로, 현 EF의 중점 O가 타원의 중심이 된다.



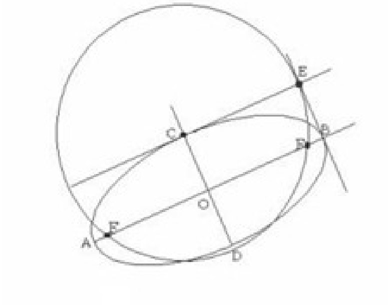
② 타원의 장축, 단축 찾기

위에서 찾은 타원의 중심 O를 중심으로 하고 주어진 타원과 네 점 P, Q, R, S에서 만나는 원을 하나 그린다. 이제 선분 PQ의 수직이등분선이 타원과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하면, 선분 AB는 타원의 장축이 되고 선분 CD는 타원의 단축이 된다.



③ 타원의 초점 찾기

그림과 같이 타원의 중심을 O, 장축을 AB, 단축을 CD라 한다. 타원의 장축의 한 끝점 B를 지나고 장축에 수직인 직선을 긋고, 또 단축의 한 끝점 C를 지나고 단축에 수직인 직선을 그어서 두 직선의 교점을 E라 한다. 이 때 점 C를 중심으로 하고 점 E를 지나는 원을 그려서 그 원이 장축과 만나는 두 점을 각각 F, F'이라 하면 이 두 점 F, F'은 주어진 타원의 두 초점이 된다. 여기서 타원의 장반경 OB(또는 OA)와 선분 CF(또는 CF', DF', DF)의 길이가 모두 같다는 사실을 이용하여 초점을 찾는다.



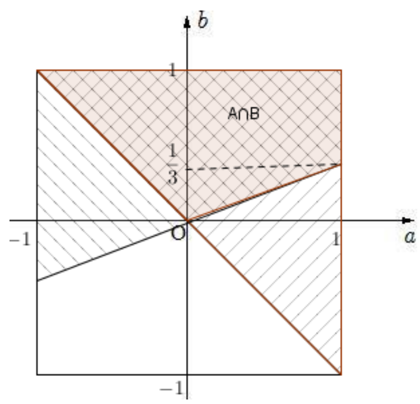
예시 답안

문제 1

(1) $u+v=b\cdots$㉠, $3u-v=a\cdots$㉡ 이라 두자.

(i) ㉠+㉡ 을 하면 $4u=a+b$에서 $u=\dfrac{a+b}{4}$이다. 사건 A 의 영역은 $u\geq 0$이므로 $b\geq -a$이고 $P(A)=\dfrac{1}{2}$이다.

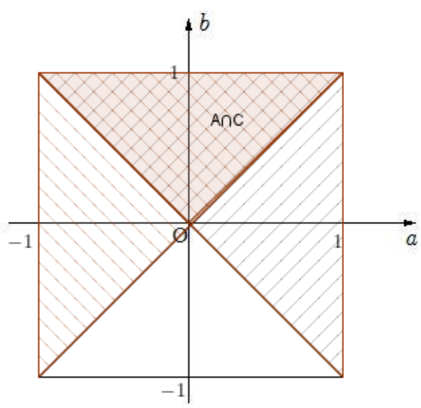
(ii) ㉠×3−㉡을 하면 $4v=3b-a$에서 $v=\dfrac{3b-a}{4}$이다. 사건 B 의 영역은 $v\geq 0$이므로 $b\geq \dfrac{1}{3}a$이고 $P(B)=\dfrac{1}{2}$이다. 따라서 A∩B 의 영역은 다음과 같다.



그러므로 $P(A\cap B)=\dfrac{\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}}{4}=\dfrac{1}{3}$

(2) 사건 C 의 영역은 $v\geq u$에서 $\dfrac{3b-a}{4}\geq\dfrac{a+b}{4}$이다. 즉 $b\geq a$이고 $P(C)=\dfrac{1}{2}$이다.

A∩C 의 영역은 다음 그림과 같으므로 $P(A\cap C)=\dfrac{1}{4}$이다.



따라서 $P(A\cap C)=P(A)P(C)$이므로 A와 C사건은 서로 독립이다.

(3) D는 제1사분면의 영역이다. $P(D|A\cap B)=\dfrac{(D\cap A\cap B)\text{의 면적}}{(A\cap B)\text{의 면적}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{8}$ 이다.

문제 2

(1) 선분PQ의 길이를 L이라고 하면

$L^2=\{u(t)-\cos t\}^2+\sin^2 t+\{v(t)\}^2\cdots$ ㉠

이다. 또한 문제에서 $\{u(t)\}^2+\dfrac{\{v(t)\}^2}{a^2}=1$ 이므로 $\{v(t)\}^2=a^2\{1-(u(t))^2\}$ 이다. 이 식을 ㉠에 대입하면

$L^2=\{u(t)-\cos t\}^2+\sin^2 t+a^2-a^2\{u(t)\}^2=(1-a^2)\{u(t)\}^2-2\cos t\,u(t)+1+a^2$

즉, $L^2-(1+a^2)=u(t)\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}\cdots$ ㉡ 이다.

조건<3>에 의해 $u(t_1)=0$, $u(t_2)=0$ 를 만족하는 두 실근 t_1, t_2 $(t_1, t_2\in[0, 2\pi])$가 존재한다. ㉡식은 항등식이므로 $t=t_1$ 을 대입하면

$L^2-(1+a^2)=u(t_1)\{(1-a^2)u(t_1)-2\cos t_1\}=0$

그러므로 $L^2=1+a^2$ 이다.

(2) $t\neq t_1$ 이고 $t\neq t_2$ 모든 t에 대하여 $u(t)\neq 0$ 이므로 $\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}=0$ 이다.

다른풀이

닫힌 구간 $[0, 2\pi]$에서 $u(t)\neq 0$ 이면

$u(t)\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}=0$ 으로부터 $(1-a^2)u(t)-2\cos t=0$임을 알 수 있다.

한편, $t=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $t=\dfrac{3}{2}\pi$이면 $\cos t=0$. 그러므로 $u(t)\{(1-a^2)u(t)-2\cos t\}=0$ 으로부터 $(1-a^2)\{u(t)\}^2=0$임을 알 수 있고 $a^2\neq 1$ 이므로 $u(t)=0$. $u(t)$는 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$에서 정확히 2개의 실근을 가지므로 이 구간에서 $u(t)=0$인 t는 $\dfrac{\pi}{2}$와 $\dfrac{3}{2}\pi$ 뿐이고 이때 $(1-a^2)u(t)-2\cos t=0$이다.

따라서 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$에서 $(1-a^2)u(t)-2\cos t=0$이다.

(3) (2)에서 $u(t)=\dfrac{2\cos t}{1-a^2}$ 이다. ($a^2=1$ 이면 타원이 안되므로 $a^2\neq 1$ 이다.)

$u(t)$ 는 타원 위를 일정한 방향으로 움직이며 연속이므로 $-1 \le u(t) \le 1$이다.

$u(t)$ 의 최댓값이 1 이므로 $\left|\dfrac{2}{1-a^2}\right|=1$ 이고 $\dfrac{2}{1-a^2}=\pm 1$ 이다. $\dfrac{2}{1-a^2}=1$ 이면 $a^2=-1$ 이 되므로 성립하지 않는다. 따라서 $\dfrac{2}{1-a^2}=-1$ 이고 $a^2=3$, 즉, $a=\sqrt{3}$ 이다.

또, $L^2=1+a^2$ 이므로 $L=2$ 이다.

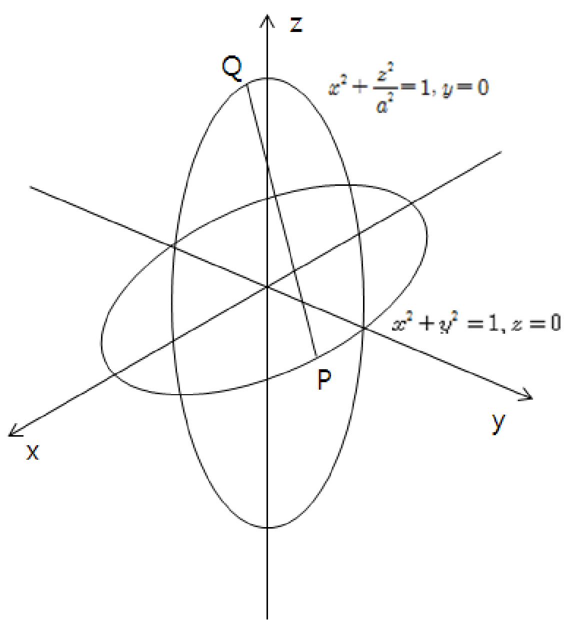
이때, $u(t)=-\cos t$ 이고 $\{u(t)\}^2+\dfrac{\{v(t)\}^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ 에서 $v(t)=\pm\sqrt{3}\sin t$ 이다.

다른풀이

(2)에 의해 점 P와 Q의 주기가 동일하고 점 P가 $(0,1,0)$에 있을 때, 점 Q가 $(0,0,a)$에 위치하므로 점 P가 $(1,0,0)$에 있을 때 점 Q가 $(-1,0,0)$에 위치한다는 것을 알 수 있다.

따라서 $L=2, a=\sqrt{3}$ 가 되고,

$u(t)=-\cos t$ 가 되고 $v(t)$는 x축에 대해 대칭인 두 가지 경우가 있으므로 $v(t)=\pm\sqrt{3}\sin t$ 가 된다.



2013 수시 자연

문제 1

1-1. 실수 $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$ 중 적어도 하나는 0이 아니라고 하자. 또한 독립인 확률변수 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$은 0 또는 1만을 그 값으로 가지며 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이라고 하자.

이 때, $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$이 0이 될 확률이 $\frac{1}{2}$을 넘지 않음을 보여라.

1-2. 1부터 6까지 눈이 나오는 확률이 $p_1, p_2, \cdots, p_6$인 주사위와 1부터 6까지 눈이 나오는 확률이 $q_1, q_2, \cdots, q_6$인 주사위 두 개를 동시에 던졌을 때 눈의 합 $2, 3, \cdots, 12$가 나올 확률이 다 같게 나오도록 $p_1, p_2, \cdots, p_6$와 $q_1, q_2, \cdots, q_6$를 정할 수 없음을 보여라.

[도움말] 귀류법을 사용하시오.

문제 2

2-1. 함수 $f:(0,\infty) \to (-\infty,\infty)$가 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고, 그 도함수 f'도 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하다. 다음 조건을 만족하는 함수 f를 모두 구하여라.

[조건] 임의의 양의 실수 x와 x보다 작은 양의 실수 r에 대하여 f는 다음 항등식을 만족한다.

$$f(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} tf'(t)dt$$

[도움말] 조건의 식을 x에 대하여 미분하시오.

2-2. 함수 $f:(-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty)$가 구간 $(-\infty,\infty)$에서 연속이다. 다음 두 조건을 만족하는 함수 f를 모두 구하여라.

(i) 임의의 실수 x와 양의 실수 r에 대하여 f는 다음 항등식을 만족한다.

$$f(x) = \frac{e^x}{2r}\int_{x-r}^{x+r} e^{-t}f(t)dt$$

(ii) 모든 실수 x에 대하여 다음 부등식이 항상 성립한다.

$$|f(x)| \le e^x$$

선생님 클리닉

문제1은 확률의 기본개념과 귀류법을 이용하면 쉽게 접근할 수 있는 문항이다. 문제2는 주어진 조건에서 양변을 미분하고 미분계수의 정의를 이용해야 하며 평균값정리가 사용되었다는 점에 주목할 필요가 있다.

관련 학습

1. 귀류법

어떤 명제가 참임을 증명하려 할 때 그 명제의 결론을 부정함으로써 가정(假定) 또는 공리(公理) 등이 모순됨을 보여 간접적으로 그 결론이 성립한다는 것을 증명하는 방법이다.

2. 조건부 확률

두 사건 A, B에 대하여 사건A가 일어났다고 가정하였을 때 사건B가 일어날 확률을 사건A가 일어났다는 가정 하에서 사건B가 일어날 조건부 확률이라고 하고, $P(B \mid A)$로 나타난다.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap B^c)} \quad (\text{단, } P(A) > 0)$$

3. 베이즈의 정리 (Bayes' Theorem)

n개의 배반인 사건 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 중 하나는 반드시 일어난다고 할 때, 임의의 사건 B에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)} \quad (1 \le i \le n)$$

4. 독립시행

동일한 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 서로 독립일 경우, 이러한 시행을 독립시행이라 한다.

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p이고, 일어나지 않을 확률이 q라 할 때, 이 시행을 독립적으로 n회 반복하는 독립시행에서 사건A가 r회 일어날 확률 P_r은

$P_r = {}_nC_r p^r q^{n-r}$ (단, $p+q=1$, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

5. 미분적분학의 기본정리

미분적분학의 기본정리는 적절하게 붙여진 명칭이다. 왜냐하면 그것은 미분적분학의 두 분야, 미분학과 적분학 사이에 연관성을 보여주기 때문이다. 미분학은 접선의 문제에서 시작되었고 반면에 적분학은 별로 관련이 없는 듯한 문제인 면적문제로부터 시작되었다. 케

임브리지대학교의 뉴턴의 스승인 배로(Isaac Barrow, 1630~1677) 교수는 이 두 문제들 사이에 실제로 밀접한 관계가 있음을 발견하였다. 실제로 그는 미분법과 적분법이 서로 역과정임을 밝혔다. 미분적분학의 기본정리는 도함수와 적분사이에 명백한 역관계가 있음을 보여주고 있다. 뉴턴과 라이프니츠는 이러한 관계를 발전시키고 그것을 이용하여 미분적분학을 체계적인 수학적 방법으로 발전시켰다. 그들은 합의 극한으로 면적과 적분을 계산하지 않고, 미분적분학의 기본정리를 이용하여 면적과 적분을 매우 쉽게 계산할 수 있음을 알았다.

1. 미분적분학의 기본정리1

만일 함수 f 가 구간 $[a,b]$에서 연속이면,

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt\ ,\ a \le x \le b$$

에 의하여 정의된 함수 g 는 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 구간(a,b) 에서 미분가능하며, $g'(x) = f(x)$ 이다.

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$ 로 표기할 수 있으며, 만일 먼저 f 를 적분한 다음에 그 결과를 미분하면 본래의 함수 f 를 다시 얻는다는 사실을 의미한다.

2. 미분적분학의 기본정리2

만일 함수 f 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이면,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

이다. 여기서 F는 f 의 임의의 역도함수, 즉 $F' = f$ 이다.

$F'(x) = f(x)$ 이므로 $\displaystyle\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ 로 표현될 수 있다. 이것은 한 함수 F를 택하여 먼저 그것을 미분한 다음에 그 결과를 적분한다면 $F(b) - F(a)$ 의 형태를 얻게 된다는 사실을 의미한다. 이는 $a \le x \le b$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x)$ 의 모든 값들이 관련되는 복잡한 과정(리만합의 극한)에 의하여 정의되는 정적분 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 는 단지 두 점 a와 b 에서 $F(x)$ 의 값을 구하면 계산된다는 사실은 매우 놀라운 일이다.

프랑스의 수학자 로베르발이 1635년 처음으로 사인함수와 코사인함수의 곡선 아래 영역의 면적을 계산하였을 때, 이 문제는 아주 정교한 기술을 요하는 매우 도전적인 문제였다. 1635년에는 극한을 계산하는 방법이 발견되지 않았기 때문에 로베르발에게는 이 계산이 매우 힘든 일이었다. 그러나 1660년대와 1670년대에 배로에 의하여 미적분학의 기본정리가 발견되고 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 탐구되면서 이는 매우 쉬운 문제가 되었다. 기

본정리의 두 부분들은 미분법과 적분법이 역과정임을 의미한다. 기본정리의 두 부분들 중에서 하나는 다른 부분이 행하였던 과정을 반대로 행하는 것이다.

미분적분학의 기본정리는 미분적분학에서 가장 중요한 정리이며, 실제로 그것은 인간의 위대한 업적 중의 하나이다. 이 정리가 발견되기 전인 에우독소스와 아르키메데스의 시대로부터 갈릴레오와 페르마의 시대까지는 면적, 부피, 곡선의 길이를 구하는 문제들은 너무 힘들어서 천재들만이 도전할 수 있는 매우 어려운 문제였다. 그러나 지금은 뉴턴과 라이프니츠가 창안해 냈던 기본정리를 체계적으로 잘 배울 수 있기에 우리 모두 이런 어려운 문제도 쉽게 해결할 수 있다.

예시 답안

문제 1

1-1. 실수 $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$ 중 0이 아닌 것의 개수를 $k\,(>0)$라 하고 k개에 대응되는 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$중 k개 모두가 0이 될 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$이다.

그러므로 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$이 0이 될 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$을 넘을 수 없다.

따라서 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$이 0이 될 확률 또한 $\frac{1}{2}$을 넘지 않는다.

1-2. 두 개를 동시에 던졌을 때 눈의 합 $2, 3, \cdots, 12$가 나올 확률이 다 같게 나오도록 $p_1, p_2, \cdots, p_6$와 $q_1, q_2, \cdots, q_6$를 정할 수 있다고 가정하면 아래의 식이 성립한다.

$p_1q_1=p_1q_6+p_2q_5+p_3q_4+p_4q_3+p_5q_2+p_6q_1=\frac{1}{11}$에서 $q_1>q_6$이고

$p_6q_6=p_1q_6+p_2q_5+p_3q_4+p_4q_3+p_5q_2+p_6q_1=\frac{1}{11}$에서 $q_6>q_1$이다. 이것은 모순이므로 불가능하다.

문제 2

2-1. $g(x)=xf'(x)$라 두고 양변을 x에 대해 미분하면

$f'(x)=\frac{1}{2r}\{(x+r)f'(x+r)-(x-r)f'(x-r)\}$에서 $f'(x)=\frac{\{g(x+r)-g(x-r)\}}{(x+r)-(x-r)}$이다.

함수 g가 미분가능하므로 $r\to 0$이면

$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\{xf'(x)\}=f'(x)+xf''(x)$ 이므로 $f''(x)=0$ 이다.

$f(x)=ax+b$ 라 두고 준식에 대입하면

$ax+b=\dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r} at\,dt=\dfrac{a}{4r}\{(x+r)^2-(x-r)^2\}=ax$

이므로 $b=0$ 이다. 따라서 조건을 만족하는 함수 f 는 $f(x)=ax$ 이다.

다른풀이

$\displaystyle\lim_{r\to 0}f(x)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}tf'(t)dt$ 에서 $f(x)=xf'(x)$이다. 양변을 미분하면

$f'(x)=f'(x)+xf''(x)$ 이므로 $xf''(x)=0$ 이고, $f''(x)=0\,(\because x>0)$이다.

따라서 $f(x)$는 일차함수이다.

$f(x)=xf'(x)$에서 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 이고 양변을 부정적분한다.

$\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 에서 $\ln|x|+C=\ln|f(x)|$ (C는 적분상수)이다.

그러므로 $f(x)=ax$ $(a=e^C)$이다.

2-2. $g'(x)=e^{-x}f(x)$ 라 하고 준식을 변형하면

$f(x)=\dfrac{g(x+r)-g(x-r)}{(x+r)-(x-r)}e^x=g'(\alpha)e^x,\ \ \alpha\in(x-r,\ x+r)$

이다. $|f(x)|\le e^x$에서 $-1\le g'(\alpha)\le 1$ 이므로 조건을 만족하는 함수 f는

$$f(x)=ae^x,\ \ |a|\le 1$$

이다. $f(x)=ae^x,\ |a|\le 1$ 형태의 함수들은 교점이 존재하지 않으므로 구간별로 함수 $f(x)$가 다르지 않다.

다른풀이

식 $f(x)=\dfrac{e^x}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r}e^{-t}f(t)dt$ 을 변형하면 $\dfrac{f(x)}{e^x}=\dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r}\frac{f(t)}{e^t}dt$ 이다.

$g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ 라 두면 $g(x)=\dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r}g(t)dt$ 이다. $G'(x)=g(x)$ 라 두면

$$g(x)=\frac{G(x+r)-G(x-r)}{2r}=G'(x^*)=g(x^*),\ \ x^*\in(x-r,x+r)$$

즉, 임의의 x에 대하여 평균값 정리를 만족하는 x^*가 항상 구간$(x-r,x+r)$의 중점인 x와 일치해야 하므로 $g(x)=ax+b$ 이다. 또한 $|f(x)|=|e^x g(x)|\le e^x$에서 $|g(x)|\le 1$ 이므로 $g(x)$는 상수이다. 즉 $g(x)=b$ (b 상수)이다. 그러므로 $f(x)=be^x\,(|b|\le 1)$

2012 수시 공대

문제 1

1-1. 함수 $f:(0,\infty)\to(-\infty,\infty)$가 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고, 그 도함수 f'도 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하다. 다음 조건을 만족하는 함수 f를 모두 구하여라.

[조건] 임의의 양의 실수 x와 x보다 작은 양의 실수 r에 대하여 f는 다음 항등식을 만족한다.

$$f(x)=\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}tf'(t)dt$$

[도움말] 조건의 식을 x에 대하여 미분하시오.

1-2. 함수 $f:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$가 구간 $(-\infty,\infty)$에서 연속이다. 다음 두 조건을 만족하는 함수 f를 모두 구하여라.

(i) 임의의 실수 x와 양의 실수 r에 대하여 f는 다음 항등식을 만족한다.

$$f(x)=\frac{e^x}{2r}\int_{x-r}^{x+r}e^{-t}f(t)dt.$$

(ii) 모든 실수 x에 대하여 다음 부등식이 항상 성립한다.

$$|f(x)|\le e^x$$

1-3. 함수 $g:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$가 구간 $(-\infty,\infty)$에서 연속이다. 다음 두 조건을 만족하는 함수 g 를 모두 구하여라.

(i) 임의의 실수 x와 양의 실수 r에 대하여 g는 다음 항등식을 만족한다.

$$g(x)=\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}g(t)dt$$

(ii) 모든 실수 x에 대하여 다음 부등식이 항상 성립한다.

$$g(x)\ge 0$$

[도움말] 다음 식

$$|g(x)-g(0)|=\left|\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}g(t)dt-\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}g(t)dt\right|$$

에 관한 부등식을 유도하시오. 부등식의 유도를 위해 아래를 참고하시오.

* r이 충분히 클 때, 적분 구간 $[-r,r]$, $[x-r,x+r]$의 교집합이 $|g(x)-g(0)|$의 값에 어떠한 기여를 하는지 고려하시오.
* 다음 구간의 합

$$[-x-r,\ x-r]\cup[-x+r,\ x+r]=[-x-r,\ x+r]-(x-r,\ -x+r)$$

  에서 g의 정적분과 $|g(x)-g(0)|$의 값을 비교하시오.
* 구간의 합

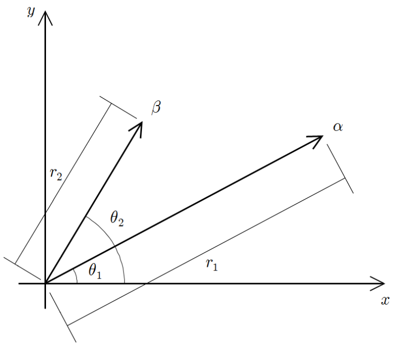
$$[-x-r,\ x+r]-(x-r,\ -x+r)$$

  의 원점에 대한 대칭성에 주목하시오.

문제 2

이차원 벡터 α, β를 그 벡터의 크기와 x축과 이루는 각을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha = r_1\begin{pmatrix}\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\end{pmatrix},\ \beta = r_2\begin{pmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{pmatrix}$$



이차원 벡터 α, β 사이에 다음과 같은 연산을 정의한다.

$$\alpha\otimes\beta = r_1 r_2\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}$$

연산 $\otimes$은 결합법칙이 성립하므로, α의 거듭제곱을 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha\otimes\alpha\cdots\otimes\alpha}_{n}$$

* 연산 $\otimes$에 대한 항등원이 유일하게 존재한다. 항등원을 $1_{\otimes}$로 표기하자.
* 영벡터가 아닌 이차원 벡터 α의 연산 $\otimes$에 대한 역원이 유일하게 존재한다. α의 역원을 α^{-1}로 표기하자.

2-1. 연산 $\otimes$의 항등원을 구하고 영벡터가 아닌 임의의 이차원 벡터의 역원을 구하라. 또한 연산 $\otimes$의 기하학적 의미에 대해 설명하라.

2-2. 크기가 1이고 제1사분면에 있는 임의의 벡터를 z라 할 때, 이차원 벡터 $\alpha^{n+1}\otimes z$와 $\alpha^n\otimes z$의 종점을 연결한 선분의 길이를 구하라.

2-3. 크기가 1이고 제1사분면에 있는 벡터 z가 x축과 이루는 각을 θ라 하고, 영벡터가 아닌 두 이차원 벡터 $\alpha\,(|\alpha|\neq 1)$와 $\beta\ (|\beta|\neq 1)$가 x축과 이루는 각을 $\dfrac{\theta}{n}$라 하자. 벡터 $\alpha^n\otimes z,\ \alpha^{n-1}\otimes z,\ \cdots,\ \alpha^1\otimes z,\ z,\ z\otimes\beta^{-1},\ z\otimes\beta^{-2},\ \cdots,\ z\otimes\beta^{-n}$

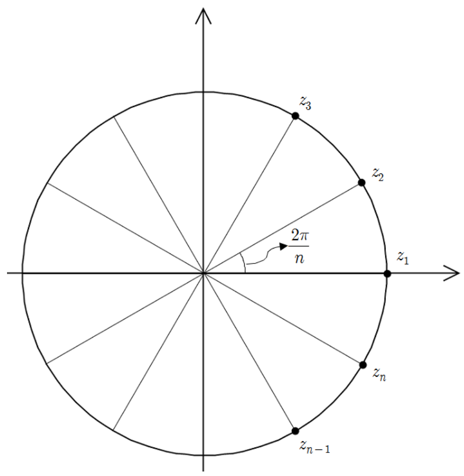
여기서, $\beta^{-n}=(\beta^{-1})^n$ 들에 대하여, 이웃하는 두 벡터의 종점을 연결한 선분들을 고려할 때,

1) 선분들의 길이의 합을 구하라.

2) n이 무한히 큰 경우, 1)의 결과가 수렴하기 위한 조건과 그 때의 수렴 값을 구하라.

2-4. 아래 그림과 같이 단위원의 원주를 n등분하는 이차원 벡터를 각각 z_1, z_2, $\cdots$, z_n이라 할 때 다음의 값을 구하라.

$$\lim_{n\to\infty}\left((z_1-z_n)\otimes z_n^{-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\otimes z_k^{-1}\right)$$



선생님 클리닉

문제1은 주어진 조건에서 양변을 미분하고 미분계수의 정의를 이용하면 쉽게 해결할 수 있는 문항이며, 문제2는 주어진 연산에 대한 항등원과 역원 그리고 그 성질에 대한 것들을 묻고 있다. 특히, 주어진 연산은 복소수의 곱과 연관되어 있다는 사실과 그 기하학적 의미에 대한 고찰이 필요하다.

관련 학습

1. 적분의 평균값정리

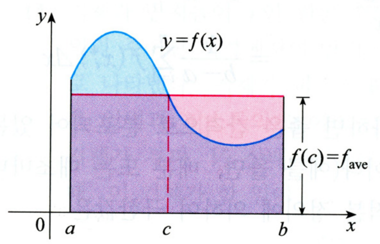
함수 f 가 구간 $[a,b]$ 위에서 연속이면 구간 $[a,b]$ 안에서 다음 식을 만족하는 적어도 하나의 수 c 가 존재한다.

$$f(c)=f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

즉,

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

[기하학적 의미] 양의 함수 f 에 대하여 밑변이 닫힌구간 $[a,b]$ 이고 높이가 $f(c)$ 인 직사각형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이와 같게 되는 하나의 수 c 가 구간 $[a,b]$ 위에서 존재한다는 것이다.



즉, 문제 2-2에서 임의의 구간 $[a,b]$ 에서 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 이므로 $f(x)$ 의 그래프가 직선이어야 한다.

2. 항등원과 역원

집합 A가 연산 $\circ$에 대하여 닫혀 있을 때, A의 모든 원소 a에 대하여

$$a\circ e=e\circ a=a$$

를 만족하는 A의 원소 e가 존재하면, e를 연산 $\circ$에 대한 항등원이라고 한다.

또 집합 A의 한 원소 a에 대하여

$$a\circ x=x\circ a=e$$

를 만족하는 A의 원소 x가 존재하면, x를 연산 $\circ$에 대한 a의 역원이라고 한다.

예시 답안

문제 1

1-1.

$g(x)=xf'(x)$ 라 두고 양변을 x 에 대해 미분하면

$f'(x)=\dfrac{1}{2r}\{(x+r)f'(x+r)-(x-r)f'(x-r)\}$ 에서 $f'(x)=\dfrac{\{g(x+r)-g(x-r)\}}{(x+r)-(x-r)}$ 이다.

함수 g가 미분가능하므로

$r\to 0$ 이면 $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\{xf'(x)\}=f'(x)+xf''(x)$ 이므로 $f''(x)=0$ 이다.

$f(x)=ax+b$ 라 두고 준식에 대입하면

$$ax+b=\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} at\,dt=\frac{a}{4r}\{(x+r)^2-(x-r)^2\}=ax$$

이므로 $b=0$ 이다. 따라서 조건을 만족하는 함수 f는 $f(x)=ax$ 이다.

1-2.

$g'(x)=e^{-x}f(x)$ 라 하고 준식을 변형하면

$$f(x)=\frac{g(x+r)-g(x-r)}{(x+r)-(x-r)}e^x=g'(\alpha)e^x,\ \ \alpha\in(x-r,\ x+r)$$

이다. $|f(x)|\le e^x$에서 $-1\le g'(\alpha)\le 1$ 이므로 조건을 만족하는 함수 f는

$$f(x)=ae^x,\ \ |a|\le 1$$

이다. $f(x)=ae^x,\ |a|\le 1$ 형태의 함수들은 교점이 존재하지 않으므로 구간별로 함수 $f(x)$가 다르지 않다.

1-3.

1-2에 의해 $g(x)=\dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r}g(t)dt$를 만족하는 $g(x)=ax+b$ 이다. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$를 만족하는 것은 $g(x)=b\ (b\ge 0)$이다.

문제 2

2-1.

(1) 연산 $\otimes$의 항등원

$\alpha\otimes e=r_1r_e\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_e)\\ \sin(\theta_1+\theta_e)\end{pmatrix}=r_1\begin{pmatrix}\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\end{pmatrix}=\alpha$ 에서 $r_e=1$ 이고 $\theta_e=2n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ 이므로

$e=1_{\otimes}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$이다.

(2) 연산 $\otimes$의 역원

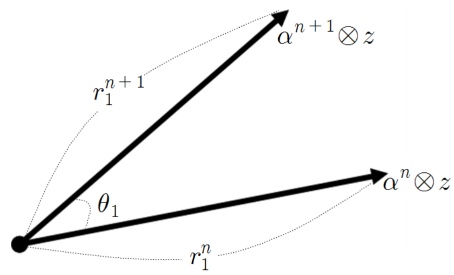
$\alpha\otimes\beta=r_1r_\beta\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_\beta)\\ \sin(\theta_1+\theta_\beta)\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}\cos 2n\pi\\ \sin 2n\pi\end{pmatrix}$ 에서 $r_\beta=1$ 이고 $\theta_\beta=2n\pi-\theta_1\ (n\in\mathbb{Z})$ 이므로

$\beta=r_1^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta_1\\ -\sin\theta_1\end{pmatrix}$ 이다.

(3) 연산 $\otimes$의 기하학적 의미
원점을 중심으로 한 닮음변환과 회전이동이다.

문제2의 그림에서 $\alpha\otimes\beta$는 벡터α를 벡터β와 x축과 이루는 각 θ_2만큼 원점을 중심으로 회전이동한 후 벡터 β의 크기 r_2만큼 확대 또는 축소한 것이다. (참고: 두 복소수의 곱 $\alpha\beta$ 와 같다.)

2-2.
선분의 길이 x는 코사인 제2법칙에 의해 $x^2=r_1^{2n}+r_1^{2n+2}-2r_1^{2n+1}\cos\theta_1$이므로
$x=r_1^n\sqrt{r_1^2-2r_1\cos\theta_1+1}$ 이다.



2-3.
1)
$\alpha=r_1\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{n}\\ \sin\dfrac{\theta}{n}\end{pmatrix}$, $\beta=r_2\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\theta}{n}\\ \sin\dfrac{\theta}{n}\end{pmatrix}$이라 하면 2-2번에 의해 선분들의 길이의 합은

$$\sqrt{r_1^2-2r_1\cos\frac{\theta}{n}+1}\,(r_1^{n-1}+r_1^{n-2}+\cdots+r_1+1)+$$
$$\sqrt{r_2^{-2}-2r_2^{-1}\cos\frac{\theta}{n}+1}\,(1+r_2^{-1}+\cdots+r_2^{-n+2}+r_2^{-n+1})$$
이다.

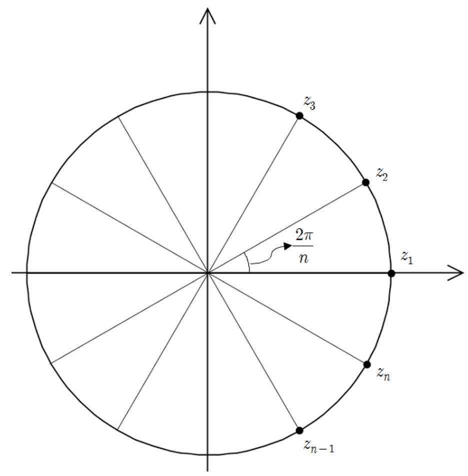
2)
1)의 결과가 수렴하기 위해서 $0<r_1<1$이고 $r_2>1$이어야 하며 그 때의 수렴 값은
$(1-r_1)\left(\dfrac{1}{1-r_1}\right)+(1-r_2^{-1})\left(\dfrac{1}{1-r_2^{-1}}\right)=2$이다.

2-4.
$(z_1-z_n)\otimes z_n^{-1}=z_1\otimes z_n^{-1}-z_n\otimes z_n^{-1}=z_2-z_1$이고
$(z_{k+1}-z_k)\otimes z_k^{-1}=z_{k+1}\otimes z_k^{-1}-z_k\otimes z_k^{-1}=z_2-z_1$
(단, $1\le k\le n-1$)이므로

$$(z_1 - z_n)\otimes z_n^{-1} + \sum_{k=1}^{n-1}(z_{k+1} - z_k)\otimes z_k^{-1} = n(z_2 - z_1)$$

이다.

벡터 $z_2 - z_1$ 의 크기는 코사인 제2법칙에 의해



$\sqrt{1^2 + 1^2 - 2\times 1\times 1\times \cos\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)} = 2\sin\frac{\pi}{n}$ 이고

x 축과 이루는 각의 크기는 이등변삼각형의 외각의 크기이므로 $\pi - \dfrac{\pi - \frac{2\pi}{n}}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{n}$

이므로 $z_2 - z_1 = 2\sin\dfrac{\pi}{n}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)\end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} n(z_2 - z_1) = \lim\limits_{n\to\infty} 2\pi \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right)\end{pmatrix} = 2\pi\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 2\pi\end{pmatrix}$ 이다.

다른풀이

단위원이므로 회전이동만 생각하면 된다.

$z_2 = \alpha$ 라 하면 $z_k = \alpha^{k-1} = \alpha^{-(n-k+1)}$ $(0 \le k \le n)$ 이므로

$(z_{k+1} - z_k)\otimes z_k^{-1} = (\alpha^k - \alpha^{k-1})\alpha^{n-k+1} = \alpha^{n+1} - \alpha^n = \alpha - 1_{\otimes} = z_2 - z_1$ 이다.

따라서 $(z_1 - z_n)\otimes z_n^{-1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(z_{k+1} - z_k)\otimes z_k^{-1} = n(\alpha - 1_{\otimes}) = n(z_2 - z_1)$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty} n(z_2 - z_1) = \lim_{n\to\infty} n\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n} - 1 \\ \sin\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}n\left(\cos\frac{2\pi}{n} - 1\right) \\ n\sin\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}$$

인데 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{2\pi}{n} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 2\pi t}{t} = 2\pi$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\cos\dfrac{2\pi}{n} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(-2\sin^2\dfrac{4\pi}{n}\right) = 0$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} n(z_2 - z_1) = \begin{pmatrix}0 \\ 2\pi\end{pmatrix}$ 이다.

2011 수시 공대

문제 1

공간에 볼록한 도형 P가 있다. $B(r)$을 원점을 중심으로 하는 반지름의 길이가 r인 구, $P(r)=\{x+y \mid x \in P,\ y \in B(r)\}$라고 정의하고 이 $P(r)$의 부피를 $f(r)$이라 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, $x+y$는 벡터 합으로 하고 P의 겉넓이는 S, 부피는 V, 꼭짓점의 개수는 N, 모서리 총길이의 합은 L이다.)

(1) $f(r) \le V+rS+\pi r^2 L+\dfrac{4}{3}\pi r^3 N$ 임을 보이시오.

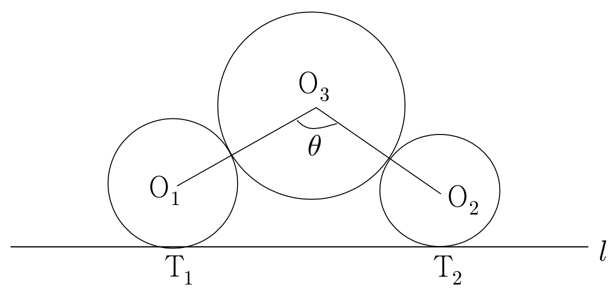
(2) $\displaystyle\lim_{r \to 0+}\frac{f(r)-V}{r}=S$ 임을 보이시오.

(3) $f(r)=A_0+A_1 r+A_2 r^2+A_3 r^3$인 A_0, A_1, A_2, A_3이 존재함을 보이시오.

(4) P가 정사면체일 때 A_3의 값을 구하시오.

문제 2

평면상에 서로 외접하는 원 O_1, O_3와 O_2, O_3가 있다. 이 때 각 반지름의 길이를 r_1, r_2, r_3라고 하고 원 O_1, O_2의 공통외접선을 l, 그 접점을 차례대로 T_1, T_2라 하자. $\angle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_3\mathrm{O}_2=\theta$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) $\overline{\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2}$를 r_1, r_2, r_3, θ에 관한 식으로 나타내시오.

(2) $r_1=r_2=1$, $r_3=3$이라고 하자. 세 원과 접선 l로 둘러싸인 영역의 넓이를 θ에 관한 식으로 나타내시오.

(3) $r_1=r_2=1$, $r_3=3$일 때, $\overline{\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2}=t$라고 하자. $z=t$로 자른 단면의 면적이 (2)에서 제시된 영역일 때, $4 \le z \le 4\sqrt{3}$ 범위에 해당되는 도형의 부피를 구하시오.

선생님 클리닉

문제1은 볼록한 도형 P를 두께 r만큼 표면을 덮었을 때 생기는 입체에 관한 내용들을 묻고 있다. 특히, 모든 다면체에서 꼭짓점 부분을 덮는 A_3는 항상 구가 된다는 사실에 주목할 필요가 있다. 문제2는 코사인법칙을 이용하여 관계식을 구하고 단면적을 적분하여 부피를 구하는 문항이다. 특히, 치환적분과 부분적분을 이용한 삼각함수의 적분법에 익숙해져야 할 것이다.

관련 학습

1. 코사인법칙

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC에 대하여 다음이 성립한다.

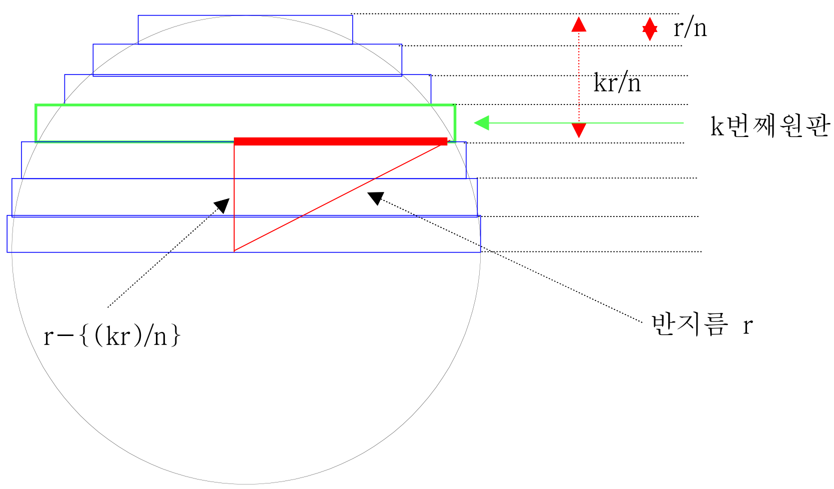
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

2. 구의 부피

반지름의 길이가 r인 구의 부피를 구하기 위해 아래 그림과 같이 구를 얇은 판으로 나누자.



우선 반구의 부피를 구분구적법으로 구해 2 배 해 주자. 위 그림으로 부터 k 번째 원판의 두께는 $\frac{r}{n}$ 이고, 원판의 반지름은 피타고라스 정리를 쓰면 $\sqrt{\frac{2kr^2}{n} - \frac{k^2r^2}{n^2}}$ 이 된다.

따라서 원판의 부피들의 합은 $\sum_{k=1}^{n}\pi r^2(\frac{2k}{n}-\frac{k^2}{n^2})\frac{r}{n}$ 이다.

그러므로 반구의 부피는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi r^2(\frac{2k}{n}-\frac{k^2}{n^2})\frac{r}{n}$$

이고 이것은 $\int_0^1 \pi r^3(2x-x^2)dx$ 이 된다.

따라서 반구의 부피는 $\pi r^3[x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{2}{3}\pi r^3$ 이므로 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 가 된다.

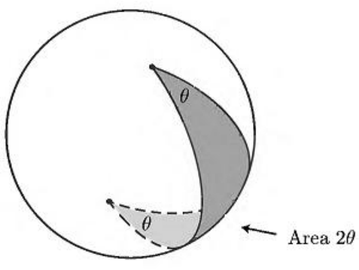
3. 구면삼각형의 넓이

가. 구면위에서 직선

평면상의 직선이 무엇인지는 다들 잘 알고 계실 겁니다. 평면 위의 기하학이 바로 평면기하학, 유클리드 기하학인 것이죠. 그렇다면 구면상에서의 직선은 무엇인가? 구면상에서의 직선은 바로 구면상에 있는 대원들이 됩니다. 구면 위에 두 점이 있을 때, 그 두 점과 구의 중심은 하나의 평면을 결정하고, 그 평면과 구면이 만나서 그리는 원을 대원이라고 하는 것이죠. 구면 위의 두 점을 지나는 최단곡선은 그렇게 얻어집니다.

나. 손톱모양의 넓이

아래와 같이 북극과 남극을 잇는 두 개의 대원이 이루는 손톱모양의 넓이는, 그 둘 사이의 각도에 의해 결정되고, 그 넓이는 다음과 같습니다.



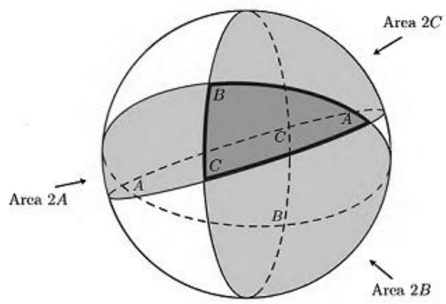
두 대원 사이의 각도가 θ로 주어졌다면, 구면의 넓이는 $4\pi r^2$이고 넓이가 각도에 비례한다는 사실을 이용하면

손톱모양의 넓이 $S=4\pi r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=2r^2\theta$

다. 구면삼각형의 넓이

반지름의 길이가 1인 구면위에서 세 각이 A, B, C로 주어진 삼각형의 넓이는 $A+B+C-\pi$이다.

(증명)



위의 그림처럼, 구면삼각형의 한 꼭짓점에서 반대편 극에 마주보고 있는 점까지 대원을 잇습니다. 그러면 회색으로 칠한 손톱모양이 세 개 얻어지는데, 그 세 개의 손톱모양 각각의 넓이는 위에서 본대로 $2A$, $2B$, $2C$입니다. 따라서

$$2A+2B+2C-2(\text{구면삼각형 } ABC\text{의 넓이})=(\text{구면의 절반의 넓이}).$$

그러므로

$$(\text{구면삼각형 } ABC\text{의 넓이})=A+B+C-\pi.$$

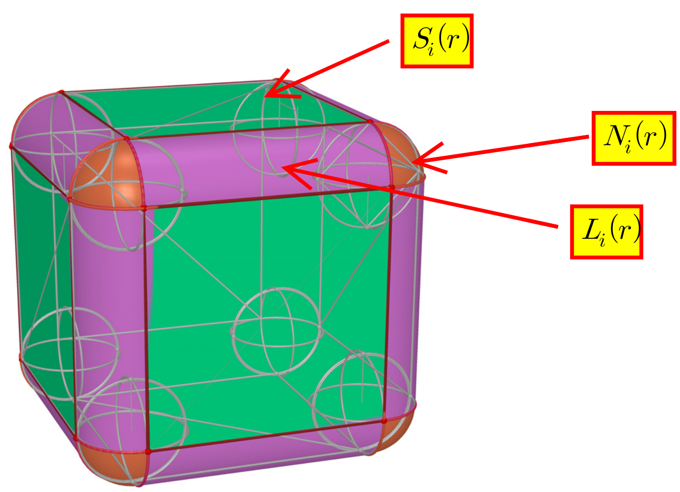
예시 답안

문제 1

(1) $P(r)=\{x+y \mid x\in P,\ y\in B(r)\}$은 볼록한 도형 P의 겉면을 두께 r만큼 덮은 모양이다.

예를 들어, 볼록한 도형 P를 직육면체라고 한다면

$P(r)=\{x+y \mid x\in P,\ y\in B(r)\}$은 아래 그림과 같아질 것이다.



이제 임의의 볼록한 도형 P에 대하여 $P(r)$의 부피 $f(r)$을 구하기 위해 아래와 같이 약속하자.

$S_i(r)$ = 모서리가 없는 표면을 수직으로 덮고 있는 부분(표면위의 임의의 한 점을 기준으로 수직 방향)

$L_i(r)$ = 모서리를 수직으로 덮고 있는 부분들 중 $S_i(r)$이 아닌 부분

$N_i(r)$ = 꼭짓점을 덮고 있는 부분들 중 $S_i(r)$과 $L_i(r)$이 아닌 부분

여기서

$\sum_i S_i(r) = rS$ (표면의 넓이와 수직방향으로 덮힌 표면의 넓이는 같기 때문),

$\sum_i L_i(r) \le \pi r^2 L$ (모서리의 길이를 높이로 하는 원기둥의 부피보다 더 작음),

$\sum_i N_i(r) \le \frac{4}{3}\pi r^3 N$ (꼭짓점을 중심으로 하는 구의 부피보다 더 작음)임을 알 수 있다.

그러므로,

$f(r) = V + \sum_i S_i(r) + \sum_i L_i(r) + \sum_i N_i(r) \le V + rS + \pi r^2 L + \frac{4}{3}\pi r^3 N$ 이다.

(2) (1)에서 $\sum_i S_i(r) = rS$ 이므로

$f(r) = V + \sum_i S_i(r) + \sum_i L_i(r) + \sum_i N_i(r) \ge V + rS$ 이고

또한, $f(r) \le V + rS + \pi r^2 L + \frac{4}{3}\pi r^3 N$ 이므로

$$V + rS \le f(r) \le V + rS + \pi r^2 L + \frac{4}{3}\pi r^3 N,\ rS \le f(r) - V \le rS + \pi r^2 L + \frac{4}{3}\pi r^3 N$$

이고, $\lim_{r \to +0} \frac{rS}{r} \le \lim_{r \to +0} \frac{f(r) - V}{r} \le \lim_{r \to +0} \frac{rS + \pi r^2 L + \frac{4}{3}\pi r^3 N}{r}$ 이다.

따라서, $\lim_{r \to +0} \frac{rS}{r} = S = \lim_{r \to +0} \frac{rS + \pi r^2 L + \frac{4}{3}\pi r^3 N}{r}$ 이므로 $\lim_{r \to +0} \frac{f(r) - V}{r} = S$ 이다.

(3) $f(r) = V + \sum_i S_i(r) + \sum_i L_i(r) + \sum_i N_i(r)$ 에서

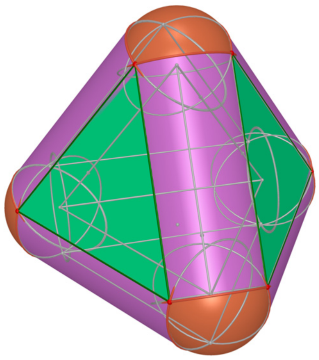
$\sum_i S_i(r) = rS$, $\sum_i L_i(r) \le \pi r^2 L$, $\sum_i N_i(r) \le \frac{4}{3}\pi r^3 N$ 이므로

$\sum_i L_i(r) = p\pi r^2 L$, $\sum_i N_i(r) = \frac{4}{3} q\pi r^3 N$ 을 만족하는 실수 p, q가 존재한다.

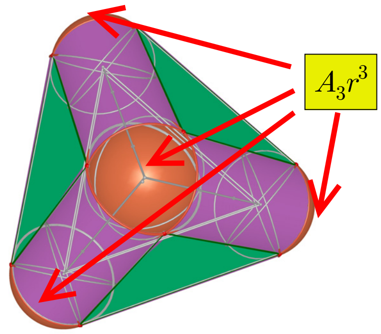
그러므로 $A_0 = V$, $A_1 = S$, $A_2 = p\pi L$, $A_3 = \frac{4}{3}\pi N$ 이라 하면

$f(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3$ 인 A_0, A_1, A_2, A_3 가 존재한다.

(4) P 가 정사면체일때 $f(r)$은 아래와 같다.

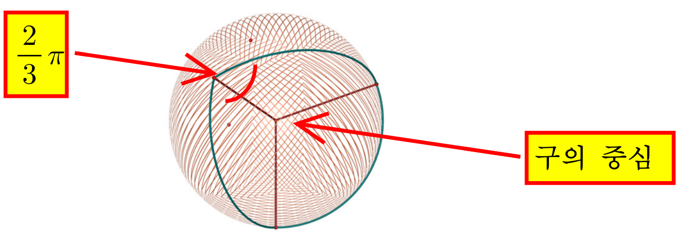


[그림1]



[그림2]

여기서 $A_3 r^3$는 꼭짓점을 덮는 부분들 중 $\sum_i S_i(r)$, $\sum_i L_i(r)$ 를 제외한 부분이므로 [그림2]에서 꼭짓점을 덮는 네 부분의 부피이다. 즉, 하나의 꼭짓점에 모이는 세 모서리와 수직인 평면으로 구를 자른 부분으로 아래 그림과 같다.



즉, 한 면이 구의 표면이 되고 나머지 세 면은 평면인 사면체 모양의 볼록다면체이고, 구의 표면이 한 면인 부분은 구면위에서 세 직선이 만나 생기는 삼각형이다.

여기서 정사면체의 세 모서리가 각각 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}$이고 이 모서리와 수직인 평면들이 이루는 각은 각각 $\frac{2}{3}\pi$가 된다. 그러므로 이 삼각형의 넓이는 πr^2이 된다.(구면위의 삼각형 넓이 공식이 $S = (A+B+C-\pi)r^2$ 이므로)

이것은 구의 겉넓이 $4\pi r^2$의 $\frac{1}{4}$이고 부피 역시 $\frac{1}{4}$이 된다. 그리고 이러한 부분이 4

개 이므로 구 하나의 부피와 같다.

따라서 $A_3r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$ 이고 $A_3 = \frac{4}{3}\pi$.

다른풀이

정사면체의 한 변의 길이를 a라 하고 $a\to0$일 때 정사면체는 한 점으로 수렴한다. 따라서 $f(r)$은 그 점을 중심으로 하는 구가 되며 $\lim_{a\to0}f(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ 이므로 $A_3 = \frac{4}{3}\pi$

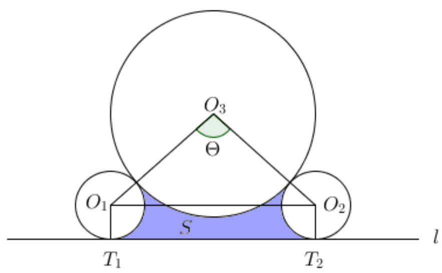
문제 2

(1) $\overline{\mathrm{O_1O_2}} = \sqrt{(r_1+r_3)^2+(r_2+r_3)^2-2(r_1+r_3)(r_2+r_3)\cos\theta}$ 이므로

$\overline{\mathrm{T_1T_2}} = \sqrt{\overline{\mathrm{O_1O_2}}^2-(r_1-r_2)^2} = \sqrt{(r_1+r_3)^2+(r_2+r_3)^2-2(r_1+r_3)(r_2+r_3)\cos\theta-(r_1-r_2)^2}$

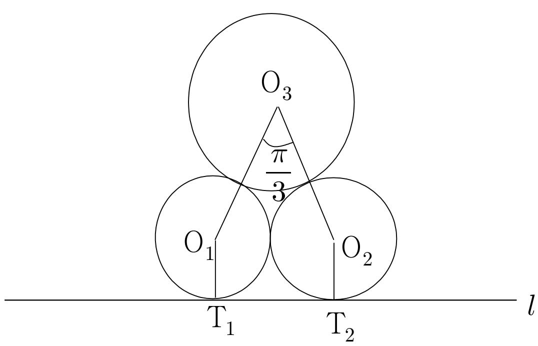
이다. r_1, r_2 의 크기에 관계없이 $(r_1-r_2)^2$ 은 일정하다.

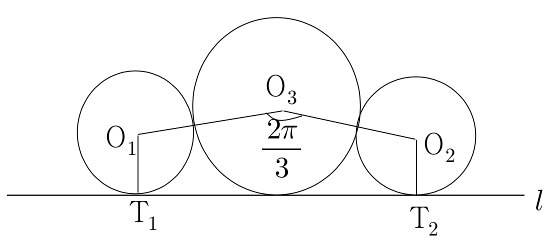
(2) $\angle\mathrm{O_3O_1T_1} = \angle\mathrm{O_3O_2T_2} = \pi - \frac{\theta}{2}$ 이고, $\overline{\mathrm{T_1T_2}} = \sqrt{4^2+4^2-2\cdot4^2\cos\theta} = 8\sin\frac{\theta}{2}$ 이다. 아래 그림에서 넓이 S는 오각형$\mathrm{O_1T_1T_2O_2O_3}$의 넓이에서 각 원에 포함된 부채꼴의 넓이의 합을 빼면 된다.



그러므로

$$S = 8\sin\theta + 8\sin\frac{\theta}{2} - \left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{9}{2}\theta = 8\sin\theta + 8\sin\frac{\theta}{2} - \pi - 4\theta \quad \left(\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}\right)$$





(3) $t=8\sin\frac{\theta}{2}$ 에서 $t=4$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$, $t=4\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 이므로

$$\int_{4}^{4\sqrt{3}} S(t)dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 4\cos\frac{\theta}{2}\left(8\sin\theta+8\sin\frac{\theta}{2}-\pi-4\theta\right)d\theta$$

$$=\left[-\frac{128}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}-16\cos\theta-8\pi\sin\frac{\theta}{2}-32\left(\theta\sin\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$=-\frac{64}{3}+48\sqrt{3}+\frac{28}{3}\pi-\frac{44\sqrt{3}}{3}\pi$$

※ $\int\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\, d\theta=\int 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\theta=-4\int t^2dt=-\frac{4}{3}t^3+C=-\frac{4}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}+C$

$\left(\because t=\cos\frac{\theta}{2}\ ,\ dt=-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

※ $\int 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=\int\sin\theta d\theta=-\cos\theta+C$

※ $\int\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\int\theta\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)'d\theta=\theta\sin\frac{\theta}{2}-\int\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=\theta\sin\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}+C$

2011 수시 자연

문제 1

$(M_a f)(x)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) f 가 연속 함수일 때, $(M_a f)(x)$ 의 도함수를 구하시오.

(2) $u(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (-1 \le x \le 1) \\ 0 & (x<-1,\ x>1) \end{cases}$ 일 때, $\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x)$의 그래프를 그리시오.

(3) $M_{\frac{1}{4}}\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x)$ 의 그래프 개형을 설명하시오.

문제 2

다음 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{s}{2}<t<s$ 일 때 $y=tx$ 를 $y=sx$ 에 대하여 대칭시킨 직선의 방정식을 구하시오.

(추가 문항) 방향벡터를 이용하여 해결하시오.

(2) 포물선 $y=x^2$ 위의 점 $(a,\ a^2)$에서 나온 빛이 $(b,\ b^2)$에서 반사되었다고 한다. 반사광이 이 포물선과 만나는 점의 x 좌표를 구하시오. (단, $a>0$ 이다.)

(3) $a_0(0,\ 0)$ 에서 나온 빛이 $a_1(2,\ 2^2)$에서 반사되고 이 반사광이 다시 포물선과 만나는 점을 $a_2(x_2,\ x_2^2)$, a_2 에서 나온 빛이 포물선과 만나는 점을 a_3 라고 하자. 이와 같이 포물선 위의 점 $a_n(x_n,\ x_n^2)$에서 반사된 빛이 포물선과 만나는 점을 $a_{n+1}(x_{n+1},\ x_{n+1}^2)$ 이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 이 수렴함을 증명하시오.

선생님 클리닉

문제1은 $(M_a f)(x)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt$ 에 대하여 $\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x)$의 그래프가 꺾인점에서 미분불가능이지만 $M_{\frac{1}{4}}\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x)$ 의 그래프는 모든 점에서 연속이 된다는 사실에 주목할 필요가 있다. 문제2는 포물선에 반사되는 직선이 포물선과 만나는 점이 가지는 특징을 무한급수의 수렴과 관련하여 묻고 있는 문항이다.

관련 학습

1. 직선 l : $y=ax+b$ 에 대한 대칭이동

점의 대칭이동 : 점 $A(x,\ y)$의 직선 l에 대한 대칭점을 $A'(x', y')$이라 하면

(ⅰ) 중점 조건 : AA'의 중점이 직선 l 위에 있다.

(ⅱ) 수직 조건 : 두 점 A, A′을 지나는 직선은 직선 l과 수직이다.

즉, ($\overleftrightarrow{AA'}$의 기울기)×(l의 기울기) $=-1$

2. 수열의 점화식

수학에서 점화식(Recurrence relation)이란 수열의 항 사이에서 성립하는 관계식을 말한다. 즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항 a_n이 함수 f를 이용해서

$$a_{n+1}=f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

처럼 귀납적으로 정해져 있을 때, 함수 f를 수열 $\{a_n\}$의 점화식이라고 하며, 또한, 수열 $\{a_n\}$은 점화식 f에 의해 정의된다.

점화식을 푼다는 것은 귀납적으로 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 n의 명시적인 식(Explicit formula)으로 나타내는 것을 말한다.

가. 기본적인 점화식

수열 $\{a_n\}$에서 $n=1,2,3,\ ......$ 일 때

(1) $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) → 공차 d 인 등차수열

(2) $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) → 공비 r 인 등비수열

(3) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ → 등차수열

(4) $(a_{n+1})^2=a_n\times a_{n+2}$ → 등비수열

(5) $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}$ → 조화수열

나. 중요한 점화식

(1) $a_{n+1}=a_n+f(n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ 꼴 :

$a_{n+1}-a_n=f(n)$은 수열 a_n의 계차수열임을 이용하면 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

(2) $a_{n+1}=f(n)\times a_n(n=1,2,3,......)$꼴 :

$f(n)$이 상수이면 공비 $=f(n)$인 등비수열이고 $f(n)$이 변수이면

$a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdots\cdots f(n-1)$을 정리해 본다.

(3) $a_{n+1}=pa_n+q\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$꼴 :

$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})$로 변경하면 $a_{n+1}-a_n$이 공비가 p인 등비수열이다.

(4) $ka_{n+2}+la_{n+1}+ma_n=0$꼴 :

$k+l+m=0$일 때, $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{m}{k}(a_{n+1}-a_n)$으로 변형한다.

(5) $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$꼴 :

역수를 취하여 $\dfrac{1}{a_n}=b_n$이라 두면 (3)의 꼴이 된다.

(6) 거듭제곱·거듭제곱근 꼴 :

$a_{n+1}=qa_n^p$꼴이면 양변에 로그를 취한 후 치환한다.

(7) $pa_na_{n+1}=qa_n-ra_{n+1}$꼴 :

각 항의 최소 공배수로 나눈다.

3. 비교판정법(comparison test)

모든 n에 대하여 $0\le b_n\le c_n$ 이고 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ 가 수렴하는 경우, 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 도 수렴한다.

<증명> 모든 n에 대하여 $0\le b_n\le c_n$ 이므로

$$0\le S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\le c_1+c_2+\cdots+c_n$$

이때 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$가 C로 수렴하면

$$0\le S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\le c_1+c_2+\cdots+c_n\le\sum_{k=1}^{\infty}c_k=C$$

가 성립한다. 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$의 부분합 수열 $\{S_n\}$이 증가수열이고 위로 유계이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_k$는 수렴한다.

추가 질문

추가질문 1) $M_{\frac{1}{2^n}}\left(M_{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\cdots\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)\right)\right)(x)$의 개형은 어떻게 될까?

답변) 모든 점에서 미분가능하고 넓이가 1인 좌우대칭인 곡선

추가질문 2) 이러한 시행을 하는 이유는?

답변) 길이가 일정한 구간에서 주어진 곡선과 x축 사이의 넓이를 함숫값으로 가지는 함수의 합성함수는 전체넓이를 변화시키지 않고 모든 점에서 미분가능하도록 근사시킬 수 있다는 것을 보여주는 것이다.

예시 답안

문제 1

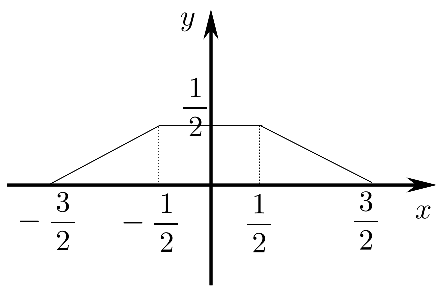
(1) $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\left(M_a f\right)'(x)=\left\{\frac{1}{2a}\{F(x+a)-F(x-a)\}\right\}'=\frac{1}{2a}\{f(x+a)-f(x-a)\}$$

(2) $\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x)=\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}u(t)\,dt$, $x\neq -\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}$일 때,

$$\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)'(x)=u(x+\frac{1}{2})-u(x-\frac{1}{2})$$

$$\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x)=\begin{cases}0 & (x\leq -\frac{3}{2}, x\geq \frac{3}{2})\\ \frac{1}{2}(x+\frac{3}{2}) & (-\frac{3}{2}\leq x\leq -\frac{1}{2})\\ \frac{1}{2} & (-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2})\\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2}-x) & (\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{3}{2})\end{cases}$$



(3) $M_{\frac{1}{4}}\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x)=2\int_{x-\frac{1}{4}}^{x+\frac{1}{4}}\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(t)\,dt=g(x)$라 하자.

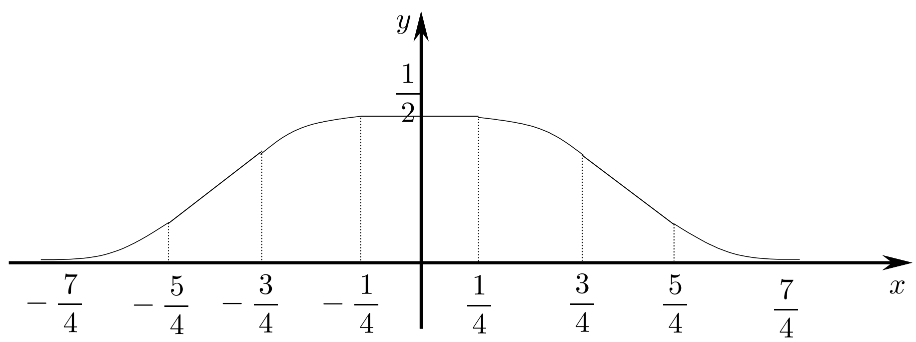
$$g'(x)=2\left\{\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x+\frac{1}{4})-\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(x-\frac{1}{4})\right\},$$

$$g(-\frac{7}{4})=2\int_{-2}^{-\frac{3}{2}}\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(t)\,dt=0,$$

$$g(-\frac{5}{4})=2\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}\left(M_{\frac{1}{2}}u\right)(t)\,dt=2\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}\frac{1}{2}(t+\frac{3}{2})\,dt=\frac{1}{8},$$

$$g(-\frac{3}{4})=\frac{3}{8},\quad g(-\frac{1}{4})=\frac{1}{2},\quad g(\frac{1}{4})=\frac{1}{2},\quad g(\frac{3}{4})=\frac{3}{8},\quad g(\frac{5}{4})=\frac{1}{8},\quad g(\frac{7}{4})=0,$$

$$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x \le -\frac{7}{4}) \\ x+\frac{1}{4}+\frac{3}{2} & (-\frac{7}{4}< x \le -\frac{5}{4}) \\ \frac{1}{2} & (-\frac{5}{4}< x \le -\frac{3}{4}) \\ 1-(x-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}) & (-\frac{3}{4}< x \le -\frac{1}{4}) \\ 0 & (-\frac{1}{4}< x \le \frac{1}{4}) \\ (-x-\frac{1}{4}+\frac{3}{2})-1 & (\frac{1}{4}< x \le \frac{3}{4}) \\ -\frac{1}{2} & (\frac{3}{4}< x \le \frac{5}{4}) \\ -(\frac{3}{2}-x+\frac{1}{4}) & (\frac{5}{4}< x \le \frac{7}{4}) \\ 0 & (x > \frac{7}{4}) \end{cases}$$



문제 2

(1) $y=tx$ 위의 점 $(0,0)$를 $y=sx$에 대하여 대칭시킨 점은 $(0,0)$이므로 대칭시킨 직선의 방정식을 $y=ax$라고 둘 수 있다. $y=tx$ 위의 점 $(1,t)$를 $y=sx$에 대하여 대칭시킨 점을 (x_1, ax_1)이라 두자. 그러면

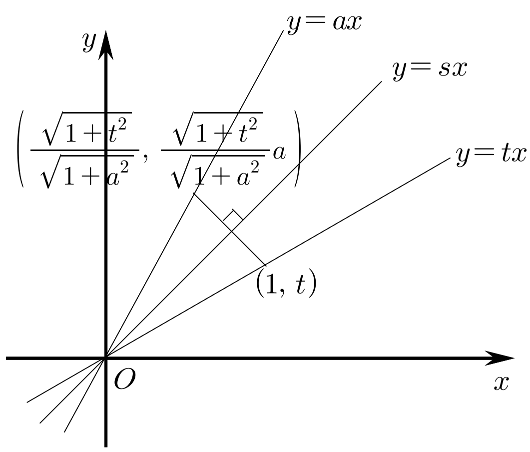
$$\frac{t-ax_1}{1-x_1}=-\frac{1}{s},\quad \frac{t+ax_1}{2}=\frac{1+x_1}{2}s.$$

그러므로 $a=\frac{s^2t+2s-t}{1+2st-s^2}$. 여기서 $\frac{s}{2}<t<s$이므로 $a>0$.

따라서 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y=\frac{s^2t+2s-t}{1+2st-s^2}x$.

다른풀이

$y=tx$를 $y=sx$에 대하여 대칭시킨 직선의 방정식을 $y=ax$ 라고 둘 수 있다. 또 직선 $y=tx$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,t)$와 대칭인 $y=ax$ 위의 점은



$\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+a^2}}a\right)$이므로 $\left(1-\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+a^2}}, t-\frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+a^2}}a\right)\cdot(1, s)=0$

$$(1+t^2)(1+as)^2=(1+a^2)(1+st)^2,$$

$$(s^2-2st-1)a^2+(2s+2st^2)a+t(t-s^2t-2s)=0,$$

$$\{(s^2-2st-1)a+(s^2t+2s-t)\}(a-t)=0,$$

$s\neq t$이므로 $a\neq t$이다. 그러므로 $a=-\frac{s^2t+2s-t}{s^2-2st-1}$.

따라서 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y=-\frac{s^2t+2s-t}{s^2-2st-1}x$.

(2) 포물선 $y=x^2$ 위의 점 (b, b^2)에서의 접선의 방정식은 $y=2bx-b^2$. 두 점 (a, a^2), (b, b^2)을 지나는 직선의 방정식은 $y=(a+b)x-ab$. 직선 $y=(a+b)x$를 직선 $y=2bx$에 대하여 대칭시킨 직선의 방정식을 (1)의 결과를 이용하여 구하면

$$y=-\frac{(2b)^2(a+b)+2(2b)-(a+b)}{(2b)^2-2(2b)(a+b)-1}x=\frac{4ab^2-a+4b^3+3b}{4ab+1}x.$$

그러므로 반사광이 포물선 $y=x^2$과 만나는 점의 x좌표는

$y=x^2$과 $y=\frac{4ab^2-a+4b^3+3b}{4ab+1}(x-b)+b^2$의 교점의 x좌표이다.

$$x^2=\frac{4ab^2-a+4b^3+3b}{4ab+1}(x-b)+b^2,$$

$$(4ab+1)x^2=(4ab^2-a+4b^3+3b)x-b(4b^3+2b-a),$$

$$(4ab+1)x^2-(4ab^2-a+4b^3+3b)x+b(4b^3+2b-a)=0,$$

$$\{(4ab+1)x-(4b^3+2b-a)\}(x-b)=0,$$

$$x=b \text{ 또는 } x=\frac{4b^3+2b-a}{4ab+1}.$$

따라서 구하고자 하는 x좌표는 $\dfrac{4b^3+2b-a}{4ab+1}$이다.

(3) $x_0=0$, $x_1=2$이고 (2)에서 $x_{n+2}=\dfrac{4x_{n+1}^3+2x_{n+1}-x_n}{4x_nx_{n+1}+1}$ $(n\ge 0)$.

이 식을 이용해서 계산하면 $x_2=36$, $x_3=646$임을 알 수 있다.

먼저 $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 $x_{n+1}>x_n>0$임은 자명하다.(생략)

다음으로 주어진 점화식을 이용하면

$$x_{n+2}=\frac{4x_{n+1}^3+2x_{n+1}-x_n}{4x_nx_{n+1}+1}$$

$$=\frac{\dfrac{x_{n+1}^2}{x_n}(4x_nx_{n+1}+1)-\dfrac{x_{n+1}^2}{x_n}+2x_{n+1}-x_n}{4x_nx_{n+1}+1}$$

$$=\frac{x_{n+1}^2}{x_n}-\frac{\dfrac{x_{n+1}^2}{x_n}-2x_{n+1}+x_n}{4x_nx_{n+1}+1}$$

$$=\frac{x_{n+1}^2}{x_n}-\frac{x_{n+1}^2-2x_nx_{n+1}+x_n^2}{x_n(4x_nx_{n+1}+1)}$$

$$=\frac{x_{n+1}^2}{x_n}-\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_n(4x_nx_{n+1}+1)}>\frac{x_{n+1}^2}{x_n}$$

$$\left(\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_n(4x_nx_{n+1}+1)}>0\text{이므로}\right)$$

따라서 $x_{n+2}>\dfrac{x_{n+1}^2}{x_n}$ 이고, $\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}}>\dfrac{x_{n+1}}{x_n}(n\ge 2)$

그러므로

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>\dfrac{x_3}{x_2}=\dfrac{36}{2}=18(n\ge 2)$이고 $x_{n+1}>18x_n$ 이다.

즉, $x_n>36(18)^{n-2}=2(18)^{n-1}$ 이고 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(18)^{2n-2}}$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$은 수렴한다.

2011 수시 (수리통계, 의예, 수의예)

문제 1

(1) 자연수 n과 유리수 $r(r>0)$에 대하여 x^n-1을 x^2-rx+1로 나눈 나머지가 a_nx+b_n일 때, a_{n+2}를 a_{n+1}, a_n, r로 표현하시오.

(2) $r=\dfrac{p}{q}$ (p, q는 서로 소인 자연수)이고 $c_n=q^{n-1}a_n$이라고 할 때, c_n은 q로 나누어 떨어지지 않는 정수임을 증명하시오.(단, $q\geq 2$)

(3) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$임을 증명하고 이와 1-(2)를 활용하여 다음 집합 A의 유리수 원소를 모두 구하시오. (단, Q는 유리수 집합이다.)

$$A=\{\cos s\pi \mid s\in Q\}$$

선생님 클리닉

$x^n=1$의 n개의 근이 $\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,n)$이라는 사실과 나머지 정리를 이용하여 주어진 문제를 해결하는 과정이다.

관련 학습

1. 드 무아브르의 정리

임의의 자연수 n에 대하여

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

증명)

i) $n=1$일 때, 성립한다.

ii) $n=k$일 때 성립한다면 $(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$이고

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)+i(\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta\cos k\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때 성립한다.

따라서 임의의 자연수 n에 대하여

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$이 성립한다.

예시 답안

문제 1

(1)

$x^n-1=(x^2-rx+1)Q(x)+a_nx+b_n$ 이므로

$x^{n+1}-1=(x^n-1)x+x-1=x\{(x^2-rx+1)Q(x)+a_nx+b_n\}+x-1$

$=(x^2-rx+1)\{xQ(x)+a_n\}+(1+b_n+ra_n)x-1-a_n$

이다. 따라서 $a_{n+1}=1+b_n+ra_n$ 이고 $b_{n+1}=-1-a_n$ 이다. 두 식에서 b_n, b_{n+1}을 소거하면 $a_{n+2}=ra_{n+1}-a_n$ 이다.

다른풀이

주어진 조건에 의하여

$x^n-1=(x^2-rx+1)Q_n(x)+a_nx+b_n \cdots (1)$

$x^{n+1}-1=(x^2-rx+1)Q_{n+1}(x)+a_{n+1}x+b_{n+1}$

$x^{n+2}-1=(x^2-rx+1)Q_{n+2}(x)+a_{n+2}x+b_{n+2} \cdots (2)$

$r(x^{n+1}-1)=(x^2-rx+1)rQ_{n+1}(x)+ra_{n+1}x+rb_{n+1} \cdots (3)$

여기서 $(1)+(2)-(3)$:

$(x^2-rx+1)x^n+r-2$
$=(x^2-rx+1)(Q_n(x)+Q_{n+2}(x)-rQ_{n+1}(x))+(a_{n+2}+a_n-ra_{n+1})x+(b_{n+2}+b_n-rb_{n+1})$

이고 양변을 비교하면 $(a_{n+2}+a_n-ra_{n+1})=0$ 이어야 한다.

따라서 $a_{n+2}=ra_{n+1}-a_n$ 이다.

(2)

$n=1$일 때, $x^n-1=x^1-1=(x^2-rx+1)\times 0+x-1$ 이므로 $a_1=1$

$n=2$일 때, $x^n-1=x^2-1=(x^2-rx+1)\times 1+rx-2$ 이므로 $a_2=r$

위의 (1) 구한 점화식 $a_{n+2}=ra_{n+1}-a_n$ 을 이용하여 $\{a_n\}$항을 귀납적으로 구해보면

$a_n=r^{n-1}+k_1r^{n-3}+k_2r^{n-5}+\cdots$ (ㄱ) 와 같이 r에 관한 $(n-1)$차 다항식이고 $r=\dfrac{p}{q}$ 을 대입하고 q^{n-1}로 통분하여 정리하면

$$a_n=\frac{p^{n-1}+k_1p^{n-3}q^2+k_2p^{n-5}q^2+q^2A}{q^{n-1}}$$

이다.

여기서 $k_i(i=1,2,3,\cdots)$는 상수이고 A는 (ㄱ)식에서 r^{n-5}항 이후의 항들의 합이다. 따라서 $c_n=a_nq^{n-1}=p^{n-1}+k_1p^{n-3}q^2+k_2p^{n-5}q^2+q^2A$ 이고, 두 자연수 p,q는 서로소이므로 q는 c_n을 나눌 수 없다.

(3)

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 의 증명은 수학적귀납법과 삼각함수의 덧셈정리(생략)

임의의 유리수 s에 대해 $s=\dfrac{2k}{n}$을 만족하는 적당한 정수 $k,\ n$이 존재한다. 따라서 유리수 s에 대해 $\cos s\pi$가 유리수가 되는 경우는 $\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$가 유리수가 되는 경우만 생각하면 된다.

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 에서 $x^n-1=0$의 해는

$\cos\dfrac{2k}{n}\pi+i\sin\dfrac{2k}{n}\pi$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$꼴이고 켤레복소수인 $\cos\dfrac{2k}{n}\pi-i\sin\dfrac{2k}{n}\pi$ 또한 $x^n-1=0$의 해이다. 따라서 x^n-1은 $x^2-2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)x+1$을 인수로 갖는다. 이제 $r=2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$이라 하자. $x^n-1=\left(x^2-rx+1\right)Q(x)+a_nx+b_n$에서 $a_n=b_n=0$이다.

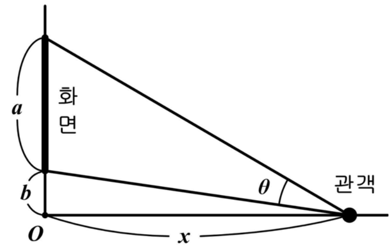
이 때, $c_n=0$이므로 $q|c_n$이다. 즉, 이것은 $r=\dfrac{p}{q}$ 에서 $q\ge 2$인 경우 1-(2)에 모순이 되므로 $q=1$이다. 따라서 r이 유리수이면 $\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$는 $\dfrac{\text{정수}}{2}$의 꼴이고 $\cos s\pi$은 $0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm1$뿐이며 이 값은 $\cos\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)$으로 표현된다.

따라서 $A\cap\mathbb{Q}=\left\{0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm1\right\}$이다.

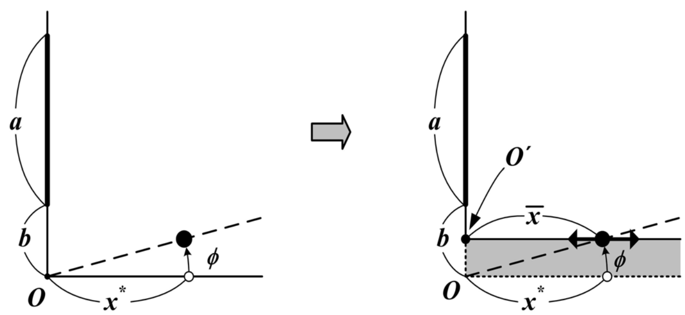
2010 수시 자연

문제 1

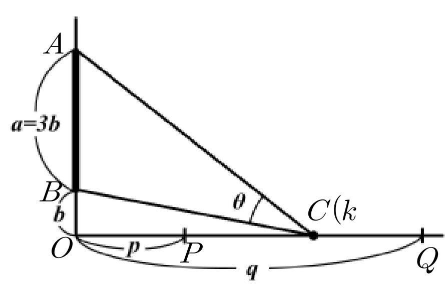
1-1. 아래 그림과 같은 극장이 있고 높이 b의 위치에 세로 길이가 a인 면이 설치되어 있다. 그림과 같이 관객의 시야각을 θ로 하였을 때, 최대 시야각을 확보하기 위하여 관객은 x의 어느 위치에 앉아야 할까? (단, 관객은 앞뒤로만 움직일 수 있다고 가정한다.)



1-2. 문제 1-1에서 구한 최적의 위치 x^*에 의자가 설치된 바닥면을 ϕ만큼 회전시킨 후, 아래 그림과 같이 바닥면을 다시 평행하게 만들어 새로운 원점 O'으로부터 의자까지의 거리를 $\overline{x}$라 하자. 새로 만들어진 바닥면에서 다시 최대 시야각을 확보하기 위해서 이 의자를 앞으로 옮겨야 할지, 뒤로 옮겨야 할지를 판별하라. (단, 회전각 ϕ는 충분히 작다고 가정한다.)



1-3. 객석을 만들 공간이 한정되어 관객의 위치가 아래 그림의 p와 q사이로 제한된다고 하고, 화면의 크기는 $a=3b$로 정해진다고 하자. p와 q사이에 위치한 관람객들의 시야각의 최대 차이가 가장 작도록 극장을 설계하려면 b를 어떻게 정해야 할까? (단, p와 q사이에 문제 1에서 구한 최대의 시야각을 주는 자리를 포함하도록 설계한다.)



문제 2

xyz-공간 R^3에서 xz-평면에 있는 함수 $z=\sqrt{4-4x^2}\,(0\le x\le 1)$의 그래프를 z축을 중심으로 회전하여 얻은 곡면을 S라 하자. 또 xy-평면에 있는 중심이 $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원을 z축을 따라 평행이동해서 얻은 원기둥의 표면을 C라 하자. 이때 곡면 S와 원기둥의 표면 C의 교점들의 자취를 $S\cap C$로 표시한다.

2-1. $S\cap C$를 나타내는 매개곡선 α: $[0,2\pi]\to R^3$을 구하라.

2-2. 원기둥의 표면 C중에서 아래로는 $z=0$, 위로는 $S\cap C$로 둘러싸인 곡면 C_0의 표면적을 구하라.

2-3. $S\cap C$에 있는 각 점 P에 대하여, 점 P의 xz-평면에 대한 대칭이동점을 Q_p라 하자. 원기둥의 표면 C, 평면 $z=0$, 그리고 다음 곡면 $\{(1-s)P+sQ|\ 0\le s\le 1, P\in S\cap C\}$으로 둘러싸인 영역 V의 체적을 구하라.

선생님 클리닉

문제1은 원의 성질을 실생활문제에 적용시킬 수 있는지를 묻는 문제로 최대시야각을 확보하기 위해서는 반지름의 길이가 최소일 때 원주각은 최대가 된다는 사실을 이용하면 쉽게 접근할 수 있는 문항이다. 더 나아가 공간에서 직사각형모양의 스크린에 대한 최대시야각문제는 네 점을 지나는 구의 반지름과 관련있다는 사실을 추측해 볼 수 있다. 문제2는 주어진 도형을 매개변수 θ로 표현하고 이를 이용하여 표면적과 부피를 구하는 문항이다.

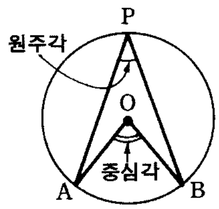
관련 학습

1. 원의 성질

가. 원주각과 중심각의 관계

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.

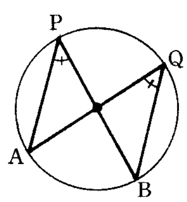
$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2} \angle \mathrm{AOB}$$



나. 호의 원주각

한 원에서 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 역도 성립한다.

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$$



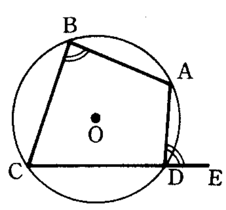
다. 원에 내접하는 사각형의 성질

1) 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{D} = 180^\circ$$

2) 한 외각의 크기는 내대각의 크기와 같다.

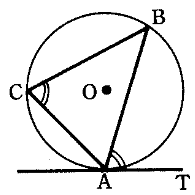
$$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{B}$$



라. 접선과 현이 이루는 각

원의 현과 그 한 끝 점에서의 접선이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

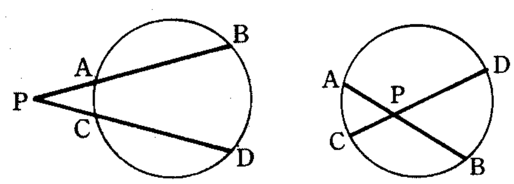
$$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{BCA}$$



마. 원에서의 비례관계와 할선과 접선

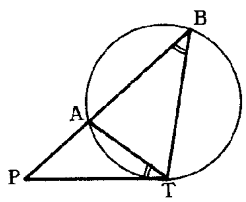
1) 원의 두 현 AB, CD 또는 이 들의 연장선이 만나는 점을 P라고 하면

$$\overline{\mathrm{PA}} \cdot \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}} \cdot \overline{\mathrm{PD}}$$



2) 원의 외부에 있는 한 점 P에서 그 원에 그은 접선의 접점을 T, 할선이 원과 만나는 점을 A, B라고 하면

$$\overline{\mathrm{PT}}^2 = \overline{\mathrm{PA}} \cdot \overline{\mathrm{PB}}$$

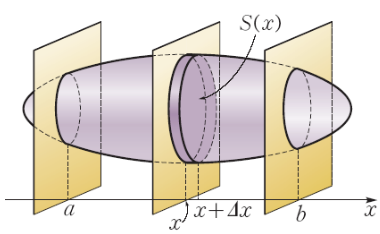


2. 입체도형의 부피

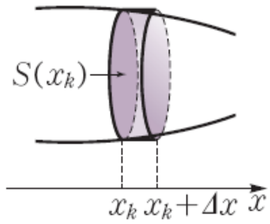
닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V = \int_a^b S(x)dx \text{ (단, } S(x)\text{는 구간 } [a,\ b]\text{에서 연속)}$$

그림과 같이 입체도형이 있을 때, x축을 정하고 x좌표가 a와 b인 두 점을 각각 지나 x축에 수직인 두 평면 사이에 있는 부분의 부피 V를 구하여 보자.



x좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 주어진 도형을 잘랐을 때의 단면의 넓이는 x의 함수이다. 이를 $S(x)$라고 하자.



닫힌 구간 $[a, b]$를 n등분하고 양 끝점과 분점을 차례로 $a=x_0$, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n=b$라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하자.

그러면 밑면의 넓이가 $S(x_k)(k=1, 2, 3, \cdots, n)$이고 높이가 Δx인 n개의 입체도형의 부피의 합 V_n은

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

이므로 주어진 입체도형의 부피 V는 정적분의 정의에 의하여 다음과 같다.

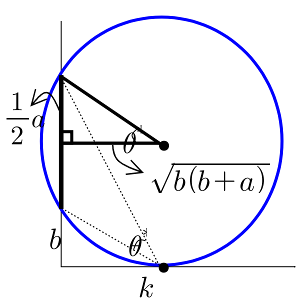
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)dx$$

예시 답안

문제 1

(1) 화면을 현으로 가지는 원 중에서 x축에 접하는 원과 x축의 접점에 앉으면 최대 시야각을 확보할 수 있다. 원에서 접선과 할선의 비례관계를 이용하면 최대시야각의 위치는 $k^2 = b(b+a) \Rightarrow k = \sqrt{b(b+a)}$이다.

또한, 이때의 시야각의 크기를 θ^*라고 하면 그림에서 $\tan\theta^* = \dfrac{a}{2\sqrt{b(b+a)}}$이다.



다른풀이

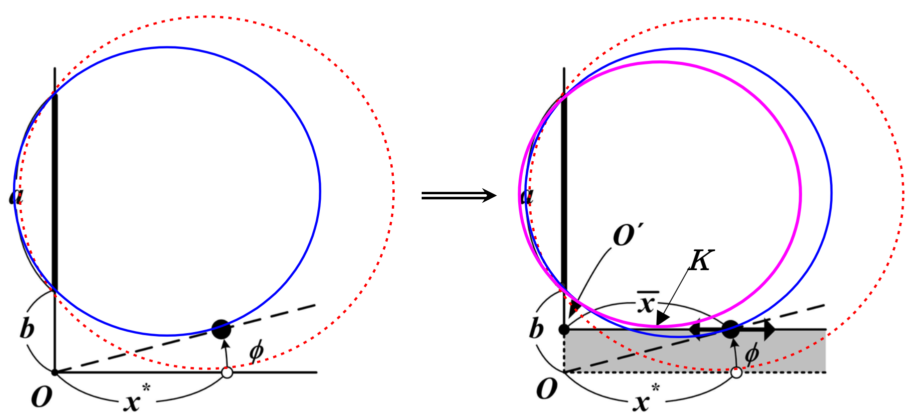
계산의 편의를 위해 $\overline{OA}=p$, $\overline{OB}=q$, $\angle BPO=\alpha$, $\angle BPA=\beta$ 라 하자.

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{p}{x}-\frac{q}{x}}{1+\frac{pq}{x^2}}=\frac{p-q}{x+\frac{pq}{x}}$$

이다. θ가 최대가 되려면 $x+\frac{pq}{x}$가 최소일 때 이고 이때는 $x+\frac{pq}{x}\geq 2\sqrt{pq}$ 이므로 등호가 성립할 때 최소가 된다.

$x=\frac{pq}{x}$ 일 때, 즉 $x=\sqrt{pq}$ 일 때 θ가 최대가 된다.

(2)



최대시야각의 위치를 ϕ만큼 회전이동시킨 점이 경사면과 접점이 되는 원을 만든다. 새로 만들어진 바닥면과 경사면에 접하는 원은 두 점에서 만나고, 최대 시야각의 위치는 새로 만들어진 바닥면과의 접점이므로 그림과 같이 그려진다. 따라서 의자를 앞으로 이동하여야 한다.

다른풀이

ϕ만큼 회전이동하여 O'을 원점으로 하는 새로운 축을 X축이라 하자. 1-1과 마찬가지로 화면을 현으로 하고 X축에 접하는 원의 접점이 새로운 최대시야각의 위치(K)이다.

$\overline{OO'}=k\sin\phi$이고 할선과 접선의 비례관계에서 $K^2=(b-k\sin\phi)(b-k\sin\phi+a)$이다.

$\bar{x}=k\cos\phi$ 이므로 $K<k\cos\phi$ 를 증명하면 된다.

$(k>0$ 이고 충분히 작은 회전각 ϕ 에 대해 $\sin\phi>0$, $\cos\phi>0$ 이다.)

이제 $K^2<k^2\cos^2\phi$임을 귀류법으로 증명하자. $K^2\geq k^2\cos^2\phi$라고 가정하자.

$$(b-k\sin\phi)(b-k\sin\phi+a)\geq k^2\cos^2\phi=k^2(1-\sin^2\phi)$$

$$b^2-2bk\ \sin\phi+k^2\sin^2\phi+ab-ak\ \sin\phi\ge k^2-k^2\sin^2\phi$$
$$2k^2\sin^2\phi\ge k\ \sin\phi(a+2b)$$

$\sin\phi\ge\dfrac{a+2b}{2k}=\sqrt{\dfrac{4b^2+4ab+a^2}{4b^2+4ab}}>1$. 이것은 모순이다. 따라서, $K^2<k^2\cos^2\phi$이다.

즉, $K<k\ \cos\phi$ 이므로 의자를 앞으로 옮겨야 한다.

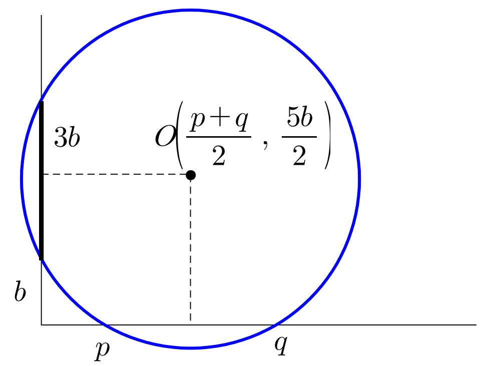
또한, 새로운 좌석의 위치는 $K=\sqrt{(b-\sin\phi\sqrt{b(b+a)}\,)(b-\sin\phi\sqrt{b(b+a)}+a)}$ 이다.

(3)

b를 적당히 조정하여 $k=p$인 곳에 최대시야각의 위치를 잡으면 Q지점이 최소의 시야각의 위치가 된다. 따라서 b를 조정하여 $C(k)$의 위치를 오른쪽으로 조금씩 이동하면 최대시야각과 최소시야각의 차이를 줄일 수 있다.

$C(k)$의 위치를 오른쪽으로 계속 이동하다보면 P지점의 시야각이 Q지점보다 시야각이 더 작아지게 된다. 이 경우는 P지점이 최소시야각이 되므로 최대시야각과 최소시야각의 차이를 가장 작도록 하기 위해서는 $C(k)$의 위치를 왼쪽으로 이동해야 한다. 따라서 P지점과 Q지점의 시야각이 같은 순간이 시야각의 최대 차이가 가장 작은 순간이 된다.

화면을 현으로 하고 P, Q를 지나는 원을 그리면 두 지점은 같은 원주각을 갖게된다. 따라서 p와 q사이에 문제 1에서 구한 최대의 시야각을 주는 자리를 포함하면서 시야각의 최대 차이가 가장 작도록 하려면 아래 그림과 같이 되어야 한다.



점 O에서 $(0,b)$와 $(p,0)$까지의 길이는 반지름으로 같다. 따라서

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2+\left(\frac{5b}{2}-b\right)^2=\left(\frac{p+q}{2}-p\right)^2+\left(\frac{5b}{2}\right)^2$$

이다. 이 식을 정리하면 $b=\dfrac{\sqrt{pq}}{2}$이다.

다른풀이

원에서 두 할선의 비례관계를 이용하면 $pq=b\times 4b\rightarrow b=\dfrac{\sqrt{pq}}{2}$이다.

문제 2

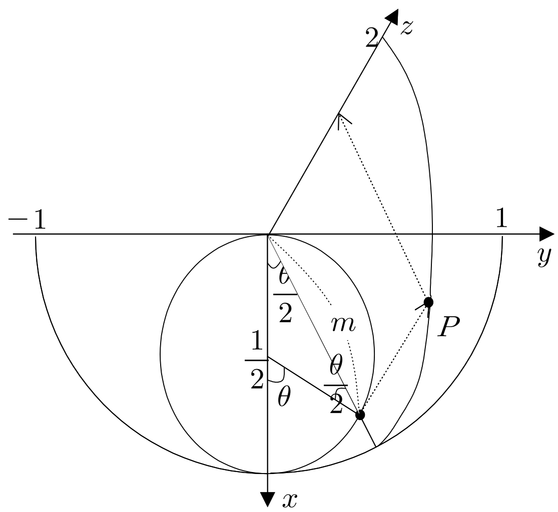
(1)

점 $P \in S \cap C$의 x, y좌표는 점$\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$을 중심으로 하고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원에서

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}\sin\theta$(단, $0 \le \theta \le 2\pi$)이다.

점 P의 z좌표는 타원의 방정식을 $z = \sqrt{4-4m^2}$ 만족한다.

$m^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\pi - \theta) = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$ 이고, $z = \sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2\sin\frac{\theta}{2}$이다.

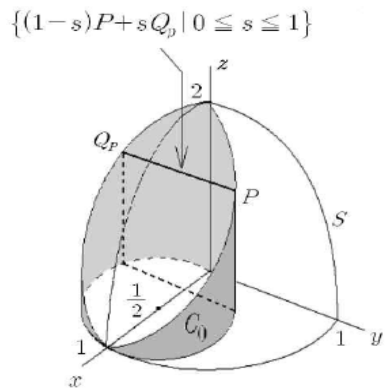


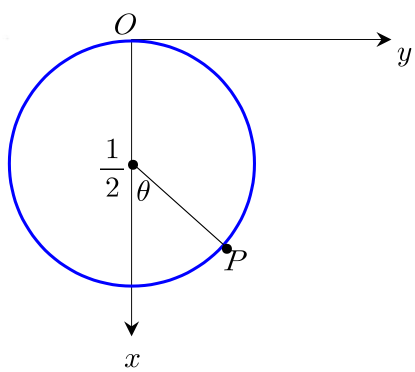
따라서,

$$S \cap C = \left\{ (x, y, z) \mid x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta,\ y = \frac{1}{2}\sin\theta,\ z = 2\sin\frac{\theta}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

다른풀이

아래 그림을 위에서 보면 오른쪽 그림과 같다. 이때, 원의 중심에서 반지름이 x축과 이루는 각을 θ $(0 \le \theta \le 2\pi)$라 하면 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ 이다.





그리고 점 P의 z좌표는 타원면 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$위에 있으므로 위식을 대입하면

$$z^2=2-2\cos\theta \qquad \therefore z=\sqrt{2(1-\cos\theta)}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

따라서 $S\cap C$를 나타내는 매개곡선 α는

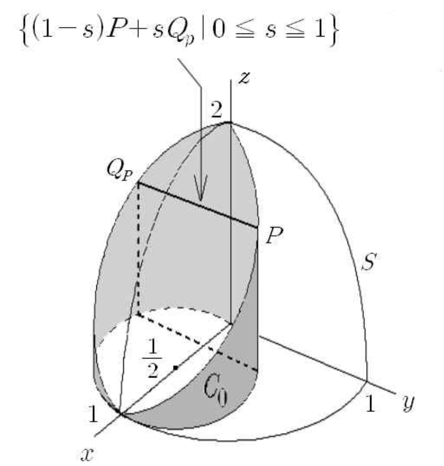
$$\left\{(x,y,z)|x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta,\ y=\frac{1}{2}\sin\theta,\ z=2\sin\frac{\theta}{2},\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

이다.

(2) 곡면 C_0의 표면적은 xz평면에 대칭이므로 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\,ds$이다. ($s$는 호의 길이)

$s=\frac{1}{2}\theta$이므로 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\,ds=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin s\,ds=4.$

(3)



주어진 도형은 zx-평면에 대칭이므로 $x,y,z\ge 0$인 부분의 부피를 구하여 2배하면 된다. 즉, $V=2\int_0^1 yz\,dx$이다. $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$이므로,

$$V=2\int_0^1 yzdx=2\int_\pi^0\frac{1}{2}\sin\theta\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin\theta d\theta\right)=2\int_0^\pi\sin\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta d\theta$$

$$=\int_0^\pi\sin^2\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}d\theta=4\int_0^\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin^3\frac{\theta}{2}d\theta.$$

$\cos\frac{\theta}{2}=t$라 두면 $dt=-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta$이므로,

$$V=4\int_0^\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin^3\frac{\theta}{2}d\theta=8\int_1^0 t^2(1-t^2)(-dt)=8\int_0^1 t^2(1-t^2)dt=\frac{16}{15}.$$

2009 수시 공대

문제 1

벡터 $\overrightarrow{T}=(-y,\ \frac{x}{4})$ 에 대해 $\frac{d\overrightarrow{X}(t)}{dt}=(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt})=\overrightarrow{T}$.

(1) $t=0$ 에서 $(x(0),\,y(0))=(0,\,1)$ 을 만족하는 $x,\,y$의 관계식 $F(x,\,y)=1$ 을 찾아라. (단, $F(x,\,y)$ 는 $x,\,y$ 에 대한 이차다항식이다) 그리고 $k=1,\,2$ 에 대해 $F(x,\,y)=k$ 의 그래프를 그려라.

(2) $F(x,\,y)=k$ 위의 점 $(x_0,\,y_0)$에서 단위 법선벡터 $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{N}(\overrightarrow{X_0})$을 구하라.

(3) $\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}=\overrightarrow{N}(\overrightarrow{X})$ 을 만족하는 $x(t)$, $y(t)$ 의 관계식을 구하여라.

(4) $F(x,\,y)=t$, $x\geq 0$, $y\geq 0$이 그리는 곡선을 C_t라 하고 그 길이를 $L(t)$라 할 때, 상수 $A,\,a$에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\frac{dL(t)}{dt}=At^a$$

a의 값을 구하여라.

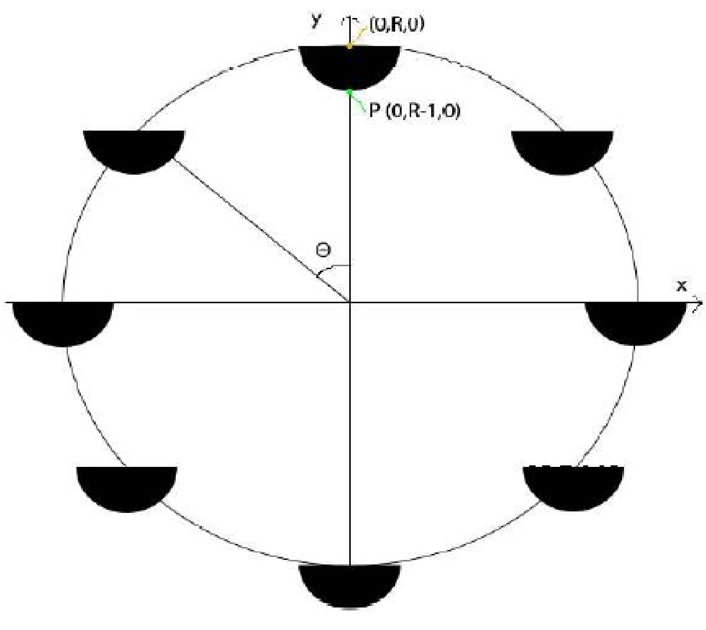
문제 2

공간상의 구 $x^2+y^2+z^2=1$을 생각하자. 이 구를 평면 $y=0$으로 자른 단면을 C라고 하고, 이 구의 $y \le 0$인 부분을 H라고 하자.

(1) C, H를 θ만큼 회전시킨 C_θ, H_θ의 영역을 나타내어라. 단 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.

(2) H_θ를 yz평면에 정사영한 도형의 면적을 구하여라.

(3) H를 y축 방향으로 $R(>1)$만큼 평행이동 시킨 도형을 H'이라 하자. H'를 z축을 중심으로 θ만큼 회전시킨 도형을 $\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), 0\right)$에 수직인 평면에 정사영한 도형의 넓이 S_θ를 구하고, 그래프로 나타내어라.



(4) H'가 $0 \le \theta \le 2\pi$를 돌아가는 동안, H'위의 점 $P(0, R-1, 0)$가 그리는 자취를 구하여라. 그리고 H'가 불투명할 때, P가 (불투명한)H'에 가린 경우에는 자취를 고려하지 않는다.

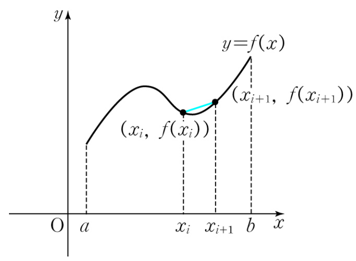
선생님 클리닉

문제1은 음함수의 미분법, 법선벡터의 성질 그리고 곡선의 길이를 묻고 있으며 주어진 사실을 이용하면 쉽게 접근할 수 있는 문항이다. 문제2는 정사영의 성질과 공간지각력을 확인하고자 하는 문항으로 보인다.

관련 학습

<곡선의 길이>

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프로 표시된 곡선의 길이를 적분으로 구하여 보자.



먼저, 구간 $[a,b]$를 n개의 작은 구간으로 나누어 i번째 구간을 $[x_i,x_{i+1}]$이라 하자.

그러면 곡선 위의 두 점 $(x_i,f(x_i))$, $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$을 잇는 선분의 길이는

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2}$$

이다. 이와 같은 n개의 선분의 길이의 합이 곡선의 길이의 근사값이 될 것이다.

이제, 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 연속함수라고 가정하자. 그러면 평균값의 정리에 의하여

$$f(x_{i+1})-f(x_i)=(x_{i+1}-x_i)(f'(\overline{x_i}))$$

인 $\overline{x_i}$가 구간 (x_i,x_{i+1})에 존재한다. 따라서, i번째 선분의 길이는

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2}=\sqrt{1+(f'(\overline{x_i}))^2}\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

이다. $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$라 놓고 선분들의 길이의 합을 구하면

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\overline{x_i}))^2}\,\Delta x_i$$

이다. 그런데 도함수 $f'(x)$가 연속함수라고 가정하였으므로 n이 증가하고 Δx_i를 모두 0으로 수렴하게 하면, 모든 $\overline{x_i}$는 x_i에 수렴하게 된다.

따라서, 위의 합은

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x_i$$

에 매우 가까운 값이다. 그런데 $f'(x)$가 연속함수인 것을 다시 이용하면, $n\to\infty$일 때 위의 합의 극한값이 존재하고 그 극한값이 바로 함수 $\sqrt{1+(f'(x))^2}$의 구간 $[a,b]$ 위에서의 정적분이다. 즉,

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x_i$$

이다. 이 정적분을 구간 $[a,b]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 길이라고 정의한다.

예시 답안

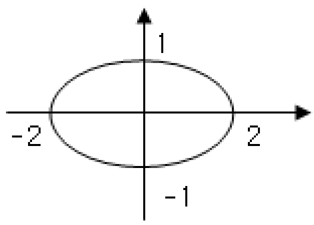
문제 1

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-y$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{4}$ 이므로 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{x}{4y}$, $2yy'=-\dfrac{x}{2}$, $(y^2)'=-\dfrac{1}{2}x$.

$y^2=-\displaystyle\int \frac{1}{2}x\,dx$, $\therefore\ y^2=-\dfrac{1}{4}x^2+C$. 한편, $(x(0),\,y(0))=(0,\,1)$ 이므로 $C=1$.

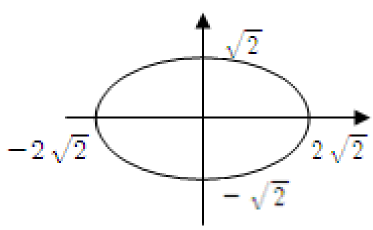
따라서 $y^2=-\dfrac{1}{4}x^2+1$ 이고, $\dfrac{1}{4}x^2+y^2=1$. 그러므로 $F(x,y)=\dfrac{1}{4}x^2+y^2$

$F(x,y)=1$ 은 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 이므로 $k=1$에 대해서는 다음과 같은 타원의 그래프를 얻는다.



$F(x,y)=2$ 은 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=2$ 이므로

$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{(2\sqrt{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$ 이므로 $k=2$에 대해서는 다음과 같은 타원의 그래프를 얻는다.



(2) 곡선 $F(x,y)=k$와 곡선 $F(x,y)=1$의 접선벡터는 서로 평행하므로 곡선 $F(x,y)=k$ 위의 점 $(x_0,\,y_0)$에서 접선벡터 $\overrightarrow{T}$는

$$\overrightarrow{T}=\left(-y_0,\ \frac{x_0}{4}\right)$$

한편, 단위법선벡터 $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{N}(\overrightarrow{X_0})$는 접선벡터 $\overrightarrow{T}$와 수직이므로 $\overrightarrow{N}=(a,b)$이라 하면

$\overrightarrow{T} \bullet \overrightarrow{N} = -ay_0 + \frac{bx_0}{4} = 0$ 이므로 $\frac{b}{a} = \frac{4y_0}{x_0}$ 이다. 또한, 단위벡터이므로

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 16y_0^2}}(x_0, 4y_0)$$

(3) 벡터 $\frac{d\overrightarrow{X}(t)}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \overrightarrow{T}$가 법선벡터가 되는 그래프의 관계식을 찾는 문제이다.

즉, $\overrightarrow{N} = (-y, \frac{x}{4})$인 $x(t)$, $y(t)$의 관계식을 구하는 문제이다. 따라서, (2)에서 구한 법선벡터 $\overrightarrow{N}$이 접선벡터 $\overrightarrow{T}$가 되므로 $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = 4y$이고

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4y}{x}, \quad \frac{1}{y}y' = \frac{4}{x}$$

따라서, $\ln y = 4\ln x + C$ (C는 상수)이고, $\ln y = \ln x^4 e^C$이므로 $y = C'x^4 (C' = e^C)$

(4) $F(x, y) = t\,(x \geq 0,\ y \geq 0)$는 타원 $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = t\ (x \geq 0,\ y \geq 0)$을 나타내므로

$x(\theta) = 2\sqrt{t}\cos\frac{\theta}{2}$, $y(\theta) = \sqrt{t}\sin\frac{\theta}{2}\ (0 \leq \theta \leq \pi)$라 할 수 있고 곡선 C_t의 길이 $L(t)$는 아래와 같다.

$$L(t) = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \frac{\sqrt{t}}{2}\int_0^\pi \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

여기서 양변을 t에 관해 미분하면

$$\frac{dL(t)}{dt} = \left(\frac{1}{4}\int_0^\pi \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta\right)t^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{따라서, } a = -\frac{1}{2}.$$

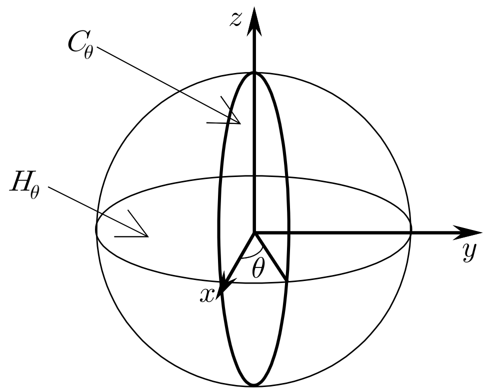
다른풀이

$F(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ 이므로 확대축소변환을 생각해보면 $L(t) = L(1)\sqrt{t}$ 이다.

따라서 $\frac{dL(t)}{dt} = L(1)\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$ 이다.

문제 2

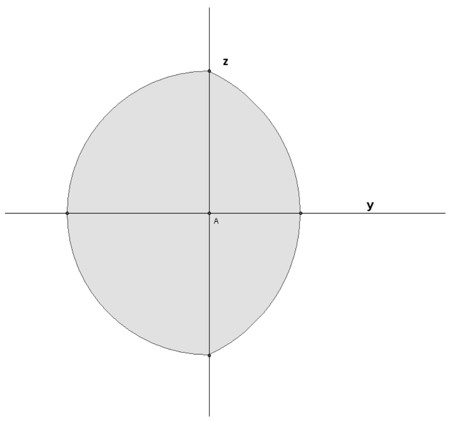
(1)



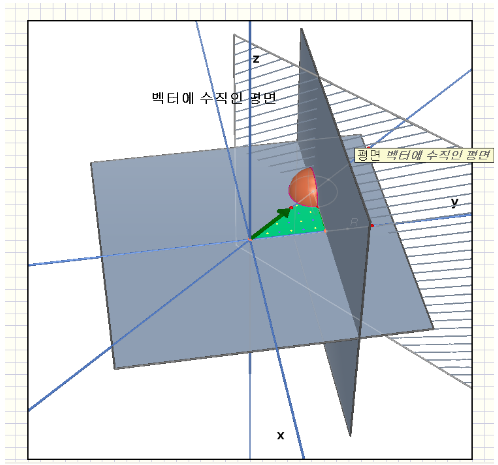
C_θ는 평면 $y=(\tan\theta)x$와 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 의 교선이고 H_θ는 이 구의 $y\le(\tan\theta)x$인 부분이다.

(2) H_θ를 yz평면에 정사영한 도형은 아래 그림과 같으므로

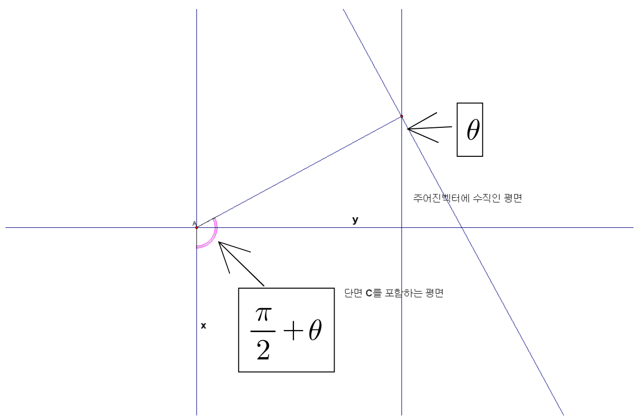
정사영의 넓이 $S=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{\pi}{2}(1+\sin\theta)$



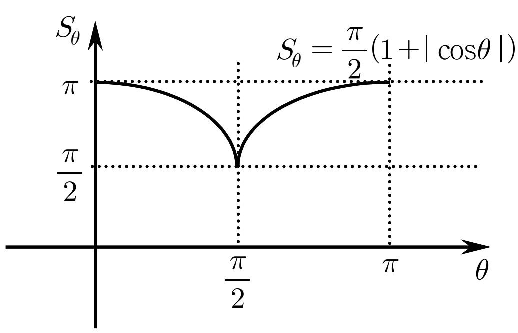
(3) 벡터$\left(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2}),\ 0\right)$은 원점과 구의 중심을 연결한 벡터와 평행하므로 수직인 평면은 아래 그림과 같이 구의 중심을 지나는 빗금친 평면이다.



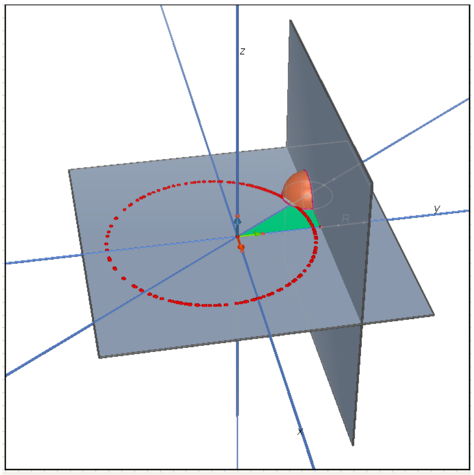
따라서 주어진 벡터와 수직인 평면과 C_θ가 이루는 각은 아래 그림과 같이 θ이므로 정사영한 도형의 넓이 $S_\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}|\cos\theta| = \frac{\pi}{2}(1+|\cos\theta|)$이다.



또한, $S_\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}|\cos\theta| = \frac{\pi}{2}(1+|\cos\theta|)$를 그래프로 나타내면 아래 그림과 같다.

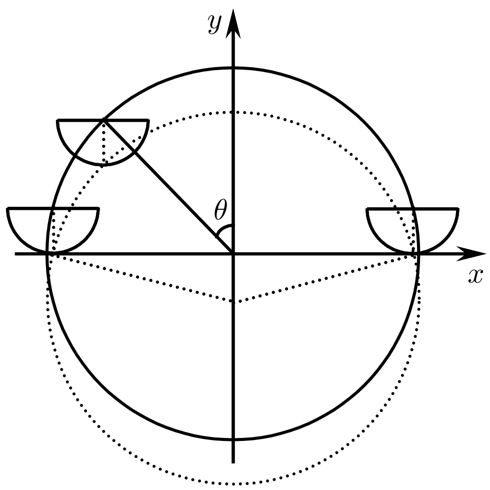


(4) H'가 $0 \le \theta \le 2\pi$를 돌아가는 동안, H'위의 점 $P(0, R-1, 0)$가 그리는 자취는 아래 그림과 같이 원이 된다.



왜냐하면 구의 중심의 좌표 $(0, R, 0)$의 자취는 $(0, 0, 0)$을 중심으로 반지름이 5인 원이 되므로 점 $P(0, R-1, 0)$가 그리는 자취는 중심의 자취를 y축 방향으로 -1만큼 평행이동한 원이 된다.

그러므로 점 P가 그리는 자취는 $x^2+(y+1)^2=R^2$, $z=0$이 됨을 알 수 있다.



또한, 점 P가 $y \le 0$인 부분에 있으면 원점에서 보았을 때, 불투명한 H'에 가리게 된다. 그러므로 점 P의 자취의 길이는 $R(\pi-2\alpha)$, 여기서 α는 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-1}}$인 제 1사분면의 각이다.

2009 수시 수학통계

문제 1

계수가 정수인 다항식을 정수다항식이라 하자. 두 정수다항식 $f(x)$와 $g(x)$가 주어졌을 때, $g(x)=f(x)q(x)$인 정수다항식 $q(x)$가 존재하면 $q(x)$는 $f(x)$로 나누어진다고 말한다. a는 고정된 정수이다. 양의 정수 k가 주어졌을 때, 정수다항식 P_k를 다음과 같이 정의한다.

$$P_k(x)=x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots+a^{k-2}x+a^{k-1}$$

이 때, 다음 물음에 답하라.

1-1. 양의 정수 m, k가 주어졌을 때 다항식 x^m-a^m은 다항식 $x^{mk}-a^{mk}$의 약수임을 보여라.

1-2. 두 정수 m, $n\,(m<n)$이 주어졌을 때 최고차항의 계수가 1이고 $g(0)\neq 0$인 정수다항식 $g(x)$가 $P_m(x)$와 $P_n(x)$를 나누면 $g(x)$는 $P_{n-m}(x)$를 나눔을 보여라.

1-3. 두 정수다항식이 주어졌을 때 이들을 모두 나누는 1차 이상의 다항식이 없을 때, 이들을 서로소라 한다. $P_6(x)$, $P_{11}(x)$는 서로소임을 보여라.

1-4. $x^{20}-16$ 과 $x^{25}+32$을 모두 나누는 최대차수 정수다항식을 구하라.

문제 2

다음 물음에 답하라.

2-1. 2×2 행렬 A, B, X에 대해 $AX=B$인 방정식이 유일한 해를 가질 조건을 제시하라.

2-2. 임의의 실수 $a\neq0$, b, c 에 대하여 $aX^2+bX+cE=0$ 인 행렬 방정식이 적어도 2개의 실행렬의 해가 존재함을 보여라. (단, 중근도 두 개로 생각하고 실행렬은 그 원소가 실수인 행렬을 의미한다.)

[힌트 : $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $J^2=-E$]

2-3. $X^2+2X+2E=0$을 만족하는 실행렬 X를 모두 구하라.

선생님 클리닉

문제1은 다항식의 나눗셈정리를 적용하여 해결할 수 있는지를 묻고 있으며 문제2는 주어진 행렬 이차방정식을 만족하는 행렬을 구하는 문제로 행렬의 곱셈의 기본성질과 케일리-해밀턴정리를 알고 있는지를 묻고 있는 문항이다.

관련 학습

1. 다항식의 나눗셈 정리

두 다항식 $f,g\in F[x]$에 대하여 f가 0이 아니면

$$g=qf+r, \deg(r)<\deg(f)$$

를 만족시키는 다항식 q,r가 $F[x]$에 유일하게 존재한다. 이때, q와 r를 각각 g를 f로 나눈 몫과 나머지라고 한다.

증명) 만약, $f|g$이면 $g=qf$인 q가 $F[x]$에 존재하므로 $r=0$이고 이러한 q와 r는 당연히 유일하며 $-\infty=\deg(r)<\deg(f)$이다.

따라서, $f\nmid g$라고 가정하고 집합 $S=\{\deg(g-hf)\}\geq 0|h\in F[x]\}$를 생각하자.

이 집합 S는 공집합이 아니므로 S에 속하는 가장 작은 정수를 e라 하면, $\deg(g-qf)=e$를 만족시키는 $q\in F[x]$가 존재하므로 $r=g-qf$로 잡으면 $\deg(r)=e$이며 $g=qf+r$가 된다.

이제, $\deg(r)<\deg(f)$를 보이기 위해 $d=\deg(f)$로 놓고 $d\leq e$ 를 가정하자 .

r의 최고차항의 계수를 $b(\neq 0)$,f의 최고차항의 계수를 $a(\neq 0)$라 하면

$$s=r-\frac{b}{a}x^{e-d}f=g-qf-\frac{b}{a}x^{e-d}f=g-\left(q+\frac{b}{a}x^{e-d}\right)f$$

이고, $\deg(s)<e$이다.

그런데 $f\nmid g$이므로 $s\neq 0$이고 $q+\frac{b}{a}x^{e-d}\in F[x]$이므로 $0\leq\deg(s)\in S$가 되어 $\deg(r)$가 S의 가장 작은 원소라는 사실에 모순이다.

따라서, $\deg(r)<\deg(f)$이다. 이제 q,r의 유일성을 보이기 위하여

$$g=q_1f+r_1, \deg(r_1)<\deg(f)$$

를 만족시키는 다항식 q_1,r_1을 생각하자. $qf+r=q_1f+r_1$로부터

$$(q-q_1)f=r_1-r$$

를 얻는다. 양변이 모두 0이 아니면

$$\deg(r_1-r)\leq\max\{\deg(r_1),\deg(r)\}<\deg(f)\leq\deg(f)+\deg(q-q_1)$$

로 모순이다. 따라서, 양변은 모두 0이다. 즉, $q_1=q, r_1=r$이므로 q,r는 유일하게 존재한다. 따라서, 위의 정리에서 $r=0$일 때 $f|g$이고, $r\neq 0$일 때 $f\nmid g$이다.

2. 케일리-해밀턴정리

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

예시 답안

문제 1

1-1. $x^{mk}-a^{mk}=(x^m)^k-(a^m)^k$

$$=(x^m-a^m)\{(x^m)^{k-1}+a^m(x^m)^{k-2}+\cdots+(a^m)^{k-2}x^m+(a^m)^{k-1}\}$$
$$=(x^m-a^m)P_k(x^m)$$

그러므로 x^m-a^m는 $x^{mk}-a^{mk}$의 약수

다른풀이 (수학적귀납법 이용)

"x^m-a^m은 $x^{mk}-a^{mk}$의 약수이다". 이 명제를 $f(k)$라 하자.

즉, $f(k)$: $x^{mk}-a^{mk}=(x^m-a^m)\cdot A$. (단 A는 정수다항식)

$f(1)$: $x^m-a^m=(x^m-a^m)\cdot A$ 에서 $A=1$ 이면 성립.

$f(2)$: $x^{2m}-a^{2m}=(x^m-a^m)\cdot A$ 에서 $A=x^m+a^m$ 이면 성립.

자연수 k에 대하여 $f(k)$와 $f(k+1)$이 성립한다고 하면,

$$f(k+2):\ x^{m(k+2)}-a^{m(k+2)}=\left(x^{m(k+1)}-a^{m(k+1)}\right)\left(x^m+a^m\right)-x^{m(k+1)}\cdot a^m+x^m\cdot a^{m(k+1)}$$
$$=\left(x^{m(k+1)}-a^{m(k+1)}\right)\left(x^m+a^m\right)-x^m\cdot a^m\left(x^{mk}-a^{mk}\right)$$

가정에 의해 x^m-a^m은 두 다항식 $x^{m(k+1)}-a^{m(k+1)}$과 $x^{mk}-a^{mk}$ 모두의 약수이므로 $f(k+2)$도 성립한다.

수학적 귀납법에 의해 $f(k)$는 모든 자연수 k에 대해 성립한다.

1-2.

$$P_n(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}$$
$$=x^m(x^{n-m-1}+ax^{n-m-2}+\cdots+a^{n-m-1})+a^{n-m}(x^{m-1}+ax^{m-2}+\cdots+a^{m-1})$$

$$P_n(x)-a^{n-m}(x^{m-1}+ax^{m-2}+\cdots+a^{m-1})=x^m(x^{n-m-1}+ax^{n-m-2}+\cdots+a^{n-m-1})$$

$$P_n(x)-a^{n-m}P_m(x)=x^mP_{n-m}(x)$$

$g(x)$가 $P_m(x)$, $P_n(x)$를 나누므로 다항식 $f(x)$와 $h(x)$가 존재하여

$$P_m(x)=g(x)f(x),\ P_n(x)=g(x)h(x).$$

$$g(x)h(x)-a^{n-m}g(x)f(x)=x^mP_{n-m}(x)$$

$g(x)(h(x)-a^{n-m}f(x))=x^mP_{n-m}(x)$, 즉 $g(x)$ 는 $x^mP_{n-m}(x)$ 를 나눈다.

$g(0)\neq 0$ 이므로 $g(x)$ 는 x^m 을 나눌 수 없다.

그러므로 $g(x)$ 는 $P_{n-m}(x)$ 를 나눈다.

다른풀이1

$P_m(x)=x^{m-1}+ax^{m-2}+\cdots+a^{m-2}x+a^{m-1}$ 일 때

$$(x-a)P_m(x)=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+\cdots+a^{m-2}x+a^{m-1})=x^m-a^m$$

$$P_m(x)=\frac{x^m-a^m}{x-a}=g(x)q_1(x) \quad \cdots \text{①}$$

$$P_n(x)=\frac{x^n-a^n}{x-a}=g(x)q_2(x) \quad \cdots \text{②}$$

$n>m$ 일 때,

$$(x-a)P_{n-m}(x)=(x-a)(x^{n-m-1}+ax^{n-m-2}+\cdots+a^{n-m-2}x+a^{n-m-1})=x^{n-m}-a^{n-m}$$

$$\begin{aligned} P_{n-m}(x)&=\frac{x^{n-m}-a^{n-m}}{x-a}=\frac{\dfrac{x^n}{x^m}-\dfrac{a^n}{a^m}}{x-a}=\frac{x^na^m-x^ma^n}{(x-a)x^ma^m} \\ &=\frac{x^n(a^m-x^m)+x^m(x^n-a^n)}{(x-a)x^ma^m} \\ &=\frac{-x^n(x-a)g(x)q_1(x)+x^m(x-a)g(x)q_2(x)}{(x-a)x^ma^m} \qquad \cdots \text{①,② 대입} \\ &=\frac{-x^nq_1(x)+x^mq_2(x)}{x^ma^m}\times g(x) \end{aligned}$$

$g(0)\neq 0$ 이므로 $g(x)$ 는 x^m 을 나눌 수 없다.
그러므로 $g(x)$ 는 $P_{n-m}(x)$ 를 나눈다.

다른풀이2

정수계수 다항식 $(x-a)g(x)$가 $(x-a)P_m(x)=x^m-a^m$과 $(x-a)P_n(x)=x^n-a^n$을 나누므로 $(x^n-a^n)-x^{n-m}(x^m-a^m)=a^m(x^{n-m}-a^{n-m})$ 역시 나눈다. 즉, $(x-a)g(x)$가 $(x^{n-m}-a^{n-m})$을 나누므로 $g(x)$는 $P_{n-m}(x)$를 나눈다.

1-3. ($a\neq 0$ 라는 전제가 있어야 한다.)
$P_6(x)$와 $P_{11}(x)$가 서로소가 아니라고 가정하자.
그러면 $P_6(x)$와 $P_{11}(x)$를 모두 나누는 1차 이상의 다항식 $g(x)$가 존재한다. (1-2)에서 $g(x)$는 $P_5(x)$를 나눈다. 계속해서 $P_1(x)$를 나눈다. 그런데 $P_1(x)$는 상수이다. 1차 이상의 다항식은 상수를 나눌 수 없으므로 이는 모순이다.
그러므로 $P_6(x)$와 $P_{11}(x)$는 서로소이다.

1-4. 두 다항식을 모두 나누는 최대차수 정수 다항식을 $(x^{25}+32, x^{20}-16)$라 하면 $x^{25}+32=(x^{20}-16)x^5+16x^5+32$ 이므로

$$(x^{25}+32, x^{20}-16)=(x^{20}-16, 16x^5+32)$$

$$x^{20}-16=(16x^5+32)(\frac{1}{16}x^{15}-\frac{1}{8}x^{10}+\frac{1}{4}x^5-\frac{1}{2})=(x^5+2)(x^{15}-2x^{10}+4x^5-8)$$

이므로 $(x^{25}+32, x^{20}-16)=(x^{20}-16, 16x^5+32)=(x^5+2, 0)=x^5+2$

문제 2

2-1. A의 역행렬이 존재할 때, $X=A^{-1}B$ 로 유일하다. 만약 A의 역행렬이 존재하지 않을 때에는 A의 두 번째 행은 첫 번째 행의 상수배이므로(이 상수를 k라 하자.), 근을 가지기 위해서는 B역시 두 번째 행이 첫 번째 행의 k배 이어야 한다. 이 때 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} c & d \\ kc & kd \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$라 하면 $ax+bz=c, ay+bw=d$를 만족하는 모든 x, y, z, w에 대하여 X가 근이 될 수 있으므로 X는 무수히 많다. 따라서 유일한 해를 가질 조건은 A가 역행렬을 가지는 것이다.

2-2. $a>0$이라고 하자.

$$a(X^2+\frac{b}{a}X+\frac{b^2}{4a^2}E-\frac{b^2}{4a^2}E)+cE=0$$

$$a(X+\frac{b}{2a}E)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}E,\ (X+\frac{b}{2a}E)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}E$$

1) $b^2-4ac\geq 0$ 일 경우

이때, $X+\frac{b}{2a}E=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}E$로 두면 위 식을 만족하므로

$$X=-\frac{b}{2a}E\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}E \text{ (중근 포함)}$$

2) $b^2-4ac<0$ 인 경우

$$(X+\frac{b}{2a}E)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}E=\frac{4ac-b^2}{4a^2}(-E)=\frac{4ac-b^2}{4a^2}J^2$$

$X+\frac{b}{2a}E=\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}J$로 두면 $X=-\frac{b}{2a}E\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}J$

그러므로 X는 적어도 2 개의 실행렬의 해가 존재한다.

2-3. $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자. 주어진 식을 정리하면 $(X+E)^2=-E$ 이므로 대입하여 정리

하면 $\begin{pmatrix} (a+1)^2+bc & b(a+d+2) \\ c(a+d+2) & (d+1)^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이다. 각 성분을 비교하면

$a+d+2=0$ 또는 $b=c=0$ 이다. 이 때 $b=c=0$이면 $(a+1)^2=-1, (d+1)^2=-1$ 가 되므로 모순이다. 따라서 $a+d+2=0$ 이다. 이 때 $bc=-1-(a+1)^2$ 이므로

$c=\dfrac{-1-(a+1)^2}{b}$, $d=-a-2$. 즉, $\begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{1+(a+1)^2}{b} & -a-2 \end{pmatrix}$ (a, b는 실수, $b\neq 0$) 꼴의

모든 행렬이 해가 된다.

※ 참고

$X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면, Cayley-Hamilton 정리에 의하여 $p+s=-2, ps-qr=2$ 를 만족하면 된다. 무수히 많음.

2009 수시 자연

문제 1

실수 x에 대하여 행렬 $A(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$A(x)=\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}$$

이 때 행렬 $A(x)$는 다음 두 조건을 만족한다. (x, y는 임의의 실수)

(a) $A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A(x+y)=2A(x)A(y)$

(1) $A(0)$을 구하시오.

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$임을 보이시오.

(3) 두 정수 m, n (m, n은 서로소, $m \neq 0$)에 대하여 $A(\frac{n}{m})$을 구하시오.

(4) (3)을 통해 위 세 조건을 만족하는 $A(x)$를 구하시오.

문제 2

실수에서 실수로 가는 함수 f는 두 번 미분가능하고, 함수 f, f', f''은 모두 실수에서 연속이다.

(1) 함수 g가 실수에서 연속이면 $g(c)=\frac{2}{h^2}\int_0^h \int_0^s g(t)\,dt\,ds$ 를 만족하는 c가 $(0, h)$에 존재함을 보여라.

(2) $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\frac{f''(x+c)+f''(x-c)}{2}$ 인 c가 $(0, h)$에 존재함을 보여라.

(3) $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x+a)$ 인 a가 $(-h, h)$에 존재함을 보여라.

선생님 클리닉

문제1은 주어진 조건을 만족하는 행렬 A를 구하는 과정이며 문제2는 중간값 정리와 평균값 정리를 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 묻고 있는 문항이다.

관련 학습

1. 중간값 정리

$f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 k값에 대하여 $f(c)=k$ $(a<c<b)$ 를 만족시키는 c가 적어도 하나 존재한다. 이를 다르게 표현하면 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 $f(x)$는 닫힌구간 (a,b)에서 f(a), f(b)사이의 모든 값을 갖는다.

2. 평균값의 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간$[a\,,\,b]$에서 연속이고 열린 구간$(a\,,\,b)$에서 미분가능할 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

예시 답안

문제 1

주어진 조건에서 $f(1)=g(1)=1$, $f(x+y)=2f(x)f(y)$, $g(x+y)=2f(x)g(y)+2g(x)f(y)$ 임을 알 수 있다.

(1) $1=f(1)=f(0+1)=2f(0)f(1)=2f(0)$, $\therefore\ f(0)=\dfrac{1}{2}$

$1=g(1)=g(0+1)=2f(0)g(1)+2g(0)f(1)=1+2g(0)$, $\therefore\ g(0)=1$

따라서 $A(0)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=2\left\{f(\frac{x}{2})\right\}^2 \geq 0.$

또한, $f(x_1)=0$인 실수 x_1이 존재한다고 가정하면

$f(1)=f(1-x_1+x_1)=2f(1-x_1)f(x_1)=0$ ($f(1)=1$이라는 사실에 모순)

그러므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

(3)

$$f(\frac{2}{m})=f(\frac{1}{m}+\frac{1}{m})=2\left\{f(\frac{1}{m})\right\}^2,$$

$$f(\frac{3}{m})=f(\frac{2}{m}+\frac{1}{m})=2\left[2\left\{f(\frac{1}{m})\right\}^2\right]f(\frac{1}{m})=2^2\left\{f(\frac{1}{m})\right\}^3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(\frac{n}{m})=2^{n-1}\left\{f(\frac{1}{m})\right\}^n.$$

또한, $1=f(1)=f(\frac{m}{m})=2^{m-1}\left\{f(\frac{1}{m})\right\}^m$이므로 $f(\frac{1}{m})=2^{\frac{1}{m}-1}$.

따라서 $f(\frac{n}{m})=2^{n-1}\left\{f(\frac{1}{m})\right\}^n=2^{n-1}\left\{2^{\frac{1}{m}-1}\right\}^n=2^{\frac{n}{m}-1}$.

같은 방법으로

$$g(\frac{2}{m})=g(\frac{1}{m}+\frac{1}{m})=4f(\frac{1}{m})g(\frac{1}{m})=2\times 2^{\frac{1}{m}+1}g(\frac{1}{m})$$

$$g(\frac{3}{m})=g(\frac{2}{m}+\frac{1}{m})=2f(\frac{2}{m})g(\frac{1}{m})+2f(\frac{1}{m})g(\frac{2}{m})=3\times 2^{\frac{1}{m}+1}g(\frac{1}{m})$$

$$\cdots\cdots$$

$$g(\frac{n}{m})=n\times 2^{\frac{n}{m}-\frac{1}{m}}\times g(\frac{1}{m})$$

또한, $1=g(1)=g(\frac{m}{m})=m\times 2^{1-\frac{1}{m}}\times g(\frac{1}{m})$이므로 $g(\frac{1}{m})=\frac{1}{m}\times 2^{\frac{1}{m}-1}$.

따라서 $g(\frac{n}{m})=n\times 2^{\frac{n}{m}-\frac{1}{m}}\times g(\frac{1}{m})=\frac{n}{m}\times 2^{\frac{n}{m}-1}$.

그러므로 $A(\frac{n}{m})=\begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{m}-1} & \frac{n}{m}\times 2^{\frac{n}{m}-1} \\ 0 & 2^{\frac{n}{m}-1}\end{pmatrix}$.

(4) $f(x)=2^{x-1}, g(x)=x\times 2^{x-1}$으로 두면 주어진 조건들을 만족한다.

$f(1)=1,\ g(1)=1,\ f(x+y)=2^{x+y-1}=2f(x)f(y),$

$g(x+y)=(x+y)2^{x+y-1}=2f(x)g(y)+2g(x)f(y).$

그러므로

$$A(x)=\begin{pmatrix} 2^{x-1} & x\times 2^{x-1} \\ 0 & 2^{x-1}\end{pmatrix}$$

문제 2

(1) 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, h]$에서 상수함수이면 $g(c)=\frac{2}{h^2}\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt\,ds$ 를 만족하는 c가 $(0, h)$에 존재한다는 것은 당연하다. 이제 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, h]$에서 상수함수가 아니라고 하자. 함수 $g(x)$는 연속이므로 닫힌구간 $[0, h]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값을 가지는데 그 값들을 각각 M, m이라고 두자. 그러면

$$\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt\,ds=\int_R g(t)dt$$

여기서 $R=\{(x, y)\,|\,0\le x\le h,\ 0\le y\le x\}$이므로

$$\frac{h^2}{2}m\le\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt\,ds\le\frac{h^2}{2}M$$

그런데 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, h]$에서 상수함수가 아닌 연속함수이므로

$$\frac{h^2}{2}m<\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt\,ds<\frac{h^2}{2}M,\ m<\frac{2}{h^2}\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt\,ds<M$$

따라서 중간값 정리에 의하여

$$g(c)=\frac{2}{h^2}\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt\,ds$$

를 만족하는 c가 $(0, h)$에 존재한다.

(2) x는 실수라고 하고

$$g(t)=f''(x+t)+f''(x-t)\quad (t\text{가 변수, } x\text{는 상수})$$

로 정의하자. 그러면 (1)의 결과에 의해서

$$g(c)=\frac{2}{h^2}\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt\,ds\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{가})$$

를 만족하는 c가 $(0, h)$에 존재한다. 한편,

$$\int_0^s g(t)\,dt=\int_0^s\{f'(x+t)+f'(x-t)\}dt=f'(x+s)-f'(x-s),$$

$$\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt=\int_0^h\{f'(x+s)-f'(x-s)\}ds=f(x+h)+f(x-h)-2f(x),$$

$$\therefore\ \frac{2}{h^2}\int_0^h\int_0^s g(t)\,dt\,ds=\frac{2}{h^2}\{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\}$$

또한, $g(c)=f''(x+c)+f''(x-c)$. 따라서 (가)에 의해서

$\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\dfrac{f''(x+c)+f''(x-c)}{2}$ 인 c가 $(0, h)$에 존재한다.

(3) 위의 (2)에 의해서 $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\dfrac{f''(x+c)+f''(x-c)}{2}$ 인 c가 $(0, h)$에 존재한다. $f''(x+c)=f''(x-c)$이면 $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x+c)$이므로 당연히 성립한다. $f''(x+c)\neq f''(x-c)$이면 일관성을 잃지 않고 $f''(x+c)>f''(x-c)$라고 하자. 그러면

$f''(x-c)<\dfrac{f''(x+c)+f''(x-c)}{2}<f''(x+c)$

함수 $f''(x)$는 실수에서 연속이므로 중간값 정리에 의해서

$\dfrac{f''(x+c)+f''(x-c)}{2}=f''(x+a)$ 인 a가 $(-h, h)$에 존재한다.

따라서 $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x+a)$ 인 a가 $(-h, h)$에 존재한다.

다른풀이

$\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)$

평균값 정리에 의해서

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(c_1)$$

인 실수 c_1이 $(x+h, h)$에 존재한다. 마찬가지로

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=f'(c_2)$$

인 실수 c_2가 $(x-h, h)$에 존재한다. 또한 $f'(x)$가 실수 전체에서 연속이고 미분이 가능하므로 평균값 정리에 의해서

$$\frac{f'(c_1)-f'(c_2)}{h}=f'(c)$$

인 실수 c가 (c_2, c_1)에 존재한다. 그러므로

$$x-h<c_2<c<c_1<x+h$$

이고

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}&=\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)\\&=\frac{f'(c_1)-f'(c_2)}{h}=f'(c)\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x+a)$ 인 a가 $(-h, h)$에 존재한다.

2009 정시 의대/자연대

문제 1

$f(x)$와 $g(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 각각 정의된다. 또한 $g(x)$는 정의되는 모든 x에 대하여 연속이고 $g(x) \geq 0$이 성립한다.

이때 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(x) \leq C + \int_0^x f(s)g(s)ds$ 가 성립한다.

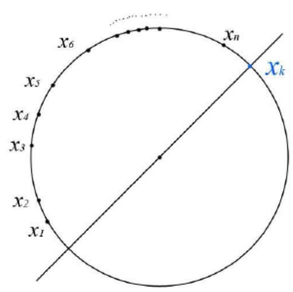
(단, C는 $C > 0$인 상수)

(1) $u(t) = C + \int_0^t f(s)g(s)ds$ 일 때 $u'(t) \leq u(t)g(t)$ 가 성립함을 보이시오.

(2) $f(x) \leq C \times e^{\int_0^x g(s)ds}$ 가 성립함을 보이시오.

문제 2

점을 원 위에 찍는다고 하자. 임의의 호 AB 위에 점이 찍힐 확률은 호의 길이에 비례한다. 임의의 점 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 찍는다고 할 때 k번째 찍는 점을 x_k라고 하자.



(1) 점 x_k와 원의 중심을 지나는 직선으로 나눈 반원 한쪽에만 점 $n-1$개, 즉 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$이 찍힐 확률을 구하시오.

(2) 임의의 점 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 찍을 때 한 반원에만 찍힐 확률을 구하시오

선생님 클리닉

문제1은 로그함수의 미분법과 적분법을 알고 있는지를 묻고 있으며 주어진 식이 성립함을 보이는 과정이다. 문제2는 배반사건의 개념을 알고 주어진 문제에 이를 잘 적용시킬 수 있는지를 묻고 있는 문항이다.

관련 학습

1. 지수함수의 도함수

가. $y=e^x$이면 $y'=e^x$

나. $y=a^x (a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=a^x \ln a$

2. 로그함수의 도함수 (1)

가. $y=\ln x\ (x>0)$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

나. $y=\log_a x (x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

3. 로그함수의 도함수 (2)

가. $y=\ln|x|\ \ (x\neq 0)$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

나. $y=\log_a|x|\ \ (x\neq 0,\ a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

4. 지수함수의 부정적분

가. $\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$

나. $\displaystyle\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0,\ a\neq 1$)

5. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$의 꼴의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

6. 배반사건

표본공간 S의 두 사건 A와 B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 A와 B의 합사건이라 하고, 기호로 $A\cup B$와 같이 나타낸다. 또 사건 A와 B가 동시에 일어나는 사건을 A와 B의 곱사건이라 하고, 이것을 기호로 $A\cap B$와 같이 나타낸다. 한편 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때, 사건 A와 B는 서로 **배반사건**이라고 한다.

7. 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 임의의 두 사건 A와 B에 대하여

가. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

나. 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

예시 답안

문제 1

(1) $f(t) \le C + \int_0^t f(s)g(s)\,ds = u(t)$ 이므로 $u(t) - f(t) \ge 0$. 또한

$$u'(t) = \frac{d}{dt}\left\{ C + \int_0^t f(s)g(s)\,ds \right\} = f(t)g(t).$$

그러므로

$$u(t)g(t) - u'(t) = u(t)g(t) - f(t)g(t) = \{u(t) - f(t)\}g(t) \ge 0.$$

따라서 $u'(t) \le u(t)g(t)$ 가 성립한다.

(2) $u(t) = C + \int_0^t f(s)g(s)\,ds$ 라고 두면 (1)에 의해서 $u'(t) \le u(t)g(t)$ 이다. 또한 $u(0) = C$ 이고 $f(x) \le u(x)$ 이다. 그러므로

$$u'(t) \le u(t)g(t)\,,\ \frac{u'(t)}{u(t)} \le g(t)\,,\ \int_0^x \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt \le \int_0^x g(t)\,dt,$$

$$\ln|u(x)| - \ln|u(0)| \le \int_0^x g(t)\,dt\,,\ \ln|u(x)| - \ln C \le \int_0^x g(t)\,dt\,,$$

$$|u(x)| \le e^{\ln C} e^{\int_0^x g(t)dt}\,,\ |u(x)| \le C \times e^{\int_0^x g(t)dt}\,,\ f(x) \le u(x) \le |u(x)| \le C \times e^{\int_0^x g(t)dt}.$$

따라서 $f(x) \le C \times e^{\int_0^x g(s)ds}$.

다른풀이

$h(x) = u(x)e^{-\int_0^x g(x)\,ds}$ 라 두면

$h'(x) = u'(x)e^{-\int_0^x g(s)ds} - u(x)g(x)e^{-\int_0^x g(s)ds} = \{u'(x) - u(x)g(x)\}e^{-\int_0^x g(s)ds} \le 0$ ($\because$ (1)에 의해)

따라서 $h(x)$는 주어진 구간에서 감소함수이므로 $h(x) \le h(0) = C$ 이다.

그러므로 $f(x) \le u(x) \le C \times e^{\int_0^x g(s)\,ds}$ 이다.

문제 2

(1) 점 x_k에서 시작으로 시계방향으로 도는 반원을 H_1, 반시계방향으로 도는 반원을 H_2라고 하자. 점 x_k와 원의 중심을 지나는 직선으로 나눈 반원 한쪽에만 점 $n-1$개, 즉 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$이 찍힐 확률은 모든 점이 반원 H_1에 찍힐 확률과 반원 H_2에 찍힐 확률의 합이다. 그리고 각 점이 반원 위에 찍힐 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 그러므로 구하고자 하는 확률은 $2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$이다.

(2) 점 $x_k\,(k=1, 2, 3, \cdots, n)$를 시작점으로 시계반대방향으로 한쪽 반원에만 찍힐 확률을 p_k라고 하면 $p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

그러면 $k=1, 2, 3, \cdots, n$인 모든 k에 대하여 p_k는 서로 소임을 알 수 있다.

따라서 구하고자 하는 확률은 각 확률을 더하면 되므로 $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

2009 정시 공대

문제 1

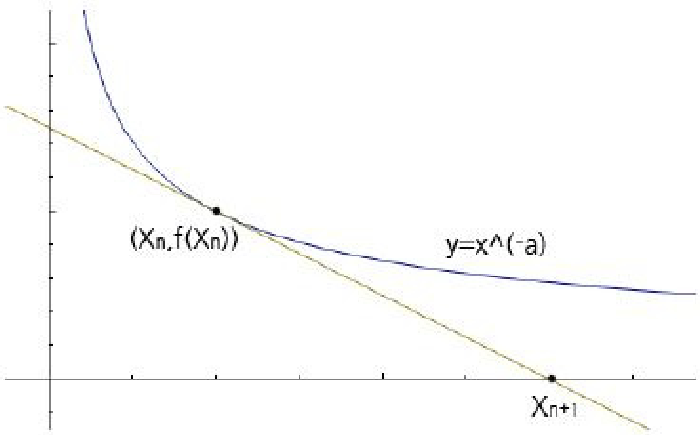
$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 이며, $f(1) = 0$ 이다.

(1) $f(x)$ 가 $(x-1)$ 로 나누어지는 이유를 설명하여라. 그리고 $f(x)$ 를 $(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫인 $Q(x)$ 를 구하여라.

(2) $g(x) = f'(x) - Q(x)$ 라 할 때, $g(1) = 0$ 임을 설명하여라. 그리고 $f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 그은 접선 L 이 $(1, 0)$ 을 지나는 조건과 $g(t) = 0$ 인 조건이 서로 필요충분조건임을 설명하여라.

(3) $(1, 0)$ 을 지나고 $f(x)$ 에 접하는 직선이 3 개 존재하기 위한 필요충분조건을 구하여라.

문제 2



다음은 $y = x^{-a}$ 의 그래프이다. 그래프 상의 임의의 점 $(X_n, f(X_n))$ 에서 그래프에 접선을 그었을 때 이 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 X_{n+1} 이라 하자.

(단, $X_1 = 1$ 이고 $a > 0$)

(1) 수열 X_n 의 일반항을 구하여라.

(2) 점 $(X_n, f(X_n))$ 에서 그은 접선과 $y = f(x)$ 및 $x = X_{n+1}$ 으로 둘러싸인 부분을 x 축으로 회전시켰을 때 만들어지는 입체의 부피를 구하여라. 또한 이 회전체의 부피를 b_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하기 위한 a 의 조건을 구하여라.

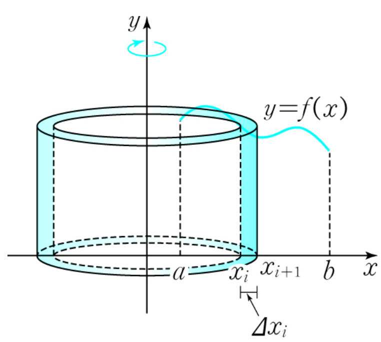
선생님 클리닉

문제1은 한 점에서 4차 함수에 그은 접선이 3개 존재하기 위한 필요충분조건을 구하는 과정이다. 미분계수를 이용하여 접선의 방정식과 근의 개수를 구할 수 있어야 주어진 문제를 해결할 수 있다. 또한, 문제를 단순화시켜 한 점에서 3차 함수에 그은 접선의 개수가 2개 존재하기 위한 필요충분조건을 구해보는 것도 중요하다. 문제2는 주어진 조건을 만족하는 수열의 일반항과 회전체의 부피를 구하는 문제이다.

관련 학습

1. 회전체의 부피

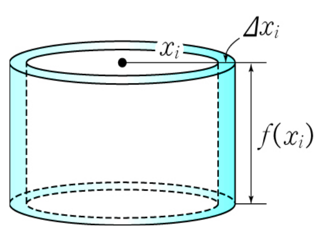
$f(x)$가 연속함수이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$, x축 및 두 직선 $x=a, x=b$ $(a<b)$로 둘러싸인 도형을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구하여 보자.



구간 $[a,b]$를 n개로 나누어

$a=x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_{n+1}=b$라 하고 $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$라 하자.

그러면 나누어진 작은 구간 $[x_i, x_{i+1}]$과 $y=f(x)$로 만들어진 영역을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체는 거의 아래 그림과 같은 캔 모양이다.



캔 모양의 입체의 부피는

$$\pi(x_i+\Delta x_i)^2 f(x_i) - \pi(x_i)^2 f(x_i) = \pi(2x_i+\Delta x_i)\Delta x_i f(x_i)$$

이다. 따라서 회전체의 부피는 근사적으로

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(2x_i+\Delta x_i)\,f(x_i)\Delta x_i$$

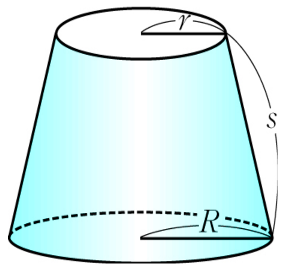
이다. 함수 $y=f(x)$가 연속인 도함수를 가지면, $n\to\infty$일 때 위의 합의 극한이 존재하며 그 극한값은 함수 $2\pi xf(x)$의 구간 $[a,b]$에서의 정적분과 같다. 즉,

$$\int_a^b 2\pi x f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi(2x_i)\,f(x_i)\Delta x_i$$

이다.

2. 회전체의 겉넓이

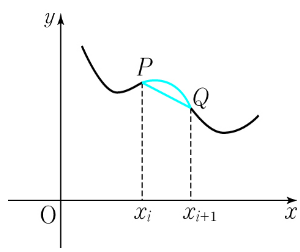
구간 $[a,b]$에서 연속인 도함수를 가지는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이를 구하여 보자.



먼저, 구간 $[a,b]$를 n개로 나누어 작은 구간의 끝점을

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_{n+1}=b$$

라 하고 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$라 하고



위의 그림과 같이 곡선 상에서 점 $\mathrm{P}(x_i,f(x_i)),\mathrm{Q}(x_{i+1},f(x_{i+1}))$을 잡자. 곡선의 길이를 구할 때와 같은 방법에 의하여 선분 PQ의 길이는 거의 $\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\Delta x_i$와 같다. 또, 윗면의 반지름의 길이가 r, 밑면의 반지름의 길이가 R이고 모서리의 길이가 s인 원뿔대의 옆넓이는 $\pi(r+R)s$이다. 따라서 회전체에서 선분 PQ에 의하여 만들어지는 부분의 겉넓이는 거의

$\pi(2x_i+\Delta x_i)\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\Delta x_i$이다. n을 점점 증가시키고 Δx_i를 모두 0에 수렴시키면, 위의 근삿값들의 합은 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi x_i\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\Delta x_i$$

에 수렴하는 것이 알려져 있다. 이 극한값을 정적분으로 나타내면

$$\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이다. 이 정적분의 값을 구간 $[a,b]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이라고 한다. 또, 같은 도형을 x축의 둘레로 회전시켰을 때는 원뿔대의 반지름의 길이만 달라지고 나머지는 y축의 둘레로 회전시켰을 때와 똑같다.

따라서 x축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이는

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

로 정의한다.

예시 답안

문제 1

(1) $f(x)=(x-1)Q(x)+R$ 이고 $R=f(1)=0$이므로 $f(x)=(x-1)Q(x)$ 이다.
따라서 $f(x)$는 $x-1$로 나누어진다. 조립제법을 이용하면

$$f(x)=(x-1)\{x^3+(a+1)x^2+(a+b+1)x+a+b+c+1\}$$

그러므로 $Q(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+b+1)x+a+b+c+1$이다.

(2) (ⅰ)(1)에서 $f(x)=(x-1)Q(x)$ 이므로 $f'(x)=Q(x)+(x-1)Q'(x)$ 이고 $f'(1)=Q(1)$
그러므로 $g(1)=f'(1)-Q(1)=0$

(ⅱ) ($\Rightarrow$) 접선 L의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 이고 $(1,0)$을 지나는 조건은 $-f(t)=f'(t)(1-t)$ 이다. 즉 $f(t)=f'(t)(t-1)$ 이다. 또한 $f(x)=(x-1)Q(x)$ 에서 $f(t)=(t-1)Q(t)$ 이므로 $f'(t)=Q(t)$ 이다. 그러므로 $g(t)=f'(t)-Q(t)=0$ 이다.
($\Leftarrow$) $g(t)=f'(t)-Q(t)=0$ 이면 $f'(t)=Q(t)$ 이다.
$f(x)=(x-1)Q(x)$ 에서 $f(t)=(t-1)Q(t)=f'(t)(t-1)$ 이고, 이것은 $f(x)-f(t)=f'(t)(x-t)$ 에서 좌표$(1,0)$을 대입한 것과 같다.
접선 L은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 이고 $(1,0)$을 지난다.

(3) (2)의 결과에 의해서, $(1,0)$을 지나고 $y=f(x)$에 접하는 직선이 3개 존재하기 위한 필요충분조건은 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지는 것이다. 한편
$g(t)=f'(t)-Q(t)=(4t^3+3at^2+2bt+c)-\{t^3+(a+1)t^2+(a+b+1)t+(a+b+c+1)\}$

$= 3t^3 + (2a-1)t^2 + (-a+b-1)t - (a+b+1) = (t-1)\{3t^2 + 2(a+1)t + a+b+1\}$

여기서 방정식 $3t^2 + 2(a+1)t + a+b+1 = 0$ 은 $t \neq 1$ 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 따라서 $3+2(a+1)+a+b+1 \neq 0$ 이고 $\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 3(a+b+1) > 0$ 이어야 한다. 따라서 $(1, 0)$을 지나고 $f(x)$에 접하는 직선이 3개 존재하기 위한 필요충분조건은 $3a+b+6 \neq 0$ 이고 $(a+1)^2 > 3(a+b+1)$ 이다.

문제 2

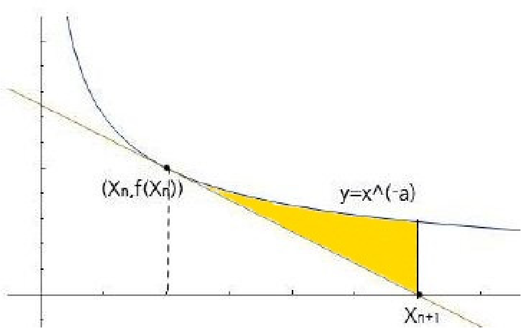
(1) $(X_n, f(X_n))$에서의 접선의 방정식은 $y - f(X_n) = f'(X_n)(x - X_n)$ 이고, 이 직선의 x 절편을 X_{n+1} 이라 두면 $X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} \cdots$ ㉠이다.

$X_1 = 1$, $f(X_n) = X_n^{-a}$ 이고 $f'(x) = -ax^{-a-1}$ 이므로 $f'(X_n) = -aX_n^{-a-1}$ 이다. ㉠ 에 대입하여 정리하면

$$X_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{a}\right)X_n$$

이다. 그러므로 $X_n = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 이다.

(2) 다음 그림의 색칠된 부분을 $x = X_n$ 에서 $x = X_{n+1}$ 까지 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피이다.



구하려는 회전체의 부피 V는 $y = x^{-a}$ 의 그래프를 $x = X_n$ 에서 $x = X_{n+1}$ 까지 x 축 둘레로 회전시킨 입체도형에서 밑면의 반지름의 길이가 $f(X_n)$ 이고 높이가 $X_{n+1} - X_n$ 인 직원뿔의 부피를 뺀것과 같다. 따라서

$$V = \pi\int_{X_n}^{X_{n+1}} (x^{-a})^2\,dx - \frac{\pi}{3}\{f(X_n)\}^2(X_{n+1} - X_n)$$

$$= \frac{\pi}{-2a+1}X_{n+1}^{-2a+1} + \frac{\pi}{2a-1}X_n^{-2a+1} - \frac{\pi}{3}X_n^{-2a}\frac{1}{a}X_n$$

$$= \frac{\pi}{-2a+1}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{-2a+1} X_n^{-2a+1} + \frac{\pi}{2a-1} X_n^{-2a+1} - \frac{\pi}{3a} X_n^{-2a+1}$$

$$= cX_n^{-2a+1} = c\left\{\left(1+\frac{1}{a}\right)^{n-1}\right\}^{-2a+1} = c\left\{\left(\frac{a+1}{a}\right)^{-2a+1}\right\}^{n-1} = b_n \quad (\ c \text{ 는 상수})$$

이다. 즉 $a \neq \frac{1}{2}$ 일 때 공비가 $\left(\frac{a+1}{a}\right)^{-2a+1}$ 인 등비수열이다.

따라서

$$0 < \left(\frac{a+1}{a}\right)^{-2a+1} < 1 \Rightarrow -2a+1 < 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}.$$

그러므로 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하기 위한 a 의 조건은 $a > \frac{1}{2}$ 이다.

2008 수시 수리통계

문제 1

(1) 양수 a, b, c에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}} = A$인 극한값 A를 구하여라.

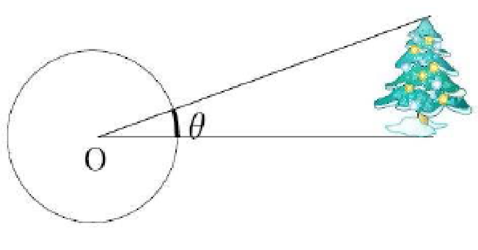
(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 0$임을 보이고, $\lim_{n\to\infty} n^k \dfrac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 이 0이 아닌 극한값을 가지는 $k>0$을 구하여라.

(참고 : 만일 $0<a<1$이면 $1+ax-\frac{1}{2}a(1-a)x^2 \le (1+x)^a \le 1+ax$ 이다.)

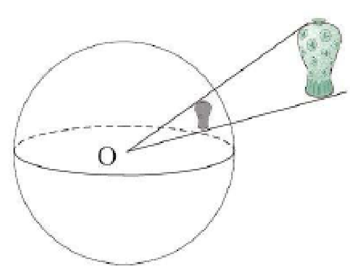
(3) $0<a<b<c$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-A}{B_n}$ 가 0이 아닌 극한값을 가지는 수열 $B_n = \frac{1}{n}r^n$에서 상수 r을 구하여라.

문제 2

평면도형이 이루는 각은 [그림 1]과 같이 O점에서 반지름이 1인 단위원을 그렸을 때 원상에 투영된 호의 길이와 같다. 마찬가지로 3차원 공간상에서 O점으로부터 바라본 물체의 각은 [그림 2]와 같이 O점을 중심으로 반지름이 1인 단위구 S를 그렸을 때 이 구 상에 투영된 상의 넓이를 말한다.



[그림 1]

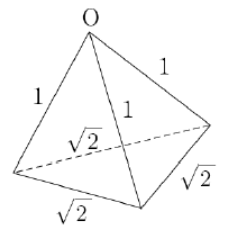


[그림 2]

(1) O점에서 구 S에 접하는 평면을 바라본 각도는?

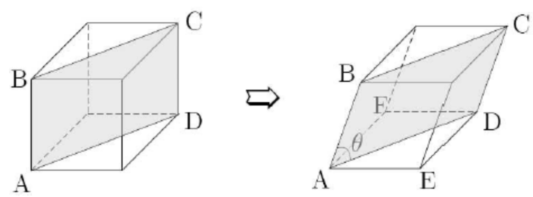
(2) 직각육면체의 꼭짓점에서 직각육면체를 바라본 각은?

(3) [그림 3]의 O점에서 바라본 삼각뿔의 각은?



[그림 3]

(4) [그림 4]의 정육면체에서 변 $\overline{AB}$ 를 A가 고정된 상태에서 평면 ABCD를 따라 기울여 아래의 오른쪽 그림과 같이 평행육면체를 만들고자 한다. A에서 평행육면체를 바라본 각이 $\dfrac{\pi}{6}$ 가 되었을 때, $\overline{AB}$ 와 $\overline{AD}$ 가 이루는 각은?



[그림 4]

선생님 클리닉

문제1은 함수의 극한과 대소관계를 적절히 활용하여 주어진 수열의 극한값을 구하는 문제이고 문제2는 사영변환에서 다양한 성질들을 묻고 있다. 따라서 사영변환과 사영기하학에 대해 연구해 볼 필요가 있다.

관련 학습

1. 함수의 극한과 대소관계

a 에 가까운 모든 값 x 에 대하여

1) $f(x) \le g(x)$ 이고, $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$ 가 존재하면

$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$$

2) $f(x) \le g(x) \le h(x)$ 이고, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ 이면

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

는 Sandwich 정리, 압축정리 또는 조임(Squeeze) 정리라고도 불린다.

2. 내적공간

1) 내적(inner product)

가) $x=(x_1,\ x_2)$, $y=(y_1,\ y_2)$일 때 $x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2$

나) 실수 $x\cdot y$를 x와 y의 점적(dot product) 또는 스칼라적(scalar product)이라 부르기도 한다.

2) 모든 벡터 x, y, z와 실수 c에 대해 다음이 성립한다.

가) $x\cdot(y+z)=x\cdot y\ +\ x\cdot z$

나) $x\cdot(cy)=c(x\cdot y)$

다) $x\cdot y=y\cdot x$

3) 벡터의 크기

가) $x=(x_1,\ x_2)$에 대하여 $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

나) $|x|^2=x\cdot x$ 가 성립한다.

4) 두 벡터가 이루는 각

두 벡터 x, y가 이루는 각을 $\theta(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$라 할 때,

$x\cdot y=|x||y|\cos\theta$ 이 성립한다.

또한, $\cos\theta=\dfrac{x\cdot y}{|x||y|}$ 이 성립한다.

예시 답안

문제 1

(1) $\max\{a,b,c\}=k$라 두자(단, $\max\{a,b,c\}$는 a,b,c중에서 최댓값이다). 그러면

$$k^n<a^n+b^n+c^n\le k^n+k^n+k^n,\ k<(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\le 3^{\frac{1}{n}}k.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}k=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}k=k$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=k$. 따라서

$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,b,c\}$ (단, 여기서 $\max\{a,b,c\}$는 a,b,c중에서 최댓값이다)

(2) 모든 자연수 n에 대하여, $0<\dfrac{1}{n}<1$이므로

$$1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2\le\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\le1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \le \frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \le \frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=0$

한편, $\frac{n^k}{n}-\frac{n^k}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \le n^k\frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \le \frac{n^k}{n}$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 이 0이 아닌 극한값을 가지는 $k>0$을 구하면 $k=1$이다.

(3) (1)의 결과에 의해서 $A=c$이다. 한편 $(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=c\left\{1+\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$,

$0<\frac{1}{n}<1$ 이므로

$$c\left[1+\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\}-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\}^2\right]$$

$$\le c\left\{1+\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} \le c\left[1+\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\}\right],$$

$$c\left[\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\}^2\right] \le \frac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-c}{\frac{1}{n}} \le c\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\},$$

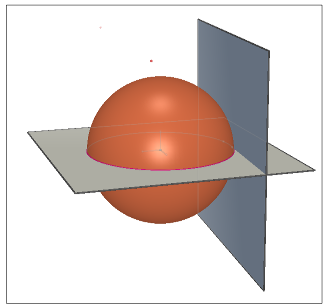
$$c\left[\left\{\left(\frac{\frac{a}{c}}{r}\right)^n+\left(\frac{\frac{b}{c}}{r}\right)^n\right\}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{\left(\frac{\frac{a}{c}}{r}\right)^n+\left(\frac{\frac{b}{c}}{r}\right)^n\right\}\left\{\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n\right\}\right]$$

$$\le \frac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-c}{\frac{1}{n}r^n} \le c\left\{\left(\frac{\frac{a}{c}}{r}\right)^n+\left(\frac{\frac{b}{c}}{r}\right)^n\right\}.$$

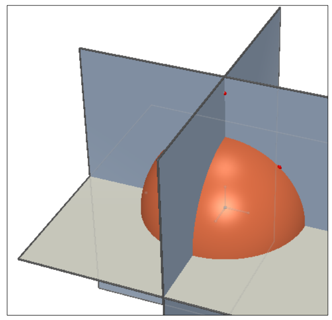
그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-c}{B_n}$ 가 0이 아닌 극한값을 가지는 수열 $B_n=\frac{1}{n}r^n$ 에서 상수 r을 구하면 $r=\frac{b}{c}$ 이다.

문제 2

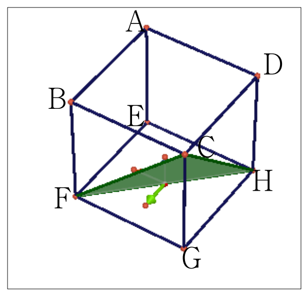
(1) O점에서 단위구 S에 접하는 평면을 S상에 투영한 상의 넓이는 구면 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 구하고자 하는 각도는 2π이다.



(2) 직각육면체를 직각육면체의 한 꼭짓점을 중심으로 하는 단위구 S상에 투영하면 상의 넓이는 구면 넓이의 $\frac{1}{8}$이므로 구하고자 하는 각도는 $\frac{\pi}{2}$이다.



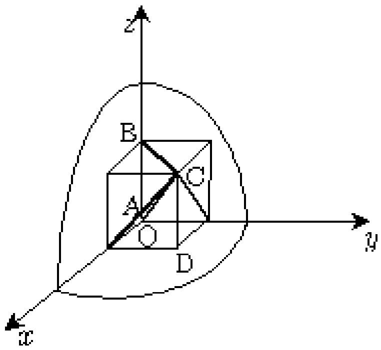
(3) [그림 3]의 삼각뿔은 한 변의 길이가 1인 정육면체 ABCDEFGH의 일부인 삼각뿔 G−CFH와 일치하고 꼭짓점 G에서 정육면체를 바라본 각과 삼각뿔 G−CFH를 바라본 각은 같다. 그러므로 (2)의 결과에 의해, 꼭짓점 G에서 삼각뿔 G−CFH를 바라본 각은 $\frac{\pi}{2}$이다. 따라서 구하고자 하는 각은 $\frac{\pi}{2}$이다.



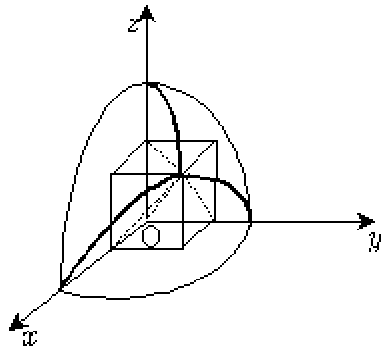
(4) 대각선 AC의 길이가 l인 정육면체와 A가 중심인 단위구를 나타내면 [그림1]과 같다. 정육면체에서 꼭짓점 C에서 모이는 세 면의 대각선에 의하여 나눠지는 세 개의 삼각뿔을 단위구로 투영하면 [그림2]에서와 같다.

이때, 점 A에서 바라본 한 삼각뿔의 각은 $4\pi\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\pi$이다.

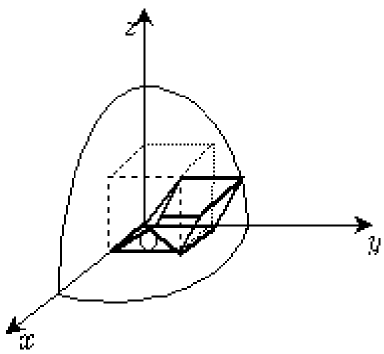
[그림3]에서와 같이 A에서 평행육면체를 바라본 각이 $\frac{\pi}{6}$일 때 $\overline{AB}$와 $\overline{AD}$가 이루는 각은 [그림4]에서의 θ와 같다. 따라서 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다. 이때, θ는 $\frac{\pi}{6}(30°)$보다 큰 각(약 35.26°)에 해당한다.



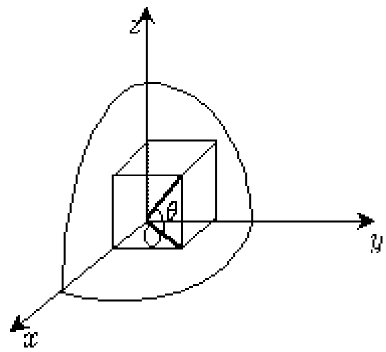
[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

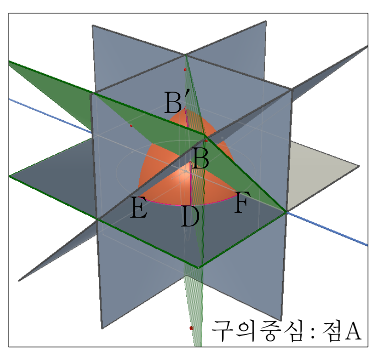


[그림 4]

다른풀이

구면삼각형 BEF의 넓이가 $\frac{\pi}{6}$, 구면삼각형 B′EF의 넓이가 $\frac{\pi}{2}$, 구면삼각형 B′BE의 넓이와 구면삼각형 B′BF의 넓이가 같고 세 구면삼각형 BEF, B′BE, B′BF의 넓이의 합은 구면삼각형 B′EF의 넓이와 같다. 또한 점 A는 단위구의 중심이고 선분 AE, AF, AB′은 길이가 1이고 서로 수직이다.

그러므로 도형 A−BEF, A−BB′E, A−BB′F는 모두 합동이다. 따라서 단위벡터 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AB'}$을 $\overrightarrow{AE}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{AF}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{AB'}=(0,0,1)$로 잡으면, $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$이고 $\overline{AB}$와 $\overline{AD}$가 이루는 각의 크기 θ는 두 벡터 $(1,1,1)$과 $(1,1,0)$이 이루는 각의 크기와 같다. 그러므로



$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 θ는 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$인 예각의 크기이다.

2008 수시 자연/의대

문제 1

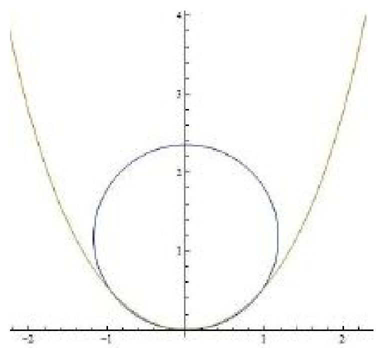
(1) 좌표평면 상의 구간 $[a,b]$에서 정의된 직선 $f(x)$가 있을 때, 이것의 길이를 평균값의 정리를 활용해 나타내어라.

(2) 구간 $[a,b]$에서 정의된 곡선 $f(x)$의 길이는 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$L \approx \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

평균값의 정리를 활용해 위 식을 유도하고 그 과정을 설명하시오.

(3) 좌표평면 상에 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1$인 곡선과 반지름이 $\frac{3}{8\pi}$인 원이 다음과 같이 원점에서 접하도록 위치해 있다. 원 위의 점 P가 현재 원점에 있고, 원이 곡선과 접하면서 오른쪽으로 미끄러짐 없이 굴러 올라간다. P가 다시 곡선과 최초로 만났을 때의 원의 중심의 좌표를 구하여라.



문제 2

$x_1=a,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+{x_n}^b\,(a,b>0)$인 수열 $\{x_n\}$이 있다.

(1) a에 따라 수열 $\{x_n\}$의 극한값이 2개 이상 존재하는 b의 범위를 구하여라.

(2) $0<a<\frac{1}{2}$이고 $b=2$일 때, 수열 $\{x_n\}$의 극한값이 0이 됨을 설명하고 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$은 수렴함을 보여라.

(참고: 어떤 수열이 증가 또는 감소수열이면서, 그 범위가 한정되어 있다면 이 수열은 수렴하는 성질이 있다.)

(3) $0<b<1$일 때, 수열 $\{x_n\}$의 극한값이 0이 아님을 보여라.

선생님 클리닉

문제1에서 곡선의 길이를 구하는 공식은 평균값의 정리를 활용하여 증명하고 있으며 이것을 적용할 수 있는지를 묻고 있으며, 문제2는 점화식으로 주어진 무한급수의 수렴은 좌표평면위에서 점화식을 변형한 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점으로 수렴한다는 사실을 이용하고 있다는 사실을 기억할 필요가 있다.

관련 학습

1. 무한급수의 수렴과 발산

가. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

나. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

2. 무한등비급수의 수렴과 발산

무한등비급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

에 대하여 다음이 성립한다.

가. $|r| < 1$일 때, 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

나. $|r| \geq 1$일 때, 발산한다.

3. 무한급수의 수렴 발산 - 바젤의 문제

조화급수 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$는 발산하지만 급수 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$은 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴한다. 이 문제는 이를 해결한 오일러의 고향 마을의 이름을 따서 바젤의 문제(Basel Problem)라고 한다.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$$

즉 $1 < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots < 2$ 이므로 1과 2사이의 어떤 값(약 1.644934)에 수렴한다는 것은 알았지만 그 값이 정확히 얼마인지를 아는 데는 오랜 시간이 걸렸다. 1644년 멩골리를 시작으로 베르누이(Bernoulli), 라이프니츠(Leibniz), 뉴턴(Newton)등 당대의 수학자들이 노

력했지만 모두 실패로 끝나고 1735년 베르누이의 제자인 오일러(Leonhard Euler, 스위스)에 의해 급수의 합이 $\frac{\pi^2}{6}$이 됨이 밝혀졌다. 그의 나이 24세 때의 일이다.

(증명)

사인을 멱급수로 정리하면

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

라 하자. 양변을 계속 미분하면

$$\cos x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

$$-\sin x = 2a_2 + (3 \cdot 2)a_3 x + (4 \cdot 3)a_4 x^2 + (5 \cdot 4)a_5 x^3 + \cdots$$

$$-\cos x = (3 \cdot 2)a_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2)a_4 x + (5 \cdot 4 \cdot 3)a_5 x^2 + \cdots$$

$$\sin x = (4 \cdot 3 \cdot 2)a_4 + (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)a_5 x + \cdots$$

$$\vdots$$

위의 각각의 식에 $x=0$을 대입하면

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{3!},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{5!},\ \cdots$$

따라서 $\sin x = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right)$

여기서 $P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \frac{\sin x}{x}$ $\cdots$① 이라 두면

$P(\pm\pi) = P(\pm 2\pi) = P(\pm 3\pi) = \cdots = 0$, $P(0) = 1$ 이다. 따라서

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots\right)x^2 + \cdots \qquad \cdots②$$

①, ②식의 x^2의 계수를 비교하면 $\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots$ 이 되고 양변에 π^2을 곱하면 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$은 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴한다.

예시 답안

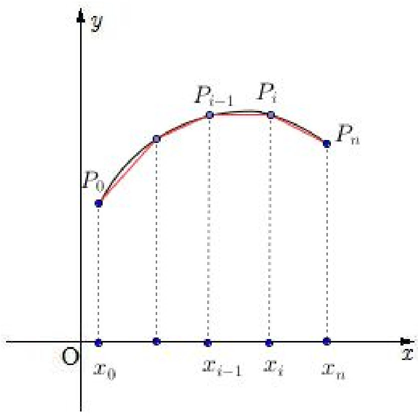
문제 1

(1) $(a, f(a)), (b, f(b))$ 사이의 길이는 $L=\sqrt{(b-a)^2+\{f(b)-f(a)\}^2}$ 이다.

평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c 가 (a, b) 에 존재한다. 따라서

$$L=\sqrt{(b-a)^2+\{f'(c)\}^2(b-a)^2}=\sqrt{1+\{f'(c)\}^2}\,(b-a)$$

(2) a 와 b 사이를 n 등분하여 순서대로 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 라 하면 $\Delta x=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$ 이다. 아래 그림처럼 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 을 잡으면 $f(x)$의 곡선의 길이 L 은 $L\approx\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}|\overline{P_{i-1}P_i}|$로 근사시킬 수 있다.



평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(x_i^*)$ 인 x_i^* 가 (x_{i-1}, x_i) 에 존재한다. 따라서

$$\begin{aligned}|\overline{P_{i-1}P_i}|&=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\{f(x_i)-f(x_{i-1})\}^2}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\{f'(x_i^*)\}^2(x_i-x_{i-1})^2}\\&=\sqrt{(\Delta x)^2+\{f'(x_i^*)\}^2(\Delta x)^2}=\sqrt{1+\{f'(x_i^*)\}^2}\,\Delta x\end{aligned}$$

그러므로

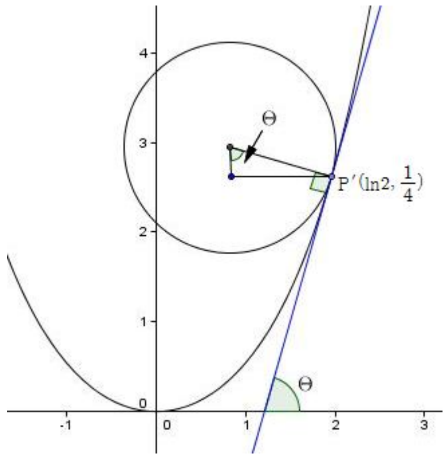
$$L\approx\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|\overline{P_{i-1}P_i}|=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(x_i^*)\}^2}\,\Delta x=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(3) P 가 다시 곡선과 최초로 만나는 점을 P′라 하면, 곡선 PP′의 길이는 원의 둘레와 같다. (원의 둘레)$=2\pi\times\dfrac{3}{8\pi}=\dfrac{3}{4}$

$$(\text{곡선PP}'\text{의 길이})=\int_0^t \sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^t \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{3}{4}$$

이 식을 풀면 $t=\ln 2$이고, 점P′의 좌표는 $\left(\ln 2,\ \frac{1}{4}\right)$이다.

또한 $y'=\left.\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right|_{x=\ln 2}=\frac{3}{4}$ 이므로 $\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 이다.



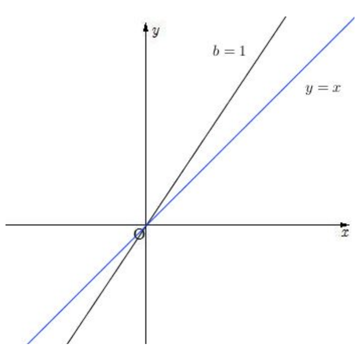
그러므로 원의 중심의 좌표는 $\left(\ln 2-\frac{3}{8\pi}\sin\theta,\ \frac{1}{4}+\frac{3}{8\pi}\cos\theta\right)=\left(\ln 2-\frac{9}{40\pi},\ \frac{1}{4}+\frac{3}{10\pi}\right)$ 이다.

문제 2

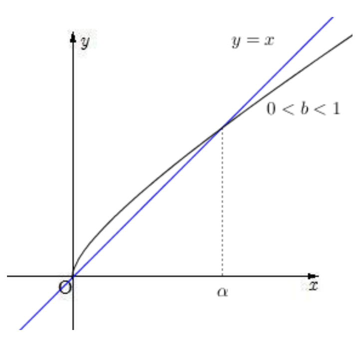
(1) $f(x)=\frac{1}{2}x+x^b\,(x>0, b>0)$ 라 두자. $b=1$일 때 $f(x)$는 직선이다

$f'(x)=\frac{1}{2}+bx^{b-1}>0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이고, $f''(x)=b(b-1)x^{b-2}$ 이다.

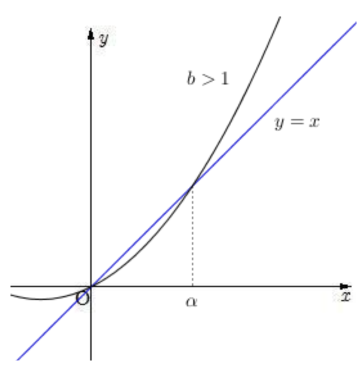
$0<b<1$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 $f(x)$ 는 위로 볼록한 함수, $b>1$ 일 때 $f''(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 아래로 볼록한 함수이다. 따라서 $x>0$ 에서의 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$b=1$ 의 경우



$0<b<1$ 의 경우



$b>1$ 의 경우

$y=\frac{1}{2}x+x^b$ 와 $y=x$ 의 교점 중 0 이 아닌 교점을 α 라 두면

(ⅰ) $b=1$ 의 경우: $x_1=a>0$ 에서 항상 $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$

(ⅱ) $0<b<1$ 의 경우: $x_1=a>0$ 에서 항상 $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$

(ⅲ) $b>1$ 의 경우:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\begin{cases}0 & (0<a<\alpha)\\ \alpha & (a=\alpha)\\ \infty & (a>\alpha)\end{cases}$$

그러므로 $b>1$ 일 때 극한값이 2 개 이상 존재한다.

(2) $y=\frac{1}{2}x+x^2$ 과 $y=x$ 의 교점을 구하면 $x=\frac{1}{2}$ 이다. (1)의 (ⅲ) 그림과 같으므로 $0<a<\frac{1}{2}$ 일 때 모든 자연수 n 에 대하여 $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ 이고, $\{x_n\}$ 은 감소수열이다. 즉,

$$a=x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$$

이고, $0<a<\frac{1}{2}$ 에서 $a<r<\frac{1}{2}$ 인 r 을 잡으면

$$\frac{1}{2}+r>\frac{1}{2}+x_1>\frac{1}{2}+x_2>\cdots>\frac{1}{2}+x_n>\cdots$$

이 성립한다. $x_{n+1}=x_n\left(\frac{1}{2}+x_n\right)$ 이므로

$$x_2=x_1\left(\frac{1}{2}+x_1\right)<a\left(\frac{1}{2}+r\right)$$

$$x_3=x_2\left(\frac{1}{2}+x_2\right)<a\left(\frac{1}{2}+r\right)^2$$

$$\vdots$$

$$x_n=x_{n-1}\left(\frac{1}{2}+x_{n-1}\right)<a\left(\frac{1}{2}+r\right)^{n-1}$$

이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n<\sum_{n=1}^{\infty} a\left(\frac{1}{2}+r\right)^{n-1}$ 이 성립한다.

또한 $\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+r<1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a\left(\frac{1}{2}+r\right)^{n-1}$ 은 수렴한다. 그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 도 수렴한다.

(3) 우선 $x_n\neq 0$ 임은 자명하다. $x_n<1$ 일 때, $\frac{1}{2}x_n+x_n^b\geq\frac{3}{2}x_n$ 이므로 $x_n\geq 1$ 일 될 때까지 수열 $\{x_n\}$ 은 증가한다. 따라서 0 으로 수렴할 수 없다.

2008 특기자 공대

문제 1

좌표공간 상의 $\overrightarrow{X}=(x,\ y,\ z)$ 위치에 있는 아주 작은 입자가 운동할 때 입자의 속도 $\overrightarrow{V}$는 $\overrightarrow{V}=(x,\ y,\ z)$로 주어진다. S_r은 중심이 원점이고 반지름이 r인 구이다.

1. 시각 $t=0$에서 S_r 위의 한 점 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$에서 출발한 입자의 시각 t일 때의 위치를 t의 함수로 구하여라.

2. S_r의 내부를 균일하고 매우 조밀하게 채우고 있는 입자들을 생각하자. t초 후 S_r을 빠져나간 입자들은 어떤 입체를 이루는지 설명하여라. 이 S_r을 빠져나간 입자들이 점유하고 있는 공간의 부피 $f(t)$를 구하여라.

3. $f(t)$의 $t=0$에서의 순간변화율을 구하여라.

4. t초 후 S_r을 빠져나간 입자들이 평면 $x=1$과 만나는 영역의 넓이를 $A(t)$라 할 때, $A(t)$를 구하여라. 또 $A(t)$의 $t=1$에서의 순간변화율을 구하여라.
(단, $r \geq 1$)

선생님 클리닉

위치와 속도의 관계를 묻는 문항으로 입자의 위치와 속도가 일치한다는 사실에서 지수함수를 생각해 낼 수 있어야 한다. 또한 구의 부피공식을 알고 있어야 해결할 수 있는 문항이다. 특히, 지수함수의 미분법과 관련하여 e의 출현과정과 수학적 의미에 대한 고찰이 필요하다.

관련 학습

1. 직선 위의 운동에서의 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 위치 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타내어질 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도는

가. 속도 $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$

나. 가속도 $a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

2. 평면 위의 운동에서의 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P$(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 나타내어질 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도는

가. 속도 $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

나. 가속도 $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

예시 답안

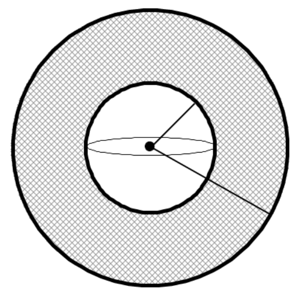
문제 1

1. $\dfrac{dx}{dt}=x$에서 $x=ce^t$이고 $t=0$을 대입하면 $c=x_0$이다. 따라서 $x=x(t)=x_0e^t$이다.
   같은 방법으로 $y=y(t)=y_0e^t$, $z=z(t)=z_0e^t$이다. 따라서 S_r 위의 한 점 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$에서 출발한 입자의 시각 t일 때의 위치 P는 $P=(x_0e^t,\ y_0e^t,\ z_0e^t)$이다.

2. 원점에서 1번에서 구한 점 P까지의 거리는 re^t이므로 시각 t에서 점 P의 위치는 중심이 원점이고 반지름이 re^t인 구이다. 따라서 t초 후 S_r을 빠져나간 입자들은 그림의 색칠한 입체를 이룬다.
   그러므로 S_r을 빠져나간 입자들이 점유하고 있는 공간의 부피 $f(t)$는
   $f(t)=\dfrac{4}{3}\pi\left\{\left(re^t\right)^3-r^3\right\}=\dfrac{4}{3}\pi r^3\left(e^{3t}-1\right)$이다.

3. $f(t)=\dfrac{4}{3}\pi r^3(e^{3t}-1)$ 에서 $f'(t)=4\pi r^3 e^{3t}$ 이므로

$f'(0)=4\pi r^3$ 이다.



4. 중심이 원점이고 반지름이 $r(\geq 1)$, re^t 인 두 구와 평면 $x=1$ 과 만나는 영역의 넓이가 $A(t)$ 이다.

$$A(t)=\pi\left\{\left(\sqrt{r^2e^{2t}-1^2}\right)^2-\left(\sqrt{r^2-1^2}\right)^2\right\}=\pi r^2(e^{2t}-1)$$

$A'(t)=2\pi r^2e^{2t}$ 이므로 $A'(1)=2\pi r^2e^2$ 이다.

2008 정시 논술

문제 1

$(1+x)^{\frac{1}{4}}$ 의 근사식을 찾아보려고 한다.

(1) $|x|\leq \dfrac{1}{2}$ 일 때 부등식 $\left|(1+x)^{\frac{1}{4}}-1\right|\leq \dfrac{|x|}{2}$ 가 성립함을 설명하시오.

(2) $|x|\leq \dfrac{1}{2}$ 일 때 부등식 $\left|(1+x)^{\frac{1}{4}}-\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)\right|\leq \dfrac{3x^2}{4}$ 가 성립함을 설명하시오.

선생님 클리닉

도함수와 이계도함수를 이해하고 평균값의 정리를 잘 활용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지를 묻고 있다. 평균값의 정리를 활용한 다양한 경험이 필요한 문항이다.

관련 학습

1. 롤의 정리

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$가 (a,b)의 모든 점에서 미분가능하다고 하자. 이때 $f(a)=f(b)$ 이면 a와 b 사이에 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다.

2. 평균값 정리

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$가 구간의 내부 (a,b)에 있는 모든 점에서 미분가능하면 a와 b 사이에 다음을 만족하는 c가 적어도 한 개 존재한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

예시 답안

문제 1

(1) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{4}}$ $(|x|\le \frac{1}{2})$ 라고 두자.

i) $x=0$ 인 경우는 주어진 부등식의 등호가 성립한다.

ii) $x\neq 0$ 인 경우에 대해 부등식이 성립함을 증명해보자.

$f'(x)=\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}}$, $f''(x)=-\frac{3}{16}(1+x)^{-\frac{7}{4}}$ 이고 $|x|\le \frac{1}{2}$ 에서 두 함수 $|f'(x)|, |f''(x)|$ 는 감소함수이다. 따라서 $x=-\frac{1}{2}$ 일 때 $|f'(x)|, |f''(x)|$ 는 최댓값을 갖는다. 즉,

$$\left|f'(-\frac{1}{2})\right|=\left|\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2})^{-\frac{3}{4}}\right|=\left|\frac{1}{4}\cdot 2^{\frac{3}{4}}\right|<\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}\ \cdots ①$$

$$\left|f''(-\frac{1}{2})\right|=\left|-\frac{3}{16}\cdot(\frac{1}{2})^{-\frac{7}{4}}\right|=\left|\frac{3}{16}\cdot 2^{\frac{7}{4}}\right|<\frac{3}{16}\cdot 2^2=\frac{3}{4}\ \cdots ②$$

이다.

또한 $f(0)=1$ 이므로 $x\neq 0$ 에 대하여 $F(x)=f(x)-f(0)$ 라 두면 함수 $F(x)$ 는 미분가능하다. 따라서 평균값정리에 의하여

$|F(x)-F(0)|=|xF'(c)|=|x||f'(c)|$ 를 만족하는 c 가 0 과 x 사이에 존재한다.

① 에서부터

$$|F(x)-F(0)|=|xF'(c)|=|x||f'(c)|<\frac{1}{2}|x|$$

따라서

$$|F(x)-F(0)|=|f(x)-f(0)|=\left|(1+x)^{\frac{1}{4}}-1\right|<\frac{|x|}{2}$$

이 성립한다.

다른풀이

함수 f 를 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{4}}-1$ 라 하자. $x=0$ 인 경우는 부등식이 자명하게 성립하므로 $x\neq 0$ 경우를 생각하자. 함수 f 는 실수전체에서 연속이고 미분가능하므로 평균값정리에 의해 아래 부등식을 만족하는 상수 c 가 0 과 x 사이에 존재한다. ($x<0$ 또는 $x>0$ 의 경우 결과는 같다)

$$|f(x)-f(0)|=|xf'(c)|=\left|\frac{1}{4\sqrt[4]{(1+c)^3}}x\right|$$

$|x|\le\dfrac{1}{2}$ 에서 $\left|\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(1+c)^3}}x\right|<\left|\dfrac{1}{4\sqrt[4]{2^{-3}}}x\right|=\left|\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2^{4-3}}}x\right|=\left|\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}x\right|<\left|\dfrac{1}{2}x\right|$ 이므로

$|x|\le\dfrac{1}{2}$ 일 때 부등식 $\left|(1+x)^{\frac{1}{4}}-1\right|\le\dfrac{|x|}{2}$ 이 성립한다.

(2) ⅰ) $x=0$ 인 경우는 주어진 부등식의 등호가 성립한다.

ⅱ) $x\neq 0$ 인 경우에 대해 부등식이 성립함을 증명해보자.

$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{4}}$ $(|x|\le\dfrac{1}{2})$ 라고 두면 $f'(0)=\dfrac{1}{4}$ 이므로

$F(x)=f(x)-f(0)-f'(0)x$ $(-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2})$ 라고 두면 함수 $F(x)$ 는 주어진 구간에서 미분가능하므로 평균값정리에 의하여

$$|F(x)-F(0)|=|xF'(c)|=|x||f'(c)-f'(0)|$$

를 만족하는 c가 0과 x 사이에 존재한다.
또한 $y=f'(x)$ 는 미분가능하므로 평균값정리를 한번 더 적용하면

$$|f('c)-f'(0)|=|cf''(d)|$$

를 만족하는 d가 0과 c 사이에 존재한다.

논제(1)의 ②에 의하여 $|f''(d)|<\dfrac{3}{4}$ 이고 $|c|<|x|$이므로

$$|F(x)-F(0)|=|xF'(c)|=|x||f'(c)-f'(0)|=|x||cf''(d)|<\frac{3}{4}x^2$$

이다.

$F(0)=0$ 이고 $F(x)=f(x)-f(0)-f'(0)x=(1+x)^{\frac{1}{4}}-(1+\dfrac{1}{4}x)$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.

다른풀이

평균값의 정리를 사용하기 위해 함수 f를 $f(x)=(1+x)^{1/4}-\left(1+\dfrac{x}{4}\right)$라 하자. $x=0$인 경우는 부등식이 자명하게 성립하므로 $x\neq 0$경우를 생각하자. 함수 f는 실수전체에서 연속이고 미분가능하므로 평균값정리에 의해 아래 부등식을 만족하는 상수 c가 0과 x사이에 존재한다.

$$|f(x)-f(0)|=|xf'(c)|=\left|\left\{\frac{1}{4(1+c)^{3/4}}-\frac{1}{4}\right\}x\right|$$

$\left|\dfrac{1}{4(1+c)^{3/4}}-\dfrac{1}{4}\right|$을 정리하면 $\dfrac{|(1+c)^{1/4}-1-c|}{4(1+c)}$이고 분모인 $4(1+c)$은 $|x|\le\dfrac{1}{2}$에서

$$2<4(1+c)<6$$

이다. 또한 분자인 $|(1+c)^{1/4}-1-c|$은 $|x|\le\dfrac{1}{2}$에서

$$|(1+c)^{1/4}-1-c|\le|(1+c)^{1/4}-1|+|c|\le\frac{|c|}{2}+|c|=\frac{3}{2}|c|$$

이다. 그러므로 $\dfrac{|(1+c)^{1/4}-1-c|}{4(1+c)}<\dfrac{3}{4}|c|<\dfrac{3}{4}|x|$이다.

따라서 $|x|\le\dfrac{1}{2}$일 때 부등식 $\left|(1+x)^{\frac{1}{4}}-\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)\right|\le\dfrac{3x^2}{4}$이 성립한다.

2007 특기자 공대, 자연대

문제 1

임의의 함수 $y=f(x)$에 대해 $x_1<x_2<x_3$일 때 $(x_1,\ x_3)$구간에서의 2계 평균변화율을 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{1}{x_3-x_1}\left\{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right\}$$

(1) $x_1=x_2-h=x_3-2h$의 관계가 성립하는 $x_1,\ x_2,\ x_3$에 대해 $\lim\limits_{h\to 0}$일 때 x_1에서의 2계 평균변화율은 어떤 값이 되겠는가?

(2) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에 대해 2계 평균변화율은 $a,\ b,\ c$와 어떤 관계를 갖는지 설명하여라.

(3) 위 (2)에서 구한 결과와 직선의 방정식을 이용하여 세 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$을 지나는 이차함수의 식을 구하여라. (단, $y=ax^2+bx+c$에 세 점을 대입하여 연립방정식으로 풀면 안 된다.)

(4) 위 과정을 토대로 네 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, $(x_4,\ y_4)$을 지나는 삼차함수의 식은 어떻게 구할 수 있을지 설명하여라.

선생님 클리닉

평균변화율이 두 점을 지나는 직선의 기울기임을 인식하고 2단계 평균변화율이 의미하는 바가 무엇인지를 찾아가는 과정을 제시하고 있다. 또한 이러한 사실을 바탕으로 3단계 평균변화율을 유추해 볼 수 있는지를 묻고 있는 문항이다.

관련 학습

<라그랑지 보간 다항식(Lagrange Interpolating polynomial)>

서로 다른 n개의 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, $\cdots$ $(x_n,\ y_n)$에 대하여 $p(x_i)=y_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$을 만족하는 다항식 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$이 유일하게 결정되는데, 이 다항식 $p(x)$를 보간 다항식(Interpolating polynomial)이라고 한다.

보간 다항식 $p(x)$를 구하는 방법은 라그랑지, 뉴턴, 스플라인 등이 있는데 이 중에서 가장 잘 알려져 있고, 구하기 쉬운 라그랑지 보간 다항식(Lagrange Interpolating polynomial)에 대해서 알아보자.

우선 $p(x)$를 다음과 같이 표현해보자.

$p(x)=L_1(x)y_1+L_2(x)y_2+L_3(x)y_3+\cdots+L_n(x)y_n$

이때 $L_i(x)$를 라그랑지 다항식(Lagrange polynomial)이라고 한다.

$L_i(x)$는 $n-1$차 다항식이고 $L_i(x_j)=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}$ 이므로

$L_i(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$ (c는 상수)

라 둘 수 있다. 여기서 $1=L_i(x_i)=c(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$

이므로 $c=\dfrac{1}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$이다. 따라서

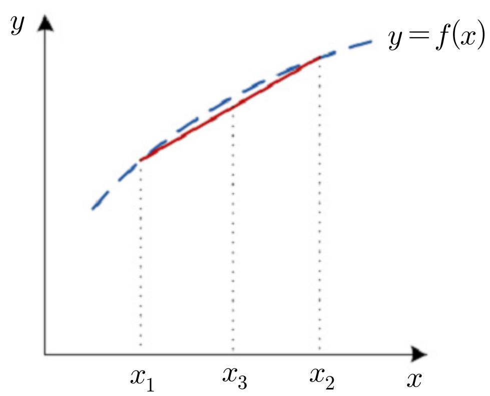
$$L_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

이다. 그러므로

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i\prod_{\substack{j=i\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

이다. 이 다항식 $p(x)$를 라그랑지 보간 다항식(Lagrange Interpolating polynomial)를 이라고 한다.

라그랑지 보간 다항식(Lagrange Interpolating polynomial)은 수치해석학에서 몇 개의 데이터를 가지고 어떤 값을 예측할 때 사용된다. 예를 들어 다음의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 보면, y의 대략적인 모양은 알 수 있으나 함수 자체는 모른다.



확실하게 알고 있는 값은 x_1, x_2라고 할 때, x_3의 값은 어떻게 구할 수 있을까?

가장 쉽게 근삿값을 구하는 방법은 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 잇는 직선의 방정식 $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$을 이용하는 것이다. 이 직선의 식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$p(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$$

이와 같이 주어진 점을 지나는 가상의 다항함수를 이용하여 값을 모르는 임의의 위치에서의 y의 값을 구하는 방법을 라그랑지 보간법이라고 한다. 위에서는 가상의 다항함수를 일차함수로 가정한 경우에 해당된다.

세 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_2,\ y_2)$을 알고 있다면 이차함수

$$p(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

를 이용하여 값을 모르는 임의의 위치에서의 y의 값을 구할 수 있다. 주의할 점은 대부분의 물리적인 현상은 연속적으로 일어나므로, 모든 점 데이터를 이용하여 하나의 함수로 만드는 것이 유리한 경우가 많지만 차수가 높다고 해서 항상 더 잘 맞다고는 할 수 없다.

예시 답안

문제 1

(1) $x_3=x_1+2h$, $x_2=x_1+h$이므로 대입하여 정리하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left\{\frac{f(x_1+2h)-f(x_1+h)}{h}-\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_1+h)-f'(x_1)}{2h}=\frac{f''(x_1)}{2}$$

(2) $y_i=ax_i^2+bx_i+c\,(i=1,2,3)$이므로 대입하여 정리하면

$$\frac{1}{x_3-x_1}\left\{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right\}$$

$$=\frac{1}{x_3-x_1}\left\{\frac{a(x_3+x_2)(x_3-x_2)+b(x_3-x_2)}{x_3-x_2}-\frac{a(x_2+x_1)(x_2-x_1)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}\right\}$$

$$=\frac{1}{x_3-x_1}\{a(x_3+x_2)+b-a(x_2+x_1)-b\}=a$$

(3) 세 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$을 지나는 이차함수의 식을

$$y=ax^2+bx+c \quad \cdots \text{①}$$

라 하자. (2)에 의해서 $a=\dfrac{1}{x_3-x_1}\left\{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right\}$이다.

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 지나는 일차함수의 식은

$$y=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)+y_2 \quad \cdots \ ②$$

이고 ①, ②의 교점이 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$이므로

$$ax^2+bx+c-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)+y_2=a(x-x_1)(x-x_2)$$

이다. 정리하면 $b=-\frac{(x_2+x_3)y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}-\frac{(x_1+x_3)y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}-\frac{(x_1+x_2)y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$,

$c=\frac{x_2x_3y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_1x_3y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{x_1x_2y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$ 이다.

(4) $x_1<x_2<x_3<x_4$일 때 $(x_1,\ x_4)$구간에서의 3계 평균변화율을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\frac{1}{x_4-x_1}\left[\frac{1}{x_4-x_2}\left\{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\right\}-\frac{1}{x_3-x_1}\left\{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right\}\right]$$

네 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, $(x_4,\ y_4)$을 지나는 삼차함수의 식을

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots \ ①$$

라 하자. 앞의 결과로 추측해보면

$a=\frac{1}{x_4-x_1}\left[\frac{1}{x_4-x_2}\left\{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\right\}-\frac{1}{x_3-x_1}\left\{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right\}\right]$ 이다.

세 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$을 지나는 이차함수의 식을 (3)에서의 방법으로 구했을 때

$$y=lx^2+mx+n \quad \cdots \ ②$$

라 하자. ①, ②의 교점이 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$이므로

$$ax^3+bx^2+cx+d-lx^2+mx+n=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

이다. 이 식을 정리하면 b, c, d를 구할 수 있다.

다른풀이

$x_1<x_2<x_3<x_4$ 일 때, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$ 에서의 3계 평균변화율을

$$\frac{[(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)\text{에서의 2계 평균변화율}]-[(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\text{에서의 2계 평균변화율}]}{x_4-x_1}$$

이라 정의하자.

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$ 를 지나는 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 에서

$$\left(\begin{array}{c}f(x)\text{의 }(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\\ \text{에서의 2계 평균변화율}\end{array}\right)=\frac{1}{x_3-x_1}\left\{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right\}$$

$$=\frac{1}{x_3-x_1}\left\{\left(a\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)+b\left(x_2+x_1\right)+c\right)-\left(a\left(x_3^2+x_3x_2+x_2^2\right)+b\left(x_3+x_2\right)+c\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{x_3-x_1}\left\{a\left(x_3^2-x_1^2+x_2\left(x_3-x_1\right)\right)+b\left(x_3-x_1\right)\right\}$$
$$=a\left(\left(x_3+x_1\right)+x_2\right)+b=a\left(x_1+x_2+x_3\right)+b$$

$$\therefore\begin{pmatrix} f(x)\text{의 } (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) \\ \text{에서의 3계 평균변화율} \end{pmatrix}$$
$$=\frac{\left\{a\left(x_2+x_3+x_4\right)+b\right\}-\left\{a\left(x_1+x_2+x_3\right)+b\right\}}{x_4-x_1}$$
$$=a$$

(3)에 의해서 세점 $(x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$를 $g(x)=bx^2+cx+d$가 지나가게 계수 b, c, d를 정하면 $f(x)-g(x)$는 최고차의 계수가 a이고 $x=x_2, x_3, x_4$에서 함숫값이 0이므로

$$f(x)-g(x)=a\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$$
$$\therefore f(x)=a\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)+bx^2+cx+d$$

이다.

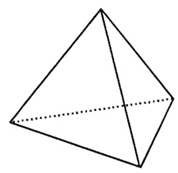
2007 특기자 자연대

문제 1

3차원의 공간 도형에 대하여 알아보자.

3차원의 다면체가 있을 때, 꼭짓점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라 하면 $v-e+f=2$ 임이 알려져 있다. 이 사실을 이용해 다음에 답하여라.

정규다면체 K란 모든 면이 n각형이고, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 일정하고, 면이 3개 이상인 다면체를 말한다. 4면체를 예로 들면,



면 : 삼각형
각 꼭짓점에 3개의 면이 모인다.
$v=4,\ e=6,\ f=4$ 로 $v-e+f=2$

1-1. K를 면이 n-각형인 정규다면체라 하고, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수를 m이라 하자. 이 때, $v,\ e,\ f,\ n,\ m$ 사이의 관계식을 구하고, $v-e+f=2$ 식을 이용해 $e,\ m,\ n$ 사이의 방정식을 이끌어 내라.
(*Hint*) K는 n-각형들을 변을 따라 붙여 만들었음에 착안하라.

1-2. $n=4$, 즉 면이 사각형인 정규다면체는 육면체임을 보여라.

1-3. 면이 육각형 이상인 정규다면체는 존재하지 않음을 보여라.

문제 2

$S=\{(x,\ y,\ z)\in R^3 \mid xy-z=0\}\subset R^3$ 에 대하여, 다음의 물음에 답하라. (R : 수직선, R^2: 좌표 평면, R^3: 좌표 공간)

2-1. R^2을 정의역으로 하고, S를 공역으로 하는 다음의 함수 ϕ는 일대일대응임을 설명하여라.

$$\phi :\ R^2 \rightarrow S,\ \phi(x,\ y)=(x,\ y,\ xy)$$

2-2. 임의의 실수 $a, b\in R$에 대하여 l_a를 좌표평면 위의 점 $(a,0)$을 지나고 y축에 평행인 직선, 그리고 m_b를 점 $(0,b)$를 지나고 x축에 평행인 직선이라고 하고, $L_a,\ M_b$를 각각

$$L_a=\{\phi(x,\ y)\in R^3 \mid (x,\ y)\in l_a\}\subset S$$

$$M_b = \{\phi(x,\,y) \in R^3 \mid (x,\,y) \in m_b\} \subset S \quad \text{라 하자.}$$

(1) 두 개의 서로 다른 실수 $a,\,a'$에 대하여 L_a , $L_{a'}$ 은 꼬인 위치에 있는 직선임을 설명하라. 두 개의 서로 다른 실수 $b,\,b'$에 대하여, M_b , $M_{b'}$ 도 역시 꼬인 위치에 있는 직선임을 설명하라.

(2) 임의의 실수 $a,\,b$에 대하여 $L_a,\ M_b$ 는 한 점에서 만남을 설명하라.

(3) S는 직선 $L_a\,(a\in R)$들의 합집합임을 설명하라. $M_b\,(b\in R)$들의 합집합도 S임을 설명하라. 즉, $S = \bigcup_{a\in R} L_a = \bigcup_{b\in R} M_b$ 임을 설명하라.

2-3. 직선 $N \subset R^3$ 과 $x,\,y,\,z$ 에 관한 2차 다항식 $F(x,\,y,\,z)$의 궤적

$$T = \{(p_1,\,p_2,\,p_3) \in R^3 \mid F(p_1,\,p_2,\,p_3) = 0\}$$

에 대하여, N위의 3개의 점이 T에 포함되면, T는 직선 N을 포함함을 증명하라. (여기서, $x,\,y,\,z$ 에 관한 2차 다항식이란, $\sum_{0\le r+s+t\le 2} a_{r,s,t}\,x^r y^s z^t$의 꼴을 가지며 ($a_{r,s,t}$는 실수), $r+s+t=2$인 어떤 음이 아닌 정수들 $r,\,s,\,t$에 대하여 $a_{r,s,t} \ne 0$ 임을 뜻한다. 예로서, $xy-z,\ 1+x+y+xy+yz$ 등은 2차 다항식이나 $1+x+y+xy+x^2z$는 이차의 다항식이 아니다.)

2-4. $a_1,\,a_2,\,a_3$ 는 주어진 서로 다른 실수이고, $L_{a_1},\ L_{a_2},\ L_{a_3} \subset S$ 에서 각기 3개씩, 모두 9개의 점들을 선택하였다; $L_{a_1},\ L_{a_2},\ L_{a_3}$는 2-2에서 정의된 S 위에 있는 서로 꼬인 위치에 있는 3개의 직선이다. $x,\,y,\,z$ 에 관한 2차 다항식 $F(x,\,y,\,z)$의 궤적

$$T = \{(p_1,\,p_2,\,p_3) \in R^3 \mid F(p_1,\,p_2,\,p_3) = 0\}$$

이 선택된 9개의 점들을 포함한다면,

(1) T는 S 를 포함함을 증명하라.

(2) $T = S$ 임을 증명하라.

선생님 클리닉

문제1은 다면체에서 점, 선, 면의 수를 이용하여 정규다면체의 성질을 이끌어 내는 과정을 제시하고 있으며, 문제2는 공간에서 한 직선위의 세 점을 포함하는 이차곡면은 그 직선을 포함한다는 사실을 전개하는 과정을 묻고 있는 문항이다.

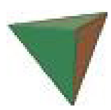
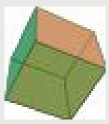
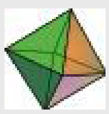
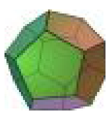
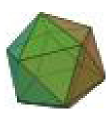
관련 학습

<정다면체>

정다면체는 각 면이 모두 합동인 정다각형이고, 또 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 같은 볼록한 다면체를 말한다. 플라톤의 다면체라고도 한다. 플라톤은 정다면체가 5가지 뿐이라는 사실이 몹시 신기했던지 우주를 구성하는 4가지의 원소를 정다면체와 대응시켰다. 흙-정육면체, 불-정사면체, 공기-정팔면체, 물-정이십면체 등 정다면체를 하나씩 대응시켜 정십이면체가 우주를 상징한다고 믿었다고 한다. 5종류의 정다면체는 고대 그리스에서 발견되었으며, 유클리드의 《기하학원본》 최종권(제13권)에 기술되어 있다. 정사면체·정육면체·정팔면체는 오래전부터 알려져 있었지만, 정십이면체·정이십면체는 피타고라스학파에 의해 발견되었다.

1. 오일러의 공식

정다면체에서 V(점의 개수) - E(선의 개수)+ F(면의 개수)=2 가 성립한다.

다면체	그림	V(점의 개수)	E(선의 개수)	F(면의 개수)	V-E+F
정사면체		4	6	4	2
정육면체		8	12	6	2
정팔면체		6	12	8	2
정십이면체		20	30	12	2
정이십면체		12	30	20	2

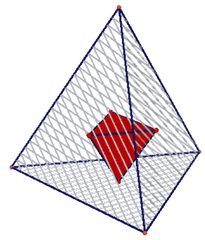
2. 듀얼 정다면체

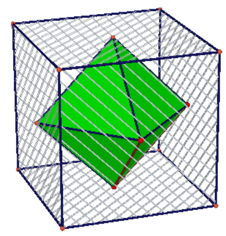
◉정사면체와 정사면체

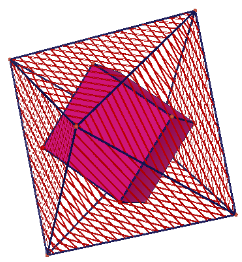
정사면체는 한 꼭짓점에 3개의 면이 모여 있으므로 각 꼭짓점에서 인접한 면의 중심을 이으면 정삼각형이 된다. 이 때, 정사면체의 한 면은 정삼각형으로 되어 있으므로 새로운 다면체는 한 꼭짓점에 정삼각형이 세 개씩 모인 다면체, 즉 정사면체가 되어 자기 자신과 dual이 된다.

◉정육면체와 정팔면체

정육면체의 한 꼭짓점에는 3개의 면이 모여 있으므로 각 꼭짓점에서 인접한 면의 중심들을 이으면 정삼각형이 된다. 이 때, 정육면체의 한 면은 정사각형으로 되어 있으므로 새로운 다면체는 한 꼭짓점에 정삼각형이 네 개씩 모인 입체, 즉 정팔면체가 되는 것이다. 반대로 정팔면체의 면의 중심을 연결하면 정팔면체는 한 꼭짓점에 네 개의 면이 모여 있으므로 정사각형이 되고, 정팔면체의 한 면의 모양은 정삼각형이므로 한 꼭짓점에 정사각형이 세 개씩 모인 입체, 즉 정육면체가 된다. 정육면체의 각 면의 중심을 연결한 다면체는 정팔면체, 정팔면체의 각 면의 중심을 연결한 다면체는 정육면체로 이러한 새로운 다면체를 처음 다면체의 dual이라 한다. 두 다면체가 서로 dual이라면 두 다면체의 면의 수와 꼭짓점의 수는 서로 대응되며 모서리의 수는 같게 된다.

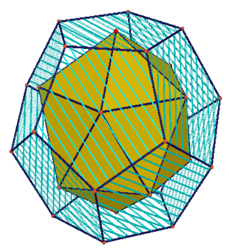


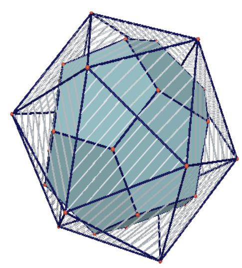




◉정십이면체와 정이십면체

정십이면체와 정이십면체의 경우도 마찬가지이다. 정십이면체는 한 꼭짓점에 3개의 면이 모여 있으므로 각 꼭짓점에 인접한 면의 중심들을 이으면 정삼각형이 된다. 이 때, 정십이면체의 한 면은 정오각형으로 되어 있으므로 새로운 다면체는 한 꼭짓점에 정삼각형이 다섯 개씩 모인 다면체, 즉 정이십면체가 되는 것이다. 반대로 정이십면체의 면의 중심을 연결하면 정이십면체는 한 꼭짓점에 다섯 개의 면이 모여 있으므로 정오각형이 되고, 정이십면체의 한 면의 모양은 정삼각형이므로 한 꼭짓점에 정오각형이 세 개씩 모인 다면체, 즉 정십이면체가 된다. 그러므로 정십이면체와 정이십면체도 서로 dual인 관계에 있다.





예시 답안

문제 1

(1) n각형의 면이 f개 있고, 각 변은 2번씩 중복되어 세어지므로,

변의 개수는 $e=\dfrac{f\times n}{2}$ ⋯①

v개의 꼭짓점 각각에 모이는 면의 개수가 m개이고, 각 면은 n번 중복되어 세어지므로, 면의 개수는 $f=\dfrac{v\times m}{n}$ ⋯②

$v-e+f=2$ ⋯③ 식을 이용해 e, m, n 사이의 식을 이끌어 내야 하므로,
①, ②를 각각 f, v에 대해 정리하여 ③에 대입하면 된다.

실제로, $f=\dfrac{2e}{n}$, $v=\dfrac{fn}{m}=\dfrac{\frac{2e}{n}n}{m}=\dfrac{2e}{m}$ 를 ③에 대입하면,

$$\frac{2e}{m}-e+\frac{2e}{n}=2 \iff \frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{e}=\frac{1}{2}$$

(2) $n=4$ 이므로 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{4} \iff e=\dfrac{4m}{4-m}$ ⋯④

한편, 변의 개수 e는 $e>0$ 이어야 하므로 $e=\dfrac{4m}{4-m}>0$

즉, $0<m<4 \iff m=1$ 또는 $m=2$ 또는 $m=3$
그런데, 한 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 2이하인 경우는 생길 수 없으므로
$m=3$ 이 된다. 결국, ④에 의해 $e=12$

따라서, 1-1에서 얻은 식에 의해 $f=\dfrac{2e}{n}=\dfrac{2\times 12}{4}=6$ 이 되어

$n=4$인 정규다면체는 육면체라고 말할 수 있다.

다른풀이

$\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{4}$과 $f=\dfrac{e}{2}(\geq 3)$이므로,

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{2f}=\frac{1}{4} \iff 4f-2m=mf \iff mf-4f+2m=0 \iff (m-4)(f+2)=-8$$

$f+2\geq 5$이므로 $f+2=8$, $m-4=-1$이다. 즉, $f=6$, $m=3$이므로 주어진 정규다면체는 육면체이다.

(3) $n \geq 6$ 인 정규다면체가 존재한다고 가정하자.

그러면, $\frac{1}{n}=\frac{1}{e}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{6}$ ($\because$ 1-1에 의해)

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{m}-\frac{1}{e}\geq\frac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ m\leq\frac{3e}{e+3}$ 이 된다.

한편, $m\leq\frac{3e}{e+3}=3-\frac{9}{e+3}<3$ 이 되어

m이 될 수 있는 것은 1 또는 2 뿐이므로 모순!

따라서, 면이 육각형 이상인 정규다면체는 존재하지 않는다.

다른풀이

$n \geq 6$ 인 정규다면체가 존재한다고 가정하자.

$\frac{1}{n}=\frac{1}{e}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{6}$($\because$ 1-1에 의해) $\Leftrightarrow\ \frac{1}{m}-\frac{1}{e}\geq\frac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ \frac{e-m}{me}\geq\frac{1}{3}\ \Leftrightarrow$

$3(e-m)\geq me\ \Leftrightarrow\ me-3e+3m\leq 0\ \Leftrightarrow\ (m-3)(e+3)+9\leq 0$

$m-3\geq 0$, $e+3>0$ 이므로 모순!

따라서, 면이 육각형 이상인 정규다면체는 존재하지 않는다.

문제 2

2-1. R^2을 정의역, $S=\{(x, y, z)\in R^3 \mid xy-z=0\}\subset R^3$를 공역으로 하는 함수 $\phi : R^2 \to S$, $\phi(x, y)=(x, y, xy)$ 가 일대일대응임을 증명하기 위해서는 다음의 두 가지를 보이면 된다.

(i) 1-1 함수이다.

임의의 $\phi(x_1, y_1)\in S$, $\phi(x_2, y_2)\in S$ 에 대하여,

$$\phi(x_1, y_1)=\phi(x_2, y_2)$$
$$\Leftrightarrow (x_1, y_1, x_1y_1)=(x_2, y_2, x_2y_2)$$
$$\Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$$
$$\Leftrightarrow (x_1, y_1)=(x_2, y_2)$$

(ii) 치역과 공역이 같은 함수이다.

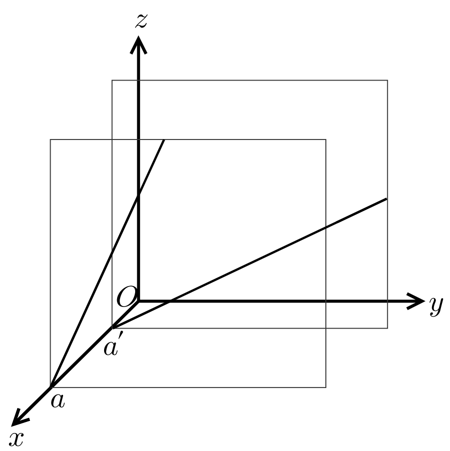
공역의 임의의 원소 $(x, y, z)\in S$ 에 대하여

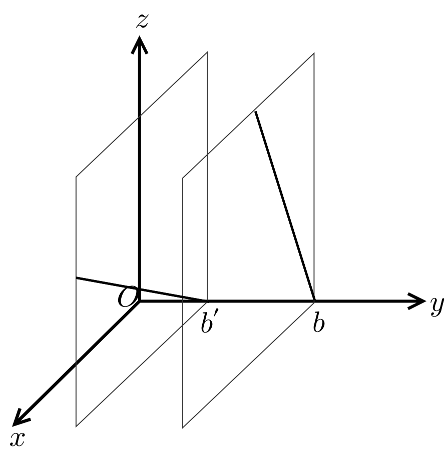
$$(x, y, z)=(x, y, xy)=\phi(x, y)$$

$(x, y)\in R^2$이므로 위로의 함수이다.

2-2. (1) $L_a=\{(a, y, ay)\in R^3 \mid y\in R\}$이고 이것은 $(a, 0, 0)$을 지나고 방향벡터가 $(0, 1, a)$인 직선을 나타낸다. 그러므로 L_a는 평면 $x=a$ 위에 있는 직선이다.

또, $a \neq a'$인 a'에 대하여 $L_{a'}$는 평면 $x=a'$ 위에 있으면서 $(a', 0, 0)$을 지나고 방향벡터가 $(0, 1, a')$인 직선이다.
두 평면 $x=a$와 $x=a'$는 평행하고 두 직선의 방향벡터는 다르므로 두 직선은 꼬인 위치에 있는 직선이다.
마찬가지로, $M_b = \{(x, b, xb) \in R^3 \mid x \in R\}$이고 이것은 평면 $y=b$ 위에 있으면서 $(0, b, 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1, 0, b)$인 직선을 나타낸다.
또, $b \neq b'$인 b'에 대하여 $M_{b'}$는 평면 $y=b'$ 위에 있으면서 $(0, b', 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1, 0, b')$인 직선이다.
두 평면 $y=b$와 $y=b'$는 평행하고 두 직선 M_b, $M_{b'}$의 방향벡터는 다르므로 두 직선은 꼬인 위치에 있다.





다른풀이

(i) L_a는 직선이다.

l_a가 xy-평면 위의 점 $(a, 0)$을 지나고 y축에 평행인 직선이므로, L_a의 모든 원소는 좌표공간에서의 평면 $x=a$ 에 포함된다.

즉, L_a가 평면 $x=a$에서 직선임을 보이면 된다.

실제로, 평면 $x=a$에 $(y, z)=(0, 0)$을 원점으로 y, z 좌표축을 설정하자.

그러면, L_a의 임의의 두 점 P, Q는 적당한 $y_1, y_2 \in R$에 대하여 $\mathrm{P}(y_1, ay_1)$, $\mathrm{Q}(y_2, ay_2)$로 표현할 수 있고, ($\overline{\mathrm{PQ}}$의 기울기)$=\dfrac{ay_2-ay_1}{y_2-y_1}=a$(일정)임을 알 수 있다.

따라서, L_a는 평면 $x=a$ 에 포함된 직선이다.

마찬가지로, $L_{a'}$, M_b, $M_{b'}$은 각각 평면 $x=a'$, 평면 $y=b$, 평면 $y=b'$에 포함된 직선이다.

(ii) 두 직선 L_a, $L_{a'}$ 은 꼬인 위치에 있다.

(증명) 귀류법을 이용

두 직선 L_a, $L_{a'}$이 꼬인 위치에 있지 않다고 가정하자.

그러면, 두 직선은 만나거나 평행이 된다.

그런데, 평면 $x=a$ 와 평면 $x=a'$ 을 각각 α, β 라 할 때 $\alpha // \beta$ 이고,

직선 L_a, $L_{a'}$ 이 각각 α, β에 포함되어 두 직선이 만나지 않으므로,

두 직선 L_a, $L_{a'}$은 평행이 되어야 한다.($L_a // L_{a'}$ ⋯①)

그런데, 직선 L_a의 평면 β로의 정사영을 $L_{\overline{a}}$ 라 하면,

정사영의 성질에 의해 $L_a // L_{\overline{a}}$ ⋯② 이어야 한다.

그러면, ①, ②에 의해 평면 β위의 두 직선 $L_{a'}$, $L_{\overline{a}}$는 평행이거나 일치되어야 한다. 하지만, 이것은 모순이다.

왜냐하면, ($L_{a'}$의 방정식)은 $z=a'y$, ($L_{\overline{a}}$ 의 방정식)은 $z=ay$ 가 되어

두 직선 $L_{a'}$, $L_{\overline{a}}$이 서로 만나기 때문이다.

따라서, 두 직선 L_a, $L_{a'}$ 은 꼬인 위치에 있다.

마찬가지 방법으로, 두 직선 M_b, $M_{b'}$도 서로 꼬인 위치에 있다.

(2) $L_a=\{(a,\, y,\, ay)\in R^3 \mid y\in R\}$, $M_b=\{(x,\, b,\, xb)\in R^3 \mid x\in R\}$ 이므로

$$(a,\, b,\, ab)\in L_a\cap M_b$$

이다.

또, $(x,\, y,\, xy)\in L_a\cap M_b$ 라면, $x=a$, $y=b$, $xy=ab$ 이므로 L_a, M_b는 한 점에서만 만난다.

(3)

$$\begin{aligned}
S&=\{(x,\, y,\, z)\in R^3 \mid xy-z=0\}\\
&=\{(x,\, y,\, xy)\in R^3 \mid x,\, y\in R\}\\
&=\{(x,\, y,\, xy)\in R^3 \mid (x,\, y)\in R^2\}\\
&=\bigcup_{a\in R}\{(a,\, y,\, ay)\in R^3 \mid y\in R\}\\
&=\bigcup_{a\in R} L_a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S&=\{(x,\, y,\, z)\in R^3 \mid xy-z=0\}\\
&=\{(x,\, y,\, xy)\in R^3 \mid x,\, y\in R\}\\
&=\{(x,\, y,\, xy)\in R^3 \mid (x,\, y)\in R^2\}\\
&=\bigcup_{b\in R}\{(x,\, b,\, bx)\in R^3 \mid x\in R\}\\
&=\bigcup_{b\in R} M_b
\end{aligned}$$

2-3. N을 한 점 (x_0, y_0, z_0)를 지나면서 벡터 $\vec{d}=(a, b, c)$에 평행인 직선이라 하면,
직선 N 위의 점(x, y, z)은 적당한 실수 t에 대하여

$$(x, y, z)=(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$$

라 표현할 수 있다.

한편, $F(x, y, z)$이 x, y, z 에 관한 2차의 다항식이므로
$F(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)=0$ 은 t에 관한 2차의 등식이 된다.

즉, $F(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)=pt^2+qt+r=0$ 이라 할 수 있다.

그런데, 가정에 의해 직선 N위의 3개의 점이 T에 포함되므로 2차의 등식 $F(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)=0$ 을 만족하는 t가 3개 존재하게 된다.

결국, $F(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)=0$ 은 t에 대한 이차방정식이 될 수 없다.

이것은 2차의 등식 $F(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)=0$이 t에 대한 항등식이고
$p=q=r=0$ 이 된다. 즉, 모든 실수 t에 대해 $F(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)=0$이 만족된다. 따라서, $N\subset T$이다.

2-4. (1) 위 2-3의 결과에 의해 세 직선 $L_{a_1}, L_{a_2}, L_{a_3}$ 모두에 대하여

$$L_{a_1}\subset T,\ L_{a_2}\subset T,\ L_{a_3}\subset T$$

또한, 위 2-2의 (2)에 의해 임의의 실수 b에 대하여
직선 M_b는 세 직선 $L_{a_1}, L_{a_2}, L_{a_3}$ 모두와 교점을 가진다.(이를 P, Q, R 이라 하자.)

그러면, 세 점 P, Q, R 모두 T에 포함되므로 $M_b\subset T$

결국, 임의의 실수 b에 대하여 $M_b\subset T$

따라서, $S=\bigcup_{b\in R} M_b\subset T$

(2) $F(x, y, z)$는 이차다항식이므로
$F(x, y, z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5yz+a_6zx+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}$ (a_i는 실수)
이라 할 수 있다. $S\subset T$이므로 $z=xy$로 두면 이차다항식이 되기 위해서$a_3=a_5=a_6=0$이어야 하고 따라서 모든 실수 x, y에 대해

$$F(x, y, z)=a_1x^2+a_2y^2+a_4xy+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}=0$$

이다. $z=xy$로 두고 정리하면,

$$a_1x^2+a_2y^2+(a_4+a_9)xy+a_7x+a_8y+a_{10}=0$$

이고, $a_1=a_2=a_4+a_9=a_7=a_8=a_{10}=0$이다.

즉, $F(x, y, z)=a_4xy+a_9z=a_4xy-a_4z=a_4(xy-z)$이다.

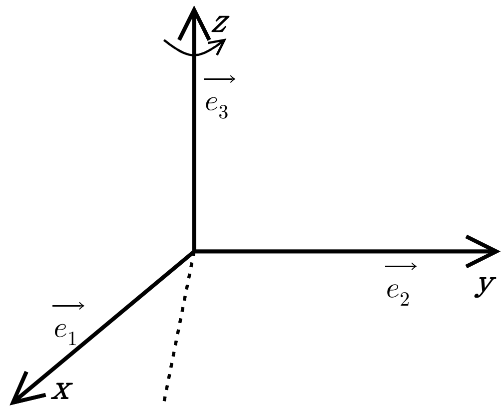
결국, $F(x, y, z)=0 \Leftrightarrow a_4(xy-z)=0 \Leftrightarrow xy-z=0$

따라서, $T=S$

2007 정시 지균 공대

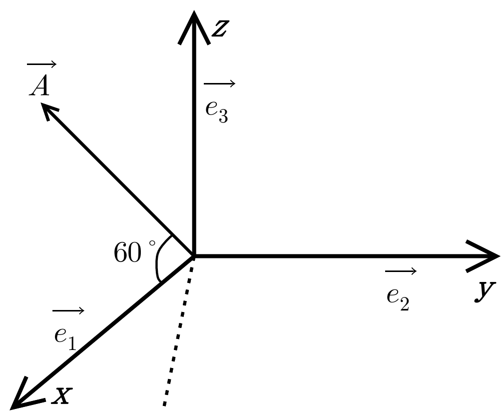
문제 1

서로 수직인 세 단위벡터 $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 를 $\overrightarrow{e_3}$ 를 기준으로 반시계방향으로 30° 씩 회전시킨 벡터를 각각 $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ 라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ 를 구하시오.



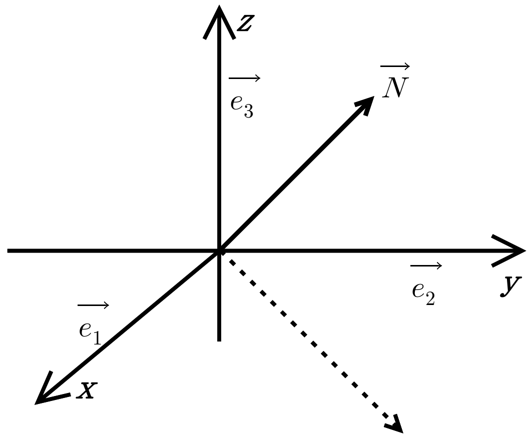
문제 2

zx 평면 위의 $\overrightarrow{A}$ 를 $\overrightarrow{e_3}$ 를 기준으로 반시계방향으로 30° 만큼 회전시킨 벡터를 $\overrightarrow{A'}$ 라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{A'}$ 를 구하시오. (단, $|\overrightarrow{A}|=2$)



문제 3

$\overrightarrow{N}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}\right)$ 라고 하자.



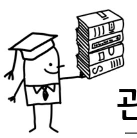
① $\overrightarrow{N}$ 과 $\overrightarrow{e_1}$ 에 모두 수직인 벡터를 구하시오.

② $\overrightarrow{e_1}$ 를 $\overrightarrow{N}$ 을 기준으로 반시계방향으로 30° 만큼 회전시킨 $\overrightarrow{e_1{}'}$ 를 구하시오.

③ 일반적인 벡터 $\overrightarrow{v}$ 를 $\overrightarrow{N}$ 을 기준으로 반시계방향으로 30° 만큼 회전시킨 $\overrightarrow{v'}$ 를 구하는 방법을 설명하시오.

선생님 클리닉

공간에서 임의의 벡터는 일차독립인 세 개의 단위벡터의 일차결합으로 나타낼 수 있다. 이러한 사실에 기초해 주어진 단위벡터를 30° 만큼 회전시킨 새로운 일차독립인 세 개의 단위벡터의 일차결합으로 나타낼 수 있다는 사실을 전개해 가는 과정을 묻고 있는 문항이다. 나아가 주어진 임의의 두 벡터가 일차독립인지 일차종속인지는 판단할 수 있어야 겠다.



관련 학습

<벡터의 일차독립과 일차결합>

좌표공간에서 $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0),\overrightarrow{e_2}=(0,1,0),\overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$이라 하면, 좌표공간의 임의의 벡터 $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,x_3)$는

$$x=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}$$

의 모양으로 표시할 수 있다. 또, i번째의 성분만 1이고 나머지는 모두 0인 n개의 n차

원 벡터를
$\overrightarrow{e_i}(i=1,2,...,n)$라 하면 임의의 n차원 벡터 $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$는

$$x=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+...+x_n\overrightarrow{e_n}$$

의 모양으로 표현할 수 있다.
일반적으로, k개의 벡터 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_k}$와 스칼라 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$에 대하여 다음의 식

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{v_k}$$

를 벡터 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_k}$의 일차결합이라고 한다. 따라서, 임의의 n차원 벡터는 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}$의 일차결합으로 표현할 수 있다.
또, $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}$에서 어느 하나도 나머지 $(n-1)$개의 일차결합으로는 표시할 수 없음을 알 수 있다. 이와 같이, k개의 벡터 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_k}$가 주어졌을 때, 이들 중 어느 하나도 나머지 $(k-1)$개의 벡터의 일차결합으로 표현될 수 없을 때, 벡터 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_k}$는 일차독립이라고 한다. 일차독립이 아닐 때, 즉 어느 한 벡터가 나머지 벡터들의 일차결합으로 표현될 수 있을 때, 벡터 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...,\overrightarrow{v_k}$는 일차종속이라고 한다.

예시 답안

문제 1

$\overrightarrow{e_1}$ 을 $\overrightarrow{e_3}$ 를 기준으로 회전이동시킨다는 것은 그림과 같은 단위원을 생각하면 되므로 $\overrightarrow{e_1}$ 을 $\overrightarrow{e_3}$ 를 기준으로 반시계방향으로 θ 만큼 회전이동시킨 벡터 $\overrightarrow{e_1{}'}$ 은

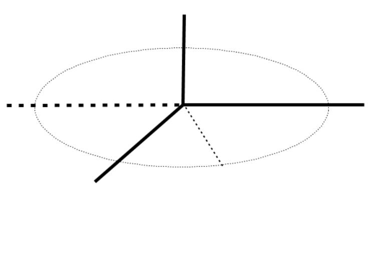
$$\overrightarrow{e_1{}'}=\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

이다. 따라서 반시계방향으로 30° 만큼 회전이동시킨 벡터 $\overrightarrow{e_1{}'}$ 은

$$\overrightarrow{e_1{}'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$$

이다. 이와 같은 방법으로 $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ 를 30° 만큼 회전이동한 벡터$\overrightarrow{e_2{}'}$, $\overrightarrow{e_3{}'}$ 는

$$\overrightarrow{e_2{}'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_2},\quad \overrightarrow{e_3{}'}=\overrightarrow{e_3}$$



문제 2

회전변환의 성질에 의해 $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{e_1}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{e_3}$ 을 $\overrightarrow{e_3}$ 를 기준으로 반시계방향으로 30° 회전 이동시킨 벡터 $\overrightarrow{A'}$ 은 $\overrightarrow{A'}=\overrightarrow{e_1'}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{e_3'}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_1}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{e_2}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{e_3}$ 이다.

문제 3

① $\overrightarrow{N}$ 과 $\overrightarrow{e_1}$ 에 모두 수직인 벡터를 구하시오.

(풀이)

서로 수직인 벡터의 내적은 0임을 이용하여 두 벡터에 모두 수직인 벡터를 구할 수 있다.

$\overrightarrow{N}$ 과 $\overrightarrow{e_1}$ 에 모두 수직인 벡터를 $p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}$ (p, q, r 은 실수)라 두자.

$$\overrightarrow{e_1}\cdot\left(p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}\right)=p=0$$

이다. 또한 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}\right)\cdot\left(q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(q+r)=0$ 이므로 $q=-r$이다.

그러므로 $\overrightarrow{N}$과 $\overrightarrow{e_1}$에 모두 수직인 벡터는 $k\left(\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}\right)$ (k 는 실수)이다.

(다른 풀이)

두 벡터에 모두 수직인 벡터는 외적으로 구할 수 있다.

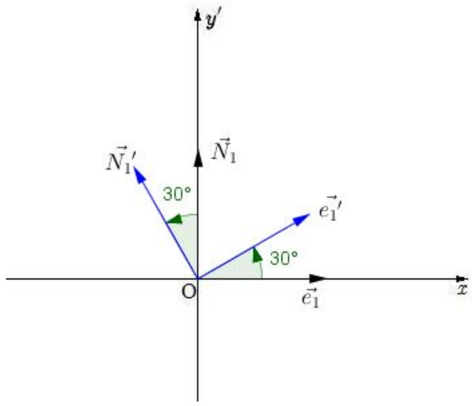
그러므로, $\overrightarrow{N}\times\overrightarrow{e_3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\cdot0-1\cdot0\\1\cdot1-0\cdot0\\0\cdot0-1\cdot1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

그러므로 $\overrightarrow{N}$ 과 $\overrightarrow{e_1}$ 에 모두 수직인 벡터는 $k\left(\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}\right)$ (k 는 실수)이다.

② $\overrightarrow{e_1}$ 를 $\overrightarrow{N}$ 을 기준으로 반시계방향으로 30° 만큼 회전시킨 $\overrightarrow{e_1'}$ 를 구하시오.

(풀이)

①에 의해 $\overrightarrow{N_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}\right)$ 라 두면, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{N_1}$, $\overrightarrow{N}$ 를 새로운 좌표축 X, Y, Z축의 단위벡터로 잡을 수 있다. 그러면 $\overrightarrow{N}$ 을 기준으로 반시계방향으로 θ 만큼 회전시키는 것은 Z의 값은 변화 없이 XY평면에서 회전시키는 것과 같다.



1번 문제에 의해 $\overrightarrow{e_1'}$ 는

$$\overrightarrow{e_1'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{N_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{N_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{e_2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{e_3}$$

이다.

③ 일반적인 벡터 $\vec{v}$ 를 $\overrightarrow{N}$ 을 기준으로 반시계방향으로 30° 만큼 회전시킨 $\overrightarrow{v'}$ 를 구하는 방법을 설명하시오.

(풀이)

1단계 : $\vec{v}$ 와 $\overrightarrow{N}$ 에 모두 수직인 단위벡터 $\vec{n}$을 구한다.

2단계 : $\overrightarrow{N}$ 과 $\vec{n}$에 모두 수직인 단위벡터 $\overrightarrow{m}$을 구한다.

3단계 : 방향을 고려하여 새로운 좌표축 X, Y, Z축의 단위벡터 $\overrightarrow{N}$, $\vec{n}$, $\overrightarrow{m}$ 을 생각한다. 생각하기 편하도록 $\vec{n}$의 $\overrightarrow{m}$방향을 정한다.

4단계 : $\vec{v}$ 를 $\overrightarrow{N}$, $\vec{n}$, $\overrightarrow{m}$ 으로 분해한다. 즉, 일차결합으로 나타낸다.
1번 문제를 이용하여 $\overrightarrow{v'}$ 를 구한다.

2007 정시 공대

문제 1

$f_{\delta}(x)=\begin{cases} 1\ (0\le x<\delta) \\ -1\ (\delta<x\le 1)\end{cases}$ 단, $0<\delta<1$ 인 함수가 있다. 다음 물음에 답하여라.

(1) $F_{\alpha,\beta}(c)=\int_0^1 \{f_{\alpha}(t)-cf_{\beta}(t)\}^2 dt$에서 $F_{\alpha,\beta}(c)$가 최솟값이 되는 c를 $c_{\alpha,\beta}$라고 할 때, $c_{\alpha,\beta}$를 구하여라.

(2) $c_{\alpha,\beta}=0.1$일 때, $\dfrac{F_{\alpha,\beta}(c)}{c^2}$가 최솟값을 가질 때, c의 값은?

문제 2

$P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$의 거리를 $d(P,Q)$라 하고 다음과 같이 정의한다.

$d(P,Q)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$라고 하자. 단, $\max\{a,b\}=\begin{cases} a\ (a\ge b) \\ b\ (b\ge a)\end{cases}$

(1) $O(0,0), P(x,y)$에서 $d(P,O)=r$을 만족하는 점 P의 자취를 2차원 좌표평면에 그려라.

(2) $x=-p$에서 $P(a,b)$까지의 거리의 최솟값은 얼마인가?

(3) $x=-p$에서 $P(x,y)$까지의 최소인 거리와 $F(p,0)(p>0)$까지 거리가 같은 점 $P(x,y)$의 자취를 2차원 평면에 그려라.

선생님 클리닉

우리가 사용하는 두 점 사이의 거리는 두 점을 연결한 선분의 길이이다. 하지만 거리공간에서 두 점 사이의 거리는 다양하게 정의될 수 있다. 문제2에 제시된 것 역시 그것들 중 하나이다. 관련학습에 제시된 것처럼 다른 정의가 제시되었을 때 정답을 구해보는 것도 좋은 방법이 될 수 있을 것이다.

관련 학습

다음 공리를 만족하는 실수치함수 $d: R \times R \to R$를 거리(metric) 또는 거리함수(distance function)라고 한다.

공리1. $d(a,\ b) \geq 0$이고 $d(a,\ a) = 0$
공리2. $d(a,\ b) = d(b,\ a)$(대칭성)
공리3. $d(a,\ c) \leq d(a,\ b) + d(b,\ c)$(삼각부등식)
공리4. $a \neq b$이면 $d(a,\ b) > 0$

두 점 $p(a_1,\ a_2)$, $q(b_1,\ b_2)$에 대하여 $d(p,\ q)$는 다음과 같이 다양한 거리를 정의할 수 있다.

1. 보통거리(usual metric)

$$d(p,\ q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

2. 이산거리(trivial metric)

$$d(p,\ q) = \begin{cases} 0 & (a = b) \\ 1 & (a \neq b) \end{cases}$$

3. 여러 가지 거리

$$d(p,\ q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}\text{(단, } \max\{a,b\} = \begin{cases} a\ (a \geq b) \\ b\ (b \geq a) \end{cases}$$

$$d(p,\ q) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

예시 답안

문제 1

(1) $F_{\alpha,\beta}(c) = \int_0^1 \{f_\alpha(t) - cf_\beta(t)\}^2 dt = \int_0^1 (f_\alpha(t))^2 dt - 2c\int_0^1 f_\alpha(t) f_\beta(t) dt + c^2 \int_0^1 (f_\beta(t))^2 dt$이다. 그런데 $(f_\alpha(t))^2 = 1\,(0 \leq t \leq 1)$이고, 같은 방법으로 $(f_\beta(t))^2 = 1\,(0 \leq t \leq 1)$이다. 따라서 $F_{\alpha,\beta}(c) = 1 - 2c\int_0^1 f_\alpha(t) f_\beta(t) dt + c^2$이고 $c_{\alpha,\beta} = \int_0^1 f_\alpha(t) f_\beta(t) dt$

i) $\alpha=\beta$인 경우,

$\int_0^1 f_\alpha(t)f_\beta(t)dt=1$임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $c_{\alpha,\beta}=1$이다.

ii) $\alpha\neq\beta$인 경우,

논리적 일반성을 잃지 않고, $\alpha<\beta$라고 하자.

$f_\alpha f_\beta(t)=1(0\le t<\alpha)$, $f_\alpha f_\beta(t)=-1(\alpha\le t<\beta)$, $f_\alpha f_\beta(t)=1(\beta\le t\le 1)$, 따라서

$$\int_0^1 f_\alpha(t)f_\beta(t)dt=\int_0^\alpha 1dt+\int_\alpha^\beta(-1)dt+\int_\beta^1 1dt=\alpha-(\beta-\alpha)+(1-\beta)=1-2(\beta-\alpha)$$

따라서 $c_{\alpha,\beta}=1-2(\beta-\alpha)$이다.

i)과 ii)에 의하여 $c_{\alpha,\beta}=1-2|\beta-\alpha|$

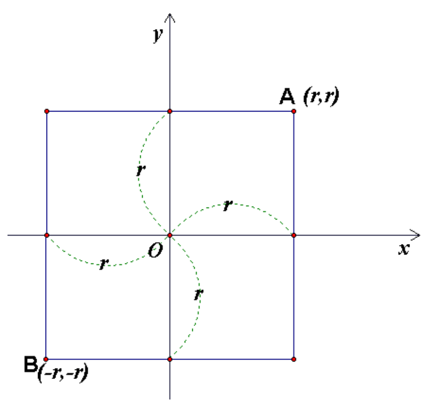
(2) $F_{\alpha,\beta}(c)=1-2c\int_0^1 f_\alpha(t)f_\beta(t)dt+c^2$이고 $c_{\alpha,\beta}=\int_0^1 f_\alpha(t)f_\beta(t)dt=0.1$ 이므로

$$\frac{F_{\alpha,\beta}(c)}{c^2}=\frac{c^2-0.2c+1}{c^2}=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{5c}+1=\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{10}\right)^2+0.99 \text{ 이므로 } \frac{1}{c}=\frac{1}{10}$$

따라서 $c=10$이다.

문제 2

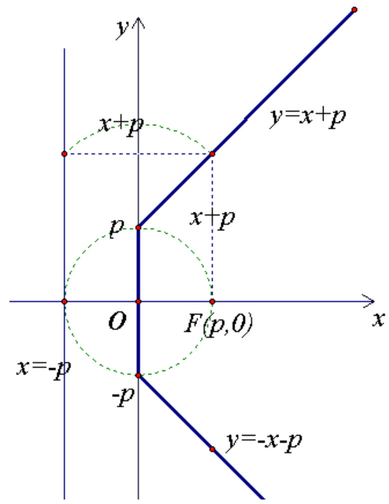
(1) 원점으로부터 x,y축에서 각각 r만큼 떨어진 점이므로 한 변의 길이가 $2r$인 정사각형임.



(2) 직선 $x=-p$ 위의 임의의 점을 $Q(-p,y)$라고 하면 $d(P,Q)=\max\{|a+p|,|y-b|\}$ 인데 y는 변수이고 $|a+p|$는 상수이므로 $d(P,Q)$의 최솟값은 $|a+p|$이다.

(3) $x=-p$에서 $P(x,y)$까지의 최소인 거리는 $|x+p|$이고 $d(P,F)=\max\{|x-p|,|y|\}$이다. 따라서 조건을 만족하려면 $|x+p|=\max\{|x-p|,|y|\}$이어야 한다. 그런데 명백

히 $|x-p| \le |x+p|\,(p>0, x>0)$이므로 $|x+p|=|y|$이다. $\therefore y=\pm(x+p)$이다.
따라서 다음과 같은 그래프를 구할 수 있다.



※ 참고로 $x<0$일 때는 직선 $x=-p$와 점 $P(x,y)$의 최소거리와 $F(p,0)\,(p>0)$까지 거리가 같은 점 $P(x,y)$는 존재하지 않는다.

2006 수시 공대

문제 1

(1) 각 모서리의 길이가 1이고 모서리끼리 이루는 각도가 60°인 도형이 2차원, 3차원, 4차원에 존재한다. 2차원, 3차원에서 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 구하고 4차원에서의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 추론하여라.

(2) 모서리의 길이가 1이고 모서리끼리 이루는 각도가 90°인 도형이 2차원, 3차원, 4차원에 존재한다. 2차원, 3차원에서 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 구하고 4차원에서의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 추론하여라.

(3) 꼭짓점, 모서리, 평면의 개수를 각각 v, e, f라 하면 $v-e+f$의 값이 차원에 따라 다르다는 것을 (1), (2)번을 통해서 확인하고, 이를 일반화시킬 수 있는 방법을 설명하여라.

선생님 클리닉

구체적 사실을 귀납적 추론을 통해 일반화 할 수 있는지를 묻고 있는 문항이다. 각 차원별로 점, 선, 면의 관계를 유추해보면 쉽게 해결될 수 있는 문항이다.

관련 학습

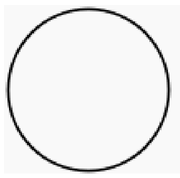
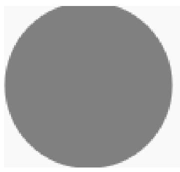
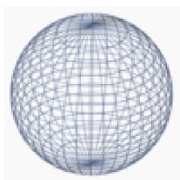
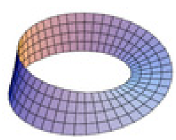
<오일러 표수(특성수 혹은 공식)>

대수적 위상수학(algebraic topology) 혹은 다면체 조합론(Polyhedral combinatorics)에서 오일러 표수(Euler characteristic)란 위상기하학적 불변량으로서, 위상공간 속의 도형이나 구조가 구부러지는 것에 관계가 없는 값이다. 오일러-푸앵카레 표수(Euler-Poincaré characteristic)라고도 부르며, 보통 그리스 문자 χ(Chi, '카이')로 표기한다.

오일러 표수는 원래 다면체에서 정의되었고, 정다면체의 분류를 포함한 다양한 다면체의 정리에 관련하여 이용되었다. 이 개념을 이름 붙인 레온하르트 오일러는 이 개념의 초창기 업적에 공헌이 있고, 현대 수학에서는 호몰로지를 비롯한 다양한 개념과 연결되어 있다.

v를 꼭짓점, e를 모서리, f를 면의 수라고 할 때 오일러 표수 x는 다음과 같다. $x=v-e+f$ 만약 구와 연결 상태가 같을 경우(homeomorphic) 오일러 표수의 값은 그 모양에 관계없이 항상 2가 된다.

우리는 흔히 점(꼭짓점)을 0차원 도형, 선분을 1차원 도형, 선분을 2차원, 입체를 3차원 도형이라고 부른다. 일반적으로 n차원 도형에서 k차원 도형의 개수를 a_k라고 하면, $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n = 1$이라고 추측할 수 있다. 이것이 n차원에서 일반화된 오일러 특성수 혹은 오일러 공식이라고 할 수 있다.

도형의 이름	그림	오일러 표수	도형의 이름	그림	오일러표수
원		0	토러스		2
원판		1	이중토러스		-2
구		2	뫼비우스 띠		0

예시 답안

문제 1

(1)

(꼭짓점의 수) 차원의 증가에 따라 그 수가 하나씩 증가한다.

(모서리의 수) n차원의 꼭짓점의 수와 모서리의 수의 합이 $n+1$차원의 모서리의 수

(면의 수) n차원의 모서리 수와 면의 수의 합이 $n+1$ 차원의 면의 수

따라서 아래 표와 같이 추론할 수 있다.

차원	꼭짓점의 수	모서리의 수	면의 수	입체의 수
1차원(선분)	2	1		
2차원(정삼각형)	3	3	1	
3차원(정사면체)	4	6	4	1
4차원(초사면체)	5	10	10	5

(2)

(꼭짓점의 수) 차원의 증가에 따라 그 수가 두 배씩 증가한다.

(모서리의 수) 하나의 꼭짓점에서 각 차원의 방향으로 선분이 이어지므로

$$(\text{꼭짓점의수})\times(\text{차원의수})\div 2$$

(면의 수) n차원의 각 모서리는 $n-1$개의 면이 공유한다. 즉,

$$(\text{면의수})\times 4\div(n-1)=(\text{모서리의수})$$

따라서, 4차원 도형의 꼭짓점, 모서리, 면의 수는 각각 $16, 32, 24$개가 된다.

또 다르게 생각해서 앞의 차원에서 추론해 보면

(모서리의 수) :

$$(n+1\text{차원의 모서리의 수})=(n\text{차원의 꼭짓점의 수})+2\times(n\text{차원의 모서리의 수})$$

(면의 수) :

$$(n+1\text{차원의 면의 수})=(n\text{차원의 모서리의 수})+2\times(n\text{차원의 면의 수})$$

이다.

따라서, 아래 표와 같이 추론할 수 있다.

차원	꼭짓점의 수	모서리의 수	면의 수	입체의 수
1차원(선분)	2	1		
2차원(정사각형)	2	4	1	
3차원(정육면체)	8	12	6	1
4차원(초육면체)	16	32	24	8

(3)

가) 삼각형으로 이루어진 도형의 각 차원에서 v, e, f관계는 다음과 같다.

2차원 : $v-e+f=3-3+1=1$

3차원 : $v-e+f=4-6+4=2$

4차원 : $v-e+f=5-10+10=5$

나) 사각형으로 이루어진 도형의 각 차원에서 v, e, f관계는 다음과 같다.

2차원 : $v-e+f=4-4+1=1$

3차원 : $v-e+f=8-12+6=2$

4차원 : $v-e+f=16-32+24=8$

따라서 $v-e+f$의 값은 차원에 따라 달라짐

다) 일반화

ⅰ) n차원 공간에서 삼각형으로 이루어진 도형의 수는 $(1+x)^{n+1}$의 이항계수로 이루어져 있다. 이때, 이 도형을 이루는 k차원 도형의 수는 x^{k+1}의 계수 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{\mathrm{k}+1}$ 와 같다

ⅱ) n차원 공간에서 사각형으로 이루어진 도형의 수는 $(2+x)^n$의 이항계수로 이루어져 있다. 이때, 이 도형을 이루는 k차원 도형의 수는 x^k의 계수 ${}_n\mathrm{C}_k 2^{n-k} x^k$ 와 같다.

예를 들어 풀이1과 풀이2의 표와 같이 정삼각형으로 이루어진 4차원 입체에서
$v-e+f={}_5\mathrm{C}_1-{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3=5-10+10=5$이고
정사각형으로 이루어진 4차원 입체에서
$v-e+f={}_4\mathrm{C}_0 2^4-{}_4\mathrm{C}_1 2^3+{}_4\mathrm{C}_3 2^2=16-32+24=8$이다.

2006 수시 자연대

문제 1

함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}=0$을 만족할 때 "$x=a$에서 대칭연속"이라고 정의하자. 함수 f가 모든 점에서 대칭연속일 때 f를 "대칭연속함수"라고 하자. 한편, 다음 극한 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$가 존재할 때 "$x=a$에서 대칭미분가능" 하다고 정의하고, 또한 모든 점에서 대칭미분가능하면 함수 f가 "대칭미분가능"하다고 하고, "대칭도함수" Df를 모든 x에 대하여 $Df(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ 로 정의하자.

(1) 대칭연속함수는 연속함수인가? 연속함수는 대칭연속함수인가?

(2) 대칭불연속 함수의 예를 드시오.

(3) 대칭미분가능한 함수는 대칭연속인가?

(4) 대칭연속인 어떤 함수 f에 대하여 모든 불연속한 점들의 집합을 $S(f)$로 나타내자. 이때 집합 $S(f)$에 속하는 임의의 두 점 간의 거리들의 최솟값이 항상 존재하겠는가?

(5) 대칭연속이지만 대칭미분가능하지 않은 함수의 예를 들어라.

(6) 미분가능하지 않지만 대칭미분가능한 함수의 예를 들고 대칭도함수를 구하라.

(7) 대칭연속함수 f에 대하여 f가 연속인 모든 점 $x=a$에서 $\tilde{f}(a)=f(a)$를 만족하는 연속함수 $\tilde{f}$가 유일하게 존재하겠는가? 이 사실을 이용하여 대칭 연속함수 f의 부정적분과 정적분을 어떻게 정의하면 좋을 것인가 논하라.

선생님 클리닉

연속함수와 미분가능에 대한 정의를 정확히 알고 있어야 하며 이를 바탕으로 새롭게 정의된 대칭연속함수와 대칭미분가능의 연관성을 찾아낼 수 있는지가 중요하다. 이미 알고 있는 개념과 새롭게 정의된 개념을 얼마나 잘 연결시킬 수 있는지를 묻고 있는 문항이다.

관련 학습

1. 연속함수의 정의

일반적으로 함수 $f(x)$ 가

(i) $x=a$ 에서 정의되어 있고,

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ 가 존재하며,

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

가 성립하면, 이 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아니면, 즉 위의 세 조건 가운데 어느 하나라도 성립하지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

2. 미분가능

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

또 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x에 대하여 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

3. 함수의 미분가능과 연속 사이의 관계

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}&=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)\\&=f'(a)\cdot 0=0\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

예시 답안

문제 1

(1) 먼저, 함수 f가 연속함수이면 대칭연속함수이다.

(증명) 함수 f가 연속함수이면,

임의의 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ 이 성립한다.

즉, $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=\lim\limits_{h\to 0}f(a-h)=f(a)$ 이 된다.

따라서, $\lim\limits_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}=\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)-\lim\limits_{h\to 0}f(a-h)=f(a)-f(a)=0$

다음으로, 대칭연속함수는 연속함수가 아닐 수도 있다.

(반례) 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $f(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 인 경우,

(i) $x\neq 0$ 일 때

f가 모든 점에서 연속이므로 f는 대칭연속이다.

(ii) $x=0$ 일 때

$\lim\limits_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}=\lim\limits_{h\to 0}(a+h)-(a-h)=\lim\limits_{h\to 0}2h=0$이므로 대칭연속이지만,

$\lim\limits_{x\to 0}x=0\neq 1=f(0)$ 이므로 불연속이다.

따라서, (i), (ii)에 의해 f는 대칭연속함수이지만 연속함수는 아니다.

(2) 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 $f(x)=\begin{cases}3, & x>0\\ 2, & x=0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 일 때, f는 $x=0$에서 대칭불연속이다.

실제로, $\lim\limits_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}=\lim\limits_{h\to 0+}|3-1|=2\neq 0$

다른 예

$f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases}$ 는 $x=0$에서 대칭불연속이다.

(3) 예.

함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 대칭미분가능한 함수이므로,

임의의 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$이 존재한다.(이것을 m이라 하자).

그러면, $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\times 2h=m\times 0=0$ 이므로 함수 f는 대칭연속 함수이다.

(4) 아니오.

(반례) 함수 $f:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ 를 $f(x)=\begin{cases}1, & x=\pm\frac{1}{n}\\ 0, & x\neq\pm\frac{1}{n}\end{cases}$ (n은자연수)

먼저, 함수 f는 대칭연속함수이다.

(i) $a=\pm\frac{1}{n}$인 경우

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}=\lim_{h\to 0+}|0-0|=0$$

(ii) $a\neq\pm\frac{1}{n}$ 이고 $a\neq 0$인 경우

연속이므로 대칭연속이다. 즉, $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}=0$.

(iii) $a=0$인 경우

$h\neq\pm\frac{1}{n}$ 이면 $f(a+h)-f(a-h)=0-0=0$,

$h=\pm\frac{1}{n}$ 이면 $f(a+h)-f(a-h)=1-1=0$.

그러므로 $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}=0$

따라서, 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a-h)\}=0$

다음으로, f의 모든 불연속한 점들의 집합 $S(f)=\left\{\frac{1}{n}\mid n\text{은자연수}\right\}$의 임의의 두 점 간의 거리(d)의 최솟값이 존재하지 않는다.(증명생략)

(5) 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 를 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$ 로 정의하자.

먼저, 함수 f는 연속함수이므로 대칭연속인 함수이다.
하지만, $x=0$에서 대칭미분가능하지 않다.
실제로,

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{h}-(-\sqrt{h})}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{-\sqrt{-h}-(\sqrt{-h})}{2h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{1}{\sqrt{-h}}=\infty$$

따라서 함수 f는 대칭연속이지만 대칭미분가능하지 않다.

(6) (예) 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 를 $f(x)=|x|$ 로 정의하자.

f가 어떤 점에서 미분가능하면 대칭미분가능하므로, 미분가능하지 않은 점에 대해서만 조사하면 된다.

먼저, 함수 f는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

실제로, $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{|h|}{h}=1$, $\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{|h|}{h}=-1$

하지만, 함수 f는 $x=0$에서 대칭미분가능하다.

실제로, $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{h-h}{2h}=0$,

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h-(-h)}{2h}=0$$

따라서, 함수 $f(x)=|x|$는 미분가능함수는 아니지만 대칭미분가능한 함수이다.

또한, 대칭도함수 Df는

(ⅰ) $a>0$ 일 때,

$$Df(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{(a+h)-(a-h)}{2h}=1$$

(ⅱ) $a<0$

$$Df(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{-(a+h)-(-(a-h))}{2h}=-1$$

결국, $Df(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

(7) 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 은 $x=0$에서 대칭연속이다. 하지만 $x=0$에서 연속함수가 되도록 $\tilde{f}$ 를 잡을 수 없다. 따라서 $\tilde{f}$ 가 존재하지 않을 때는 부정적분과 정적분을 정의하기기 어렵고, 만약 존재한다고 가정했을 때에는 다음과 같이 정의하면 될 것이다.

대칭연속함수 f에 대하여 불연속점들의 집합을 $S(f)$라 할 때,

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\notin S(f)\\ \lim\limits_{h\to0}f(x+h), & x\in S(f)\end{cases}$$

으로 정의하면,

이 사실 대칭연속함수 f의 부정적분과 정적분을 연속함수인 $\tilde{f}$을 통하여 다음과 같이 적절하게 정의할 수 있을 것이다.

* $f(x)$의 부정적분 : $\int f(x)dx = \int \tilde{f}(x)dx$
* 구간 $[a,b]$에서의 $f(x)$의 정적분 :

(i) $a \in S(f)$ 일 때, $\int_a^b f(x)dx = \int_{\lim_{h\to 0}(a+h)}^{b} \tilde{f}(x)dx$

(ii) $c \in (a,b)$, $c \in S(f)$ 일 때, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx$

$$(\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^{\lim_{h\to 0}(a+h)} \tilde{f}(x)dx + \int_{\lim_{h\to 0}(a+h)}^{b} \tilde{f}(x)dx$$

$$= \int_a^b \tilde{f}(x)dx \ )$$

다른풀이

$f(x)$가 $x=a$에서 대칭연속이지만 불연속일 때

(i) $\lim_{x\to a} f(x)$가 정의되지 않는다면 $\tilde{f}$를 $x=a$에서 결정할 수 없다.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$가 정의된다면 $\tilde{f}(a) = \lim_{x\to a} f(x)$로 정의하면 된다.

그러면 $\tilde{f}(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(i) (ii)에서 모든 점에서 극한이 정의된다면 $\tilde{f}$를 정의 할 수 있고 극한이 정의되지 않는 점이 존재하면 $\tilde{f}$를 정의할 수 없다.

모든 점에서 극한이 정의된다는 가정 하에 대칭연속함수 $f(x)$의 부정적분과 정적분을 정의해 보면

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (f\text{는 } x\text{에서 연속}) \\ \lim_{t\to x} f(t) & (f\text{는 } x\text{에서 불연속}) \end{cases}$ 라고 $\tilde{f}(x)$를 정의할 때

$D\int f(x)dx$는 대칭연속의 부정적분,

$D\int_a^b f(x)dx$ 는 대칭연속의 정적분이라 하자.

(i) $F'(x) = \tilde{f}(x)$일 때

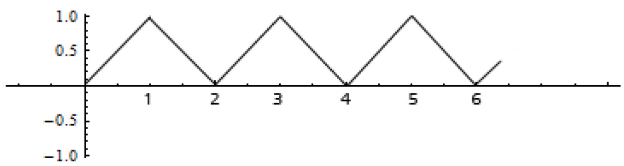
$$D\int f(x)dx = \int \tilde{f}(x)dx = F(x) + C$$

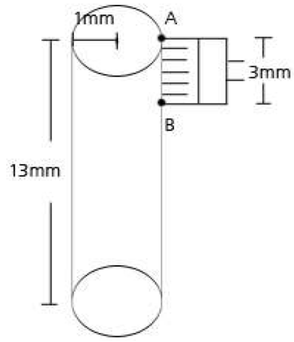
(ii) $D\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}(a + \frac{b-a}{n}k)\frac{b-a}{n}$

2006 정시 공대

문제 1

원통은 회전하고 $\overline{\mathrm{AB}}$는 페인트 붓이며 직선으로 내려간다. A가 윗면에 있을 때를 기준으로 하여 t초 후의 붓 $\overline{\mathrm{AB}}$가 내려가는 속도를 $f(t)$ (mm/sec)의 관계그래프가 아래와 같다.





원통의 회전각속도는 rad/sec를 단위로 하여 $\omega(t)=\dfrac{\pi}{6}\{f(t)+1\}$이다.

(1) 붓 $\overline{\mathrm{AB}}$는 같은 곳을 다시 칠하지 않음을 보여라.

(2) B가 원통의 가장 아래에 도달했을 때 붓이 칠한 도형의 넓이를 구하여라.

선생님 클리닉

점 A가 $3mm$인 곳까지 내려올 동안에 점 A가 회전한 각의 크기가 $360°$보다 큰가를 확인하는 문제이다. $360°$보다 크면 붓 $\overline{\mathrm{AB}}$는 같은 곳을 칠한 것이고 $360°$보다 작으면 붓 $\overline{\mathrm{AB}}$는 같은 곳을 다시 칠하지 않은 것이 된다. 또한 같은 곳을 다시 칠했을 때 도형의 넓이는 어떻게 될지에 대해서도 생각해 볼 필요가 있다.

관련 학습

직선 위를 움직이는 점의 위치와 경과 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$이고 시각 $t=a$에서의 위치가 x_0일 때,

1. 시각 t에서 점 P의 위치 : $x=x_0+\displaystyle\int_a^t v(t)dt$

2. 시각 $t=a$부터 시각 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량 : $\int_a^b v(t)dt$

3. 시각 $t=a$부터 시각 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 : $s=\int_a^b |v(t)|dt$

예시 답안

문제 1

(1) 함수 f의 그래프에서 점 A가 $3mm$ 내려오는데 걸린 시간은 6초이다.
처음 6초 동안 점 A가 회전한 각의 크기 θ는

$$\theta=\int_0^6 \omega(t)dt=\frac{\pi}{6}\int_0^6 \{f(t)+1\}dt=\frac{\pi}{6}(3+6)=\frac{3}{2}\pi$$

이다. 따라서 처음 6초간 붓 $\overline{AB}$는 같은 곳을 다시 칠하지 않는다. 일반적으로 시간 s와 $s+6$초 동안 점 A가 회전한 각의 크기 θ는

$$\theta=\int_s^{6+s} \omega(t)dt=\frac{\pi}{6}\int_s^{6+s} \{f(t)+1\}dt=\frac{\pi}{6}(3+6)=\frac{3}{2}\pi$$

이므로 붓 $\overline{AB}$는 같은 곳을 다시 칠하지 않는다. (물론 그림에서 함수 f는 주기가 2인 그래프임이 가정되었다.)

(2)

등적변환을 이용한 문제이다. (붓 $\overline{AB}$가 이동한 거리)×(붓 $\overline{AB}$의 길이) 가 구하는 넓이이다. (붓 $\overline{AB}$가 이동한 거리)=$r\theta$=(원기둥의 반지름)×(점 A가 회전한 각의 크기) =(점 B가 원통 가장 아래에 도달할 때까지의 점 A가 회전한 각의 크기)

B가 원통의 가장 아래에 도달하려면 점 A가 $10mm$ 이동해야 하므로 점 B가 이동한 시간은 20초이다. 따라서 B가 원통의 가장 아래에 도달할 때까지 회전한 각의 크기 θ는

$$\theta=\int_0^{20} \omega(t)dt=\frac{\pi}{6}\int_0^{20} \{f(t)+1\}dt=\frac{\pi}{6}(10+20)=5\pi$$

이다. 따라서 B가 원통의 가장 아래에 도달했을 때 붓이 칠한 도형의 넓이 S는
$S=3\times5\pi=15\pi$이다. 따라서 넓이는 15π이다.

2006 정시 자연대

문제 1

다음과 같이 주어진 함수 $f: R \to R$ 에 대하여 아래 물음에 답하시오.
(단, m, n은 자연수이다.)

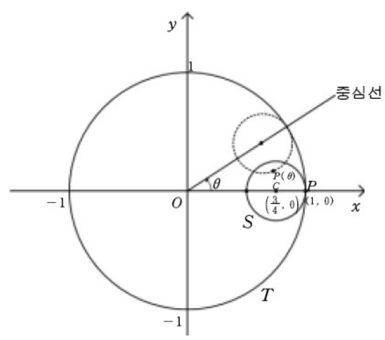
$$f(x)=\begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x^n} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

1-1. $f'(0)$이 존재하고 $x=0$에서 도함수 f'가 연속이 되기 위한 m, n에 관한 조건을 구하시오.

1-2. $n=1$임을 가정하자. 이 때, 함수 f의 k계도함수 $f^{(k)}(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x)=0$ 이 되는 k의 범위를 구하시오.

문제 2

다음 그림과 같이 평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 고정된 원 T와 T의 안쪽으로 내접해서 구르는 중심이 $C\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$ 이고 반지름이 $\dfrac{1}{4}$인 원 S가 있다. 이 때, 구르는 원 S 위의 한 점 P가 그리는 곡선의 자취에 대하여 다음 물음에 답하시오. 단 점 P의 처음 출발 위치는 (1, 0) 이다.



2-1. 양의 x축과 중심선이 이루는 각을 θ라 할 때, 점 P의 자취를 θ에 관한 함수 $P(\theta)$로 나타내면, 다음과 같음을 보이시오. (중심선이란 원점과 구르는 원S의 중심을 잇는 선을 의미한다.)

$$P(\theta)=(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$$

2-2. $0 \le \theta \le \pi$ 일 때, 점 P의 자취로 이루어진 곡선의 개형을 그리시오.

2-3. $0 \le \theta \le \pi$ 일 때, 점 P의 자취로 이루어진 곡선의 길이를 그리시오.

2-4. $0 \le \theta \le \pi$ 일 때, 점 P의 자취로 이루어진 곡선을 x축으로 회전시켜서 얻은 회전체의 부피를 구하시오.(단, $1-\dfrac{9}{5}+\dfrac{9}{7}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{16}{105}$이다.)

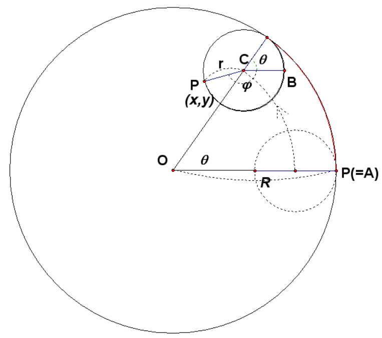
선생님 클리닉

문제1은 함수의 연속과 미분가능을 묻고 있으며 문제2는 hypocycloid의 성질에 대해 묻고 있다. 특히, 문제2에서는 곡선의 길이와 회전체의 부피뿐만 아니라 넓이를 구해보아야 하며 cycloid의 성질에 대해서도 공부해 볼 필요가 있다.

관련 학습

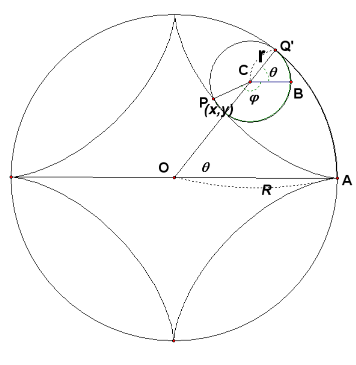
<원의 안쪽을 굴러가는 원 위의 한 점의 자취: hypocycloid>

고대 그리스 시대의 천문학에 관한 가설은 행성이 원의 안쪽을 굴러가는 원운동을 한다는 것이다. 이를 탐구하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 원의 안쪽을 굴러가는 원 위의 한 점 P의 자취를 살펴보기로 하자. 점 P의 정확한 자취의 방정식을 구해야만 별들의 움직임이 정확하게 어떤 경로를 따라서 움직이는지를 판별할 수 있기 때문이다. 그리스 사람들은 이렇게 원의 안쪽을 굴러가는 원 위의 점 P의 자취를 hypocycloid라고 불렀다.



hypocycloid의 자취를 구하기 위해 먼저 앞 절에서 탐구한 cycloid를 떠올려 보자. 즉, 작은 원의 중심의 큰 원의 중심에 대한 회전각 θ와 점 P의 작은 원의 중심에 대한 회전각 ϕ를 이용하여 점 P의 좌표를 표현할 것이다.

오른쪽 그림과 같이 큰 원의 반지름과 작은 원의 반지름을 각각, R, r이라고 하자($R \geq r$). 점 A에 있던 점 P가 호 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}'$만큼 굴러서 점 P로 갔다고 하자. 이 때, 작은 원의 중심은 큰 원의 중심을 중심으로 시계 반대 방향으로 θ만큼, 점 P는 작은 원의 중심을 중심으로 시계 방향으로 ϕ만큼 회전했다고 하자. (큰 원과 작은 원의 반지름 차이로 인해서 작은 원의 회전각은 큰 원보다 크거나 같아야 한다.)



이것은 점 P의 위치가 작은 원의 중심 C에서 x축의 방향으로 $r\cos(-\phi) = r\cos\phi$만큼 y축의 방향으로 $y = r\sin(-\phi) = -r\sin\phi$만큼 평행이동했음을 의미한다.

한편 작은 원의 중심 C의 좌표는 $x = (R-r)\cos\theta,\ y = (R-r)\sin\theta$ 이므로, 점 P의 좌표는 $x = (R-r)\cos\theta + r\cos\varphi,\ y = (R-r)\sin\theta - r\sin\varphi$ ……(1)

이다. 여기서 ϕ와 θ의 관계를 구하자. 작은 원이 굴러간 거리 $\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}'$은 중심각이 $\theta+\phi$인 호 PQ'의 길이와 같다. 즉 $\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}' = R\theta = \overset{\frown}{\mathrm{PQ}}' = r(\phi+\theta)$이므로 $\varphi = \left[\dfrac{R-r}{r}\right]\theta$이다.

이것을 (1)식에 대입하면 hypocycloid의 매개변수로 표현된 함수는 다음과 같다.

$$x=(R-r)\cos\theta+r\cos\left[\frac{R-r}{r}\right]\theta,\ y=(R-r)\sin\theta-r\sin\left[\frac{R-r}{r}\right]\theta \quad \cdots\cdots(2)$$

이 hypocycloid는 다음과 같은 상황에서 그 중요성이 드러난다. $R=2r$이면 (2)식은 $x=r\cos\theta+r\cos\theta=2r\cos\theta$, $y=r\sin\theta-r\sin\theta=0$이다. 이것은 $y=0$이므로 작은 원 위의 한 점이 큰 원의 지름을 왕복하는 직선운동을 한다는 것을 의미한다. 즉, 반지름의 비가 $2:1$인 두 개의 원이 있으면 우리는 그것을 이용하여 직선을 그을 수 있다는 것이다. 이것은 19세기 증기기관의 설계에서 매우 중요하게 사용되는 기법이다. 즉, 원운동을 직선운동으로 바꾸거나 직선운동을 원운동으로 바꾸기 때문이다.

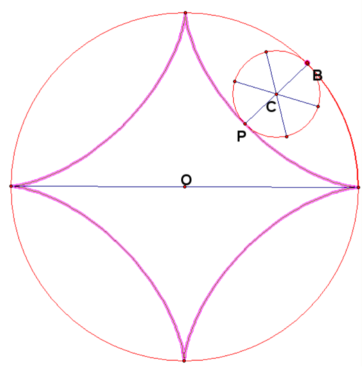
이제 오른쪽 그림과 같은 반지름의 비가 $4:1$인 hypocycloid를 살펴 보자.

위의 (2)식에 $R=4r$을 대입하면

$x=r(3\cos\theta+\cos3\theta)$, $y=r(3\sin\theta-\sin3\theta)$가 된다.

여기에서 삼각함수의 3배각의 공식

$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$, $\sin3\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$을 이용하면



$\cos^3\theta=\dfrac{3\cos\theta+\cos3\theta}{4}$, $\sin^3\theta=\dfrac{3\sin\theta-\sin3\theta}{4}$이므로

$x=4r\cos^3\theta, y=4r\sin^3\theta$이다. 이때, $r=\dfrac{1}{4}$이면

$x=\cos^3\theta, y=\sin^3\theta$이고, 따라서 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$이 된다.

이 도형을 일반적으로 astroid라고 부른다.

예시 답안

문제 1

1-1. 자연수 m, n 에 대하여,

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^m\sin\frac{1}{h^n}}{h}=\lim_{h\to0}h^{m-1}\sin\frac{1}{h^n}$$ 이므로,

$f'(0)$이 존재하려면, $m-1\geq1$ 즉, $m\geq2$ $\cdots$① 이어야 하고,

그 때의 $f'(0)=0$ 이다.

또한, $x=0$에서 도함수 f'가 연속이 되려면, $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$이어야 하므로,

$\lim_{x\to0} f'(x) = \lim_{x\to0}\left(mx^{m-1}\sin\frac{1}{x^n} - nx^{m-n-1}\cos\frac{1}{x^n} \right) = 0$ 가 성립해야 한다.

결국, $m-1 \geq 1,\ m-n-1 \geq 1 \quad \cdots ②$ 이어야 한다.

따라서, ①, ②에 의해 $m \geq n+2$ 가 되어야 한다.

1-2. $n=1$일 때, f의 k계도함수 $f^{(k)}(x)$를 알기 위해 $k=1,2\cdots$를 차례로 구해보면,

$$f'(x) = mx^{m-1}\sin\frac{1}{x} - x^{m-2}\cos\frac{1}{x}$$

$$f^{(2)}(x) = m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x} - mx^{m-3}\cos\frac{1}{x} - (m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x} + x^{m-4}\sin\frac{1}{x}$$

$$\vdots$$

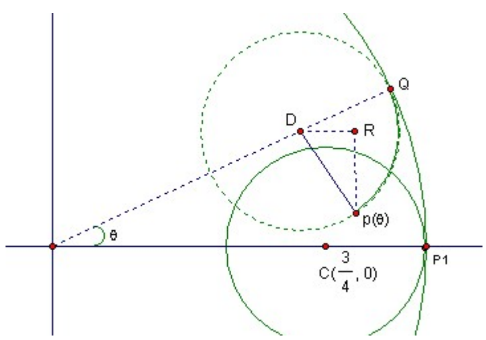
이러한 방법으로 구해보면, $f^{(k)}(x)$는

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \{m(m-1)\cdots(m-(k-1)\}x^{m-k}\sin\frac{1}{x} + \cdots - x^{(m-2k)}\cos\frac{1}{x} & (k\text{가 홀수일때}) \\ \{m(m-1)\cdots(m-(k-1)\}x^{m-k}\sin\frac{1}{x} + \cdots + x^{(m-2k)}\sin\frac{1}{x} & (k\text{가 짝수일때}) \end{cases}$$

따라서, $\lim_{x\to0} f^{(k)}(x) = 0$ 이 되기 위해서는 x의 차수 중 가장 작은 $(m-2k)$이 1 이상 이어야 한다. 즉, $m-2k \geq 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{m-1}{2}$

문제 2

2-1. 먼저, 새로운 원의 중심을 D, 새로운 접점을 Q, p_1의 새로운 원에서의 위치를 $p(\theta)$, 두 점 D, $p(\theta)$에서 x축, y축 각각에 평행인 선을 그어 만나는 점을 R이라 하자. 그러면, 새로운 원의 중심 D의 좌표는 $D\left(\frac{3}{4}\cos\theta, \frac{3}{4}\sin\theta\right) \quad \cdots ①$ 이다.



또한, $\overline{DR}$, $\overline{p(\theta)R}$ 의 길이를 알면, $p(\theta)$의 위치를 정할 수 있다.

이를 위해 $\angle p(\theta)DR$의 크기만 알면 된다.

그런데, $\angle QDR = \theta$ 이므로 $\angle p(\theta)DR = \angle QDp(\theta) - \theta$

한편, 새로운 원에서의 부채꼴 $QDp(\theta)$에서 호 $Qp(\theta)$의 길이는 큰 원에서의 호 Qp_1

의 길이와 같으므로, $\overset{\frown}{Qp(\theta)}=\theta$

결국, $\angle QDp(\theta)=4\theta$ 가 되어 $\angle p(\theta)DR=3\theta$이다.

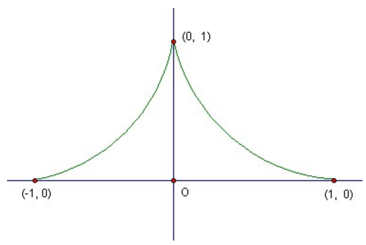
따라서, $\overline{DR}=\dfrac{1}{4}\cos3\theta$, $\overline{p(\theta)R}=\dfrac{1}{4}\sin3\theta$ $\cdots$② 이므로,

①, ②에 의해 $p(\theta)$의 좌표는

$\left(\dfrac{3}{4}\cos\theta+\dfrac{1}{4}\cos3\theta,\ \dfrac{3}{4}\sin\theta-\dfrac{3}{4}\sin3\theta\right)=(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$이다.

왜냐하면, $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$, $\sin3\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$

2-2. (2-1)에 의해 P의 자취는 $x=\cos^3\theta, y=\sin^3\theta$ 이므로, 매개변수 θ를 소거하면 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 이 되어 $0\le\theta\le\pi$ 에서의 그래프의 개형은 다음과 같다.



실제로, 주어진 함수는

$\dfrac{dy}{dx}=-\tan\theta$ 이므로, $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 감소, $\dfrac{\pi}{2}<\theta\le\pi$ 에서 증가상태이고,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{3\cos^4\theta\sin\theta}>0$ 이므로, 항상 아래로 볼록이 됨으로 위와 같은 모양이 됨을 확인할 수 있다.

2-3. 점 P의 자취로 이루어진 곡선의 길이를 l 이라 하자.

P의 자취는 $x=\cos^3\theta, y=\sin^3\theta$ 이므로,

$$l=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\cos^4\theta\sin^2\theta+9\sin^4\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos\theta\sin\theta\,d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\sin\theta\,d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,d\theta=3$$

2-4. $0\le\theta\le\pi$ 일 때, 점 P의 자취로 이루어진 곡선을 x축으로 회전시켜서 얻은 회전체의 부피를 V라 하자.

그러면, $V=2\pi\int_{0}^{1} y^2 dx$ $(x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta$ 이므로 θ에 대한 식으로 치환)

$$= 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^6\theta \cdot 3\cos^2\theta(-\sin\theta)d\theta \quad (\cos\theta = t\text{로 치환})$$

$$= 6\pi\int_{0}^{1}(1-t^2)^3\, t^2 dt$$

$$= 6\pi\left(-\frac{1}{9}+\frac{3}{7}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)$$

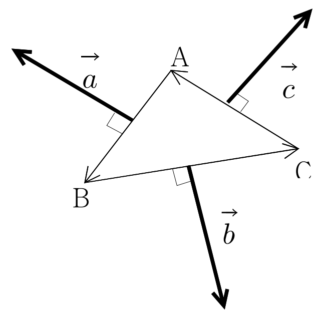
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}+\frac{9}{7}-\frac{9}{5}+1\right) = \frac{32\pi}{105} \quad \left(\because\ 1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}=\frac{16}{105}\right)$$

다른풀이

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 이므로 $V=2\pi\int_{0}^{1}(1-x^{\frac{2}{3}})^3 dx$ 로 구하면 쉽게 구해진다.

2005 수시 자연

문제 1



1. 임의의 삼각형에서 그림과 같이 각 변에 수직이고 크기는 그 변의 길이와 같은 세 벡터의 합 벡터가 $\vec{0}$ 임을 증명하여라.

2. n차 볼록다각형에서도 위와 같은 벡터들의 합이 $\vec{0}$ 임을 증명하여라.

3. 사면체에서 각 면에 수직이고 그 넓이만큼의 크기를 가진 네 벡터의 합이 $\vec{0}$ 임을 증명하여라.

4. 임의의 볼록다면체에서도 위와 같은 벡터들의 합이 $\vec{0}$ 가 됨을 증명하여라.

문제 2

1. 주어진 삼각형 ABC 의 내부의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{AX}|^2+|\overrightarrow{BX}|^2+|\overrightarrow{CX}|^2$ 이 최소가 되는 점 X가 $\triangle$ABC 의 무게중심임을 증명하여라.

2. 세 점 A$(0,a)$, B$(-1,0)$, C$(1,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC 의 내부의 점 X(m,t)에 대하여 다음에 대하여 답하여라. (단, $a>0$)

(1) t 를 고정하고 m 을 변화시킬 때, $|\overrightarrow{AX}|+|\overrightarrow{BX}|+|\overrightarrow{CX}|$ 가 최소가 되는 점 X가 y 축 위에 있음을 보여라.
(2) (1)에서 구한 최솟값이 최소일 때, t 를 구하여라.

선생님 클리닉

벡터의 기본적인 성질과 내적, 벡터의 크기에 대한 정의를 정확히 이해하고 있다면 해결할 수 있는 문항이다. 기하학적인 벡터 문제는 그림을 이용하면 힌트를 얻을 수 있으며 평면도형 혹은 공간도형이 가지는 기본적인 성질과 벡터와의 관계를 관련지을 수 있는 유추해 본다.

관련 학습

1. 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**이라고 하며, 이것을 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 와 같이 나타낸다. 즉

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

또 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

2. 벡터의 외적(R^3 에서만 정의)

삼차원 공간의 두 벡터 $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ 과 $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ 의 **외적**은 $\vec{u}\times\vec{v}$ 로 표시되고

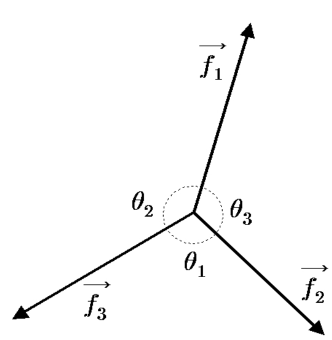
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}u_2 & v_2\\u_3 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_3 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

로 정의된다.

추가 질문

한 점 P에서 세 개의 힘 $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$, $\overrightarrow{f_3}$가 작용하여 평행상태에 있다. 또 오른쪽 그림과 같이 이들의 힘이 이루는 각을 $\overrightarrow{f_2}$와 $\overrightarrow{f_3}$는 θ_1, $\overrightarrow{f_3}$와 $\overrightarrow{f_1}$는 θ_2 , $\overrightarrow{f_1}$와 $\overrightarrow{f_2}$는 θ_3 라고 하면 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\frac{|\overrightarrow{f_1}|}{\sin\theta_1}=\frac{|\overrightarrow{f_2}|}{\sin\theta_2}=\frac{|\overrightarrow{f_3}|}{\sin\theta_3}$$



예시 답안

문제 1

(1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ 각각에 수직인 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 라 하자. 이때,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ 이므로 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|=0$이고 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|^2=0$

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB})=0$$

그리고 $|\overrightarrow{AB}|=|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{BC}|=|\vec{b}|$, $|\overrightarrow{CA}|=|\vec{c}|$ 이고

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-B)=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-B)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

같은 방법으로 하여 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 이다.

$$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB})=0$$

따라서 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

다른풀이 1 (삼각형 세 변에서 얻어지는 벡터들의 합은 영벡터)

삼각형 세 변에서 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ 이고, 이는 삼각형의 한 점을 출발하여 다시 그 점으로 돌아오는 벡터들의 합은 영벡터라는 사실과 같다. 그리고 주어진 삼각형을 90° 회전하여도 한 점에서 출발한 벡터들의 합은 영벡터임에 변함이 없고, 90° 회전한 삼각형의 변들에서 얻어지는 벡터가 곧 문제에서 제시한 세 벡터이므로 세 벡터의 합은 영벡터이다.

다른풀이 2 (정사영과 벡터의 내적)

삼각형의 한 점 A에서 변 $\overline{BC}$에 두 변 $\overline{AB}$, $\overline{CA}$를 정사영시키자. 이 때 정사영된 두 값의 합은 변 $\overline{BC}$의 길이가 된다.

즉, $|\overrightarrow{AB}|\cos B+|\overrightarrow{CA}|\cos C=|\overrightarrow{BC}|$

그리고 주어진 조건에서 $|\overrightarrow{AB}|=|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{BC}|=|\vec{b}|$, $|\overrightarrow{CA}|=|\vec{c}|$이고, 벡터의 크기와 코사인 값의 곱에서 벡터의 내적을 이용하면

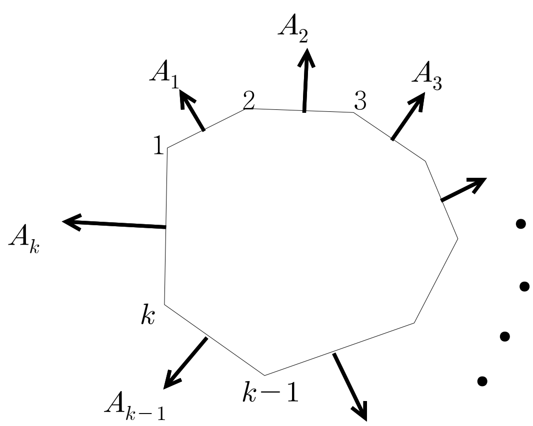
$$|\overrightarrow{AB}|\cos B=-\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|},\ |\overrightarrow{CA}|\cos C=-\vec{c}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

이다.

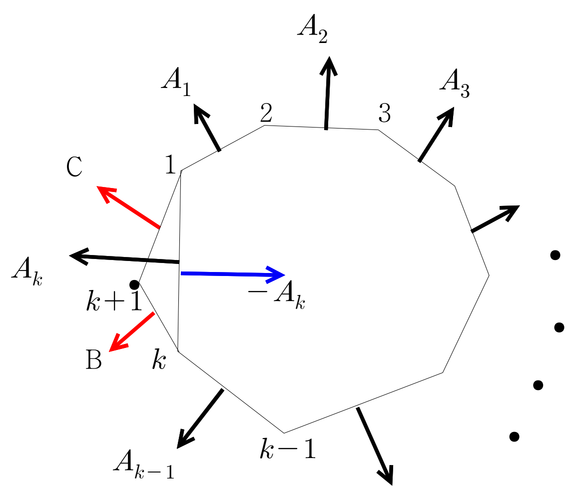
따라서, $|\overrightarrow{AB}|\cos B+|\overrightarrow{CA}|\cos C=-\vec{a}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}-\vec{c}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=|\overrightarrow{BC}|=|\vec{b}|$

위 식의 양변에 $|\vec{b}|$를 곱하면 $-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$ 이고 이는 $-\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{b}$이다.
이때, $|\vec{b}|\neq 0$이고 $\vec{a}+\vec{c}$와 $\vec{b}$가 직교하지 않으므로 $\vec{a}+\vec{c}=-\vec{b}$이다.
따라서 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

(2) 수학적 귀납법을 사용하여 증명하자.
(i) $n=3$ 일 때 성립한다.
(ii) $n=k$ 일 때 성립함을 가정하자.
즉 그림에서 $\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{k-1}}+\overrightarrow{A_k}=\vec{0}$라 하자.



여기에 꼭짓점 $k+1$을 하나 더 붙여 $k+1$ 각형을 만들에 새로 생긴 두 변에 수직인 벡터를 각각 $\vec{B}$, $\vec{C}$ 라 하면 그림과 같이 된다.

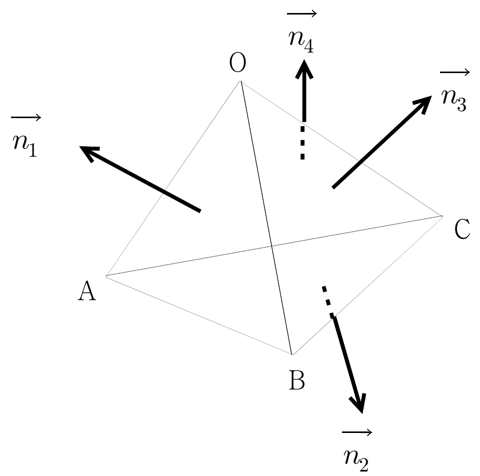


여기서 $\overrightarrow{A_1}+\overrightarrow{A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{k-1}}+\vec{B}+\vec{C}=-\overrightarrow{A_k}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{0}$ ($\because$ 문제1)
즉, $n=k+1$ 일 때도 성립한다.
따라서 임의의 n각형일 때도 성립한다.

다른풀이 (다각형 각 변에서 얻어지는 벡터들의 합은 영벡터)

n차 볼록다각형 n개의 변에서 $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$ 이고, 이는 다각형의 한 점을 출발하여 다시 그 점으로 돌아오는 벡터들의 합은 영벡터라는 사실과 같다. 그리고 주어진 다각형을 90° 회전하여도 한 점에서 출발한 벡터들의 합은 영벡터임에 변함이 없고, 90° 회전한 다각형의 변들에서 얻어지는 벡터가 곧 문제에서 제시한 벡터들이므로 이들 벡터의 합은 영벡터이다.

(3) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 라 하고 각 면에 수직인 벡터를 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{n_4}$ 라 하면,



$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$ 이고, 법선벡터가 각 면의 넓이와 같으므로

$\overrightarrow{n_1}=\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$

$\overrightarrow{n_2}=\frac{1}{2}\{(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{b})\}$

$\overrightarrow{n_3}=\frac{1}{2}(\vec{b}\times\vec{c})$

$\overrightarrow{n_4}=\frac{1}{2}(\vec{c}\times\vec{a})$

$\therefore\ \overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4}$

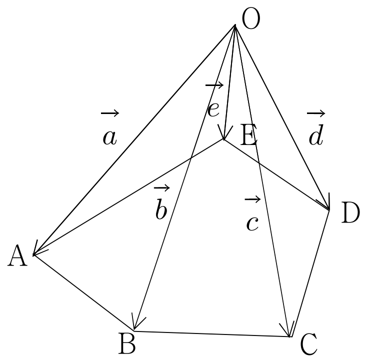
$=\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})+\frac{1}{2}\{(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{b})\}+\frac{1}{2}(\vec{b}\times\vec{c})+\frac{1}{2}(\vec{c}\times\vec{a})$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})+\frac{1}{2}\{(\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{b})\}+\frac{1}{2}(\vec{b}\times\vec{c})+\frac{1}{2}(\vec{c}\times\vec{a})$

$=\vec{0}$

($\because$ 정의에 의해 $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$)

다른풀이 (정사영과 벡터의 내적)



사면체의 한 점 O에서 면ABC에 나머지 세 면을 정사영시키자. 이 때 정사영된 값의 합은 면ABC의 넓이가 된다.

즉, $|\overrightarrow{n_1}|\cos\alpha+|\overrightarrow{n_3}|\cos\beta+|\overrightarrow{n_4}|\cos\gamma=|\overrightarrow{n_2}|$ (면ABC와 나머지 세 면이 이루는 각을 각각 α, β, γ 라고 하자.)

그리고 벡터의 크기와 코사인값의 곱에서 벡터의 내적을 이용하면

$|\overrightarrow{n_1}|\cos\alpha+|\overrightarrow{n_3}|\cos\beta+|\overrightarrow{n_4}|\cos\gamma=|\overrightarrow{n_2}|$

$=-\overrightarrow{n_1}\cdot\dfrac{\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_2}|}-\overrightarrow{n_3}\cdot\dfrac{\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_2}|}-\overrightarrow{n_4}\cdot\dfrac{\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_2}|}=|\overrightarrow{n_2}|$

위 식의 양변에 $|\overrightarrow{n_2}|$를 곱하면

$-\overrightarrow{n_2}\cdot(\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4})=\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_2}$ 이다.

$|\overrightarrow{n_2}|\neq 0$이고 $\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4}$와 $\overrightarrow{n_2}$가 직교하지 않으므로 $\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4}=-\overrightarrow{n_2}$이다.

따라서 $\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\overrightarrow{n_4}=\vec{0}$

(4) 주어진 문제를 수학적 귀납법으로 증명하자.

면의 개수가 n개인 볼록다각형에서 각 면에 수직이고 그 넓이만큼의 크기를 가진 n개의 벡터의 합 $\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\cdots+\overrightarrow{n_n}=\vec{0}$가 성립함을 보이자.

i) $n=4$ 일 때 성립한다.(문제1-3)

ii) $n\leq k(k\geq 4)$일 때 성립한다면 $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\cdots+\overrightarrow{n_p}=\vec{0}(4\leq p\leq k)$를 만족한다고 하자.

면의 개수가 $k+1$개인 볼록다각형은 적당히 잘라내면 면의 개수가 k개 이하인 두 개의 볼록다각형으로 절단할 수 있다. 이렇게 절단된 두 볼록다각형의 면의 개수를 각각 l, m이라 하면

$$\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\cdots+\overrightarrow{n_l}=\vec{0}(4\leq l\leq k)$$
$$\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\cdots+\overrightarrow{n_m}=\vec{0}(4\leq m\leq k)$$

이 성립한다. 여기서 절단면(절단에 의해 새로 생기는 면)에 수직이고 그 넓이만큼의 크기를 가진 벡터를 각각$\overrightarrow{n_l}$, $\overrightarrow{n_m}$이라 하면 $\overrightarrow{n_l}+\overrightarrow{n_m}=\vec{0}$ 이고

$(\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\cdots+\overrightarrow{n_{l-1}})+(\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\cdots+\overrightarrow{n_{m-1}})=\vec{0}(4\leq l,m\leq k)$이 성립한다.

여기서 각각의 절단된 면(절단에 의해 두 개로 나누어진 면)에서 두 개의 벡터는 방향이 같고 더하면 그 넓이만큼의 크기를 가지게 된다. 따라서 방향이 같은 벡터끼리 더하면 정확히 $k+1$개의 벡터들의 합으로 나타내어지고

$\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\cdots+\overrightarrow{n_{k+1}}=\vec{0}$이 성립한다.

그러므로 $n\geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 면의 개수가 n개인 임의의 볼록다각형에서 각 면에 수직이고 그 넓이만큼의 크기를 가진 n개의 벡터의 합 $\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}+\overrightarrow{n_3}+\cdots+\overrightarrow{n_n}=\vec{0}$가 성립한다.

문제 2

1. 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 하자. 점 A, B, C, X 와 G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{g}$ 라 하면 $\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ 이다.

$|\vec{x}-\vec{g}|^2=|\vec{x}|^2-2\vec{x}\cdot\vec{g}+|\vec{g}|^2=|\vec{x}|^2-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{g}|^2$ 이므로

$$|\vec{x}|^2-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}=|\vec{x}-\vec{g}|^2-|\vec{g}|^2\cdots\cdots\cdots①$$

따라서

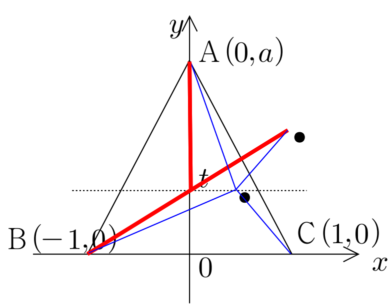
$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{AX}|^2+|\overrightarrow{BX}|^2+|\overrightarrow{CX}|^2\\&=|\vec{x}-\vec{a}|^2+|\vec{x}-\vec{b}|^2+|\vec{x}-\vec{c}|^2\\&=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\&=3|\vec{x}-\vec{g}|^2-3|\vec{g}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2 \quad (\because ①에\ 의해)\end{aligned}$$

그러므로 $|\overrightarrow{AX}|^2+|\overrightarrow{BX}|^2+|\overrightarrow{CX}|^2$가 최소가 되는 경우는 $\vec{x}-\vec{g}=\vec{0}$ 일 때 이다.
즉, $\vec{x}=\vec{g}$ 일 때 이므로 점 X가 $\triangle ABC$ 의 무게중심일 때다.

(1) $|\overrightarrow{AX}|=\sqrt{m^2+(t-a)^2}$ 이므로 이 값은 $m=0$ 일 때 최소이다.
$D(1,2t)$라 두면 $|\overrightarrow{CX}|=|\overrightarrow{DX}|$ 이므로 삼각부등식에 의해

$$|\overrightarrow{BX}|+|\overrightarrow{CX}|=|\overrightarrow{BX}|+|\overrightarrow{DX}|\geq|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{1+t^2}$$

이므로 등호는 $m=0$ 일 때 성립한다.
따라서 $|\overrightarrow{AX}|+|\overrightarrow{BX}|+|\overrightarrow{CX}|$가 최소가 되는 경우는 $m=0$일 때, 즉 점 X가 y 축 위에 있을 때 성립한다.



(2) $|\overrightarrow{AX}|+|\overrightarrow{BX}|+|\overrightarrow{CX}|$의 최솟값은 (1)에 의해 $f(t)=a-t+2\sqrt{1+t^2}$ (단, $0<t<a$)

$$f'(t)=-1+\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t-\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{3t^2-1}{\sqrt{1+t^2}\left(2t+\sqrt{1+t^2}\right)}$$

이므로 $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$일 경우 $f(t)$가 최소일 때 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

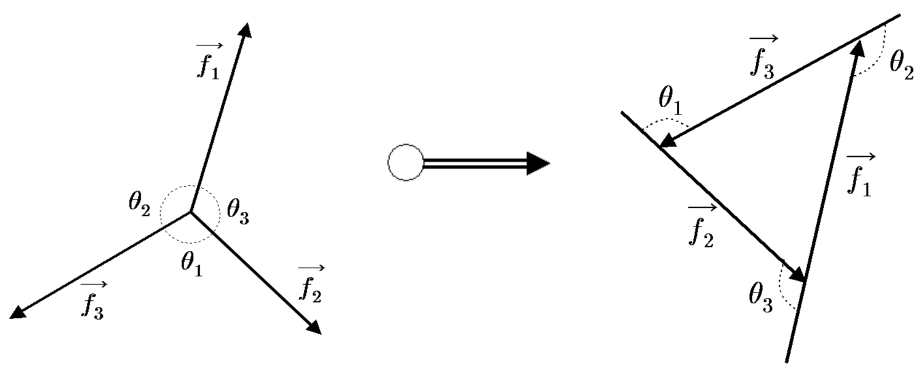
따라서 $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $0<a\le\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 최소일 때가 없다.

추가 질문

[증명] 두 힘 $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$가 평형상태이면 $\overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}=0$ 이므로 세 힘 $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$, $\overrightarrow{f_3}$ 가 평형상태이면 $\overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}+\overrightarrow{f_3}=0$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}=-\overrightarrow{f_3}$ 이므로 $\overrightarrow{f_1}+\overrightarrow{f_2}$ 를 만들기 위한 삼각형을 그리면 세변의 길이가 $|f_1|$, $|f_2|$, $|f_3|$ 인 삼각형이 된다. 여기에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{|\overrightarrow{f_1}|}{\sin\theta_1}=\frac{|\overrightarrow{f_2}|}{\sin\theta_2}=\frac{|\overrightarrow{f_3}|}{\sin\theta_3}$$



2005 정시 자연

문제 1

P가 n차 다항식일 때, 방정식 $P(x)=0$의 근의 개수는 n보다 클 수 없음을 증명하시오.

문제 2

다항식 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 가 다음을 만족한다.

(가) $f_1(x)=x$

(나) $\dfrac{d}{dx}f_n(x)=nf_{n-1}(x) \qquad (n=2,\ 3,\cdots)$

(다) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_n(x)dx=0 \qquad (n=1,\ 2,\cdots)$

$f_2,\ f_3, f_4,\ f_5$를 구해보면 다음과 같다.

$f_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}, f_3(x)=x^3-x,$

$f_4(x)=x^4-2x^2+\dfrac{7}{15},\ f_5(x)=x^5-\dfrac{10}{3}x^3+\dfrac{7}{3}x$

(1) $f_6(x)$를 구하시오.

(2) 방정식 $f_n(x)=0$이 서로 다른 n개의 실근을 가지면, $f_{n-1}(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 정확히 $n-1$임을 보이시오.

(3) 방정식 $f_6(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 정확하게 2임을 보이시오.

※참고 : $7^4-5\cdot 3\cdot 7^3+3^2\cdot 7^3-3^2\cdot 31=64$

(4) 6 이상인 모든 n에 대해서 방정식 $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 n보다 작게 됨을 설명하시오.

선생님 클리닉

모든 다항식은 연속이고 미분가능하다는 사실을 이용하면 쉽게 접근할 수 있는 문제이다. 특히, 미분계수를 계산하여 극댓값과 극솟값을 이용하면 그래프의 개형과 실근의 위치를 파악할 수 있다. 또한, 증명문제에서 수학적귀납법과 함께 귀류법은 매우 중요한 방법임을 인식하고 있는 것도 중요하다.

관련 학습

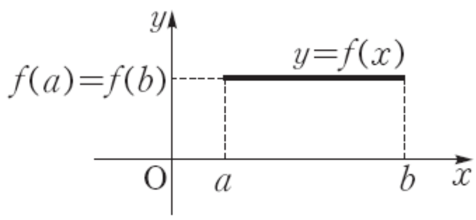
1. 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$ 인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

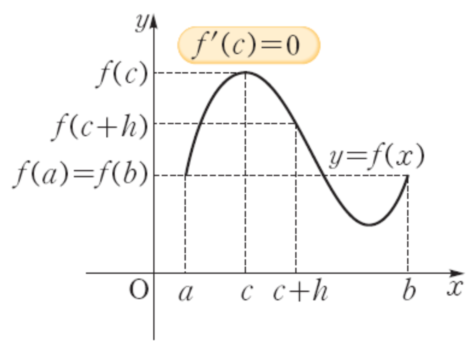
(증명)

ⅰ) 함수 $f(x)$가 상수함수일 때,

열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=0$이다.



ⅱ) 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닐 때,



$f(a)=f(b)$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다. $x=c$에서 최댓값을 가질 때, 절댓값이 충분히 작은 수 $h(h\neq 0)$에 대하여 $f(c+h)-f(c)\leq 0$ 이므로

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0,\ \lim_{h\to -0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

이다. 그런데 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 위의 좌극한과 우극한이 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

같은 방법으로 함수 $f(x)$가 $x=c$ $(a<c<b)$에서 최솟값을 갖는 경우에도 $f'(c)=0$ 임을 보일 수 있다.

2. 평균값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(증명)

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이다.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$라고 하면 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=k(x-a)+f(a)$이다. 이때, $F(x)=f(x)-\{k(x-a)+f(a)\}$ …… ①라고 하면 함수 $F(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $F(a)=F(b)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $F'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. ①의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f'(x)-k$이므로 $F'(c)=f'(c)-k=0$에서 $f'(c)=k$이다.

따라서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

예시 답안

문제 1

방정식 $P(x)=0$의 근의 개수를 m $(m>n)$개라 하고 이를 각각 $x_1, x_2, \cdots, x_m$이라 하자.

$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+1})\cdots(x-x_m)$

가 되고 이를 전개하면 m차 다항식이 되고 이는 $P(x)$가 n차 다항식이라는 사실에 모순이다. 따라서 $P(x)=0$의 근의 개수는 n보다 클 수 없다.

다른풀이 (수학적 귀납법 이용)

(i) 1차다항식 $P(x)=ax+b\,(a\neq 0)$ 은 한 개의 근 $x=-\dfrac{b}{a}$ 를 가지므로 주어진 명제를 만족한다.

(ii) $(n-1)$차 다항식에 대해 주어진 명제를 만족한다고 가정하자.
다항식 $P(x)$의 근이 존재한다면 그 근을 α라 하자. (만약 근이 존재하지 않는다면 근의 개수가 n개이므로 주어진 명제는 성립한다.
따라서 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 인 다항식 $Q(x)$가 존재한다. 이 때, $Q(x)$는 $(n-1)$차 다항식이다.
$P(x)$의 다른 근이 있다면, 이 근은 $Q(x)$의 근이 된다. 가정에 의해 $Q(x)$는 $(n-1)$개 이하의 근을 가지므로 $P(x)$는 많아야 n개의 근을 가지므로 주어진 명제는 성립한다.

문제 2

(1) $f_6(x)=x^6-5x^4+7x^2-\dfrac{31}{21}$

(2) $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근을 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 이라고 하자.
롤의 정리에 의해서 $f'_n(b_i)=0$ 인 b_i 가 각 열린구간 (a_i,a_{i+1})사이에 적어도 하나 존재한다. (단, $i=1,2,\cdots,n-1$) 따라서 $f'_n(x)=0$ 가 적어도$(n-1)$개의 실근을 가지고 [문제1]에 의해 그 근의 개수는 $(n-1)$보다 클 수 없으므로
$f_{n-1}(x)=\dfrac{f'_n(x)}{n}=0$은 정확히 $(n-1)$개의 서로 다른 실근을 가진다.

(3) $f_6(x)=x^6-5x^4+7x^2-\dfrac{31}{21}$에서 $x^2=t$ 라 하면

$f_6(x)=g(t)=t^3-5t^2+7t-\dfrac{31}{21}$ (단 $t\geq 0$)

$g'(t)=0$ 에서 $t=1,\dfrac{7}{3}$ 따라서 극댓값$g(1)=\dfrac{32}{21}$

극솟값 $g(\dfrac{7}{3})=\dfrac{1}{3^3\cdot 7}(7^4-5\cdot 3\cdot 7^3+3^2\cdot 7^3-3^2\cdot 31)=\dfrac{64}{189}$

그래프의 개형을 그려보면 $g(t)=0$의 실근은 1개, 즉 $f_6(x)=0$의 실근은 2개이다.

다른풀이

$f_5(x)=x^5-\frac{10}{3}x^3+\frac{7}{3}x=0$ 의 방정식을 풀어보면 $x=0, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ 알 수 있고, 주어진 조건 (나)에 의해 $\frac{d}{dx}f_6(x)=0$의 근도 $x=0, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ 임을 알 수 있다. (즉, $x=0, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ 은 극값을 갖게 하는 x값들이다.)

$f_6(0)=-\frac{31}{21}$, $f_6(1)=f_6(-1)=\frac{32}{21}$, $f_6\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)=f_6\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)=\frac{64}{189}$ 이므로 사잇값정리에 의해 열린구간$(-1,0), (0,1)$에서 근을 하나씩 가짐을 알 수 있다.

(여기서

$f_6\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)=\left(\frac{7}{3}\right)^4-5\left(\frac{7}{3}\right)^2+7\left(\frac{7}{3}\right)-\frac{31}{21}=\frac{1}{3^2\times 21}(7^4-5\times 3\times 7^3+3^2\times 7^3-3^2\times 31)=\frac{64}{189}$)

(4) [문제1]에 의해 $f_n(x)=0$의 근의 최대 개수는 n개 이므로 $f_n(x)=0$ $(n\geq 6)$의 서로 다른 실근의 개수가 n이 아님을 보이면 된다. 귀류법으로 증명하자.
$f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 n이라 가정하자. 위의 [문제2]의 (2)에 의해 $f_{n-1}(x)=0$의 실근의 개수는 $(n-1)$이 된다. 마찬가지로 $f_{n-1}(x)=0$의 실근의 개수가 $(n-1)$이면 $f_{n-2}(x)=0$의 실근의 개수는 $(n-2)$ 개다. 위와 같은 방법을 계속하면 $f_6(x)=0$의 실근의 개수는 6개가 되어 [문제2]의 (3)에 모순이다. 따라서 6이상인 모든 n 에 대하여 방정식 $f_n(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 n 보다 작게 된다.

2005 수시 정시

문제 1

x, a 가 1보다 큰 실수일 때, $\log_a x$ 를 다음과 같이 정의할 수도 있다.

$$\log_a x = \frac{\int_1^x \frac{1}{t} dt}{\int_1^a \frac{1}{t} dt}$$

(1) 부등식 $0 < \log_a x < \frac{x}{\int_1^a \frac{1}{t} dt}$ 를 증명하여라.

(2) 앞의 (1)을 이용하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$ 임을 보여라.

(3) 앞의 (2)를 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{n^{2005}}{2^n}$ 의 값을 구하여라.

문제 2

다음 물음에 답하시오.

(1) $y = \sqrt{x(1-x)}$ 의 그래프의 개형을 설명하고 $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$ 의 값을 설명하시오.

(2) (1)을 활용하여 $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$ 의 값을 구하시오.

문제 3

실수에서 복소수를 확장할 때 실수가 아닌 새로운 수 i를 도입하여 복소수로 확장시킨다. 이 때 복소수 $a+bi\,(a, b$는 실수)를 좌표평면 위의 점 (a, b)에 대응시킬 수 있고, 이 대응에 의하여 $(a+bi)(\cos\theta+i\sin\theta)$는 점 (a, b)를 원점에 대하여 θ 만큼 회전시킨 점 $(a\cos\theta-b\sin\theta,\, a\sin\theta+b\cos\theta)$에 대응된다.

(1) 복소수 계수를 갖는 z에 관한 이차방정식 $z^2+\alpha z+\beta=0(\alpha, \beta$는 복소수인 상수)은 두 개의 복소수 해를 가짐을 증명하여라. (단, 중근도 두 개의 근으로 생각함)

(2) 실수에서 복소수를 확장시킬 때와 같이 복소수가 아닌 새로운 수 j를 생각하여 새로운 수 $a+bi+cj\,(a, b, c$는 실수)를 좌표공간 위의 점 (a, b, c)에 대응시키고, 이 수에 대하여 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의하자.

$$(a_1+b_1i+c_1j)+(a_2+b_2i+c_2j)=a_1+a_2+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j$$

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1i+c_1j)(a_2+b_2i+c_2j)\\&\quad=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i+(a_1c_2+a_2c_1)j+(b_1c_2+b_2c_1)ij\end{aligned}$$

이 때 좌표공간 위의 점들의 집합

$$R^3=\{a+bi+cj\,|\,i^2=j^2=-1,\ i\neq j\}\ (\text{단, } a, b, c\text{는 실수})$$

가 위에서 정의된 곱셈에 대하여 닫혀있고 결합법칙이 성립하도록 ij값을 정할 수 있는가?

(3) 다음의 두 식을 동시에 만족하는 서로 다른 복소수 z_1, z_2, z_3가 존재하도록 하는 양수 x와 $\cos\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$를 구하여라.

$$z_3-z_1=2(z_2-z_1)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z_1-z_2=x(z_3-z_2)(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

선생님 클리닉

문제1은 증명하고자 하는 결과를 통해 귀납적으로 유추하면 쉽게 해결될 수 있다. 문제2는 주어진 식이 원의 방정식의 일부라는 사실을 인식하는 것이 중요하며 문제3은 제시문을 이해하고 이를 적용시킬 수 있는지 묻고 있는 문항이다.

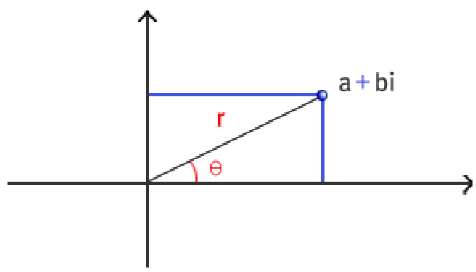
관련 학습

<복소수의 극형식>

복소수의 극형식을 이용하면 복소수의 곱과 거듭제곱을 조금 쉽게 구할 수 있다. 복소수 $a+bi$ 를 복소평면에 나타낸 뒤, 원점과의 거리를 r 이라 하고, x 축의 양의 방향으로부터 잰 각을 θ 라 하면, 다음처럼 쓸 수 있다.

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

복소수를 이런 식으로 표현한 것을 '극형식'이라고 한다.



복소수 $a+bi$ 와 $c+di$ 를 곱하면 $(ac-bd)+(ad+bc)i$ 이다. 실제 복소수를 곱하려면 $ac,\ bd,\ ad,\ bc$ 를 계산하며 곱셈을 네 번 해야 하고, $ac,\ -bd$ 를 계산하며 뺄셈을 한 번, $ad+bc$ 를 계산하며 덧셈을 한 번, 모두 여섯 번의 연산을 해야 한다. 이제 극형식으로 표현한 복소수 $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 와 $s(\cos\beta+i\sin\beta)$ 를 곱해보면 다음과 같다.

$$rs\{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)\}$$

위의 식에 삼각함수의 덧셈 정리를 적용해보자. 여기서 사용할 삼각함수의 덧셈정리는 아래와 같다.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

이제 덧셈정리를 적용한 후 간단하게 정리하면 아래 식을 얻는다.

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times s(\cos\beta+i\sin\beta)=rs\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\}$$

극형식을 쓰면 rs 에서 곱하기 한 번, $\alpha+\beta$ 에서 더하기 한 번만 하면, 복소수를 곱할 수 있다는 얘기다. 연산 여섯 번에 비하면 훨씬 효율적이니, 복소수를 거듭해서 곱할수록 수고를 대단히 줄여줄 거라는 것을 짐작할 수 있을 것이다.

위 식을 오일러-드므아브르(Euler-De Moivre)의 공식이라 부르는데, 특히 $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 를 n 제곱하면, $r^n\{\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)\}$ 임을 알 수 있다.

이러한 극형식을 이용하면 오일러 공식 $e^{it}=\cos t+i\sin t$ (단, i 는 허수단위, t 는 실수)을 미분이나 멱급수를 쓰지 않고, 유도할 수도 있다.

예시 답안

문제 1

(1) $1 \le t < x$ 이면 $0 < \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{t} \le 1$. 그러므로

$$0 < \frac{x-1}{x} = \int_1^x \frac{1}{x}dt \le \int_1^x \frac{1}{t}dt \le \int_1^x 1dt = x-1 < x, \quad 0 < \frac{\int_1^x \frac{1}{t}dt}{\int_1^a \frac{1}{t}dt} < \frac{x}{\int_1^a \frac{1}{t}dt}$$

따라서

$$0 < \log_a x < \frac{x}{\int_1^a \frac{1}{t}dt}$$

(2) x가 1보다 큰 실수이므로 $\sqrt{x}$ 도 1보다 큰 실수이다. 그러므로 (1)의 결과에 의해서

$$0 < \log_a \sqrt{x} < \frac{\sqrt{x}}{\int_1^a \frac{1}{t}dt}, \quad 0 < \frac{1}{2}\log_a x < \frac{\sqrt{x}}{\int_1^a \frac{1}{t}dt}, \quad 0 < \log_a x < \frac{2\sqrt{x}}{\int_1^a \frac{1}{t}dt},$$

$$0 < \frac{\log_a x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}\int_1^a \frac{1}{t}dt}.$$

여기서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}\int_1^a \frac{1}{t}dt} = 0$ 이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x} = 0$ 임을 알 수 있다.

(3) 충분히 큰 수 n에 대하여 $\log_2 n^{2005} = g(n)$ 이라 두자. 그러면 $n^{2005} = 2^{g(n)}$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2005\log_2 n}{n} = 0$$

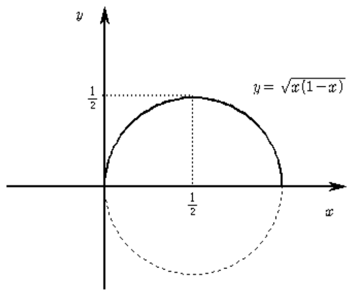
그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2005}}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{g(n)}}{2^n} = \lim_{n\to\infty}2^{g(n)-n} = \lim_{n\to\infty}2^{-n\left\{1-\frac{g(n)}{n}\right\}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n\left\{1-\frac{g(n)}{n}\right\}}} = 0$$

문제 2

(1) $y=\sqrt{x(1-x)}$, $y=\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}$, $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}\,(y\geq 0)$.

그러므로 $y=\sqrt{x(1-x)}$ 의 그래프는 원 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ 의 그래프에서 $y\geq 0$인 영역에 있는 반원이다.



따라서 $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$ 의 값은 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원의 넓이의 $\frac{1}{2}$배이다.

(2) (1)의 결과에 의해서

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{8}$$

문제 3

(1) 우선, 복소수 계수를 갖는 z에 관한 이차방정식 $z^2-\gamma=0$(γ는 복소수인 상수)이 두 개의 복소수 해를 가짐을 보이자.

i) γ가 실수일 때

$z=\pm\sqrt{\gamma}$ 이면 $z^2-\gamma=0$을 만족하므로 두 개의 복소수 해를 가진다. 여기서, $\gamma=0$일 때는 중근을 가진다.

ii) γ가 실수가 아닌 복소수일 때

$z=x+yi\,(x, y$는 실수), $\gamma=a+bi\,(a, b$는 실수이고 $b\neq 0$)라고 둘 수 있다. 이때

$$z^2-\gamma=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀어 $z^2-\gamma=0$의 해를 구하면

$$z=\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}{2}+\frac{b}{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}i,$$

$$z = -\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}{2} - \frac{b}{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}}i$$

ⅰ), ⅱ)에 의해서, 복소수 계수를 갖는 z에 관한 이차방정식 $z^2-\gamma=0$(γ는 복소수인 상수)은 두 개의 복소수 해를 가진다.

한편, 복소수 계수를 갖는 z에 관한 이차방정식 $z^2+\alpha z+\beta=0$(α, β는 복소수인 상수)에서 $z^2+\alpha z+\beta=0 \Longleftrightarrow \left(z+\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}-\beta$이다. 따라서 위에서 증명한 것에 의해서, 이차방정식 $z^2+\alpha z+\beta=0$은 두 개의 복소수 해를 가짐을 알 수 있다.

다른풀이

우선, 복소수 계수를 갖는 z에 관한 이차방정식 $z^2-\gamma=0$(γ는 복소수인 상수)이 두 개의 복소수 해를 가짐을 보이자.

ⅰ) γ가 실수일 때

$z=\pm\sqrt{\gamma}$이면 $z^2-\gamma=0$을 만족하므로 두 개의 복소수 해를 가진다. 여기서, $\gamma=0$일 때는 중근을 가진다.

ⅱ) γ가 실수가 아닌 복소수일 때

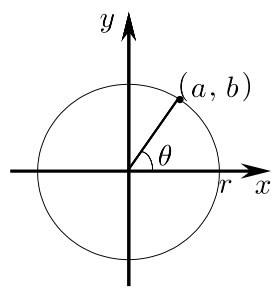
$\gamma=a+bi$(a, b는 실수이고 $b\neq0$)라 둘 수 있다. 또한 오른쪽 그림에서 점 (a, b)는 점 $(r, 0)$을 원점에 대하여 θ만큼 회전시킨 점이므로

$a+bi=(r+0i)(\cos\theta+i\sin\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,

여기서 $b\neq0$이므로 $r\neq0$. 또한

$z=\pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$이면

$z^2=r(\cos\theta+i\sin\theta)=a+bi=\gamma$이다.



ⅰ), ⅱ)에 의해서, 복소수 계수를 갖는 z에 관한 이차방정식 $z^2-\gamma=0$(γ는 복소수인 상수)은 두 개의 복소수 해를 가진다.

한편, 복소수 계수를 갖는 z에 관한 이차방정식 $z^2+\alpha z+\beta=0$(α, β는 복소수인 상수)에서 $z^2+\alpha z+\beta=0 \Longleftrightarrow \left(z+\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}-\beta$이다. 따라서 위에서 증명한 것에 의해서, 이차방정식 $z^2+\alpha z+\beta=0$은 두 개의 복소수 해를 가짐을 알 수 있다.

(2) $R^3=\{a+bi+cj \mid i^2=j^2=-1,\ i\neq j\}$ (단, a, b, c는 실수)가 정의된 곱셈에 대하여 닫혀있고 결합법칙이 성립하도록 ij값을 정할 수 있다고 가정하자. 그러면 곱셈에 대하여 닫혀있으므로 $ij=a+bi+cj$인 실수 a, b, c가 존재한다. 또한 결합법칙이 성립하므로

$$-j=(ii)j=i(ij)=i(a+bi+cj)=-b+ai+cij=-b+ai+c(a+bi+cj)$$
$$=-b+ac+(a+bc)i+c^2j,$$

즉, $-j=-b+ac+(a+bc)i+c^2j$. 그러므로 $-b+ac=0$, $a+bc=0$, $c^2=-1$이어야 한다. 그런데 c가 실수이므로 $c^2=-1$이 될 수가 없다. 따라서,

$$R^3=\{a+bi+cj \mid i^2=j^2=-1,\ i\neq j\}\ (\text{단, } a, b, c\text{는 실수})$$

가 정의된 곱셈에 대하여 닫혀있고 결합법칙이 성립하도록 ij값을 정할 수는 없다.

(3) $z_3-z_1=2(z_2-z_1)(\cos\theta+i\sin\theta)$, $z_1-z_2=x(z_3-z_2)(\cos2\theta+i\sin2\theta)$에서

$$z_3-z_2=\frac{1}{x}(z_1-z_2)(\cos2\theta-i\sin2\theta),$$

$$2(z_2-z_1)(\cos\theta+i\sin\theta)=z_3-z_1=(z_3-z_2)+(z_2-z_1)$$
$$=\frac{1}{x}(z_1-z_2)(\cos2\theta-i\sin2\theta)+(z_2-z_1),$$

$$2(\cos\theta+i\sin\theta)=-\frac{1}{x}(\cos2\theta-i\sin2\theta)+1,$$

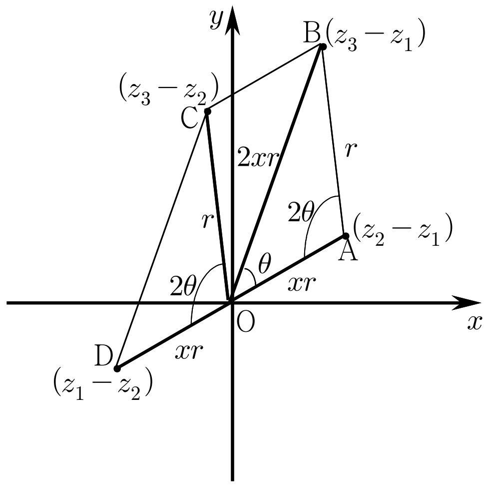
$$2\cos\theta+(2\sin\theta)i=\left(1-\frac{1}{x}cos2\theta\right)+\left(\frac{1}{x}sin2\theta\right)i$$

그러므로 $2\cos\theta=1-\frac{1}{x}cos2\theta$이고 $2\sin\theta=\frac{1}{x}sin2\theta$. $2\sin\theta=\frac{1}{x}sin2\theta$에서 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$이므로 $x=\cos\theta$. 또한 $2\cos\theta=1-\frac{1}{x}cos2\theta$에서 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$이므로 $2\cos\theta=1-\frac{1}{x}(2\cos^2\theta-1)$. 이 식에 $\cos\theta=x$를 대입하면 $2x=1-\frac{1}{x}(2x^2-1)$라는 식을 얻게 된다. 이 식을 만족하는 양수 x를 구하면 $x=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$이다. 또한 $\cos\theta=x$이므로 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$이다.

따라서 두 식 $z_3-z_1=2(z_2-z_1)(\cos\theta+i\sin\theta)$, $z_1-z_2=x(z_3-z_2)(\cos2\theta+i\sin2\theta)$을 동시에 만족하는 서로 다른 복소수 z_1, z_2, z_3가 존재하도록 하는 양수 x와 $\cos\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$는 $x=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$는 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$을 만족하는 값이다.

다른풀이 1

두 식 $z_3-z_1=2(z_2-z_1)(\cos\theta+i\sin\theta)$, $z_1-z_2=x(z_3-z_2)(\cos2\theta+i\sin2\theta)$을 동시에 만족하는 서로 다른 복소수 z_1, z_2, z_3가 존재한다고 가정하자. 그러면 좌표평면에 z_2-z_1, z_3-z_1, z_3-z_2, z_1-z_2에 대응하는 점들을 아래 그림과 같이 나타낼 수 있다.



그림에서 $\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \square \mathrm{OABC} = \triangle \mathrm{OCD}$ 이므로 $\frac{1}{2} xr \times 2xr \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times xr \times r \times \sin 2\theta$.
그러므로 $x = \cos\theta$. 한편, $\triangle \mathrm{OAB}$ 에 코사인 제 1법칙을 적용하면

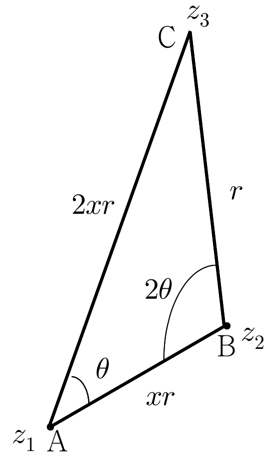
$$xr = 2xr\cos\theta + r\cos 2\theta,\ x = 2x\cos\theta + (\cos^2\theta - 1)$$

임을 알 수 있다. 이 식에 $\cos\theta = x$ 를 대입하면 $x = 2x^2 + (2x^2 - 1)$ 이라는 식을 얻게 된다. 이 식을 만족하는 양수 x 를 구하면 $x = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ 이다. 또한 $\cos\theta = x$ 이므로 $\cos\theta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ 이다.

따라서 두 식 $z_3 - z_1 = 2(z_2 - z_1)(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z_1 - z_2 = x(z_3 - z_2)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ 을 동시에 만족하는 서로 다른 복소수 z_1, z_2, z_3 가 존재하도록 하는 양수 x 와 $\cos\theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 는 $x = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$, $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 는 $\cos\theta = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ 을 만족하는 값이다.

다른풀이 2

두 식 $z_3 - z_1 = 2(z_2 - z_1)(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z_1 - z_2 = x(z_3 - z_2)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ 을 동시에 만족하는 서로 다른 복소수 z_1, z_2, z_3 가 존재한다고 가정하자. 그러면 좌표평면에 z_1, z_2, z_3 에 대응하는 점들을 아래 그림과 같이 나타낼 수 있다.



사인법칙에 의해서 $\dfrac{r}{\sin\theta}=\dfrac{2xr}{\sin2\theta}$ 이고 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 이므로 $x=\cos\theta$. 한편, $\triangle$ABC 에 코사인 제 1법칙을 적용하면

$$xr=2xr\cos\theta+r\cos2\theta,\ x=2x\cos\theta+(\cos^2\theta-1)$$

임을 알 수 있다. 이 식에 $\cos\theta=x$를 대입하면 $x=2x^2+(2x^2-1)$이라는 식을 얻게 된다. 이 식을 만족하는 양수 x를 구하면 $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$이다. 또한 $\cos\theta=x$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ 이다.

따라서 두 식 $z_3-z_1=2(z_2-z_1)(\cos\theta+i\sin\theta)$, $z_1-z_2=x(z_3-z_2)(\cos2\theta+i\sin2\theta)$을 동시에 만족하는 서로 다른 복소수 z_1, z_2, z_3가 존재하도록 하는 양수 x와 $\cos\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$는 $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$, $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$는 $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ 을 만족하는 값이다.

04 성균관대학교

Ⅰ 특기자 전형 사고력 평가 소개 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 사고력 평가 지필 시험 소개

평가 관련	내용	비 고
평가 형식	• 전공 교과형 지필 평가 수학(4문제)	시간 : 100분(의예 150분)
평가내용	• 전공예약제(생명과학, 수학, 물리학, 화학) : 수학 + 각 전공 교과 • 자연과학계열, 전자전기컴퓨터공학계열, 공학계열, 소프트웨어학, 반도체시스템공학 : 수학(공통) + 생물/물리/화학 중 수험생이 희망하는 1과목 • 의예과 : 수학, 생물(공통)+물리/화학 중 수험생이 희망하는 1과목	희망 과학은 원서접수 시 선택

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 사고력 평가 관련 숙지	고사장 위치 및 사고력 평가 관련 내용 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 사고력 평가 참여 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.

※ 일반전형은 논술시험이고 수능최저등급이 전공 별로 다르게 존재하기에 착오가 없기를 바람.

※ 특기자 전형은 추천서를 쓸 필요가 없으며 1차 서류통과가 없이 모든 지원자에게 사고력 평가를 치를 기회를 부여함.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 사고력 평가 공통

문제 1

$a_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$에서, $a_{2n} < \frac{1}{2}$가 성립하는 최소의 자연수 n은?

문제 2

일차변환 $\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & a \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$에 의해 일차함수 $y = f(x)$가 x축 위로 옮겨질 때, $y - 4 = f(x-3)$이 옮겨지는 그래프의 개형을 구하시오.

문제 3

1. 12명을 3명 이상의 3조로 분할하는 가지의 수를 구하시오.
2. A, B가 같은 조에 속할 확률을 구하시오.

문제 4

단위원의 원주 위에 시계방향으로 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5를 같은 간격으로 배열한다.

이 때 $\frac{\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}{\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_3}$를 구하시오.

선생님 클리닉

문제 1은 고차의 삼각함수를 직접 적분하기 어려우므로 부분적분을 이용해 차수를 낮추어보면 a_{2n}의 점화식을 구할 수 있다.

문제 2는 일차변환에 의해 옮겨지는 함수와 원래 함수와의 관계식을 세워본다.

문제 3은 조를 나누는 분할 문제로 인원을 배정하는 경우의 수가 몇 가지 있을지 생각해보고, 분할된 인원이 같을 때 구분이 안되므로 중복을 피하여 세어본다.

문제 4는 삼각형의 넓이의 비를 구하는 문제이지만 밑변이 같으므로 높이의 비를 구하여 본다.

관련 학습

1. 부분적분

두 미분가능한 연속함수 $f(x), g(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_b^a - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

2. 일차변환

변환 $f: (x, y) \to (x', y')$이 상수항이 없는 x, y의 일차식으로 표현될 때 일차변환이라고 한다.

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{즉, } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ (a, b, c, d\text{는 상수})$$

일차변환 $f: X \to X'$의 성질

(1) $f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$ (2) $f(cX) = cf(X)$ (c는 상수)

추가 질문

$\overline{AB} = 60$인 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{BP} = 20$인 점 P가 있다. 일차변환 f에 의하여 세 점 A, B, P가 각각 A′, B′, P′으로 옮겨진다. $\overline{A'B'} = 90$일 때, $\overline{B'P'}$의 값을 구하여라.

예시 답안

2013 사고력 평가 공통

문제 1

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$라 하면, 부분적분에 의해,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx$$
$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n \geq 2)$이고, $I_0 = \frac{\pi}{2}$이므로 a_{2n}은, $a_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$가 된다. $a_4 = \frac{3}{16}\pi > \frac{1}{2}$, $a_6 = \frac{15}{96}\pi < \frac{1}{2}$이므로 최소의 자연수 n은 3이다.

문제 2

$y = mx + n$ $(m \neq 0)$인 그래프가 일차변환에 의해 옮겨지면 그 옮겨진 x', y'은,
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x = \frac{1}{5a}(2y' - x')$, $y = \frac{1}{5a}(3x' - y')$이다. 주어진 x, y를 대입하면,
$3x' - y' = m(2y' - x') + 5an$에서 $(2m+1)y' = (m+3)x' - 5an$이고 $m = -3$, $n = 0$이다.
$y - 4 = f(x-3)$은 곧 $y = -3x + 13$을 나타내므로, 이는 변환에 의해 $y = 13a$로 옮겨진다.

문제 3

(1)
3명 이상으로 분배하는 가짓수는 (3,3,6), (3,4,5), (4,4,4)이다. 각각의 가짓수는

$${}_{12}C_3 \times {}_9C_3 \times {}_6C_6 \cdot \frac{1}{2!} + {}_{12}C_3 \times {}_9C_4 \times {}_5C_5 + {}_{12}C_4 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4 \cdot \frac{1}{3!} = 9240 + 27720 + 5775 = 42735$$

가지가 된다.
(2)
A, B가 공동으로 속하는 조의 나머지 인원에 대해 경우를 나누어 보자.
1명: (1,3,6), (1,4,5) – ${}_{10}C_1 \times {}_9C_3 \times {}_6C_6 + {}_{10}C_1 \times {}_9C_4 \times {}_5C_5 = 840 + 1260 = 2100$

2명: (2,3,5), (2,4,4) - ${}_{10}C_2 \times {}_8C_3 \times {}_5C_5 + {}_{10}C_2 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 2520 + 6300 = 8820$

3명: (3,3,4) - ${}_{10}C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 2100$

4명: (4,3,3) - ${}_{10}C_4 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 2100$

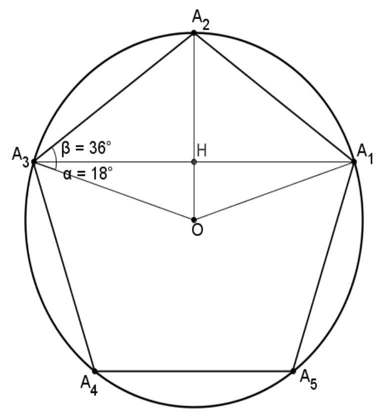
전체 가짓수는 15120가지가 된다. 따라서 확률은 $\frac{15120}{42735} = \frac{144}{407}$이 된다.

문제 4

$\overline{\mathrm{OA_2}} \perp \overline{\mathrm{A_1A_3}}$이고, $\triangle A_1A_2A_3$와 $\triangle OA_1A_3$은 밑변을 $\overline{\mathrm{A_1A_3}}$로 공유하므로, 두 삼각형의 넓이비는 높이의 비와 같다.

$\overline{\mathrm{OA_2}}$와 $\overline{\mathrm{A_1A_3}}$의 교점을 H라 하면, $\overline{OA_3} = 1$이므로

$$\frac{\triangle\mathrm{A_1A_2A_3}}{\triangle\mathrm{OA_1A_3}} = \frac{\overline{\mathrm{HA_2}}}{\overline{\mathrm{OH}}} = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{2\pi}{5}}$$ 이다.

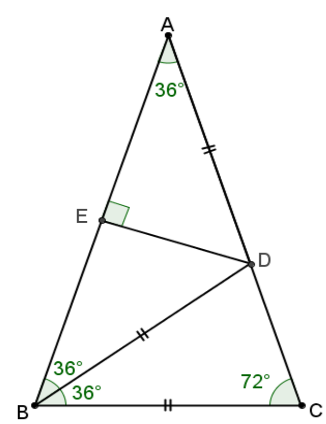


$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$이므로, $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 이고, $\frac{\triangle\mathrm{A_1A_2A_3}}{\triangle\mathrm{OA_1A_3}} = \sqrt{5}$ 이다.

(참고: $\cos\frac{\pi}{5}$를 구하는 방법)

밑변의 길이가 1이고, $\angle B = \angle C = \frac{2\pi}{5}$ 인 이등변삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB} = \overline{AC} = x$ 라 하면, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{x}{2}$가 된다. $\angle B$ 이등분선과 $\overline{AC}$ 의 교점을 D라 하면, $\triangle ABC$와 $\triangle BCD$는 닮음이다. 따라서, $(x-1) : 1 = 1 : x$ 가 성립하여 $x^2 - x - 1 = 0$ 을 만족하는 x의 값은 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$가 된다. ($\because\ x > 0$)

따라서, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{x}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 이다.



추가 질문

점 P는 선분 AB의 연장선 위에 있고 $\overline{AB}=50$, $\overline{BP}=20$이므로

$$\overline{AP}=\overline{AB}+\overline{BP}=80$$

따라서 점 P는 선분 AB를 4 : 1로 외분하는 점이다.

$$\therefore\ P=\frac{4B-A}{4-1}=-\frac{1}{3}A+\frac{4}{3}B$$

$f(A)=A'$, $f(B)=B'$이므로

$$f(P)=f\left(-\frac{1}{3}A+\frac{4}{3}B\right)=-\frac{1}{3}f(A)+\frac{4}{3}f(B)=-\frac{1}{3}A'+\frac{4}{3}B'=\frac{4B'-A'}{3}$$

$$\therefore\ P'=\frac{4B'-A'}{4-1}$$

따라서 P′은 선분 A′B′을 4 : 1로 외분하는 점이다.

$$\therefore\ \overline{B'P'}=\frac{1}{4}\overline{A'P'}=\frac{1}{4}(\overline{A'B'}+\overline{B'P'})=\frac{1}{4}(90+\overline{B'P'})$$

$$\therefore\ \overline{B'P'}=30$$

2012 사고력 평가 심화

문제 1

자연수 n에 대하여 $a_n = \underbrace{11\cdots11}_{n\text{개}}.\underbrace{11\cdots11}_{n\text{개}}$ 으로 정의하자. 예를 들어, $a_1 = 1.1$, $a_2 = 11.11, \cdots$ 이다. 이때, $\sum_{n=1}^{2012} a_n$ 의 값을 구하시오.

문제 2

$\theta_i (i = 1, 2, \cdots, n)$를 양의 실수라고 하자. 이 n개의 실수의 합이 $\frac{\pi}{3}$라고 할 때, 다음의 부등식을 증명하시오.

$2(\sin\theta_1 + \cdots + \sin\theta_n) + (\tan\theta_1 + \cdots + \tan\theta_n) > \pi$

문제 3

다음 무한급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2}$$

2012 사고력 평가 공통

문제 1

N 개의 야구공이 각각 들어있는 두 상자를 검사하였다. 한 상자의 야구공들은 모두 결함이 없지만, 다른 상자는 n_1개의 불량품들을 포함하고 있어 아무 표식이 없는 스티커를 그 상자 표면에 붙였다. 그런데 점심을 먹고 난 후에 확인해 보니, 스티커를 올바르게 붙였는지 의구심이 생겼다. 이를 확인하기 위하여, 스티커가 붙어있는 상자에서 n개의 야구공을 임의로 추출한 결과(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다), n개 모두 결함이 없다고 판명되었다. 스티커를 잘못 붙였을 확률을 p라고 하고, 두 상자는 외관상 똑같아 보인다고 가정하자. 이때, 이 상자가 사실은 결함이 없는 공들만을 포함하고 있을 확률을 구하시오.

문제 2

집합 $S=\{1,2,\cdots,2012\}$의 부분집합 $M(\neq\varnothing)$에 대해 $a(M)$을 M 에 포함된 모든 원소들의 곱으로 정의한다. 이때, 다음의 합을 구하시오.

$$\sum_{\varnothing\neq M\subseteq S}\frac{1}{a(M)}$$

문제 3

$k\in S=\{1,2,\ldots,2012\}$인 자연수에 대하여 구간 $[0,\ \pi]$에 정의된 함수

$$f_k(x)=\min\{|\sin(kx)|,1-|\sin(kx)|\}$$

가 있다. 여기서 $\min\{A,B\}$는 A,B 중 크지 않은 것을 나타낸다. 곡선 $y=f_k(x)$와 x축에 의하여 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 V_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{2012}V_k$을 구하시오.

문제 4

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 증가함수 $f(x)=\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$의 역함수를 g라고 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

의 값을 구하시오.

선생님 클리닉

(사고력평가심화) 문제 1은 1이 반복되어 나타나는 수열이므로 9가 반복되도록 바꾸어 보면 그 일반항을 쉽게 구할 수 있다. 문제 2는 수열의 합을 함수로 바꾸어 풀어본다. 문제 3은 주어진 무한급수의 합의 식을 자연수의 거듭제곱의 합과 부분분수식을 이용해 식을 간단히 해본다.

(사고력평가공통) 문제 1은 베이즈의 정리를 이용해 풀어본다. 문제 2는 S의 부분집합 M의 모든 원소의 곱을 더하는데 직접 구하기보다 이를 구할 수 있는 등식을 세워본다. 문제 3은 k에 적당한 수를 대입하며 그래프를 그려 규칙성을 찾아보고 범위를 나누어 회전체의 적분식을 세워 풀어본다. 문제 4는 주어진 무한급수를 정적분으로 바꾸어 생각해 본다.

관련 학습

1. 등비수열

첫째항이 a_1에 대하여 공비 r을 곱해서 다음 항이 나오는 등비수열의 일반항 a_n과 그 합 S_n은 다음과 같다.

$$a_n = a_1 r^{n-1},\ S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

2. 베이즈의 정리

n개의 배반사건 $A_1, A_2, \cdots A_n$중 하나는 반드시 일어난다고 할 때, 임의의 사건 B에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

3. 무한급수와 정적분

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 정적분은 다음과 같은 무한급수로 표현된다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x \ \left(x_k = a + k\triangle x,\ \triangle x = \frac{b-a}{n}\right)$$

추가 질문

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $\left(\frac{k}{n}, e^{\frac{k}{n}}\right)$에서의 접선의 x절편과 y절편의 곱을 $S_{n,k}$ 라고 할 때, 다음 물음에 답하여라. 단, n과 k는 자연수이고 $n \geq k$ 이다.

(1) $S_{n,k}$ 를 구하여라.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}S_{n,k}$ 를 구하여라.

예시 답안

2012 사고력 평가 심화

문제 1

$9\times a_n = 99\cdots99.99\cdots99 = (10^n-1)+(1-(\frac{1}{10})^n) = 10^n - 10^{-n}$ 이다.

$$9\times\sum_{n=1}^{2012}a_n = \sum_{n=1}^{2012}(10^n-10^{-n}) = \frac{10(10^{2012}-1)}{10-1} - \frac{10^{-1}(1-10^{-2012})}{1-10^{-1}}$$
$$= \frac{1}{9}(10^{2013}+\frac{1}{10^{2012}}-11)$$

이므로 구하고자 하는 값은 $\frac{1}{81}(10^{2013}+\frac{1}{10^{2012}}-11)$ 이다.

다른풀이

$$a_n = \underbrace{11\cdots11}_{n\text{개}}.\underbrace{11\cdots11}_{n\text{개}}$$
$$= 10^{n-1}+10^{n-1}+10^{n-1}+\cdots+10+1+10^{-1}+10^{-2}+\cdots+10^{-n}$$
$$= \frac{10^{-n}(10^{2n}-1)}{10-1} = \frac{10^n-10^{-n}}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{2012}a_n = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{2012}(10^n-10^{-n}) = \frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^{2012}-1)}{10-1} - \frac{10^{-1}(1-10^{-2012})}{1-10^{-1}}\right\} = \frac{1}{81}\left(10^{2013}+\frac{1}{10^{2012}}-11\right)$$

문제 2

$\theta_1+\cdots+\theta_n=\frac{\pi}{3}$ 이므로(따라서, 모든 i에 대해, $0<\theta_i<\frac{\pi}{3}$), 증명할 부등식을 아래의 형태로 바꿀 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{n}(2\sin\theta_i+\tan\theta_i-3\theta_i)>0$$

이는 함수 $f(x)=2\sin x+\tan x-3x$ 가 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$에서 $f(x)>0$ 임을 밝히는 것으로 충분히 증명이 되고, $f(0)=0$ 이므로 $f'(x)>0$ 임을 증명하는 것으로 충분하다.

$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3$ 이므로 $t=\cos x$ 라 하면, 그러면 $\frac{1}{2}<t<1$ 에서

$g(t)=2t+\frac{1}{t^2}-3>0$ 임을 보이면 된다. 주어진 t 의 범위 안에서

$g'(t)=2\left(1-\frac{1}{t^3}\right)<0$이고 $g(1)=0$ 이므로, 원하는 부등식이 증명이 된다.

문제 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{1^2+2^2+\cdots+k^2}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6k}{k(k+1)(2k+1)}\\&=6\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=6\times\lim_{n\to\infty}\left(2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)\\&=6\times\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(\sum_{k=3}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k}\right)-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right\}\\&=6\times\lim_{n\to\infty}2\left(\sum_{k=3}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)\\&=12\times\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

따라서, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{1^2+2^2+\cdots+k^2}=6(2\ln 2-1)$ 이다.

2012 사고력 평가 공통

문제 1

추출된 n개의 야구공이 모두 결함이 없는 사건을 A라고 하고, 스티커가 붙어있는 상자가 결함이 없는 야구공만을 포함하고 있는 사건을 B라고 하자. 그러면

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B^c)P(A|B^c)}=\frac{p\cdot 1}{p\cdot 1+q\dfrac{{}_{N-n_1}C_n}{{}_NC_n}}$$

답은 $\dfrac{p}{p+q\dfrac{{}_{N-n_1}C_n}{{}_NC_n}}$ 이다.(단, $q=1-p$이다.)

문제 2

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_{2012}}\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{2012}}\right)+\left(\frac{1}{x_1x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{2011}x_{2012}}\right)+\cdots+\frac{1}{x_1\cdots x_{2012}}$$

임을 이용하여, $x_i=i$ 를 대입하면 구하고자 하는 급수의 합은

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2012}\right)-1=\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{2013}{2012}-1=2013-1=2012$$ 이다.

문제 3

$V_k=2k\pi\left\{\int_0^{\frac{\pi}{6k}}\sin^2(kx)dx+\int_{\frac{\pi}{6k}}^{\frac{\pi}{2k}}(1-\sin(kx))^2dx\right\}$에서 $z=kx$로 치환하면

$$V_k=2\pi\left\{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2(z)dz+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin(z))^2dz\right\}$$
$$=2\pi\left\{\left[\frac{z}{2}-\frac{1}{4}\sin(2z)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[\frac{3}{2}z+2\cos(z)-\frac{1}{4}\sin(2z)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$
$$=2\pi\left(\frac{7}{12}\pi-\sqrt{3}\right)$$

즉, V_k의 값은 k의 값에 무관하게 일정하다. 따라서 $\sum_{k=1}^{2012}V_k=4024\pi\left(\frac{7}{12}\pi-\sqrt{3}\right)$이다.

문제 4

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n} &= \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n} - \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k+1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n} + g(1) - \left\{g(0)\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k+1}{n}\right\} \\
&= g(1) - \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 g(x)dx
\end{aligned}
$$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로, $\frac{\pi}{2}-\int_0^1 g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$와 같다.

우변의 적분 값을 I 라고 하고, $y=\frac{\pi}{2}-x$ 로 치환하면

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\cos y}+\sqrt{\sin y}}dy$이므로

$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$ 이다. 그러므로 구하고자 하는 값은 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

추가 질문

(1) 점 $\left(\frac{k}{n}, e^{\frac{k}{n}}\right)$에서의 접선의 방정식은 $y-e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)$ 이다.

따라서, x절편, y절편은 각각 $\frac{k}{n}-1$, $\left(1-\frac{k}{n}\right)e^{\frac{k}{n}}$ 이므로 $S_{n,k}=-\left(1-\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}$ 이다.

(2) 준 식 $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(1-\frac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}\right\}\cdot\frac{1}{n}$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^1 (1-x)^2 e^x dx = -\int_0^1 (x-1)^2 e^x dx \\
&= -\left[(x-1)^2 e^x\right]_0^1 + \int_0^1 2(x-1)e^x dx = 1+2\left\{\left[(x-1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right\} \\
&= 1+2\left(1-\left[e^x\right]_0^1\right) = 5-2e
\end{aligned}
$$

2011 사고력 평가 심화

문제 1

다음 방정식이 실근 x, y를 갖는 실수 z의 범위를 구하시오.

$$\begin{cases} x+2y+2z=6 \\ xyz^2=8 \end{cases}$$

문제 2

함수 $f_n(x)$가 다음과 같은 점화식으로 정의되어 있다.

$f_1(x)=(x+1)^{2011}$, $f_n(x)=(f_{n-1}(x)-2)^2$, $n \geq 2$

수열 a_n과 b_n을 각각 $f_n(x)$의 상수항과 일차항의 계수라고 할 때, $\sum_{n=1}^{2011} a_n$과 $\sum_{n=1}^{2011} b_n$을 구하시오.

문제 3

한국선수 4명, 중국선수 3명, 일본선수 2명을 초청하여 100m 달리기 시합을 하고자 한다. 다음의 규칙을 만족하도록 위 9명의 선수를 1번부터 9번까지 9개의 레인에 배정하는 모든 경우의 수를 구하시오.

- 양끝인 1번과 9번 레인에는 한국선수를 배정한다.
- 같은 나라 선수끼리는 이웃하지 않도록 배정한다.

문제 4

입자 A와 B는 평면위에서 움직이는데 시간 t에서 A의 좌표는 $\left(2\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right),\ 2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+2\right)$이고 B의 좌표는 $(\cos t,\ \sin t)$이다. 시간 $0 \leq t \leq 2\pi$ 동안 두 입자 사이의 거리가 최대가 되는 t에서 $\sin t$ 값을 구하시오.

2011 사고력 평가 공통

문제 1

$[\sqrt{x}]+[\sqrt{x^2+y^2}] \leq 1$의 그래프를 그리고 넓이를 구하시오.

문제 2

$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ x=\pi$와 x축으로 둘러싸인 부분을 y축으로 돌려 나온 체적을 구하시오.

문제 3

$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$, $A_1=0,\ B_1=1,\ A_n+B_n=b_n,\ 2A_n+B_n=a_n$일 때

a_{n+1}과 b_{n+1}을 $a_n,\ b_n$이 들어간 행렬의 곱으로 나타내고 $\dfrac{A_{2011}}{B_{2011}}$을 구하시오.

문제 4

$(0,\ 0,\ 0)$에서 $(1,\ 1,\ 1)$ 방향으로 빛을 쏜다. 평면 $x+2y+3z=6$에 반사된 빛의 경로를 구하시오. (직선식)

선생님 클리닉

(과학인재)

문제 1은 주어진 식에서 x와 $2y$를 두 근으로 갖는 이차방정식을 생각해 z의 범위를 구해본다.

문제 2는 $f_n(x)$의 상수항과 일차항의 계수만 생각하므로 거듭제곱을 해보며 그 규칙성을 유추해본다.

문제 3은 같은 국가의 선수끼리 이웃하지 않도록 배정하려면 한국선수를 먼저 배정해놓고 그 사이에 나머지 국가의 선수를 넣을 수 있는 경우의 수를 생각해 본다.

문제 4는 두 점 사이 거리의 최댓값을 미분을 이용하여 접근할 수 있다.

(사고력 공통)

문제 1은 가우스 함수 문제로 $\sqrt{x}$의 범위를 나누어 각각의 경우 그래프를 그려서 넓이를 구해본다.

문제 2는 직선 위로 원을 굴렸을 때 원 위의 정점이 그리는 자취(사이클로이드)를 회전시킨 입체의 부피이며, 회전체의 반지름이 무엇이 될지 생각해 본다.

문제 3은 주어진 조건을 통해 a_{n+1}, b_{n+1}과 a_n, b_n사이 관계식을 행렬로 나타내보고 행렬의 거듭제곱을 통해 일반항을 구해본다.

문제 4는 평면에 의해 반사된 직선 위의 적당한 한 점을 찾아 직선의 방정식을 만들어 본다.

관련 학습

1. 가우스 함수

실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대 정수를 $[x]$라 하고 $y=[x]$를 x의 정수함수(가우스함수)라고 한다. 아래와 같은 기본성질이 성립한다.

· 함수 $y=[x]$는 구간으로 나뉘어 표시되고, 감소하지도 않으며 한계도 없는 함수이다. 즉 $x \leq y$일 때, $[x] \leq [y]$이다.

· $[n+x]=n+[x]\ \ (n \in Z)$

· 모든 실수 x, y에 대하여 $[x]+[y] \leq [x+y]$

· $[-x]=\begin{cases} -[x]-1 & (x \notin Z) \\ -[x] & (x \in Z) \end{cases}$

2. 사이클로이드

사이클로이드는 직선 위로 원을 굴렸을 때 원 위의 정점이 그리는 자취이다.

반지름이 r인 원을 x축으로 위로 굴렸을 때의 원점과 겹치는 점이 그리는 곡선의 방정식은 원이 각도 t만큼 굴렀을 때,

$x=rt-r\sin t,\ y=r-r\cos t$ 이며 곡선 한마디의 길이 L은 다음과 같다.

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(r(1-\cos t))^2+(r\sin t)^2}\,dt$$

$$=r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2r\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8r$$

추가 질문

실수 r이 $\left[r+\frac{1}{10}\right]+\left[r+\frac{2}{10}\right]+\cdots+\left[r+\frac{9}{10}\right]=61$을 만족시킬 때, $[10r]$를 구하여라.

예시 답안

2011 사고력 평가 심화

문제 1

주어진 식으로부터

$$x+2y=6-2z,\ xy=\frac{8}{z^2}$$

임을 알 수 있다. 주어진 방정식이 실근 x, y를 가진다면, x와 $2y$를 실근으로 가지는 이차방정식

$$t^2-(6-2z)t+\frac{16}{z^2}=0$$

을 생각할 수 있다. x와 $2y$ 역시 실수이므로 방정식이 실근을 가지기 위한 조건

$$D=(3-z)^2-\frac{16}{z^2}\geq 0$$

을 만족해야 한다. $xyz^2=8$으로부터 $z^2>0$이므로 동치조건으로

$$(3-z)z\geq 4 \text{ 또는 } (3-z)z\leq -4,$$

$$\text{즉, } z^2-3z+4\leq 0 \text{ 또는 } z^2-3z-4\geq 0$$

얻는다. $z^2-3z+4\leq 0$ 의 경우는 만족하는 실수 z가 존재하지 않고, $z^2-3z-4\geq 0$ 경우는 $(z-4)(z+1)\geq 0$으로 인수분해 되므로

$$z\geq 4 \text{ 또는 } z\leq -1$$

이 된다.

문제 2

$a_1=1,\ b_1=2011$이다. $f_{n-1}(x)=a_{n-1}+b_{n-1}x+\ldots$일 때

$$f_n(x)=(a_{n-1}-2+b_{n-1}x+\ldots)^2$$

이므로

$$a_n=(a_{n-1}-2)^2,\ \ b_n=2(a_{n-1}-2)b_{n-1}$$

의 점화식을 만족한다. $a_1=1$이므로

$$a_n=1\text{이고, } b_n=-2b_{n-1}$$

이 성립한다. 따라서,

$$\sum_{n=1}^{2011} a_n = 2011, \quad \sum_{n=1}^{2011} b_n = \frac{2011(1-(-2)^{2011})}{1+2} = \frac{2011(1+2^{2011})}{3}$$

문제 3

한국 선수 4명을 배열하는 방법의 수는 $4!$이고 아래와 같이 한국 선수가 네모 칸에 배열되었다면 A, B, C에는 중국 또는 일본 선수가 1명이상 배열되어야 한다. 이 때, $(A,\ B,\ C) = (3,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 1)$등으로 배열될 수 있다.

□ A □ B □ C □

(1)

A에 3명이 B, C에 1명이 배정되는 경우의 수를 생각하자. 3명중 2명이 중국사람, 1명이 일본사람인 경우 $4! \times {}_3C_2 \times 2! \times {}_2C_1 \times 2$이다. 이와 같이 A, B, C에 3명이 배정될 수 있으므로 $4! \times {}_3C_2 \times 2! \times {}_2C_1 \times 2 \times 3 = 1728$가지

3명중 2명이 일본 선수, 1명이 중국선수인 경우 $4! \times {}_2C_2 \times 2! \times {}_3C_1 \times 2 \times 3 = 864$가지

(2)

A에 2명이 B에 2명이 배정되는 경우의 수 : $4! \times {}_3C_2 \times {}_2C_1 \times 2 \times {}_2C_1 \times 2$. 이와 같이 A, B, C 각각에 1명이 배정될 수 있으므로 $4! \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times 2 \times {}_2C_1 \times 2 \times 3 = 3456$가지.

(3)

모든 경우의 수는 6048가지.

문제 4

시간 t에서의 좌표를 정리하면

$$A(-2\sin t,\ 2\cos t+2),\ B(\cos t,\ \sin t)$$

이다. $f(t)$를 시간 t에서의 두 점 A, B 사이의 거리의 제곱으로 정의하면,

$$f(t) = (-2\sin t - \cos t)^2 + (2\cos t + 2 - \sin t)^2 = 9 + 8\cos t - 4\sin t$$

이고, $f(t)$가 $0 < t < 2\pi$에서 최댓값을 가지기 위해서는 $f'(t) = 0$ 과 $f''(t) < 0$ 을 동시해 만족해야 한다.

$$f'(t) = -8\sin t - 4\cos t = 0 \text{ 에서 } \tan t = -\frac{1}{2}$$

이고, 이를 만족하는 t의 값은 $0 < t < 2\pi$에서 두 개가 존재한다. 이를 t_1, $t_2 (t_1 < t_2)$이라 하면, $t_1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $t_2 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$이다.

$$f''(t) = -8\cos t + 4\sin t \text{에서 } f''(t_1) > 0, \quad f''(t_2) < 0$$

이므로 시간 t_2에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다. 따라서, $\sin t_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이다.

2011 사고력 평가 공통

문제 1

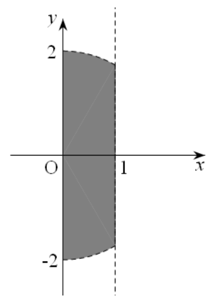
$\sqrt{x}$에서 $x \ge 0$이고 $x^2+y^2 \ge 0$이다. 또한, 가우스값은 모두 정수이므로 $[\sqrt{x}]$, $[\sqrt{x^2+y^2}]$는 각각 0 이상의 정수임을 알 수 있다.

따라서, $[\sqrt{x}]+[\sqrt{x^2+y^2}] \le 1$ 를 만족하는 경우는 다음의 세 가지이다.

(1) $[\sqrt{x}]=[\sqrt{x^2+y^2}]=0$ 인 경우 : $0 \le x < 1,\ 0 \le x^2+y^2 < 1$

(2) $[\sqrt{x}]=0,\ [\sqrt{x^2+y^2}]=1$ 인 경우 : $0 \le x < 1,\ 1 \le x^2+y^2 < 2$

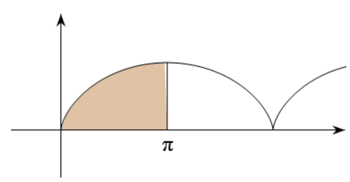
(3) $[\sqrt{x}]=1,\ [\sqrt{x^2+y^2}]=0$ 인 경우 : $1 \le x < 2,\ 0 \le x^2+y^2 < 1$



이를 만족하는 영역은 오른쪽 그림과 같고, 이 영역의 넓이는 $4\pi \times \frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ 이다.

문제 2

$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ x=\pi$ 와 x축으로 둘러싸인 영역은 아래 그림과 같이 나타낼 수 있다. $dy=\sin t\, dt$이므로 구하는 체적은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$$\pi\int_0^2(\pi^2-x^2)dy$$
$$=\pi\int_0^\pi(\pi^2-t^2+2t\sin t-\sin^2 t)\sin t dt$$
$$=\pi\int_0^\pi\left(\pi^2\sin t-t^2\sin t+2t\frac{1-\cos 2t}{2}-\frac{3}{4}\sin t+\frac{1}{4}\sin 3t\right)dt$$

여기서

$$\int_0^\pi t^2\sin t dt=\left[t^2(-\cos t)\right]_0^\pi+\int_0^\pi(2t\cos t)dt=\pi^2+[2t\sin t]_0^\pi-\int_0^\pi 2\sin t dt=\pi^2+[2\cos t]_0^\pi=\pi^2-4$$

$$\int_0^\pi t\cos 2t dt=\left[t\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{\sin 2t}{2}dt=\left[\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^\pi=0 \text{ 이다.}$$

따라서, $(\text{준식})=\pi\left[-\pi^2\cos t+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{4}\cos t-\frac{1}{12}\cos 3t\right]_0^\pi-\pi^3+4\pi$

$$=\pi\left(\pi^2+\pi^2+\frac{1}{2}\pi^2-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)-\pi^3+4\pi=\frac{3}{2}\pi^3+\frac{8}{3}\pi \text{ 이다.}$$

문제 3

$A_{n+1}=\frac{5}{2}A_n+\frac{3}{2}B_n,\ B_{n+1}=-2A_n-B_n$에서 두 식

$A_{n+1}+B_{n+1}=\frac{1}{2}(A_n+B_n),\quad 2A_{n+1}+B_{n+1}=3A_n+2B_n$ 을 얻을 수 있다.

$a_n=2A_n+B_n,\ b_n=A_n+B_n$ 이므로, 위의 두 식을

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n,\ a_{n+1}=a_n+b_n$ 으로 변형할 수 있고, 이를 통해 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ 임을 얻을 수 있다.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=K$ 라 하면, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=K^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=K^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$이고

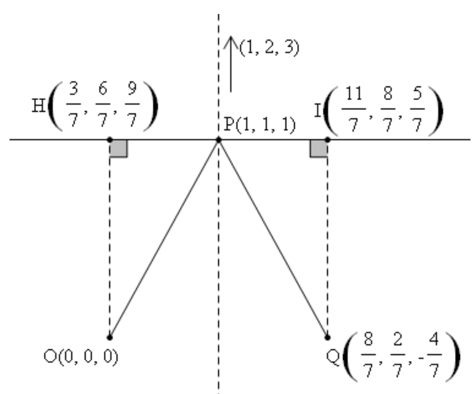
$K^{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2-\frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}$이므로 $a_n=3-\frac{1}{2^{n-2}},\quad b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

이다. 그러므로 $\frac{A_{2011}}{B_{2011}}=\frac{a_{2011}-b_{2011}}{2b_{2011}-a_{2011}}=\frac{3-\frac{1}{2^{2009}}-\frac{1}{2^{2010}}}{\frac{1}{2^{2009}}-3+\frac{1}{2^{2009}}}=\frac{3\cdot 2^{2010}-3}{4-3\cdot 2^{2010}}$이다.

문제 4

그림과 같이 점 P$(1, 1, 1)$은 평면 $\alpha: x+2y+3z=6$ 위의 점이다. 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선에 대한 점 O의 대칭점을 Q라 하면, 반사된 빛은 반드시 점 Q를 지나게 된다.

점 O에서 평면 α로의 정사영을 H라 하면, 이는 직선 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$과 평면 $x+2y+3z=6$과의 교점이므로 $\mathrm{H}\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$이다.



점 Q에서 평면에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\triangle\mathrm{OHP}\equiv\triangle\mathrm{QIP}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{PI}}$이고, 점 I의 좌표는 $\mathrm{I}\left(\frac{11}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$이다. 또한, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{QI}}$이므로 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}\left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right)$이다.

그러므로 반사된 빛의 경로에 대한 방향벡터는 $\left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{11}{7}\right)$, 즉 $(1, -5, -11)$이다. 이를 직선의 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-1}{-11}\ (x \geq 1)$$

추가 질문

등식의 좌변에 9개의 항이 있고, $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \cdots, \frac{9}{10}$이 모두 1보다 작으므로 각 항은 $[r]$ 또는 $[r+1]$이다. 따라서 좌변의 합이 61이 되려면 $6\times 9 < 61 < 7\times 9$이므로 $[r]=6$이 되어야 한다. 9개의 항들 중 $[r]$가 n개 있다면 $[r+1]$가 $9-n$개 있으므로
$n[r]+(9-n)[r+1]=61$, 즉 $6n+7(9-n)=61$이므로 $n=2$이다.

즉, $\left[r+\frac{1}{10}\right]=\left[r+\frac{2}{10}\right]=6$이고 $\left[r+\frac{3}{10}\right]=\cdots=\left[r+\frac{9}{10}\right]=7$이므로 다음 두 부등식을 만족해야 한다.

(1) $6 \leq r+\frac{2}{10} < 7$: $5.8 \leq r < 6.8$

(2) $7 \leq r+\frac{3}{10} < 8$: $6.7 \leq r < 7.7$

따라서, $6.7 \leq r < 6.8$, $67 \leq 10r < 68$ 이므로 $[10r]=67$이다.

2010 사고력 평가 심화

문제 1

자연수 $\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{2k-1}\right)+n=10^{2n-1}+10^{2n-3}+....+10+n$ 이 소수가 아님을 보여라. 단, n은 $n\geq 2$인 자연수이다.(답안 작성 시 풀이과정을 정확하게 쓰시오.)

문제 2

돌로 만들어진 정육면체의 주사위가 있다. 그런데 이 주사위는 무거워서 던질 수가 없고 밑면의 한 모서리를 임의로 선택하여 지렛대로 들어서 돌릴 수 있다. 따라서 주사위를 돌릴 때 다음에 나오는 윗면의 눈은 기존의 윗면과 밑면의 눈이 아닌 옆면의 숫자만이 나올 수 있고 그 확률은 모두 같다. 돌리기 전에 윗면의 주사위의 눈이 1일 때, 2009번 돌렸을 때, 다시 주사위의 윗면의 눈이 1일 확률을 구하여라. (답안 작성 시 풀이과정을 정확하게 쓰시오)

문제 3

부등식 $a>b>0$을 만족하는 모든 실수 a, b에 대하여 다음 부등식이 성립하는 최소의 양의 실수 m을 구하여라.

$$ab(a^2-b^2)\leq m(a^2+b^2)^2$$

(답안 작성 시 풀이과정을 정확하게 쓰시오)

문제 4

(가) $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^k}dx$를 구하여라. (단. $k>1$인 실수이다.)

(나) (가)의 결과와 다음 주어진 [정리 A]를 이용하여 $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \sin(x^k)dx$가 존재함을 증명하여라. (단, $k>1$인 실수이며, [정리 A]는 증명할 필요 없음.)

[정리 A]

모든 $x\geq 1$에 대하여 정의된 주어진 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $0\leq|f(x)|\leq g(x)$를 만족한다고 하자. 만약, $\lim_{M\to\infty}\int_1^M g(x)dx$이 존재한다고 하면 $\lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx$ 또한 존재한다. (답안 작성 시 풀이과정을 정확하게 쓰시오.)

2010 사고력 평가 공통

문제 1

연립일차방정식

$$\begin{cases} (a^2-k)x+(2a+3)y=0 \\ ax+(a^2+3a-k)y=0 \end{cases}$$

이 $x=0,\, y=0$ 이외의 해를 가지는 서로 다른 실수 k가 두 개 이상 존재하는 a의 범위를 구하여라.

문제 2

직선 $x-1=\dfrac{y}{3}=z$ 위의 임의의 점과 그 점으로부터 평면 $x+y-z=1$ 위의 가장 가까운 점을 3:1로 내분하는 점의 자취의 방정식을 구하여라.

문제 3

한국, 미국, 영국, 중국, 독일, 프랑스, 이탈리아, 캐나다의 8개 국가의 학생 대표 8명이 모여서 원탁 토론을 하고자 한다. 그런데 원활한 토론을 위하여 선호하는 자리를 조사하였더니 다음과 같은 요구를 받았다.

- 미국 학생 대표는 영국 학생 대표의 옆자리에 앉기를 거부하였다.
- 영국 학생 대표는 독일 학생 대표와 원탁의 맞은 편 마주 보는 자리에 앉기를 원했다.
- 중국 학생 대표는 미국 학생 대표의 옆자리에 앉기를 거부하였다.

위의 요구에 맞도록 8개 국가의 학생 대표를 원탁에 앉힐 수 있는 방법의 수를 구하여라. 단, 원탁의 모든 자리는 동일하다고 가정한다.

문제 4

다음 점화식으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

$a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_{n+1}=\dfrac{2n-1}{2n+1}a_n+\dfrac{n}{2n+1}$ (여기서 $n \geq 1$ 인 모든 자연수이다.)

문제 5

일직선 위에 있지 않은 평면 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 갖는 삼각형 $\triangle ABC$를 생각하자. $\triangle ABC$의 넓이가 4라면 $|\overline{AB}|^2+|\overline{AC}|^2 \geq 16$ 임을 증명하여라. 또한 등호가 성립할 때 삼각형의 모양은 어떻게 되는가? (단, $|\overline{AB}|$는 삼각형의 변 $\overline{AB}$ 의 길이를 의미한다.)

문제 6

$k \geq 0$인 실수에 대하여 함수 $f_k(x)=\max\{kx+k^2,\, x^2-k^2\}$이라 하자. 여기서, $\max\{A, B\}$ 는 A, B 중 작지 않은 것을 나타낸다. 적분 $\int_0^1 f_k(x)\,dx$가 최소가 되는 k를 구하여라.

문제 7

자연수 $\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{2k-1}\right)+n = 10^{2n-1}+10^{2n-3}+\ldots.+10+n$ 이 소수가 아님을 보여라. (단, n은 $n \geq 2$인 자연수이다.)

선생님 클리닉

(사고력 평가 심화)

문제 1은 수열의 점화식이 $\sum_{k=1}^{n} ka_k$의 형태이므로 $b_n = na_n$인 새로운 수열을 생각해보면 점화식으로 일반항을 구할 수 있다. 문제 2는 소수가 아님을 보이기 위해 적당한 수로 나누어지도록 식을 변형해 본다.

문제 2는 p_n을 n번 주사위를 돌릴 때 윗면에 1이 나올 확률이라 할 때 $(n-1)$번째에 어떤 수가 윗면에 나와야 한 번 더 굴렸을 때 1이 나올지 점화식을 세워본다.

문제 3은 최솟값을 구하고자 하는 m을 a, b에 관한 부등식을 정리하여 공통으로 나오는 항이 없는지 찾아본다.

문제 4는 이상적분의 수렴, 발산을 판별하는 적분의 비교판정법에 관한 문제이다. 수렴함을 보이려면 주어진 함수보다 크지만 수렴하는 함수를 보이고, 발산함을 보이려면 주어진 함수보다 작지만 적분해보면 발산하는 함수를 찾아본다.

(사고력 평가 공통)

문제 1은 연립일차방정식이 해를 가지지 않을 조건과 해를 가질 조건을 정확히 알고 문제를 해결한다.

문제 2는 직선의 방정식과 그 방정식을 가지고 내분점을 찾는 연습해 본다.

문제 3은 특정 학생을 기준으로 고정시키고 다른 학생들을 여러 경우로 경우의 수를 나누어 구하는 방법을 연습해 본다.

문제4는 점화식을 구하는데 있어서 점화식에서 두 항의 차를 다시 치환하여 치환한 점화식을 사용하여 원래 점화식을 구하여 본다.

문제 5는 산술 기하 평균과 삼각형의 넓이 공식을 응용하여 기하문제를 풀어본다.

문제 6은 max의 정의를 정확히 숙지하고 관련되는 적분을 정의에 맞게 풀이해 본다.

문제 7은 심화 1번문제와 동일

관련 학습

1. 수열의 합과 일반항 사이 관계

수열 $\{a_n\}$의 합을 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이라 하면 다음이 성립한다.

(1) $a_1 = S_1$

(2) $a_n = S_n - S_{n-1}$(단, $n \geqq 2$)

2. 베이즈의 정리

n개의 배반사건 $A_1, A_2, \cdots A_n$중 하나는 반드시 일어난다고 할 때, 임의의 사건 B에 대하여 다음이 성립한다.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

3. 적분의 비교판정법

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 구간 $[a, \infty)$에서 연속이고, $x \in [a, \infty)$인 모든 x에 대하여 $0 \le f(x) \le g(x)$이면, 다음이 성립한다.

(1) $\int_a^\infty g(x)dx$가 수렴하면 $\int_a^\infty f(x)dx$도 수렴한다.

(2) $\int_a^\infty f(x)dx$가 발산하면 $\int_a^\infty g(x)dx$도 발산한다.

추가 질문

주어진 [정리 A]를 사용하여 다음 적분의 수렴과 발산을 판정하여라.

$$\int_{2}^{\infty} \frac{xe^{x}}{\ln x} dx$$

[정리 A]
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 구간 $[a,\infty)$에서 연속이고, $x \in [a,\infty)$인 모든 x에 대하여 $0 \le f(x) \le g(x)$이면, 다음이 성립한다.

(1) $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$가 수렴하면 $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$도 수렴한다.

(2) $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$가 발산하면 $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$도 발산한다.

예시 답안

2010 사고력 평가 심화

문제 1

임의의 양의 실수 a에 대하여

$$a^{2k-1}+1=(a+1)\cdot(a^{2k-2}-a^{2k-3}+\cdot\cdot\cdot\cdot-a+1)$$

임을 이용하기 위해 주어진 자연수를 다음과 같이 재정렬한다.

$$10^{2n-1}+10^{2n-3}+....+10+n=\sum_{k=0}^{n-1}(10^{2k+1}+1)$$

각 $0 \le k \le n-1$에 대하여 $10^{2k+1}+1$이 각각 11로 나누어지기 때문에

$\sum_{k=0}^{n-1}(10^{2k+1}+1)$은 11로 나누어짐을 알 수 있다.

문제 2

편의상 k 번째 1의 눈이 나올 확률을 P_k 이라 하자. 한편 1의 눈과 맞은편에 있는 눈이 나올 확률을 Q_k 이라 하면 n번째 P_n과 Q_n은 다음과 같이 주어진다.

$$P_n = \frac{1}{4}(1-P_{n-1}-Q_{n-1}), \quad Q_n = \frac{1}{4}(1-P_{n-1}-Q_{n-1}), \ n \ge 2, \ P_1 = Q_1 = 0$$

이다. 편의상 $R_n = P_n + Q_n$라 하면

$$R_n = \frac{1}{2}(1-R_{n-1}), n \ge 2, R_1 = 0$$

이 됨을 알 수 있다. 양변에 $\frac{1}{3}$를 빼주면

$$R_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(R_{n-1} - \frac{1}{3})$$

이 되고 그러므로

$$R_n - \frac{1}{3} = (-\frac{1}{2})^{n-1}(R_1 - \frac{1}{3}) = (-1)^n \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1}$$

이다. 한편 $P_n = Q_n, n \ge 2$ 이므로

$$P_n = \frac{1}{6} + (-1)^n \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^{n-1}$$

이며 특히 $n = 2009$ 인 경우이므로 $P_{2009} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^{2008}$ 이 된다.

문제 3

양변을 $(a^2+b^2)^2$로 나누면

$$\frac{ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\right\} = \frac{1}{4}$$

$$\because \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2 > 0, \quad \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 > 0\text{이고 } \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 = 1$$

이므로 산술기하평균을 사용

다른풀이

양변을 b^4로 나누면 위의 부등식은

$$\frac{a}{b}((\frac{a}{b})^2 - 1) \le m((\frac{a}{b})^2 + 1)^2$$

으로 변환된다. 편의상 $t = \frac{a}{b}$로 하여 $t > 1$ 인 경우에

$$\frac{t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \le m$$

임을 만족하는 최소의 m을 찾으면 된다.

$$F(t) = \frac{t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$$

로 정의하면

$$F(1)=0 \text{ 이고 } \lim_{t\to\infty} F(t)=0$$

임을 알 수 있다. $F(t)$의 최댓값이 곧 m의 최솟값이 되므로 미분을 이용하여 이를 구하고자 한다. 편의상 $\log F(t)$를 $G(t)$라 하자. 즉

$$G(t) = \ln F(t) = \ln t + \ln(t^2-1) - 2\ln(t^2+1).$$

$F(t)$의 최대가 $G(t)$의 최댓값이 되기에 $G(t)$를 미분하여

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{1}{t} + \frac{2t}{t^2-1} - \frac{4t}{t^2+1} = \frac{t^4-1+2t^2(t^2+1)-4t^2(t^2-1)}{t(t^2-1)(t^2+1)} = \frac{-t^4+6t^2-1}{t(t^2-1)(t^2+1)}.$$

여기서 $t>1$이면서 극댓값을 가지는 값은

$$t = 1+\sqrt{2}$$

임을 알 수 있다. 그러므로 $F(t)$는 $t=1+\sqrt{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$를 가지며 따라서 최소의 m값은 $m=\frac{1}{4}$이다.

문제 4

(가) $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^k}dx = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{-k+1}\left[x^{-k+1}\right]_1^M = \lim_{M\to\infty}\frac{M^{-k+1}-1}{-k+1} = \frac{1}{k-1}$ 이다.

(나) $\frac{d}{dt}\cos(x^k) = -kx^{k-1}\sin(x^k)$ 임을 이용하고 부분적분하여

$$\begin{aligned}\int_1^M \sin(x^k)dx &= -\int_1^M \frac{1}{kx^{k-1}}(\cos(x^k))'dx \\ &= -\frac{\cos M^k}{kM^{k-1}} + \frac{\cos 1}{k} - \frac{k-1}{k}\int_1^M \frac{\cos(x^k)}{x^k}dx \\ &= \frac{\cos 1}{k} - \frac{k-1}{k}\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\cos(x^k)}{x^k}dx\end{aligned}$$

얻는다. (여기서 $-\lim_{M\to\infty}\frac{\cos M^k}{kM^{k-1}}=0$ 임을 이용하였다.)

[정리A]에 의해 $f(x) = \frac{\cos(x^k)}{x^k}$, $g(x) = \frac{1}{x^k}$라 하고 (a)의 $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{k-1}$ 임을

이용하면 $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\cos(x^k)}{x^k}dx$ 이 존재함을 알 수 있다.

그러므로

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M \sin(x^k)dx = \frac{\cos 1}{k} - \frac{k-1}{k}\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\cos(x^k)}{x^k}dx$$

가 된다.

오른편 적분이 존재하므로 $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \sin(x^k)dx$ 역시 존재함을 알 수 있다.

추가 질문

주어진 함수보다 작지만, 적분하면 발산하는 함수를 찾아보자.

$f(x) = \frac{xe^x}{\ln x}$, $g(x) = e^x$는 $[2,\infty)$에서 연속인 함수이고 $0 \le g(x) < f(x)$이 성립한다.

($\because x \ge 2$에서 $h(x) = x - \ln x$라 하면 $h(2) = 2 - \ln 2 > 0$이고, $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$이므로 증가함수이다. 따라서 $x \ge 2$에서는 $x > \ln x$ 이 성립한다.)

문제에서 주어진 [정리 A]에 의해 $\int_2^\infty g(x)dx = \int_2^\infty e^x dx = [e^x]_2^\infty$는 발산하므로

$\int_2^\infty \frac{xe^x}{\ln x}dx$도 발산한다.

2010 사고력 평가 공통

문제 1

연립 일차 방정식이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖기 위해서는

$$(a^2-k)(a^2+3a-k)-a(2a+3)=0$$

이어야 한다. k 에 관하여 식을 정리하면

$$k^2-(2a^2+3a)k+(a^4+3a^3-2a^2-3a)=0$$

이다. 위 식이 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

$$D=(2a^2+3a)^2-4(a^4+3a^3-2a^2-3a)>0$$

이어야 한다. 즉,

$$17a(a+\frac{12}{17})>0$$

이어야 한다. 답은

$$a<-\frac{12}{17} \text{ 또는 } a>0$$

문제 2

직선 위의 임의의 점을 P 라 하면

$$P(t+1,\, 3t,\, t)$$

라 놓을 수 있다. 이 점에서 주어진 평면에 가장 가까운 점Q는 주어진 평면의 법선 위에 있고 따라서

$$x-(t+1)=y-3t=\frac{z-t}{-1}=s$$

로 놓을 수 있다. 그러므로

$$(x,\, y,\, z)=(s+t+1,\, s+3t,\, -s+t)$$

가 평면위에 있는 점을 찾으면 Q를 구할 수 있다. 그러므로 주어진 방정식에 대입하면 $s=-t$이다.

$$Q(1,2t,2t)$$

이며 $\overline{PQ}$ 를 3:1 로 내분하는 점을 구하면

$$x=\frac{t+4}{4},\ y=\frac{9t}{4},\ z=\frac{7t}{4}$$

이다. 자취의 방정식은

$$x-1=\frac{y}{9}=\frac{z}{7}$$

문제 3

영국 학생과 독일 학생의 자리를 고정시키면 나머지 6명을 영국 학생의 왼쪽 오른쪽에 각각 3명씩 앉히는 경우의 수를 구하면

$$\binom{6}{3}\times 3!\times 3!$$

이다. 위의 경우 중 미국과 영국학생이 옆에 앉는 경우와 중국 학생이 미국 학생 옆에 앉는 경우를 각각 구하여 더하면

$$2\times\binom{5}{2}\times 2!\times 3!+2\times 2\times\binom{4}{1}\times 2!\times 3!$$

이다. 이 중 미국과 영국 학생이 옆에 앉으면서 중국과 미국 학생이 옆에 앉는 경우는

$$2\times\binom{4}{1}\times 3!=48\text{가지}$$

이다. 그러므로 경우의 수는 720-240-192+48 =336 가지 이다.

문제 4

양변에 $2n+1$을 곱하면

$$(2n+1)a_{n+1}=(2n-1)a_n+n$$

이 된다. $(2n-1)a_n=b_n$ 으로 치환하면

$$b_{n+1}-b_n=n$$

을 얻는다. b_n 의 일반항을 구하면

$$b_n=\frac{1}{3}+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{3n^2-3n+2}{6}$$

이다. 그러므로 $a_n=\dfrac{3n^2-3n+2}{12n-6}$ 이다.

문제 5

산술 평균과 기하 평균의 관계와 삼각형의 넓이 공식을 사용하면

$$|\overline{AB}|^2+|\overline{AC}|^2\ge 2|\overline{AB}||\overline{AC}|=4\cdot\frac{1}{2}|\overline{AB}||\overline{AC}|\ge 4\cdot\frac{1}{2}|\overline{AB}||\overline{AC}|\sin(\angle BAC)=16$$

이다. 위의 등식이 성립하는 경우는 $|\overline{AB}|=|\overline{AC}|$ (산술평균=기하평균) 이고

$$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$$

일 때 이다. 그러므로 변 BC를 빗변으로 갖는 직각이등변삼각형이다.

다른풀이

일반성을 잃지 않고

$$A(0,0),\ B(a,b),\ C(c,0)$$

라 놓을 수 있다($b>0,\ c>0$). 여기서 삼각형의 넓이를 이용하면

$$\frac{bc}{2}=4$$

이다. 따라서,

$$a^2+b^2+c^2-16=a^2+b^2+c^2-2bc \geq 0$$

임을 보이면 충분하다.

$$a^2+b^2+c^2-2bc=a^2+(b-c)^2$$

이므로 0이상이다. 그러므로 등호가 성립할 때는

$$a=0,\ b=c$$

일 때뿐이다. 즉, 직각이등변삼각형인 경우이다.

문제 6

$x^2-k^2=kx+k^2$ 을 풀면 $(x+k)(x-2k)=0$ 이므로 $x=-k$ 또는 $x=2k$ 이다.
$2k \leq 1$ 일 때 주어진 적분은

$$\int_0^{2k} kx+k^2dx+\int_{2k}^{1} x^2-k^2dx=\left[\frac{k}{2}x^2+k^2x\right]_0^{2k}+\left[\frac{x^3}{3}-k^2x\right]_{2k}^{1}=\frac{10}{3}k^3-k^2+\frac{1}{3}=g(k)$$

가 된다. 이를 k 에 관하여 미분하면

$$g'(k)=2k(5k-1)$$

이다. 그러므로 임계점은 $k=0,\ \frac{1}{5}$.

$$g(0)=\frac{1}{3},\ \ g(\frac{1}{5})=\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{25}=\frac{24}{75}$$

이므로 $g(k)$ 는 $k \leq \frac{1}{2}$ 에서 $k=\frac{1}{5}$ 에서 최솟값을 갖는다.

$k>\frac{1}{2}$ 일 때, 주어진 적분은

$$\int_0^{1} kx+k^2dx=\left[\frac{k}{2}x^2+k^2x\right]_0^{1}=\frac{k}{2}+k^2=g(k) \text{ 라 하자.}$$

$g(k)$ 는 증가함수이므로 주어진 적분은 $k=\frac{1}{5}$ 에서 최솟값을 갖는다.

문제 7

임의의 양의 실수 a에 대하여

$$a^{2k-1}+1=(a+1)\cdot(a^{2k-2}-a^{2k-3}+\cdot\cdot\cdot\cdot-a+1)$$

임을 이용하기위해 주어진 자연수를 다음과 같이 재정렬한다.

$$10^{2n-1}+10^{2n-3}+....+10+n=\sum_{k=0}^{n-1}(10^{2k+1}+1)$$

각 $0 \leq k \leq n-1$에 대하여 $10^{2k+1}+1$이 각각 11로 나누어지기 때문에 $\sum_{k=0}^{n-1}(10^{2k+1}+1)$은 11로 나누어짐을 알 수 있다.

05 연세대학교

I 심층면접 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 심층면접순서

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 진행요원의 안내에 따라 출결, 신분증 확인 을 하고, 면접에 대한 설명을 들음	자기번호올 때까지	대강당
⇩			
문제풀이	• 문제풀이실에서 수학, 과학문제(원서접수 시 선택한 과목)를 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	30분	복도
⇩			
탐구역량 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 수학 및 과학 문제 질의 응답 (추가문제 있음) • 칠판사용 가능하며, 문제풀이실에서 사용한 용지는 탐구역량 면접 시 활용할 수 있음 • 면접관을 보는 교수님은 2명	15분	면접실
⇩			
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 설문조사에 답한 후 귀가		면접 후 대기실

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.

① 오전, 오후가 따로 있지만 문제는 같음 (과별로 다 다른게 아니라 다 같음.)
② 오전은 다 끝날 때까지 나가지 못하고 대기하여야 한다. (전자기기 사용불가)

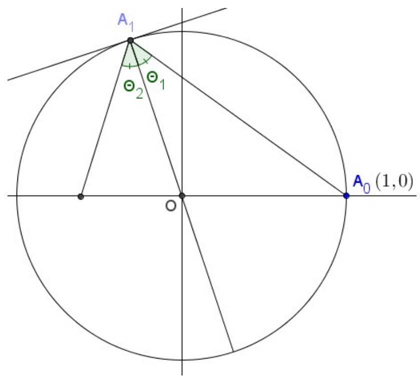
※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)
※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 수시

문제 1

제시문에 반사의 법칙에 대한 설명이 있었음.



1. 위 그림에서 $(1,\ 0)$에서 빛을 쏘아서 k번 반사되어 다시 $(1,\ 0)$으로 돌아올 θ_1의 조건을 설명하시오.

2. 빛을 맞은 점을 차례대로 $\mathrm{A}_0(=(1,0))$, A_1, A_2, $\cdots$, $\mathrm{A}_k(\mathrm{A}_k=\mathrm{A}_0)$ 라고 두고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}=\vec{a_i}$라고 하자. 다음을 증명하시오
$\sum_{i=0}^{k-1}\vec{a_i}=\vec{\mathrm{O}}$, $\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{j=i+1}^{k-1}\vec{a_i}\cdot\vec{a_j}\right)\le 0$ (여기서 $\vec{a_i}\cdot\vec{a_j}$는 두벡터의 내적이다)

선생님 클리닉

문제1의 1번은 입사각과 반사각이 같다는 것을 이용하여 정다각형을 이용하여 접근을 할 수 있다. 2번은 정다각형의 각 꼭짓점에 대응하는 복소수를 이용하는 문항이고 내적의 값이 음수임을 보이기 위해 삼각함수와 복소수의 극형식간의 관계를 이용하여 설명할 수 있다.

관련 학습

1. 복소수의 극형식

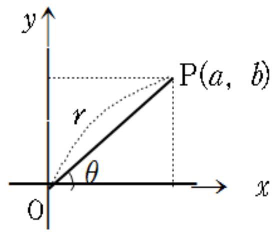
복소수 $z=a+bi$ 에 대하여

(1) 극형식 : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\left(r>0,\ \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

(2) 절대값 : $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

(3) 편각 : $\theta=\arg(z)$



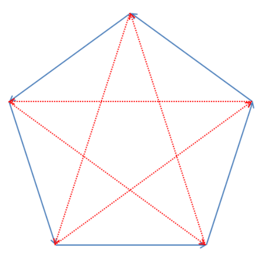
예시 답안

문제 1

(1)

처음으로 반사되는 곳이 정다각형의 한 꼭짓점이면 다시 $(1,\ 0)$ 으로 돌아온다. 또한, k번 반사된 지점은 $(1,\ 0)$과 더불어 정$(k+1)$각형의 각 꼭짓점이 된다. 따라서 θ_1은

$(k+1)(\pi-2\theta_1)=2n\pi\ \left(n=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)$ 을 만족한다.



(2)

위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$을 나타내는 복소수를 z라 하면 위치벡터 $\overrightarrow{a_i}$을 나타내는 복소수는 z^i이고 $z^k=1$을 만족한다. $\sum_{i=0}^{k-1} z^i=\frac{z^k-1}{z-1}=0$ 이므로 $\sum_{i=0}^{k-1}\overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{0}$ 이다.

두 벡터 $\overrightarrow{a_i},\ \overrightarrow{a_j}$이 이루는 각의 크기를 $\theta_{i,j}$라 하면

$$\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{j=i+1}^{k-1}\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{a_j}\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{j=i+1}^{k-1}\cos\theta_{i,j}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{k-1}\cos\theta_{0,j}+\sum_{j=2}^{k-1}\cos\theta_{1,j}+\sum_{j=3}^{k-1}\cos\theta_{2,j}+\cdots+\sum_{j=k-2}^{k-1}\cos\theta_{k-3,j}+\sum_{j=k-1}^{k-1}\cos\theta_{k-2,j}$$
$$=(k-1)\cos\theta_{0,1}+(k-2)\cos\theta_{0,2}+\cdots+2\cos\theta_{k-3,k-1}+\cos\theta_{k-2,k-1}$$

이다. $S=(k-1)\cos\theta_{0,1}+(k-2)\cos\theta_{0,2}+\cdots+2\cos\theta_{k-3,k-1}+\cos\theta_{k-2,k-1}$ 라 하면,

$2S=(k-1)\{\cos\theta_{0,1}+\cos\theta_{0,2}+\cdots+\cos\theta_{k-3,k-1}+\cos\theta_{k-2,k-1}\}$ 이다.

$\cos\theta_{0,1}+\cos\theta_{0,2}+\cdots+\cos\theta_{k-3,k-1}+\cos\theta_{k-2,k-1}$ 은 $z+z^2+\cdots+z^{k-2}+z^{k-1}$ 의

실수부이므로 $z+z^2+\cdots+z^{k-2}+z^{k-1}=\dfrac{z^k-z}{z-1}=-1$ 에서 $2S=-(k-1)$ 이고

$S=-\dfrac{k-1}{2}<0$ 이다.

2012 수시

문제 1

$f(0)=1,\ f(1)=0$인 연속함수 $f(x)$에 대해 $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2dx$ 의 값이 최소가 되게 하는 함수 $f(x)$가 존재하는가?

문제 2

$g(0)=g(1)=0$이고 $[0,\ 1]$에서 연속이고 도함수가 연속인 함수 $g(x)$의 집합을 S라 하자. 모든 $g(x)\in S$인 $g(x)$에 대하여 $L\le\displaystyle\int_0^1\{|g(x)|^2+(1-|g'(x)|)^2\}dx$이 성립하도록 하는 L의 최댓값을 구하시오.

선생님 클리닉

주어진 조건을 만족하는 함수를 가정하고 반례를 찾는 과정을 통하여 증명할 수 있다. 고교 수준에서 반례를 찾는 것은 매우 어려운 일이므로 구체적인 예를 통하여 반례를 찾을 수 있도록 하자.

예시 답안

문제 1

$f(0)=1,\ f(1)=0$인 연속함수 전체의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소 중에서 $\displaystyle\int_0^1|f(x)|^2dx$ 의 값이 최소가 되게 하는 함수 $f(x)$가 존재하고, $\displaystyle\int_0^1|f(x)|^2dx$ 의 최솟값을 M이라 가정하자. 즉 $\displaystyle\int_0^1|f(x)|^2dx=M$ 이라 하자.

또한, $F(x)=\dfrac{1}{x+1}f(x)$라 하면, $F(x)$는 연속함수이고 $F(0)=f(0)=1$,

$F(1)=\dfrac{1}{2}f(1)=0$이므로 $F(x)\in A$ 이다.

그런데, $0<x<1$일 때, $0<\dfrac{1}{x+1}<1$이므로 $0<\left|\dfrac{1}{x+1}f(x)\right|<|f(x)|$이고, 따라서

$\int_0^1 |F(x)|^2 dx=\int_0^1 \left|\dfrac{1}{x+1}f(x)\right|^2 dx<\int_0^1 |f(x)|^2 dx\ =M$ 이 되어 M이 최솟값이라는 가정에 모순이다.

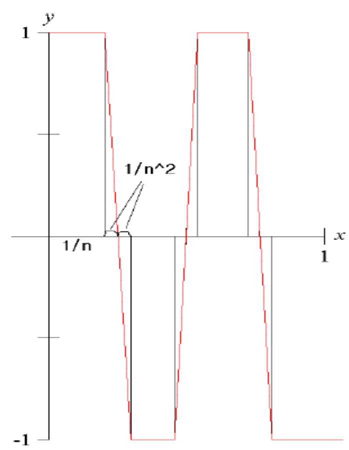
문제 2

다음 [그림1]과 같은 그래프를 가지는 함수 $g'(x)$를 생각하자. 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하여 그 점을 지나면서 $\dfrac{k}{n}\pm\dfrac{1}{n^2}$ 지점에서 꺾이도록 하고, 그 외에는 모두 ±1의 값이 반복되도록 하자.

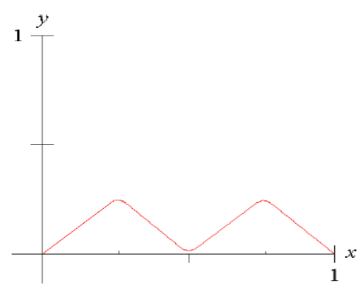
이제 $g(x)=\int_0^x g'(t)dt$로 정의하여 그래프를 그려보면 [그림2]와 같다. n을 짝수라 하면, 이는 전구간에서 연속인 도함수를 가지므로 이는 문제의 조건을 만족하는 함수 $g(x)$이다. $g'(x)>0$인 면적과 $g'(x)<0$인 면적이 같으므로, 함수 $g(x)$는 $g(0)=g(1)=0$을 만족한다.
이제 $g(x)$의 최댓값을 생각하자. 처음으로 $g'(x)=0$인 $\dfrac{1}{n}$지점에서 최댓값 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}$을 가지고 그 다음 반복되는 양인 구간과 음인 구간의 넓이가 마지막 구간을 제외하고는 일정하므로 $\dfrac{2k-1}{n}$인 지점에서 같은 최댓값을 가진다. 또한, 항상 $g(x)\ge o$이므로

$$\int_0^1 |\,g(x)^2|dx\le\int_0^1\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)^2 dx\le\int_0^1\left(\frac{1}{n}\right)^2 dx=\frac{1}{n^2}$$

을 얻는다. 이제 $\int_0^1 (1-|\,g'(x)|)^2 dx$의 값을 생각하자. $|g'(x)|$의 값이 1과 다른 구간이 $\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{n^2},\ \dfrac{k}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$ 밖에 없음을 생각하면 이 값이 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.



[그림1]



[그림2]

$$\int_0^1 (1-|g'(x)|)^2\,dx = 2(n-1)\int_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} (1-|g'(x)|)^2\,dx$$

구간 $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n}\right)$에서 $0 \le g'(x) \le 1$이 성립한다. 즉, $0 \le \{1-g'(x)\} \le 1$이므로

$$2(n-1)\int_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} (1-|g'(x)|)^2\,dx \le 2(n-1)\int_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} 1dx = \frac{2(n-1)}{n^2}$$

이 성립한다. 그러므로 우리가 정의한 $g(x)$에 대하여 주어진 정적분 값은

$$\int_0^1 \{|g(x)|^2 + (1-|g'(x)|)^2\}dx \le \frac{1}{n^2} + \frac{2(n-1)}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2}$$

을 만족한다. $n\to\infty$일 때 이 값은 0으로 수렴하므로 충분히 큰 n(단, 짝수)에 대하여 이 정적분 값이 그 어떤 양수보다도 작아지게 된다. 따라서 $L>0$이면 모순이 된다.

$$0 < \int_0^1 \{|g(x)|^2 + (1-|g'(x)|)^2\}dx$$

인 것은 자명하므로 L의 최댓값은 0이다.

06 UNIST

Ⅰ 심층면접 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 심층면접 순서

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 진행요원의 안내에 따라 출결, 신분증 확인을 하고, 면접에 대한 설명을 들음	15~75분	면접전 대기실
	⇩		
문제풀이	• 문제풀이실에서 수학, 과학문제(원서접수 시 선택한 과목)를 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	30분	면접풀이실
	⇩		
탐구역량 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 수학 문제 질의 응답 • 안에 준비된 화이트보드를 사용하며, 문제풀이실에서 사용한 용지는 탐구역량 면접 시 활용할 수 있음 • 면접을 보는 교수님은 2명	15분	면접실 (가)
	⇩		
탐구역량 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 과학 문제 질의 응답 • 안에 준비된 화이트보드를 사용하며, 문제풀이실에서 사용한 용지는 탐구역량 면접 시 활용할 수 있음 • 면접을 보는 교수님은 2명	15분	면접실 (나)
	⇩		
인성면접	• 지원자는 탐구력, 발전가능성, 기타 인성을 평가할 수 있는 질문에 응답 • 면접을 보는 교수님은 2명	15분	면접실 (다)
	⇩		
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 설문조사에 답한 후 귀가		면접 후 대기실

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.

※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)

※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 탐구역량 오전

문제 1

구 O위의 점 A, B를 지나는 평면 M은 원을 만든다. 이 원의 반지름을 r, 중심을 P라 하고 $\angle \mathrm{APB}=\theta$라 하자. (단, 구의 반지름은 R, $0<\theta<\pi$)

1. 미분의 정의를 이용하여 증가함수, 감소함수를 설명하시오
2. 현 AB의 길이를 d라 하고 평면 위의 원의 반지름을 r이라 하면, 호 AB의 길이는 r에 대한 함수 $f(r)$로 나타낼 수 있다. 여기서 $f(r)$이 감소함수임을 증명하시오.
3. 호 AB의 길이가 최소가 되는 경우는 $r=\mathrm{R}$임을 증명하고 그 길이를 구하시오.

문제 2

행렬 $\mathrm{A}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$이 있다.

1. 캐일리-해밀턴 정리를 정의하고 이를 A에 적용하시오.
2. 행렬 A는 회전변환의 행렬의 상수배로 나타낼 수 있음을 증명하시오.
3. 행렬 A를 k번 곱하면 단위변환의 상수배가 되는데 이 때 k를 설명하시오.
4. $\mathrm{E}+2\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+2\mathrm{A}^3+\cdots+2\mathrm{A}^{667}+\mathrm{A}^{668}$을 구하여라.

2013 탐구역량 오후

문제 1

공간상에 $x^2+(z-1)^2=1$인 원 위의 점 P는 $(0,0,2)$를 시작으로 초당 2의 각속도로 시계방향으로 회전하는 점이고, 점 Q는 $x^2+y^2=1$위의 점 $(0,1,0)$을 시작으로 초당 1의 각속도로 시계방향으로 회전한다. 이때 t초 후 P점을 xy평면에 정사영 시킨 점을 P′라고 하자.

1. 점 P, Q가 t초 동안 운동했을 때 점 P, P′, Q 의 좌표를 구하시오.
2. t초에서 점 O, P, P′, Q를 이어 만든 삼각뿔의 부피의 최댓값을 구하시오.

문제 2

$f(x)$는 $(a \le x \le b, a \ne b)$인 연속함수이고 다음의 3조건을 만족한다고 할 때 다음에 답하시오.

<조건>

① $f(x)>0, g(x)>0$

② $f'(x)=g(x),\ f''(x)=-f'(x)$

③ $(f(x))^2+(g(x))^2=c$

1. $f(x)$와 $g(x)$의 역함수가 존재함을 밝히시오.
2. $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx+\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하시오.
3. $g^{-1}(x)$의 도함수를 구하시오
4. $f^{-1}(x)+g^{-1}(x)=c$로 일정함을 보이시오.

선생님 클리닉

행렬 $M=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$은 일차변환의 실수배를 나타내는 행렬로

$$M=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

로 표현 가능함을 이해한다면 쉽게 풀 수 있다.

관련 학습

1. 케일리-헤밀턴의 정리

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이면 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ (단, 역은 성립하지 않는다.)

2. 회전변환

원점을 중심으로 점 $P(x,y)$를 각 θ만큼 회전하여 점 $P'(x',y')$으로 옮기는 회전변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$이다.

3. 회전변환의 합성

원점을 중심으로 θ만큼 회전한 회전변환을 f라 하면, 일차변환 f를 n번 합성한 합성변환 $f\circ f\circ\cdots\circ f$는 원점을 중심으로 $n\theta$만큼 회전한 회전변환과 같으므로

$f\circ f\circ\cdots\circ f$를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$이다.

추가 질문

행렬 $\begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환을 f, 행렬 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환을 g라 하자. 좌표평면에서 점 $P_1(4,3)$이 합성변환 $g\circ f$에 의하여 옮겨지는 점을 P_2, 점 P_2가 합성변환 $g\circ f$에 의하여 옮겨진 점을 P_3, $\cdots$, 점P_n이 합성변환 $g\circ f$에 의하여 옮겨진 점을 $P_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$이라 하자.

삼각형 $P_{n+1}OP_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

예시 답안

2013 탐구역량 오전

문제 1

(1)

함수 f가 증가함수이면 $f'(x) \geq 0$이고 감소함수이면 $f'(x) \geq 0$이다. 또한 $f'(x) > 0$인 구간에서 함수 f는 증가함수이고 $f'(x) < 0$인 구간에서 감소함수이다.

$f'(x) > 0$인 구간에서 증가함수임을 증명해보자.

$f'(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$ 에서

$f(x+h) - f(x) > 0 \ (h > 0)$이고 $f(x+h) > f(x) \ (h > 0)$이다.

또한 $f'(x) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$ 에서

$f(x+h) - f(x) < 0 \ (h < 0)$이고 $f(x+h) < f(x) \ (h < 0)$이다.

그러므로 $f'(x) > 0$인 구간에서 함수 f는 증가함수이다.

(2)

$f(r) = r\theta$이고 θ는 r의 함수이다. 양변을 r에 대해 미분하면 $\frac{df(r)}{dr} = \theta + r\frac{d\theta}{dr}$ 이다.

여기서 현 AB의 길이가 d이므로 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{d}{2r}$ 이고

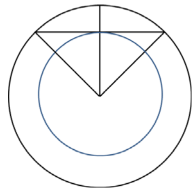
$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{4r^2 - d}}{2r} = \frac{\sqrt{D}}{2r} \ (D = 4r^2 - d)$이다.

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{d}{2r}$ 의 양변을 r에 대해 미분하면 $\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dr}\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{r^2}$ 이므로

$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{d}{r^2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1} = -\frac{d}{r^2}\left(\frac{2r}{\sqrt{D}}\right) = -\frac{2d}{r\sqrt{D}}$ 이다.

$\frac{df(r)}{dr} = \theta + r\frac{d\theta}{dr}$ 은 $\frac{df(r)}{dr} = \theta - \frac{2d}{\sqrt{D}} = 2\frac{\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\theta\right) - d}{\sqrt{D}}$ 인데 그림에서

$\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\theta\right) - d < 0$ 이므로 $f(r)$은 감소함수이다.



(3)
$f(r)$이 감소함수이므로 $f(r)$의 최솟값은 r이 최대일 때이다. 따라서 $r=R$일 때 최솟값은 $R\theta$(즉, 대원의 호)이다.

문제 2

(1)

$$A^2-\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}E=O$$

(2)

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$$

(3)

(1)에서 양변에 $A+\frac{1}{2}E$ 를 곱하면

$\left(A+\frac{1}{2}E\right)\left(A^2-\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}E\right)=O$, $A^3=-\left(\frac{1}{2}\right)^3E$, $A^6=\left(\frac{1}{2}\right)^6E$이다.

따라서 $k=3k'$(k'은 자연수)일 때, $A^k=A^{3k'}=(-1)^{k'}\left(\frac{1}{2}\right)^kE$이다.

(4)

$A^2=\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}E$이므로 $E+2A+A^2=\frac{5}{2}A-\frac{3}{4}E$,

$2A^3+A^4+2A^5=A^3(2E+A+2A^2)=-\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(2A+\frac{3}{4}E\right)$이다. 따라서

$\mathrm{E}+2\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+2\mathrm{A}^3+\cdots+2\mathrm{A}^{667}+\mathrm{A}^{668}$

$=(E+2A+A^2)+(2A^3+A^4+2A^5)+A^6(E+2A+A^2)+A^6(2A^3+A^4+2A^5)+\cdots$

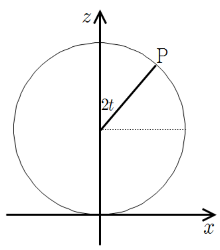
$=\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{666}\right\}(E+2A+A^2)+\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{660}\right\}(2E+A+2A^2)$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{672}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}\left(\frac{5}{2}A-\frac{3}{4}E\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{666}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}\left(2A+\frac{3}{4}E\right)$$

2013 탐구역량 오후

문제 1

(1)



그림에서 t초 후 점 P의 위치는 $\mathrm{P}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2t\right),\ 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)+1\right)$에서 $\mathrm{P}(\sin 2t,\ 0,\ 1+\cos 2t)$이고 P'의 위치는 $\mathrm{P}'(\sin 2t,\ 0,\ 0)$이다. 같은 방법으로 Q의 위치는 $\mathrm{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\ 0\right)=\mathrm{Q}(\sin t,\ \cos t,\ 0)$ 이다.

(2)

점 O, P, P$'$, Q를 이어 만든 삼각뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{OP'Q})\times$(점 P의 z좌표)이므로 부피는 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sin 2t\cos t\times(1+\cos 2t)$이고

$\frac{1}{3}\times\sin t\cos^2 t\times(2-2\sin^2 t)$에서 $\frac{2}{3}\sin t(1-\sin^2 t)(1-\sin^2 t)=\frac{2}{3}\sin t(1-\sin^2 t)^2$이다.

$y=\frac{2}{3}x(1-x^2)^2\ (-1\le x\le 1)$에서 양변을 미분하면

$y=\frac{2}{3}\{(x^2-1)^2+2x(x^2-1)2x\}=\frac{2}{3}(x^2-1)(5x^2-1)$이므로 $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$일 때, 최대가 된다. 따라서 삼각뿔 부피의 최댓값은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{32}{75\sqrt{5}}$이다.

문제 2

(1)

$f'(x)= g(x)> 0$ 이므로 일대일 대응이고 역함수가 존재한다.

$g'(x)= f''(x)= -f'(x)= -g(x)< 0$ 이므로 일대일 대응이고 역함수가 존재한다.

(2)

$y= f^{-1}(x)$ 라 두자. 조건④에서 양변을 미분하면 $2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)= 0$이다.
$f'(x)= g(x)$, $g'(x)= -f'(x)$이므로 $f(x)f'(x)-f'(x)f'(x)= 0$이다. 또한 $f'(x)> 0$ 이므로 $f'(x)= f(x)$이고(다시 미분하면 $f''(x)= f'(x)$인데 조건 ②와의 관계에서 $f'(x) = 0$이다. 이것은 $f'(x)> 0$과 모순이다.) $\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(y)}= \dfrac{1}{f(y)}= \dfrac{1}{x}$ 이다. 그러므로

$f^{-1}(x)= \ln x + C$ (C 적분상수)이다. 따라서

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \ln x\, dx + \int_a^b f'(x)dx = f(b)\ln\{f(b)\} - f(a)\ln\{f(a)\}$$

이다.

(3)

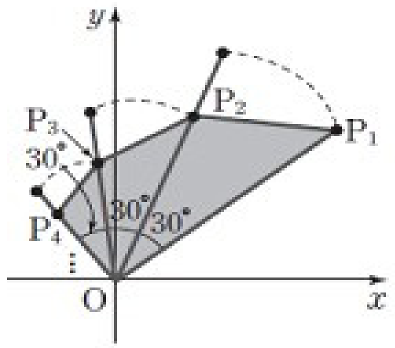
$$y= g^{-1}(x)\text{라 두자. } \{g^{-1}(x)\}' = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-g(y)} = -\frac{1}{x}$$

(4)

(2)와 (3)에서 $\{f^{-1}(x)+g^{-1}(x)\}' = \{f^{-1}(x)\}' + \{g^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = 0$ 이므로 따라서 $f^{-1}(x)+ g^{-1}(x)= c$이다.

추가 질문

일차변환 f는 원점을 중심으로 하여 30° 만큼 회전하는 회전변환이고 일차변환 g는 원점을 닮음의 중심으로 하는 닮음비가 $\dfrac{2}{3}$인 닮음변환이다. 따라서 합성변환 $g \circ f$에 의하여 옮겨진 점 $P_2, P_3, P_4, \cdots$를 좌표평면에 나타내면 아래 그림과 같다.



이때, 세 점 P_{n+1}, O, P_n 을 꼭짓점으로 하는 삼각형$P_{n+1}OP_n (n=1,2,3,\cdots)$은 모두 닮음이고, 인접한 두 삼각형의 닮음비는 $1:\frac{2}{3}$, 넓이의 비는 $1:\frac{4}{9}$이다.

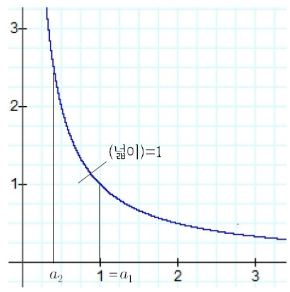
$\overline{OP_1}=5$이므로 $\triangle P_2OP_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 5\right)\cdot 5\cdot \sin 30^\circ = \frac{25}{6}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{25}{6}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{15}{2}$$

2012 수시 학업우수자

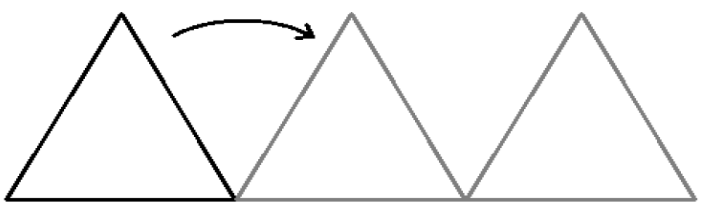
문제 1

감소하는 수열 a_n 이 있다. $f_k(x) = \dfrac{1}{x^k}$ 에 대하여 $a_1 = 1$ 이고 x 축, $x = a_n$, $x = a_{n-1}$, $f_m(x)$ 로 둘러싸인 넓이가 1 이다.

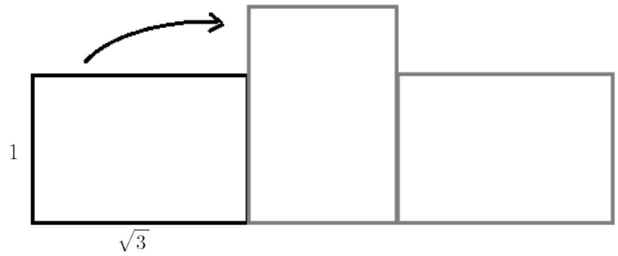


1. $k=0$ 일 때, 일반항을 구하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 발산여부를 구하여라.
2. $k=1$ 일 때, 일반항을 구하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 발산여부를 구하여라.
3. $k=m(m \geq 2)$ 일 때, 일반항을 구하고 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 가 발산한다는 사실을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 발산여부를 구하여라.

문제 2



1. 한 변의 길이가 2 인 정삼각형이 그림과 같이 굴러간 자취와 그 면적을 구하여라.



2. 한 변의 길이가 1, $\sqrt{3}$ 인 직사각형이 굴러간 자취와 그 면적을 구하여라.

선생님 클리닉

무한급수와 정적분 사이의 관계에 관한 문제는 적분단원에서는 필수문항이라고 불릴 만큼 자주 출제되는 내용이다. 특히 넓이와 정적분 사이 관계를 물어보는 문항이 자주 출제되는 바 관련된 내용을 많이 풀어보는 연습을 한다면 유사한 문제도 쉽게 풀 수 있을 것이라 생각된다.

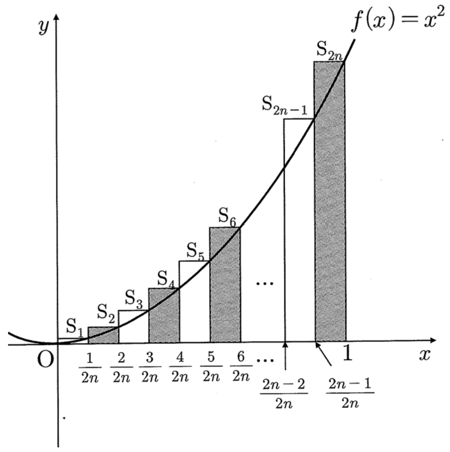
관련 학습

문제1. 비교판정법(comparision test): 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴여부를 판정하기 위해 항 a_n과 이미 수렴여부가 알려진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 항 b_n를 비교하여 수렴여부를 결정하는 판정법이다. 가장 기본적인 비교판정법은 실수를 항으로 갖는 양항급수의 수렴판정에 관한 것이다. 이는 절대수렴하는 급수는 수렴한다는 사실에 따라 복소수를 항으로 갖는 급수의 수렴판정으로 확장될 수 있다. 또한 급수의 수렴은 수열의 극한의 존재를 바탕으로 정의 되었으므로 항의 비교에 관련된 조건을 약화시킨 형태의 판정법(극한비교판정법)을 얻을 수 있다.

문제2. 사이클로이드란 원이 직선을 따라 구를 때 원주(圓周) 위의 한 점이 만드는 곡선으로 r이 원의 반지름이고, θ가 원의 각변위일 때, 곡선의 극방정식은 $x=r(\theta-\sin\theta)$와 $y=r(1-\cos\theta)$이다. 직선과 접하는 사이클로이드의 점들은 직선을 원주와 같은 길이인 $2\pi r$씩 나누며, 이 길이는 원이 정확하게 1바퀴 굴렀음을 나타낸다.
이 곡선은 주기적, 즉 직선의 길이가 $2\pi r$인 각 주기마다 같은 모양으로 반복된다. 단순 사이클로이드의 한 변형으로 단축 사이클로이드가 있다. 이 곡선은 첨점(尖點)에서 직선 아래쪽에 놓이며, 원이 구르는 방향과 반대방향으로 움직이는 고리 모양을 형성한다. 장축 사이클로이드는 단순 사이클로이드와 비슷하며, 다만 첨점이 없고 직선과 만나지 않는다. 이 곡선은 구르는 원의 반지름보다 중심에 가까운 위치, 예를 들면 바퀴의 살에 있는 점에 의해 만들어진다. 한 원이 다른 원에 외접하여 구르면 외(外)사이클로이드가 만들어지고, 내접하여 구르면 내(內)사이클로이드가 만들어진다.

추가 질문

함수 $f(x)=x^2$에 대하여 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$을 $2n$등분한 후, 구간 $\left[\dfrac{k-1}{2n},\ \dfrac{k}{2n}\right]$를 밑변으로 하고 높이가 $f\left(\dfrac{k}{2n}\right)$인 직사각형의 넓이를 S_k라 하자. (단, n은 자연수이고 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n$이다.)



<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx$

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} (S_{2k}-S_{2k-1}) = 0$

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} S_{2k} = \dfrac{1}{2}\int_0^{1} x^2\,dx$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시 답안

문제 1

(1)

$k=0$ 이므로 $1=\int_{a_n}^{a_{n-1}} 1dx = a_{n-1}-a_n \ (n \geq 2)$, $a_1=1$ 이다. 따라서 $a_n=-n+2\ (n \geq 1)$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

(2)

$k=1$ 이므로 $1=\int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{1}{x}dx = \ln a_{n-1}-\ln a_n = \ln\frac{a_{n-1}}{a_n}\ (n \geq 2)$, $a_1=1$ 이다.

따라서 $a_n=e^{-n+1}\ (n \geq 1)$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 $\dfrac{1}{1-\frac{1}{e}}=\dfrac{e}{e-1}$ 로 수렴한다.

(3)

$k=m\,(m \geq 2)$ 이므로

$1=\int_{a_n}^{a_{n-1}} x^{-m}dx = (-m+1)^{-1}\left[x^{-m+1}\right]_{a_n}^{a_{n-1}} = (-m+1)^{-1}\left[a_{n-1}^{-m+1}-a_n^{-m+1}\right]\ (n \geq 2)$, $a_1=1$

이고 $-m+1=a_{n-1}^{-m+1}-a_n^{-m+1}$ 에서 $a_n^{-m+1}=a_{n-1}^{-m+1}+m+1=\dfrac{1+(m+1)a_{n-1}^{m-1}}{a_{n-1}^{m-1}}$ 이고

$a_n^{m-1}=\dfrac{a_{n-1}^{m-1}}{1+(m+1)a_{n-1}^{m-1}}$ 이므로

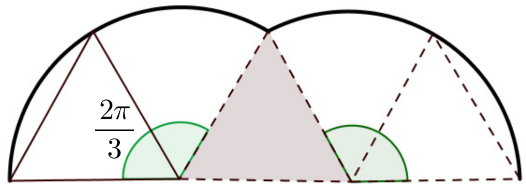
$$a_n=\frac{a_{n-1}}{\sqrt[m-1]{1+(m+1)a_{n-1}^{m-1}}}=\frac{1}{\sqrt[m-1]{\dfrac{1}{a_{n-1}^{m-1}}+(m+1)}}\ (n \geq 2)$$

이다. 따라서 $a_1=1$, $a_2=\dfrac{1}{\sqrt[m-1]{m+2}}$, $a_3=\dfrac{1}{\sqrt[m-1]{2m+3}}$, $\cdots$, $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[m-1]{nm+n+1}}$ 이다.

충분히 큰 $n\ (n \in \mathbb{N})$ 에 대하여 $(m+1)n+1<n^{m-1}$ 이고 $nm+n+1<n^{m-1}$ 이므로 $\sqrt[m-1]{nm+m+1}<n$ 에서 $\dfrac{1}{\sqrt[m-1]{nm+m+1}}>\dfrac{1}{n}$ 이다. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots$ 가 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

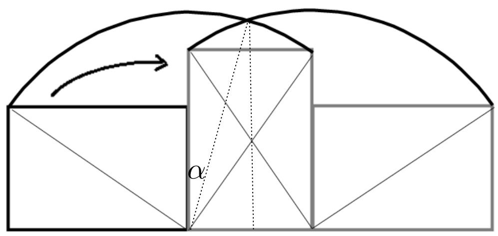
문제 2

(1)



자취는 그림의 실선과 같고 면적은 $2\times\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}$ 이다.

(2)



면적은

$$2\left\{\text{직각삼각형}+\text{중심각이 }\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\text{인 부채꼴}+\text{직각삼각형}\right\}$$

이므로

$$\begin{aligned}&2\left\{\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times2^2\times\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{1}{2}\right\}\\&=2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)+\frac{\sqrt{15}}{8}\right\}\\&=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{4\pi}{3}+4\alpha\end{aligned}$$

인데 그림에서 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{4}=\sin\alpha$ 이므로 $\alpha=\sin^{-1}\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 구하는 넓이는 $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{4\pi}{3}+4\sin^{-1}\frac{1}{4}$ 이다.

추가 질문

구간 $\left[\frac{k-1}{2n},\ \frac{k}{2n}\right]$를 밑변으로 하고 높이가 $f\left(\frac{k}{2n}\right)$인 직사각형의 넓이를 S_k라하면

$S_k=\frac{1}{2n}\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2$ 이다

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2=\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\,dx$ [참]

ㄴ. $S_{2k}-S_{2k-1}=\frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{2k}{2n}\right)^2-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\right\}=\frac{4k-1}{8n^3}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(S_{2k}-S_{2k-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{n(n+1)}{2}-n}{8n^3}=0 \text{ [참]}$$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\left(\frac{2k}{2n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

2011 모의

문제 1

프로농구 6강 리그에서 울산모비스, 원주동부, 전주KCC, 서울삼성, 창원LG, 인천전자랜드가 경기를 하였다. 다음 표는 각 팀의 6강 리그를 통한 승리한 상대팀을 나타내는 표이다.

울산	원주	전주	서울	창원	인천
원주	인천	인천	전주	서울	울산
전주	서울	창원	울산	원주	서울
창원	전주			인천	

위의 성적을 바탕으로 순위를 나누고자 한다. 순위작성은 아래 주어진 두 가지 채점 기준표를 이용하여 총 승점의 합으로 결정한다.

<채점 기준표>

1) A팀이 B팀에 승리할 때 A팀은 B팀에 대하여 승점 2점을 가진다.
2) A팀이 B팀에 승리하고 B팀이 C팀에 승리하면 A팀은 C팀에 승점 1점을 가진다.

각 팀의 총 승점 계산을 효율적으로 하기 위하여 다음과 같은 6×6 행렬을 고려하였다.

ㄱ) 행렬의 각 행(울산, 원주, 전주,…)과 열(울산, 원주, 전주,…)은 나열한 팀의 순서와 일치한다.
ㄴ) A팀이 B팀을 이겼을 때 A행 B열의 성분은 A팀이 B팀에 대하여 획득한 승점으로 한다. 예를 들면, 울산이 원주에 승리 -> 1행2열=2,
원주가 서울에 승리-> 2행4열=2,… 등이다.

1. 위와 같은 행렬을 고려했을 때 채점 기준표 1)에 대응하는 행렬(X라고 하자)을 구성하여라.
2. 채점 기준표 2)에 대응하는 행렬(Y라고 하자)을 구성하여라.
3. 행렬 Y는 행렬 X로부터 구할 수 있다. X와 Y의 관계식을 구하고 이유를 설명하여라.
4. 행렬 X, Y를 이용한 총 승점의 합계를 구하기 위하여 곱하여야 하는 6×1 행렬(C라고 하자)은 무엇이며 이를 이용한 우승과 준우승 팀을 결정하여라.

문제 2

임의의 점 x_0에서 주어진 함수 $u=f(x)$의 도함수는 접선의 기울기를 나타내며 다음과 같이 정의한다.

$$u' = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

일차원 함수 $u=f(x)$에서 접선은 한 방향으로 나타난다. 하지만 공간상의 곡면을 생각할 때 임의의 점 $(x_0,\ y_0)$에서의 접선은 무한히 많은 방향을 가질 수 있다. 즉, 주어진 접선의 방향에 따라서 도함수를 결정할 수 있다. 다음은 임의의 점 $(x_0,\ y_0)$에서 이차원 함수 $u=f(x,\ y)$의 x축과 y축 방향으로의 접선의 기울기를 나타내는 편도함수를 각각 정의한다.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0+h)-f(x_0,\ y_0)}{h}$$

위의 정의를 관찰할 때 주어진 방향과 관계없는 변수는 상수로 취급함을 알 수 있다. 즉 x방향 편도함수는 y변수를, y방향 편도함수는 x변수를 상수항 취급하여 각각의 편도함수를 구할 수 있다. 예를 들어, $f(x,\ y)=x^2+xy$의 경우 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y)=2x+y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)=x$이다.

함수 $f(x)$는 전 구간에서 미분가능함수이며 다음의 조건을 만족한다.

1. $f(x)$는 기함수이다.
2. 임의의 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+g(x,\ y)$
3. $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}=1$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,\ 0)=x^2$

위의 조건을 이용하여 함수 $f(x)$와 $g(x,\ y)$를 구하여라.

2011 학교장 전형

문제 1

P_n은 n차 이하의 다항식으로 이루어진 집합이다

ㄱ. 모든 계수의 합은 0이다.(상수항도 계수에 포함한다)

ㄴ. 모든 계수의 절댓값의 합은 1이다.

1. 조건 ㄱ을 만족하는 $\mathrm{P_n}$을 $(x-1)$로 나눈 나머지가 0임을 보여라.
2. 조건 ㄱ,ㄴ을 만족하는 집합 P_2에서 한 원소를 ax^2+bx+c라 하면 a,b를 구하시오.
3. $\int_0^1 f(x)dx$의 최댓값을 구하시오.

선생님 클리닉

함수의 성질과 관련된 정의를 제시하고 미분계수를 구하는 문제는 모의고사나 수능에서 종종 출제되는 문제이다. 미분계수의 정의를 이용해도 되지만 편도함수를 이용해서 푸는 것도 좋은 방법 중 하나이다. y에 대해 미분한 후 조건식을 대입하면 구하고자 하는 값을 쉽게 구할 수 있다.

관련 학습

인접 행렬(adjacency matrix)은 그래프 이론에서 그래프를 표현하기 위한 방법 중 하나이다. n개의 정점이 있는 그래프에서 정점 i에서 정점 j로 가는 간선이 있을 경우에 a_{ij}를 1로 하고 없는 경우에는 0으로 표현한 $n\times n$ 크기의 인접 행렬로 표현할 수 있다. 정점의 개수를 n이라고 할 때 인접 행렬을 만드는 데 $O(n^2)$시간을 쓰게 되므로, 인접 행렬을 이용한 그래프 알고리즘의 시간 복잡도는 이보다 더 좋을 수 없다. 따라서 간선이 희소한 경우에는 인접 리스트 표현 방식이 유리하다.

편도함수는 다(多)변수함수의 1변수의 변화에 대한 변화율로 이 경우 한 변수를 제외한 다른 모든 변수들은 상수로 취급된다. 함수 $f(x,y)=z$가 주어지면 y를 상수로 하고 x에 대한 z의 편도함수는 z_x로 표시한다. 예를 들어 $z=2x^2y+3$이라면, $z_x=4xy$이고 $z_y=2x^2$이다. 2계 또는 2계 이상의 편도함수를 구할 수도 있다.

추가 질문

실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$$

(나) $f(\ln 2)=0$, $f'(0)=2$

이때, $f'(\ln 2)$의 값을 구하시오.

예시 답안

2011 모의

문제 1

(1)

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$Y=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)

각 행렬의 i행 j열을 x_{ij}, y_{ij}로 표시하자. 채점 기준표 2)를 기준으로 울산은 원주를 이기고 원주는 인천, 서울, 전주에 이겼다. 그러면 울산을 인천, 서울, 전주에 승점 1점을 갖는다. 즉, A팀이 C팀에 승점 1점을 가질 조건이 중간에 승리한 B팀이 꼭 있어야 한다. 이와같은 성질은 행렬의 곱셈을 생각하면 쉽게 알 수 있다. X^2의 i행 j열은 $x_{ij}=x_{i1}x_{1j}+x_{i2}x_{2j}+\cdots+x_{i6}x_{6i}$, 즉 행렬의 제곱의 i행 j열은 중간에 연결

하는 모든 경우를 더하는 것이므로 채점기준표 2)는 행렬의 제곱을 의미한다. 이때 승점을 1점만 가지게 하므로 주어진 행렬 X의 모든 행과 열을 2로 나눈다. 따라서 $Y=\left(\frac{1}{2}X\right)^2$ 이다.

(4)

각 행에 있는 모든 승점을 더하여 총점을 구하므로 $C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$이고 총 승점을 $(X+Y)C$로 나타낼 수 있으며 우승은 울산 준우승은 창원이다.

문제 2

ㄱ) $f(x)$가 기함수이므로 $f(-(x+y))=-f(x+y)$, $f(-x)=-f(x)$, $f(-y)=-f(y)$이다. 따라서

$$\begin{aligned} f(-(x+y)) &= f(-x)+f(-y)+g(-x,\ -y)=-f(x)-f(y)+g(-x,\ y) \\ -f(x+y) &= -f(x)-f(y)-g(x,\ y) \\ &\Rightarrow g(-x,\ -y)=-g(x,\ y) \\ &\Rightarrow g(0,\ 0)=0 \end{aligned}$$

이다.

ㄴ) $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)+g(x,\ 0)$이므로 $g(x,\ 0)=-f(0)$이다. ㄱ)을 이용하여 $f(0)=0$이다.

ㄷ)

$$\begin{aligned} x^2-\frac{\partial g}{\partial y}(x,\ 0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x,\ h)-g(x,\ 0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f(h)-[f(x)-f(x)-f(0)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-[f(h)-f(0)]}{h}=f'(x)-f'(0) \end{aligned}$$

이고 $1=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$이므로 $f'(x)=1+x^2$이다.

따라서 $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+C$이다. ㄴ)의 결과를 이용하여 $C=0$이다. 각각의 함수는 다음과 같다.

$$f(x)=x+\frac{1}{3}x^3,\ g(x,\ y)=xy^2+x^2y$$

2011 학교장 전형

문제 1

(1)
모든 계수의 합은 $P_n(1)$이므로 성립한다.

(2)

$$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$$

여기서 $f(x)$는 집합 P_2의 원소이며 조건 ㄱ,ㄴ을 만족한다.

(3)
$\int_0^1 ax^2+bx+cdx=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c$이고 조건 ㄱ,ㄴ에 의해 $a+b+c=0$, $|a|+|b|+|c|=1$이다. c를 소거시켜 정리하면 $|a|+|b|+|a+b|=1$을 만족시키는 $a(\neq 0)$, b에 대하여 $-\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b$의 최댓값을 구하는 문제이다. $-\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b=k$에서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$일 때 k가 최댓값 $\frac{1}{3}$을 갖는다.

추가 질문

$y=0$을 대입하면 $f(x)=f(x)f(0)+4f(x)+4f(0)+12$

$\{f(x)+4\}\{f(0)+3\}=0$이므로 $f(0)=-3$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)+3f(x)+4f(h)+12}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h}\\
&=\{f(x)+4\}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}=\{f(x)+4\}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\
&=\{f(x)+4\}f'(0)=2\{f(x)+4\}
\end{aligned}$$

$\therefore f'(\ln 2)=2\{f(\ln 2)+4\}=8$

다른풀이

$f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$을 y에 대해 미분하면

$f'(x+y)=f(x)f'(y)+4f'(y)$이다.

$y=0$을 대입하면

$f'(x)=f'(0)f(x)+4f'(0)=2f(x)+8$이다.

따라서 $f'(\ln 2)=2f(\ln 2)+8=8$

2010 특정교과 우수자

문제 1

$\dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2}$ 의 최댓값과 최솟값이 존재하지 않음을 증명하여라.

문제 2

5명이 모두 자신의 유니폼을 입지 않을 확률을 구하여라.

문제 3

$x^2 + y^2 = 3z^2$ 을 만족하는 자연수 x, y, z는 존재하지 않음을 증명하여라.

2010 재능우수자

문제 1

$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$, $P(0) = 1$을 만족하는 다항식 $P(x)$를 모두 구하여라.

문제 2

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_{n-1} \sin (n-1)x + a_n \sin nx$
$|f(x)| \le |\sin x|$ 를 만족할 때, $|a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n| \le 1$ 임을 증명하여라.

선생님 클리닉

교란수열의 내용은 실질적으로 이산수학 범위이지만 경우의 수 문제에 직접 세는걸로 잘 나오는 경우가 있으므로 잘 알려진 예시문항을 찾아 풀어보는 연습이 필요하다. 방정식과 부등식의 경우 일반적인 해법보다는 그래프를 이용하여 해결하는 시도가 필요하다.

관련 학습

완전순열 혹은 교란순열(Derangement)이라 불리는 수열의 점화식은 다음과 같다.

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

이 식은 다음과 같이 변형된다.

$$d_n - nd_{n-1} = -\{d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}\}$$

그러므로 $d_n - nd_{n-1}$을 새로운 수열 a_n으로 정의하면, 다음과 같은 점화식이 된다.

$$a_n = -a_{n-1}$$

a_n의 일반항은 즉시 나오므로 다음과 같이 인접 3항간 점화식이 인접 2항간 점화식으로 변형된다.

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

이 경우 위에서 다룬 인접 2항간 점화식에서 $p(n) = n$인 꼴이 된다. 양변을 $n!$으로 나누면, 일반항이 $\dfrac{d_n}{(n-1)!}$ 인 수열의 일반항을 알 수 있고 이로써 d_n의 일반항도 쉽게 유도된다.

추가 질문

5명의 학생이 쪽지시험을 본 후에 5장의 답안지를 고르게 섞었다. 임의로 답안지를 한 장씩 뽑을 때, 한 명의 학생만 자기 답안지를 뽑고, 나머지 학생들은 모두 다른 학생의 답안지를 뽑게 되는 경우의 수는?

예시 답안

2010 특정교과 우수자

문제 1

$\dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} = k$라 하고 가능한 k값을 정하자.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}\,(x>0)$라 하면 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 이고 $f(\pi)=0$이므로 중간값 정리에 의해 임의의 $k \in (0,\ 1)$에 대해 적당한 실수 $x_1(>0)$가 존재하여 $\dfrac{\sin x_1}{x_1} = k$이 성립한다. 즉, $0 \le \dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} < 1$ 이다.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x-\pi}\,(x>0)$라 하면 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi} = -1$ 이고 $f(0)=0$이므로 중간값 정리에 의해 임의의 $k \in (-1,\ 0]$에 대해 적당한 실수 $x_1(>0)$이 존재하여 $\dfrac{\sin x_1}{x_1-\pi} = k$가 성립한다.

즉, $-1 < \dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} \le 0$이다. $\dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2}$는 구간 $(-1,\ 1)$내의 모든 실수 값을 취할 수 있다. $\dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} = 1\,(x_1 \ne x_2)$인 경우가 존재한다고 하자. $\dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} = 1\,(x_1 \ne x_2)$에서 $\sin x_1 - \sin x_2 = x_1 - x_2$이고 $\sin x_1 - x_1 = \sin x_2 - x_2$이다. $f(x) = \sin x - x$라 두면 함수 f는 감소함수이므로 두 실수 $x_1,\ x_2\,(x_1 \ne x_2)$에 대해 $\sin x_1 - x_1 \ne \sin x_2 - x_2$이므로 모순이다.

$\dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} = -1\,(x_1 \ne x_2)$인 경우도 위와 같은 방법으로 모순임을 알 수 있다. 그러므로 $\dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2}$은 최댓값과 최솟값을 가질 수 없다.

문제 2

교란수열 D_n의 점화식은 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})\ (n \ge 3,\ D_1 = 0,\ D_2 = 1)$이므로 $D_3 = 2,\ D_4 = 9,\ D_5 = 44$이다. 따라서 확률은 $\dfrac{44}{5!}$이다.

문제 3

방정식을 만족하는 자연수 x, y, z가 존재한다고 가정하자.
$3z^2$은 4로 나누면 나머지가 0또는 3이다. 그러므로 좌변의 x, y는 모두 짝수임을 알 수 있다. 따라서 자연수 z도 짝수이다. $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$이라 두고 준식에 대입하면 $x_1^2+y_1^2=3z_1^2$이고 위와 같은 논리에 의해 x_1, y_1, z_1도 짝수이다.
$x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$, $z_1=2z_2$이라 두고 준식에 대입하면 $x_2^2+y_2^2=3z_2^2$이고 위와 같은 논리에 의해 x_2, y_2, z_2도 짝수이다. 이와 같이 과정은 무한히 반복할 수 있다. 그런데 x는 자연수이므로 이와 같은 과정은 유한횟수에서 멈추어야 한다. 따라서 모순이다. 그러므로 방정식의 해는 존재하지 않는다.

2010 재능우수자

문제 1

조건을 만족하는 다항식을 $P(x)$라 하고 $H(x)=P(x)-(x^2+1)$이라 하자. x에 x^2+1을 대입하면 $H(x^2+1)=P(x^2+1)-(x^2+1)^2-1$이다. $P(x^2+1)$에 $P(x)^2+1$을 대입하면 $P(x^2+1)-(x^2+1)^2-1=P(x)^2-(x^2+1)^2=\{P(x)+(x^2+1)\}\{P(x)-(x^2+1)\}$이므로 $H(x^2+1)=\{H(x)+2(x^2+1)\}H(x)$ 이다. 주어진 조건에 의해 $H(0)=0$이다. $x=0$을 양변에 대입하면 $H(1)=0$이다. $x=1$을 양변에 대입하면 $H(2)=0$이고 $x=2$를 양변에 대입하면 $H(5)=0$이다.
이와 같이 하면 방정식 $H(x)=0$의 해가 무수히 많음을 알 수 있다. 따라서 $H(x)=0$이다. 그러므로 조건을 만족하는 다항식은 x^2+1뿐이다.

문제 2

$|f(x)| \le |\sin x|$에서 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \left|\frac{\sin x}{x}\right|$이고 $\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$에서 $|f'(0)| \le 1$이다.
따라서 $|a_1+2a_2+\dots+(n-1)a_{n-1}+na_n| \le 1$ 이다.

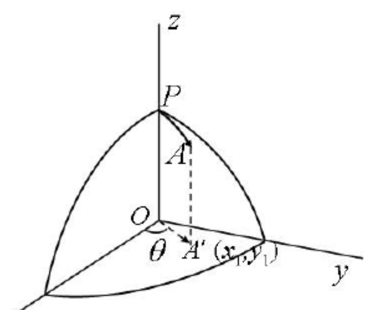
추가 질문

5명 중에서 한명의 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$이고 일반항의 점화식은 $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$ 이고 일반항은 $a_n=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$ 이 되므로 나머지 학생들은 모두 다른 학생의 답안지를 뽑게 되는 경우의 수는 9가지이므로 총 45가지의 경우가 있다.

2009 모의

문제 1

그림은 $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=14$로 표현되는 구의 일부분이다. z축과 만나는 점 P에서 구 표면을 따라 점 A로 내려온다고 하자. 이 때 A의 xy평면상 좌표는 $(x_1,\ y_1)$이었다.



$\tan\theta=a$

1. 점 P에서 A로 이동하는 동안 xy 평면상 이동거리 OA$'$에 대한 높이($z-$좌표값)의 평균 변화율을 구하라.
2. P에서의 경사[1]를 미분계수의 정의를 사용하여 구하라.
3. 경사가 가장 급한 방향으로 내려올 때 그 경사 값은 무엇인가?

문제 2

복소수와 평면 위의 점 사이에서 일대일 대응으로 이루어진 평면을 복소평면이라고 한다. 이 복소평면 위에서 움직이는 입자가 있다고 할 때, 입자의 위치는 시간 t의 함수로 다음과 같이 움직인다.

$z=x+iy$, 이때 $x=\dfrac{2t^2-3}{t^2+1}$, $y=\dfrac{5t}{t^2+1}$이다.

여기서 입자의 속도 v와 가속도 a는 각각 $\dfrac{dz}{dt}$, $\dfrac{d^2z}{dt^2}$이다.

속도와 가속도의 크기인 $\left|\dfrac{dz}{dt}\right|$, $\left|\dfrac{d^2z}{dt^2}\right|$를 각각 구하시오. ($x$, y, v, a는 실수)

1) 경사는 접선 기울기의 절대값으로 정의함
** a는 양의 실수
*** 필요하다면 다음의 합성함수의 미분법을 사용하시오.

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x) \quad \text{예)}\ \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$$

선생님 클리닉

공간에서 점의 좌표를 이용하여 평균 변화율을 구하고 미분계수의 정의를 정확하게 이해하고 있다면 어렵지 않게 해결할 수 있는 문항이다. 그리고 복소평면에서 합성함수의 미분법을 이용하여 해결하는 문제는 각각의 좌표에 합성함수 미분법을 적용하면 쉽게 해결된다. 제시된 지문에서 구하고자 하는 것을 정확히 파악한 후 문제를 풀이하여야 한다.

관련 학습

1. 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x가 x_1에서 x_2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

2. 미분계수(순간변화율)

평균변화율에서 $\Delta x \to 0$일 때의 극한값이 존재하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고, 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

추가 질문

좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x=2\sin t-2\cos t,\ \ y=3\sin t\cos t$$

이다. 점 P의 속력의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다)

예시 답안

문제 1

(1)

$z=f(x,y)=\sqrt{14-(x+1)^2-(y+2)^2}-1$,　$\mathrm{A}'(x_1,y_1)=\mathrm{A}'(t\cos\theta, t\sin\theta)$　$(t^2=x_1^2+y_1^2)$라 하자. P점의 z좌표를 P_z, A점의 z좌표를 A_z라 하면,

$\mathrm{P}_z=2$, $\mathrm{A}_z=\sqrt{14-(x_1+1)^2-(y_1+2)^2}-1$이다. 따라서 평균변화율 $\dfrac{\mathrm{A}_z-\mathrm{P}_z}{\mathrm{OA}'}$은

$$\frac{\mathrm{A}_z-\mathrm{P}_z}{\mathrm{OA}'}=\frac{\sqrt{14-(x_1+1)^2-(y_1+2)^2}-3}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

이다. 이 값을 t와 θ를 이용하여 나타내면

$$\frac{\mathrm{A}_z-\mathrm{P}_z}{\mathrm{OA}'}=\frac{\sqrt{14-(t\cos\theta+1)^2-(t\sin\theta+2)^2}-3}{t}$$

이다.

(2) 경사를 구하면

$$\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{A}_z-\mathrm{P}_z}{\mathrm{OA}'}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{14-(t\cos\theta+1)^2-(t\sin\theta+2)^2}-3}{t}=-\frac{\cos\theta+2\sin\theta}{3}$$

(3)

$(\cos\theta+2\sin\theta)^2\le(1^2+2^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=5$이므로 경사가 가장 급한 곳의 경사값은 $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이다.

문제 2

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2t^2-3}{t^2+1}+\frac{5t}{t^2+1}i\right)=\frac{5}{(t^2+1)^2}(2t+(1-t^2)i),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{10}{(t^2+1)^3}((1-t^2)-2ti),\quad \left|\frac{dz}{dt}\right|=\frac{5}{1+t^2},\quad \left|\frac{d^2z}{dt^2}\right|=\frac{10}{(1+t^2)^2}$$

추가 질문

$\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t + 2\sin t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3\cos 3t$이므로 점 P의 속력 $|v|$는

$$|v| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$$

$$= \sqrt{(2\cos t + 2\sin t)^2 + 9\cos^2 2t}$$

$$= \sqrt{4 + 4\sin^2 2t + 9(1 - \sin^2 2t)}$$

$$= \sqrt{-9\sin^2 2t + 4\sin 2t + 13}$$

$\sin t = A$ 라 하면 $-1 \leq A \leq 1$이고

$|v| = \sqrt{19A^2 + 4A + 13}$ 이므로 $|v| = \dfrac{2}{9}$일 때, 최댓값 $\sqrt{\dfrac{121}{9}} = \dfrac{11}{3}$이다.

07 이화여자대학교

Ⅰ 심층면접 순서 및 유의사항(2013학년도 기준)

1. 심층면접 순서

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 진행요원의 안내에 따라 출결, 신분증 확인을 하고, 면접에 대한 설명을 들음 • 대기실 마다 면접순서가 다르다.(최소 1초~최대5시간)	20분	면접 전 대기실
⇩			
문제풀이	• 문제풀이실에서 수학, 과학문제(원서접수 시 선택한 과목)를 복도에서 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능 • 제공되는 용지는 1장	18분	면접풀이실
⇩			
탐구역량 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 수학 및 과학 문제 질의 응답 • 칠판사용 불가하며, 문제풀이실에서 사용한 용지는 탐구역량 면접 시 활용할 수 있음 • 긴 풀이가 아닌 단답형식으로 대답 • 교수 2분 • 심층면접 후 개인면접을 바로 진행	6분	면접실
⇩			
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 지시에 따라 개별 귀가		면접 후 대기실

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.

※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)

※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 수학교육과

문제 1

$0<y<x$이고 $a_1=\log(x+y)$, $a_2=\log(x+y)+\log(x^2+y^2)$, $\cdots$,

$a_n=\log(x+y)+\log(x^2+y^2)+\cdots+\log(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})$일 때,

$\{a_n\}$이 수렴하는 조건을 구하고 수렴할 때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

선생님 클리닉

무한급수의 수렴 조건에 관한 문제로, 무한등비급수의 수렴조건을 로그함수의 성질과 연관지어 생각하면 실마리를 쉽게 찾을 수 있는 문제이다. 로그 및 지수로 표현된 무한급수를 교과서에 나오는 기본 지식과 결부시켜 생각해 보는 능력이 필요하다.

관련 학습

1. 로그 성질

$a>0$, $a\neq1$이고, $x>0$, $y>0$ 일 때,

1) $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$　　2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

3) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$　　4) $\log_{a^m} x^n=\dfrac{n}{m}log_a x$ (n 은 실수)

5) $a^{\log_a b}=b$　　6) $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

2. 무한등비급수의 수렴조건

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 에서　$-1<r<1$일 때 극한값 $S=\dfrac{a}{1-r}$

추가 질문

$a_n=a+b\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=72$이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

예시 답안

문제 1

$$\begin{aligned}a_n &= \log(x+y)+\log(x^2+y^2)+\cdots+\log(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})\\ &= \log x\left(1+\frac{y}{x}\right)+\log x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+\log x^4\left(1+\frac{y^4}{x^4}\right)+\cdots+\log x^{2^{n-1}}\left(1+\frac{y^{2^{n-1}}}{x^{2^{n-1}}}\right)\\ &= \left\{\log x+\log x^2+\cdots+\log x^{2^{n-1}}\right\}+\log\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(1+\frac{y^4}{x^4}\right)\cdots\left(1+\frac{y^{2^{n-1}}}{x^{2^{n-1}}}\right)\\ &= \frac{1(2^n-1)}{2-1}\log x+\log\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(1+\frac{y^4}{x^4}\right)\cdots\left(1+\frac{y^{2^{n-1}}}{x^{2^{n-1}}}\right)\end{aligned}$$

이므로 $x=1$일 때만 $\{a_n\}$이 수렴하고 그 때의 수렴값은

$$\begin{aligned}a_n &= \log(1+y)+\log(1+y^2)+\log(1+y^2)+\cdots+\log(1+y^{2^{n-1}})\\ &= \log(1+y)(1+y^2)(1+y^2)\cdots(1+y^{2^{n-1}})\\ &= \log\frac{1-y}{1-y}(1+y)(1+y^2)(1+y^2)\cdots(1+y^{2^{n-1}})\\ &= \log\frac{1-y^{2^n}}{1-y}\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\log\frac{1}{1-y}$ 이다.

다른풀이

수열 $\{b_n\}$의 일반항 $b_n = \log(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})$ 으로 정의하면,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}b_k,\ \lim_{n\to\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

으로 표현할 수 있다. $\lim_{n\to\infty}a_n$ 이 수렴하기 위해서는 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 이 성립해야 하고,

$$\lim_{n\to\infty}(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})=\lim_{n\to\infty}x^{2^{n-1}}\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{2^{n-1}}\right\}=\lim_{n\to\infty}x^{2^{n-1}}=1$$

이므로 $x=1$이어야 한다.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}b_n=\sum_{k=1}^{n}\log(1+y^{2^{n-1}})=\log\frac{1-y^{2^n}}{1-y}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\log\frac{1}{1-y}$ 이다.

추가 질문

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값이 존재하므로 $\lim_{n \to z\infty} a_n = 0$이다.

$\therefore \lim_{n \to \infty} \left\{ a + b\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} = \lim_{n \to \infty} a + b \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0,$

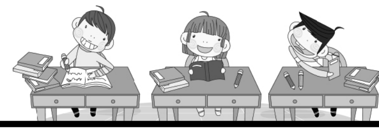
$a = 0$

즉, $a_n = b\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{b}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3b}{2} = 72, b = 48$

$\therefore a + b = 0 + 48 = 48.$

08 중앙대학교



Ⅰ 과학 중점(인재)형 수리 능력 평가 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 사고력 평가 지필 시험 소개

평가 관련	내용	비 고
평가 형식	• 전공 교과형 지필 평가 수학(2문항 : 소문항 2~3개)	시간 : 120분

⇩

평가내용	• 고등학교 교과과정의 수학에 속하는 개념의 정확한 이해와 고등학교 수학을 통해 습득한 논리적 추론능력을 평가한다. • 각 문제마다 하나의 주제를 중심으로 서로 연관되어 있는 다수의 소 문항을 제시함으로써 논리적 추론 능력을 효율적으로 평가한다. • 해결을 위해서는 창의적 발상이 필요한 질문이 포함된다. 단순히 주입식으로 수학을 학습한 것이 아니라 스스로 문제를 해결하는 능력을 키운 학생들이 해결할 수 있는 문제가 되도록 함으로써 창의적 사고력을 평가한다.	희망 과학은 원서접수 시 선택(물리, 화학, 생물)

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 사고력 평가 관련 숙지	고사장 위치 및 사고력 평가 관련 내용 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 사고력 평가 참여 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.

3. 동점자 처리기준

순위	기준
1	수리능력평가 성적 우위자
2	서류평가 성적 우위자
3	학생부 수학 교과 성적 우위자

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 과학 인재 모의

문제 1

4개의 점 $\mathrm{P}_1=(0,1)$, $\mathrm{P}_2=(1,1)$, $\mathrm{P}_3=(1,0)$, $\mathrm{P}_4=(0,0)$가 있다. P_1과 P_2의 중점을 P_5라 하고, P_2와 P_3의 중점을 P_6이라 하자. 이와 같은 방식으로 모든 정수 $k(\geq 5)$에 대하여 점 P_k를 P_{k-4}와 P_{k-3}의 중점으로 정의하고 좌표를 $\mathrm{P}_k=(x_k,\ y_k)$로 나타내자.

1. 다음 관계식이 성립함을 논리적으로 추론하시오.

$$\frac{1}{2}x_k+x_{k+1}+x_{k+2}+x_{k+3}=2$$

2. 극한값 $\lim_{k\to\infty}(x_k,\ y_k)$를 논리적으로 추론하시오.

문제 2

빨강(R), 파랑(B), 노랑(Y)의 세 종류 공이 있다. 공을 일렬로 나열하되, 노란 공은 두 개씩 묶어 나열한다고 하자. 이러한 방법으로 n개의 공을 나열하는 방법의 가짓수를 a_n이라 하자. (예를 들어 $n=7$인 경우, 다음 그림의 왼쪽은 가능한 나열 방법이지만 오른쪽은 세 개의 노란 공이 배열될 수 없으므로 불가능한 나열 방법이다.)

Y Y B Y Y Y Y   R B B Y Y Y R

1. a_7을 구하고 그 방법을 설명하시오.

2. 이웃한 두 항 a_n, a_{n+1} $(n=1, 2, 3, \cdots)$은 서로소임을 밝히시오.

문제 3

초깃값이 $F_0=0$, $F_1=1$으로 주어지고 모든 자연수 n에 대하여 관계식 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$을 만족하는 수열 $\{F_n\}$을 피보나치 수열이라고 부른다.

1. 다음을 만족하는 2×2 행렬 A를 구하시오.

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k=1,\ 2,\ 3, \cdots$$

2. 행렬 A^k의 각 성분을 피보나치 수열 $\{F_n\}$을 이용하여 나타내시오.

3. $F_{n+1}F_m+F_nF_{m-1}=F_{n+m}$이 성립함을 유도하시오.

선생님 클리닉

자연수와 관련된 증명방법으로 수학적 귀납법을 생각할 수 있다. 수학적 귀납법의 절차를 정확히 이해하고 증명해 보는 연습을 한다면 쉽게 접근할 수 있을 것이라 생각된다. 그리고 점화식으로 표현된 식에서는 규칙을 구할 수 있으면 규칙을 이용해서 푸는 것도 좋은 방법 중 하나이다.

관련 학습

1. 수학적 귀납법

자연수n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면
다음 1), 2)를 증명하면 된다.

1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

2) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면
$n=k+1$일 때도 $p(n)$이 성립한다.

2. 피보나치 수열

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 을 만족하는 수열을 피보나치 수열이라 한다.

추가 질문

자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$이
$a_{n+1}=a_n+a_{n+1}$, $a_1=a_2=1, b_n=a_n\,a_{n+2}-a_{n+1}^2$ 이라 할 때, b_{2005}의 값은?

①0　　②-1　　③1　　④-2005　　⑤2005

예시 답안

문제 1

(1)

수학적 귀납법을 사용하여 증명해보자.

$n=1$일 때, $\frac{1}{2}x_1+x_2+x_3+x_4=2$ 가 성립함은 직접 계산으로 확인할 수 있다.

$n=k$일 때, $\frac{1}{2}x_k+x_{k+1}+x_{k+2}+x_{k+3}=2$ 이 성립한다고 가정하자.

P_{k+4}이 P_k와 P_{k+1}의 중점이므로 $x_{k+4}=\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})$가 성립하고, 이를 통해 $\frac{1}{2}x_{k+1}+x_{k+2}+x_{k+3}+x_{k+4}=\frac{1}{2}x_k+x_{k+1}+x_{k+2}+x_{k+3}=2$가 성립한다. 즉, $n=k+1$ 때에도 성립함을 확인할 수 있다.

(2)

$\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 이라 하고 $\frac{1}{2}x_n+x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}=2$의 양변에 극한을 취하면 $a=\frac{4}{7}$를 구할 수 있다.

y좌표에 대하여, x좌표와 같은 방식으로 $\frac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}+y_{n+3}=\frac{3}{2}$이 성립함을 알 수 있다. 또한 $\lim_{n\to\infty}y_n=b$ 라 두고 양변에 극한을 취하여 $b=\frac{3}{7}$을 구한다. 따라서, $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)=\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$ 이 된다.

문제 2

(1)

$a_1=2, a_2=5$는 쉽게 알 수 있다. (두 개의 공을 나열하는 방법은 R−R, B−B, Y−Y, R−B, B−R이 전부이다.)

$n\geq 3$이라고 가정하자. n개의 공의 나열하는 방법은 $(n-2)$개의 공을 규칙에 맞게 나열한 다음, 맨 뒤의 두 개의 공을 모두 노란 공으로 나열하는 방법과 $(n-1)$개의 공을 규칙에 맞게 나열한 다음, 맨 뒤의 공을 빨간 공 또는 파란 공으로 나열하는

방법으로 나누어 생각할 수 있다. 전자는 a_{n-2}, 후자는 $2a_{n-1}$이므로 다음의 점화식을 얻을 수 있다.

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \, (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

$a_1 = 2$, $a_2 = 5$이므로 $a_3 = 12$, $a_4 = 29$, $a_5 = 70$, $a_6 = 169$, $a_7 = 408$을 차례로 얻는다.

(2)

두 정수 p, q의 최대공약수를 $\gcd(p, q)$로 나타내자. 유클리드 호제법을 이용하여 $\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(2a_n + a_{n-1}, a_n) = \gcd(a_{n-1}, a_n) = \gcd(a_n, a_{n-1})$을 알 수 있다. 따라서 $\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_n, a_{n-1}) = \cdots = \gcd(a_2, a_1) = 1$이다.

문제 3

(1)

$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, $F_k = F_k$이므로, 이를 각각 행렬식으로 나타내면,

$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$이다. 따라서, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이다.

(2)

$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$이고 $\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{pmatrix}$ 이므로, 이 두 식을 정리하여

$\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_k & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_{k-2} \end{pmatrix}$을 얻는다. 따라서,

$\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_k & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_{k-2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_{k-2} \\ F_{k-2} & F_{k-3} \end{pmatrix} = \cdots = A^{k-1} \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = A^k$ 이다.

(3)

$A^n A^m = A^{n+m}$으로부터

$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{pmatrix}$ 을 얻는다.

양변의 (2, 1) 성분을 비교하여 $F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} = F_{n+m}$을 얻어낸다.

추가 질문

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ a_6=8,\cdots$이므로

$b_1=1\cdot 2-1^1=1,\ b_2=1\cdot 3-2^2=-1,\ b_3=2\cdot 5-3^2=1,\ \cdots$ 이다.

일반적으로

$b_{n+1}+b_n$

$=a_{n+1}a_{n+3}-a_{n+2}^2+a_n a_{n+2}-a_{n+1}^2$

$=a_{n+2}(a_n-a_{n+2})+a_{n+1}(a_{n+3}-a_{n+1})$

$=a_{n+2}(-a_{n+1})+a_{n+1}\cdot a_{n+2}=0$

$\therefore b_{n+1}=-b_n$

수열$\{b_n\}$은 첫째 항이 $b_1=a_1a_3-a_2^2=1$ 이고, 공비가 -1 인 등비수열이다.

$$\therefore b_{2005}=b_1(-1)^{2004}=1$$

09 GIST

Ⅰ 일반전형 심층면접 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 심층면접 순서

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 진행요원의 안내에 따라 출결, 신분증 확인 후, 면접에 대한 설명을 들음.	-	면접전 대기실
문제풀이	• 문제풀이실에서 수학, 과학문제(원서접수 시 선택한 과목)를 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	20분	면접풀이실
탐구역량 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 수학 문제 질의 응답 • 문제풀이실에서 사용한 용지는 확대기를 사용하여 화면에 띄우고 레이저로 표시하여 발표 • 면접을 보는 교수님은 2명	15분	면접실 (가)
탐구역량 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 과학 문제 질의 응답 • 문제풀이실에서 사용한 용지는 확대기를 사용하여 화면에 띄우고 레이저로 표시하여 발표 • 면접을 보는 교수님은 2명	15분	면접실 (나)
인성면접	• 지원자는 탐구력, 발전가능성, 기타 인성을 평가할 수 있는 질문에 응답 • 면접을 보는 교수님은 2명	10분	면접실 (다)
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 설문조사에 답한 후 귀가		면접 후 대기실

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.

※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)

※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 면접 Type1

문제 1

1. 함수 $y=F(x)$의 도함수 $y=f(x)$가 존재하고 $[a,b]$에서 연속이라고 할 때, 평균값정리를 이용하여 $F(b)-F(a)=(b-a)F'(c)=(b-a)f(c)$인 c가 (a,b)에 존재함을 증명하여라.

2. 함수 $y=f(x)$가 $[a,b]$에서 최솟값 m, 최댓값 M을 가질 때 다음 부등식을 증명하여라.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

3. 함수 $y=f(x)$가 $[a,b]$에서 연속이고 (a,b)에서 미분가능할 때 중간값의 정리를 이용하여 c가 (a,b)에 존재함을 증명하시오.

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$$

4. 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{1+a^6}\left(-1+a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right) \le \int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx \le a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}$$

2013 면접 Type2

문제 1

1. $[a, b]$에서 연속인 $y=f(x)$에 대하여 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$ ($c\in(a, b)$)

   임을 정적분의 기본정리와 평균값정리를 이용하여 증명하여라.

2. $f(x)$는 모든 실수에서 연속이고, $g(x)$는 모든 실수에서 양수라 할 때,

   $\displaystyle m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)dx$를 만족하는 m, M이 존재함을

   증명하여라.

3. $f(x)$는 모든 실수에서 연속이고, $g(x)$는 모든 실수에서 양수라 할 때,

   $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$인 c가 a와 b사이에 존재함을 증명하여라.

4. 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{1}{1+a^6}\left(-1+a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right)\le \int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx \le a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}$$

선생님 클리닉

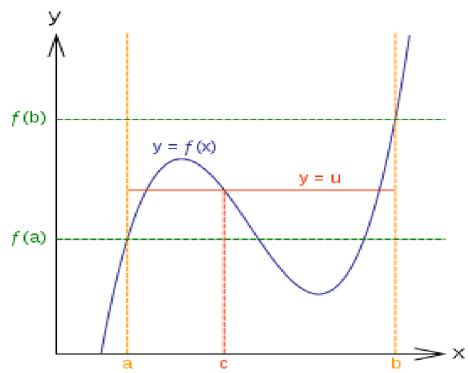
연속함수의 대표적인 정리인 최대최소정리와 중간값정리를 물어보는 문제이다. 정리의 기본적인 의미를 충실히 익혀두고 다양한 문제에 적용해보는 연습이 필요하다.

관련 학습

연속함수의 성질

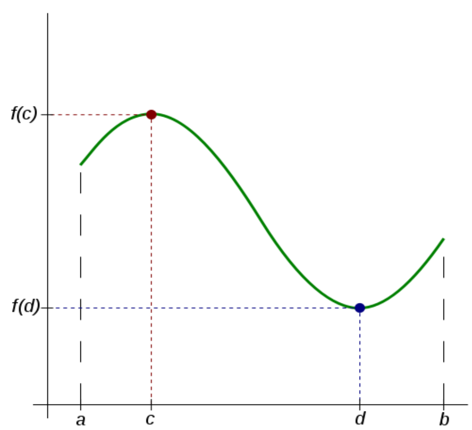
1. 중간값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 실수 l에 대하여 $f(c)=l$인 c가 닫힌구간 $[a,b]$에 적어도 하나 존재한다.



2. 최대최소정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 이 구간에서 항상 최댓값과 최솟값을 가진다. 즉, 적당한 c와 d가 $[a,b]$에 존재하여 임의의 $x \in [a,b]$에 대하여 $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$



추가 질문

1. $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in [0,1]$일 때,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} | x - x_k | = \frac{1}{2}$$

을 만족하는 x가 구간 $[0,1]$에 존재함을 보여라.

예시 답안

2013 면접 Type1

문제 1

(1)

평균값정리에 의해 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)$인 c가 (a,b)에 존재한다. 따라서

$F(b)-F(a)=(b-a)F'(c)=(b-a)f(c)$인 c가 (a,b)에 존재한다.

(2)

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$이고, 평균값 정리에 의해 $F(b)-F(a)=(b-a)f(c)$인 c가 (a,b)에 존재한다. 또한, $c\in(a,b)$이므로 함수 f의 최솟값 m, 최댓값 M에 대해 $m\le f(c)\le M$ 이다. 따라서, $m(b-a)\le f(c)(b-a)\le M(b-a)$이 성립하고, 이는 $m(b-a)\le \displaystyle\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ 와 동치이다.

(3)

함수 f의 최솟값 m, 최댓값 M에 대해 $m(b-a)\le \displaystyle\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ 이므로 중간값의 정리에 의해 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$인 c가 (a,b)에 존재한다.

(4)

$\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^4-x^2+1}{1+x^6}$ 에서

$\displaystyle\int_0^a\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^a\frac{x^4-x^2+1}{1+x^6}dx=\int_0^a\frac{1}{1+x^6}\times(x^4-x^2+1)dx$ 이다. $y=\dfrac{1}{1+x^6}$ 은 구간 $[0,\ a]$ 에서 감소함수이므로 $\dfrac{1}{1+a^6}\le\dfrac{1}{1+x^6}\le 1$ 이고 $y=x^4-x^2+1$ 은 구간 $[0,\ a]$ 에서 양수이다. 따라서,

$$\int_0^a \frac{1}{1+a^6}(x^4-x^2+1)dx \le \int_0^a \frac{1}{1+x^6}(x^4-x^2+1)dx \le \int_0^a (x^4-x^2+1)dx,$$

$$\frac{1}{1+a^6}\int_0^a (x^4-x^2+1)dx \le \int_0^a \frac{1}{1+x^6}(x^4-x^2+1)dx \le \int_0^a (x^4-x^2+1)dx,$$

$$\frac{1}{1+a^6}\left(-1+a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right) \le \int_0^a \frac{1}{1+x^6}(x^4-x^2+1)dx \le a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}$$

이다. 따라서, $\frac{1}{1+a^6}\left(-1+a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right) \le \int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx \le a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}$ 이다.

2013 면접 Type2

문제 1

(1)

$F'(x)=f(x)$인 $F(x)$에 대해 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$이고, 평균값정리를 이용하면

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)$$

인 c가 (a,b)에 존재한다. 즉,

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(c)=(b-a)f(c)$$

인 c가 (a,b)에 존재한다.

(2)

연속함수의 최대최소 정리에 의해 닫힌구간 $[a,\, b]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 하면 $m \le f(x) \le M$이고 $g(x)$는 모든 실수에서 양수이므로 $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$이다. 따라서,

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

이다.

(3)

(2)에서 $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$이므로 중간값 정리에 의해

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

인 c가 a와 b사이에 존재한다.

(4)

$\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^4-x^2+1}{1+x^6}$ 에서

$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^a \frac{x^4-x^2+1}{1+x^6}dx = \int_0^a \frac{1}{1+x^6}\times(x^4-x^2+1)dx$ 이다. $y=\dfrac{1}{1+x^6}$ 은 구간 $[0,\ a]$ 에서 감소함수이므로 $\dfrac{1}{1+a^6} \le \dfrac{1}{1+x^6} \le 1$ 이고 $y=x^4-x^2+1$ 은 구간 $[0,\ a]$ 에서 양수이다. 따라서,

$$\int_0^a \frac{1}{1+a^6}(x^4-x^2+1)dx \le \int_0^a \frac{1}{1+x^6}(x^4-x^2+1)dx \le \int_0^a (x^4-x^2+1)dx,$$

$$\frac{1}{1+a^6}\int_0^a (x^4-x^2+1)dx \le \int_0^a \frac{1}{1+x^6}(x^4-x^2+1)dx \le \int_0^a (x^4-x^2+1)dx,$$

$$\frac{1}{1+a^6}\left(-1+a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right) \le \int_0^a \frac{1}{1+x^6}(x^4-x^2+1)dx \le a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}$$

이다. 따라서, $\displaystyle\frac{1}{1+a^6}\left(-1+a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right) \le \int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx \le a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}$ 이다.

추가 질문

$f(t) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\,t-x_k\,|$ 라 하자. f는 연속인 함수이며

$f(0) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\,0-x_k\,| = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ 이고,

$f(1) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\,1-x_k\,| = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}x_k\right) = 1-f(0)$이므로

$f(0)+f(1)=1$이다

만약 $f(0)=f(1)=\dfrac{1}{2}$이라고 하면 $f(t)=\dfrac{1}{2}$인 자명한 해가 되고

$f(0)>\dfrac{1}{2}$이면 $f(1)<\dfrac{1}{2}$이고, $f(0)<\dfrac{1}{2}$이면 $f(1)>\dfrac{1}{2}$이므로

중간값 정리에 의해 $f(x)=\dfrac{1}{2}$인 점x가 구간$(0,1)$안에 존재한다.

10 KAIST

I 심층면접 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 심층면접 순서

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 진행요원의 안내에 따라 출결, 신분증 확인 을 하고, 면접에 대한 설명을 들음	20분	면접전 대기실
문제풀이	• 문제풀이실에서 수학, 과학문제(원서접수 시 선택한 과목)를 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	30분	면접풀이실
탐구역량 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 수학 및 과학 문제 질의 응답 • 칠판사용 불가하며, 문제풀이실에서 사용한 용지는 탐구역량 면접 시 활용할 수 있음	15분	면접실 (가)
개인면접	• 지원자는 탐구력, 발전가능성, 기타 인성을 평가할 수 있는 질문에 응답	15분	면접실 (나)
모둠토의 대기	• 모둠토의면접 시작하기 전에 대기하는 장소	15~45분	모둠토의 대기실
모둠토의 면접	• 제시된 주제에 대하여 2분간 면접응시자들이 제시된 주제를 학인하고 본인의 의견과 논거를 정리 • 제시된 주제에 대한 모둠토의를 진행하고 토의에서 발언한 내용을 정리하여 해결방안을 도출 • 면접장에 별도의 메모용지 및 필기구가 준비되어 있음 • 모둠토의는 3~5명을 모아 진행함	15분	면접실 (나)
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 설문조사에 답한 후 귀가		면접 후 대기실

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.

※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)

※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 1일

문제 1 오전

(가) 400의 배수가 되는 해는 무조건 윤년이다.
(나) 100의 배수이지만 400의 배수가 아닌 해는 윤년이 아니다.
(다) 100의 배수가 아니고 4의 배수인 해는 윤년이다.
윤년은 1년이 366일이며 2월이 28일이 아닌 29일이다.

1. 2001년 1월 1일이 월요일이라 하자.
   2002년, 2003년, 2004년의 1월 1일이 각각 무슨 요일인지 구하시오.
2. $2001+c$, $2002+c$, $2003+c$, $2004+c$ 년이 각각 2001년, 2002년 2003년, 2004년의 1월 1일과 요일이 같게 되는 자연수 c의 최솟값을 구하시오.
3. 위 제시문에 의해 2001년 1월 1일 이후 매년 1월 1일 나타나는 요일이 균등하게 분포하는 지 알아보시오. 또 그 이유를 설명하시오.

문제 2 오후

자연수 n에 대하여 실수 수열 $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 $y_1, y_2 \cdots, y_n$이 있을 때

코시 슈바르츠 부등식 $(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \le (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}(y_1^2+\cdots+y_n^2)^{\frac{1}{2}}$이

성립한다. 이 때, 지수조건이 필요조건인지 확인하고자 한다. 다음 물음에 답하여라

1. $(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \le (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}(y_1^2+\cdots+y_n^2)$ 을 만족하지 않는 예를 들어라.
2. 항상 $(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \le (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}(|y_1|+\cdots+|y_n|)$ 이 성립함을 증명하여라.
3. $(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) \le C(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}(y_1^4+\cdots+y_n^4)^{\frac{1}{4}}$을 항상 만족하는 상수 C가 존재하는 것은 아님을 보여라.

2013 2일

문제 3

오전

1. 주사위 1개를 1번 던질 때 나오는 눈의 값의 기댓값을 구하여라.
2. 주사위 눈을 한 번 던지고, 그 이후 다시 한 번 던질지 말지를 선택할 수 있을 때, 얻을 수 있는 눈의 값(최종값)의 기댓값을 최대로 만들 수 있는 전략을 설명하고 그 때의 기댓값을 구하여라.(단, 두 번째 값이 최종 값이 된다.)
3. 2.와 같은 규칙으로 하되, 던질 수 있는 횟수n이 충분히 클 때 얻을 수 있는 눈의 기댓값의 최댓값은?

문제 4

오후

1. 수열 a_n이 다음을 만족할 때 $\lim_{n\to\infty} a_n$이 존재하는 지에 관하여 논하시오.

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n\text{이 짝수}) \\ 0 & (n\text{이 홀수}) \end{cases}$$

2. $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$이 존재하는 지를 논하고, 문제 1번과 비교하여 설명하여라.
3. $|c_n| \le 1$ 인 수열 c_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}$이 존재하지 않도록 c_n의 예시를 들어라. (Hint : 0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,⋯의 수열을 주고 자유롭게 생각해보라고 하였음. 단, 힌트는 시험장에 따라 다른 것으로 보고 있음)

선생님 클리닉

1. 제시된 윤년의 정의와 반복되는 달력의 특성을 이용하여 설명할 수 있다.
2. n개를 확장한 코시-슈바르츠 부등식의 성립과 지수조건에 대한 관계를 묻고 있는데 이는 2개인 경우를 통해 확인한 다음 n개인 경우를 생각하면 접근하기가 수월할 것이다.
3. 기댓값에 관한 것으로 기댓값의 정의를 정확히 이해하고 있으면 설명을 할 수 있다.
4. 무한급수의 수렴은 부분합의 극한으로 정의하는 것을 이용하여 해결의 실마리를 찾을 수 있다.

관련 학습

1. 무한급수의 합

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$ 이 일정한 수 S에 수렴하면 즉, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다. 이 때, S를 이 무한급수의 합이라고 한다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

예시 답안

문제 1

(1) 2001년, 2002년, 2003년은 모두 윤년이 아니므로 365일이다.
$365 \equiv 1 \pmod 7$ 이므로 2002년, 2003년, 2004년의 1월 1일의 요일은 화, 수, 목요일이다.

(2) 2001년을 기준으로 4년 마다 윤년이 되므로 일단 3년 간 하루씩 증가하고 그 다음에는 2일이 증가한다. 결국 4년동안 5일이 증가 하므로 4년을 한 싸이클로 했을 때, 7번이 돌아야 원상태로 돌아온다. 28년을 더하면 원래의 요일로 돌아오게 된다.

->년도 증가				
월(2001년)	화(2002년)	수	목	①
토(2005년)	일	월	화	②
목	금	토	일	③
화	수	목	금	④
일	월	화	수	⑤
금	토	일	월	⑥
수	목	금	토	⑦

(3) (2)에서 28년 마다 반복되고, $100 \equiv 16 \pmod{28}$ 이므로 2100년에 ④의 마지막이 된다. 2101년 첫날은 2100년이 윤년이 아니므로 토요일이 되어 ②에서부터 반복된다.

같은 근거로 2200년에 ⑤의 마지막이 된다.
2201년 첫날은 2200년이 윤년이 아니므로 목요일이 되어 ③에서부터 반복된다. 역시 28년 마다 반복되기 때문에 $100 \equiv 16 \pmod{28}$ 이므로 2300년에 ⑥의 마지막이 된다. 2301년 첫날은 2300년이 윤년이 아니므로 일요일이 되어 ④에서부터 반복된다. 역시 28년 마다 반복되기 때문에 $100 \equiv 16 \pmod{28}$ 이므로 2400년에 ⑦의 마지막이 된다. 2401년 첫날은 2400년이 윤년이므로 토요일이 되어 ①에서부터 반복된다. 결국 400년마다 반복되는데 각각의 100년 중에 마지막 16년 동안 균등하게 분포되지 않으므로 균등하게 분포 되지 않는다.

문제 2

(1) $x_1 = x_2 = 1,\ y_1 = y_2 = 0.1$ 인 경우,

$(1 \times 0.1 + 1 \times 0.1) = (x_1 y_1 + x_2 y_2) \le (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + y_2^2) = (1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} (0.1^2 + 0.1^2)$이 되어 모순이다.

(2)

$$(|y_1| + \cdots + |y_n|)^2 = |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 + 2(|y_1||y_2| + \cdots + |y_{n-1}||y_n|) \ge |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2$$

이고, $(|y_1| + \cdots + |y_n|) \ge (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) \le (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{1}{2}} \le (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} (|y_1| + \cdots + |y_n|)$ 이다.

(3) 모든 자연수 n에 대해

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) \le C(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^4 + \cdots + y_n^4)^{\frac{1}{4}}$$

를 만족하는 적당한 C가 존재한다고 가정하자.

$x_i = a,\ y_i = \dfrac{1}{a}$라 두면, $n \le C n^{\frac{3}{4}}$ 이 되어 $n \le C^4$이므로 이는 모순이다.

문제 3

(1) $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}$

(2) 기댓값이 $\frac{7}{2}$이므로 기댓값 미만으로 나오면 다시 던지는 방법을 취한다.

그러면, 생각할 수 있는 기댓값은

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{36}+\frac{1+2+3+4+5+6}{36}+\frac{1+2+3+4+5+6}{36}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}=\frac{17}{4}$$

(3) 경우를 기댓값 이상으로 나올 때와 기댓값 미만으로 나올 때로 생각할 수 있다.

	확률	생각할 수 있는 값
기댓값이상으로 나올 때 : A	$\frac{1}{2}$	5 (4,5,6이 나오는 경우의 기댓값)
기댓값미만으로 나올 때 : B	$\frac{1}{2}$	2 (1,2,3이 나오는 경우의 기댓값)

2번의 경우 2번의 시행이므로

$A \rightarrow \frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$

$BA \rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{4}$

$BB \rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{2}{4}$ 로 더해주면 된다.

위와 같은 방법으로 무수히 많이 시행을 하면

A	$\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$
BA	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{4}$
BBA	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{8}$
$BBBA$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{16}$
$\vdots$	

이 되어 $\frac{5}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n}=5$이다.

문제 4

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 라고 가정하자.

그러면, $0 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1$ 이 되어 모순이다. 따라서, $\lim_{n\to\infty} a_n$는 존재하지 않는다.

(2)

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{k}{2k} = \dfrac{1}{2}, & n = 2k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ \dfrac{k-1}{2k-1}, & n = 2k-1 \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$ 이다.

(3) $d_n = \dfrac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}$ 이라 하자.

아래 표와 같이 수열 $\{c_n\}$을 정의하자.

c_n	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
n		2	3	4		6		8				12				16								24								32

그러면, $\lim_{n\to\infty} d_{2^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{n-1}}{2^n} = \dfrac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty} d_{3\times 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{n-1}}{3\times 2^{n-1}} = \dfrac{1}{3}$ 이다.

따라서, 수열 $\{c_n\}$에 대해서 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}$은 존재하지 않는다.

2012

문제 1

$N(t)$를 부등식 $a^2+b^2 \le t$를 만족하는 정수쌍 (a,b)의 개수라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $N(10)$의 값을 구하여라.

(2) $N(t)-\pi t \le 2\pi(1+\sqrt{2t})$를 설명하라.

(3) $2\pi(1-\sqrt{2t}) \le N(t)-\pi t$를 설명하라.

(4) $V(t)$를 부등식 $a^2+b^2+c^2 \le t$를 만족하는 정수쌍 (a,b,c)의 개수로 확장시켜 부등식을 만들어 보자.

문제 2

원에 $1 \sim n$까지의 수를 순서대로 배열한다. 1을 지우지 않고, 2 지우고, 3 지우지 않고, 4 지우고,,,,,,, 번갈아 지워가며 남는 마지막 숫자를 $f(n)$이라 하자. 예를 들면 $1 \sim 5$를 배열하면 지우는 순서는 2, 4, 1, 5이므로 마지막에 남는 숫자는 3이다. 즉, $f(5)=3$이다.

$n,\ m,\ r \in \mathbb{Z}$ 이고 $n=2^m+r\ (0<r<2^m)$ 일 때 $f(n)=2r+1 \cdots\cdots$ (*) 이다.

(1) $f(2012)$를 구하라.

(2) (*)를 사용하지 않고 $f(2k)$와 $f(k)$의 관계를 설명하시오.

(3) (*)를 사용하지 않고 $f(2k+1)$와 $f(k)$의 관계를 설명하시오.

(4) (*)를 증명하시오.

선생님 클리닉

1. 좌표평면 위의 한 개의 격자점에 넓이가 1인 정사각형을 대응시키는 방법을 이용하여 설명할 수 있는 문항이다. 부피가 1인 정육면체를 한 개의 격자점에 대응시켜 이것을 공간으로 확장할 수 있다.
2. 생존자문제 혹은 생존자게임으로 알려진 퍼즐문제를 변형한 것으로 몇 번의 시행착오를 거쳐 숫자의 개수가 2의 거듭제곱개이면 시작하는 번호가 생존한다는 것에 착안하여 설명할 수 있다.

예시 답안

문제 1

(1) $a^2+b^2 \le 10$을 만족하는 정수쌍 $(a,\ b)$은 다음과 같다.

ⅰ) $a^2=0$: $a=0,\ b^2 \le 10$ 인 정수쌍은 모두 7쌍

ⅱ) $a^2=1$: $a=\pm 1,\ b^2 \le 9$ 인 정수쌍은 모두 14쌍

ⅲ) $a^2=4$: $a=\pm 2,\ b^2 \le 6$ 인 정수쌍은 모두 10쌍

ⅳ) $a^2=9$: $a=\pm 3,\ b^2 \le 1$ 인 정수쌍은 모두 6쌍

따라서, $N(10)=37$이다.

(2) 원안의 격자점 개수 $N(t)$는 한 변의 길이가 1인 정사각형 $N(t)$개의 넓이와 같다. 따라서, $N(t) \le \pi(\sqrt{t}+\sqrt{2})^2=\pi(t+2+2\sqrt{2t})$ 이고, $N(t)-\pi t \le 2\pi(1+\sqrt{2t})$가 성립한다.

(3) $\pi(\sqrt{t}-\sqrt{2})^2=\pi(t+2-2\sqrt{2t}) \le N(t)$ 이므로 $2\pi(1-\sqrt{2t}) \le N(t)-\pi t$이다.

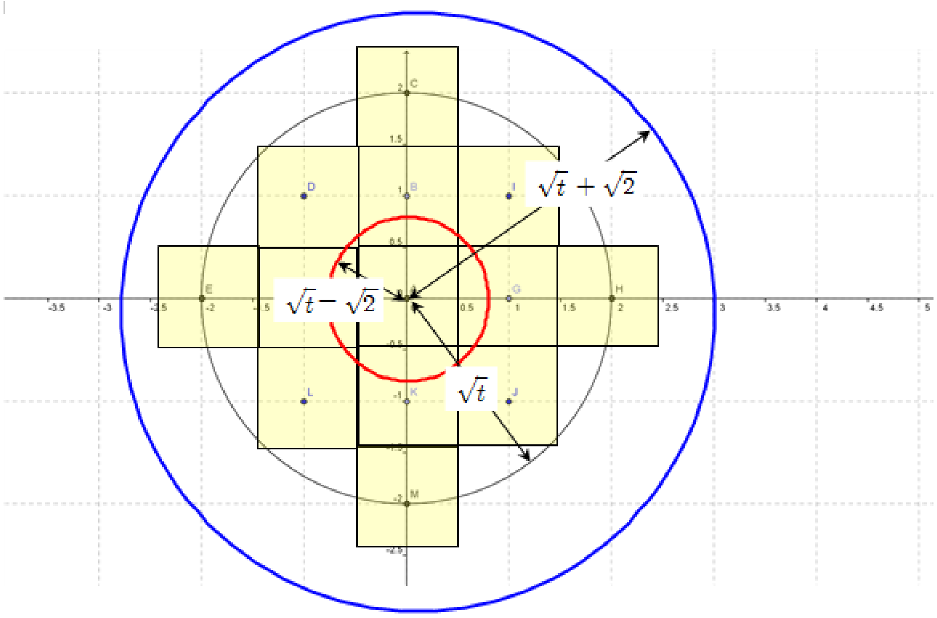
(4) 이를 구로 확장하여 생각하면, $V(t)$는 한 변의 길이가 1인 정육면체 $V(t)$개의 부피와 같다. 따라서, 위와 같은 방법으로 부피의 대소를 비교하면 된다.

즉, 반지름이 $\sqrt{t}$인 구 안에 들어있는 격자점의 개수 $V(t)$는

$$V(t) \le \frac{4\pi}{3}(\sqrt{t}+\sqrt{3})^3=\frac{4\pi}{3}(t\sqrt{t}+3\sqrt{3}\,t+9\sqrt{t}+3\sqrt{3})$$

이므로 $V(t)-\frac{4}{3}\pi t\sqrt{t} \le 4\sqrt{3}\,\pi(t+\sqrt{3t}+1)$ 이 성립한다.

또한, $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{t}-\sqrt{3})^3 \le V(t)$ 이 되므로 $4\sqrt{3}\,\pi(\sqrt{3t}-t-1) \le V(t)-\frac{4}{3}\pi t\sqrt{t}$ 을 얻는다.



문제 2

(1) $f(2012)=a$라 하자.

그러면, 1과 a 사이의 수 중 $\dfrac{a-1}{2}$개의 숫자가 지워진다.

남은 숫자에서 첫 번째 숫자 a가 마지막까지 남는 숫자이므로, 2012에서 $\dfrac{a-1}{2}$개의 숫자를 제외한 남은 숫자는 2의 거듭제곱 개이다. 따라서 적당한 자연수 n에 대해 $2012-\dfrac{a-1}{2}=2^n$, $a=4025-2^{n+1}$이다.

$1 \le a \le 2012$에서 $1 \le 4025-2^{n+1} \le 2012 \Rightarrow 2013 \le 2^{n+1} \le 4024$이고, $n=10$이다. 따라서 $f(2012)=4025-2048=1977$이다.

(2) 1부터 $2k$까지 숫자를 $1,\ 1',\ 2,\ 2',\ \cdots,\ k,\ k'$ 이라고 쓰고 숫자를 k'까지 지우면 1부터 k까지 숫자가 남는다. 따라서 $f(2k)=2f(k)-1$이다.
예를 들어서
$1,\ 1',\ 2,\ 2',\ 3,\ 3',\ 4,\ 4',\ 5,\ 5' \Rightarrow 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \Rightarrow 1,\ 3,\ 5 \Rightarrow 3\ (2\times 3-1)$
이다.

(3) 1부터 $2k+1$까지 숫자를 $1,\ 1',\ 2,\ 2',\ \cdots,\ k,\ k',\ k+1$ 이라고 쓰고 숫자를 1까지 지우면 $2(1)$부터 $k+1(k)$까지 k개의 숫자가 남는다. 따라서 $f(2k+1)=2f(k)+1$이다. 그 예로 다음을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned}&1,\ 1',\ 2,\ 2',\ 3,\ 3',\ 4,\ 4',\ 5,\ 5',\ 6\\ &\Rightarrow 2(1),\ 3(2),\ 4(3),\ 5(4),\ 6(5)\\ &\Rightarrow 2(1),\ 4(3),\ 6(5)\\ &\Rightarrow 4(3)\ \ (2\times 3+1)\end{aligned}$$

(4) $f(n)=a$ 라 하자.

그러면, 1과 a 사이의 수 중 $\dfrac{a-1}{2}$개의 숫자가 지워진다.

남은 숫자에서 첫 번째 숫자 a가 마지막까지 남는 숫자이므로, n에서 $\dfrac{a-1}{2}$개의 숫자를 제외한 남은 숫자는 2의 거듭제곱 개다.

따라서, 적당한 자연수 k에 대해 $n-\frac{a-1}{2}=2^k$, $a=2n+1-2^{k+1}$이다.

$1 \leq a \leq n$에서 $1 \leq 2n+1-2^{k+1} \leq n$

$$\Rightarrow n+1 \leq 2^{k+1} \leq 2n$$

$$\Rightarrow 2^m+1 \leq 2^{k+1} \leq 2^{m+1}+2r$$

이고, $k=m$이다.

그러므로, $f(n)=2n+1-2^{m+1}=2^{m+1}+2r+1-2^{m+1}=2r+1$이다.

11 포스텍

Ⅰ 일반전형 심층면접 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 심층면접 순서

면접순서	내용	소요시간	장소
면접대기	• 대강당에 집결하여 출석 및 신분확인을 받고 이름표를 받아 착용한다. • 대강당에서 지정된 자석에 착석한 뒤, 입학사정관의 안내를 듣고, 각 과별로 면접장소로 이동한다.	20분	대강당 -> 면접 전 대기실
문제풀이 (전공적합성 면접)	• 문제풀이실에서 전공 적합성 문제(문제는 각 과별로 다름)를 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	15분	면접풀이실
전공적합성 면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 전공적합성 문제 질의 응답 • 칠판사용 불가하며, 문제풀이실에서 사용한 용지는 탐구역량 면접 시 활용할 수 있음 • 면접을 보는 교수님은 2명	15분	면접실 (전공적합성 면접)
인성면접	• 전공적합성 면접을 한 후 지원자는 안내요원의 안내에 따라 인성 면접실로 이동 • 탐구력, 발전가능성, 기타 인성을 평가할 수 있는 질문에 응답 • 교수님 및 입학사정관 포함 2명	15분	면접실 (인성면접)
심층면접 대기	• 모둠토의면접 시작하기 전에 대기하는 장소	15~45분	면접 전 대기실
심층면접 풀이	• 문제풀이실에서 제시된 수학 및 과학문제를 미리 풀어 보고 답변을 준비 • 문제풀이실에 준비된 면접문제에는 필기 등을 할 수 없으며 별도로 제공된 용지에 메모 가능	각 과목당 15분	면접실 (나)
심층면접	• 진행요원의 안내에 따라 면접장 앞에서 대기 후 자신의 차례가 되면 입장 • 심층면접 문제 질의 응답 • 화이트보드에 풀이를 쓸 수 있으며 문제풀이실에서 사용한 용지는 탐구역량 면접 시 활용할 수 있음 • 면접을 보는 교수님은 2명	각 과목당 15분	심층면접 면접실
면접 후 대기	• 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 면접 후 대기실에서 1시 까지 대기 후 귀가(오전) • 면접이 끝난 수험생은 진행요원의 안내에 따라 면접 후 귀가(오후)		면접 후 대기실

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 면접일시 숙지	고사장 위치 및 면접일시 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 면접참석 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 해당 면접진행요원 반드시 확인	대기실에서 면접진행요원 소개가 있으며, 이때 해당 진행요원을 꼭 확인하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.
• 면접대기실 이탈 금지	기다리는 동안 되도록 면접대기실을 벗어나지 않도록 합니다.
• 면접 순서 숙지	각 수험자 별로 면접의 순서가 다를 수 있으므로 진행요원의 안내에 잘 따르도록 합니다.

※ 대기시간동안 **타인과의 대화나 휴대폰, 노트북 등의 기기 사용을 금합니다**. (미준수시 불이익이 있을 수 있음)

※ 학부모 및 보호자는 고사장 출입이 불가하오니 별도로 마련된 학부모 대기실을 이용하시기 바랍니다.

Ⅱ 연도별 기출문제

2012

문제 1

1. 방정식 $x^5=1$의 다섯 개의 근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$라고 할 때

$$\sum_{n=1}^{101}\left(\alpha_1{}^n+\alpha_2{}^n+\alpha_3{}^n+\alpha_4{}^n+\alpha_5{}^n\right)$$

의 값을 구하여라.

2. $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$가 x의 다항식일 때

$$\int_1^x P(t)R(t)dt\int_1^x Q(t)S(t)dt-\int_1^x P(t)S(t)dt\int_1^x Q(t)R(t)dt$$

가 $(x-1)^4$으로 나누어짐을 보여라.

3. 정수에서 실수로 가는 함수 f가 다음 성질을 가지고 있다고 하자. 모든 정수 m, n에 대하여

(ⅰ) $f(mn)=f(m)f(n)$

(ⅱ) $f(m+n)\le f(m)+f(n)$

(ⅲ) $0\le f(m)\le 1$

이 함수 f가 모든 정수 m, n에 대해 $f(m+n)\le \max\{f(m), f(n)\}$을 만족함을 보여라. (hint) 임의의 자연수 k에 대하여 $\{f(m+n)\}^k$을 생각

선생님 클리닉

1. 방정식 $x^5=1$는 실근 1과 1이 아닌 네 개의 근을 가짐을 알고, 근과 계수와의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.
2. $f(1)=0, f'(1)=0, f''(1)=0, f'''(1)=0$이면 인수정리에 의해 $f(x)$는 $(x-1)^4$으로 나누어떨어진다.

관련 학습

1. 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

① $r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$일 때, $S_n = na$

2. Σ의 기본 성질

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$　　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$(단, c는 상수)　　④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$(단, c는 상수)

3. 근과 계수와의 관계

계수가 실수이고 최고차항의 계수가 영이 아닌 임의의 n차 방정식

$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$이 있다고 하자.

이 때 위 방정식의 n개의 근 $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 계수와의 관계는 다음과 같다.

① $x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

② $x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_1}{a_n}$

4. 인수정리

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)=0$이다.

5. 이항정리

n이 자연수일 때,

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n \\ &= \sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r\end{aligned}$$

추가 질문

자연수 $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}10^{2k-1}\right)+n=10^{2n-1}+10^{2n-3}+\ldots.+10+n$ 이 소수가 아님을 보여라. 단, n은 $n \geq 2$인 자연수이다.[1)]

1) 성균관대 2010 수시전형

예시 답안

문제 1

(1)

일반성을 잃지 않고 $\alpha_1=1$이라 할 수 있다.

$i=2,3,4,5$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{101}\alpha_i{}^n=\frac{\alpha_i(1-\alpha_i{}^{101})}{1-\alpha_i}=\frac{\alpha_i(1-\alpha_i)}{1-\alpha_i}=\alpha_i$이므로

$$\sum_{n=1}^{101}(\alpha_1{}^n+\cdots+\alpha_5{}^n)=\sum_{n=1}^{101}1+\sum_{n=1}^{101}\alpha_2{}^n+\cdots+\sum_{n=1}^{101}\alpha_5{}^n=101+\alpha_2+\cdots+\alpha_5$$

이다. 여기서 $\alpha_2,\cdots,\alpha_5$는 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$의 네 근이므로 그 합은 근과 계수의 관계에 의하여 -1이다. 따라서 구하는 값은 100이다.

(2)

준식을 $f(x)$라 하면 $f(1)=0$이다.

$f'(x)=PR\displaystyle\int_1^x QS+QS\int_1^x PR-PS\int_1^x QR-QR\int_1^x PS$이므로 $f'(1)=0$이다.

$$\begin{aligned}f''(x)&=(PR)'\int_1^x QS+PQRS+(QS)'\int_1^x PR+PQRS\\&\qquad-(PS)'\int_1^x QR-PQRS-(QR)'\int_1^x PS-PQRS\\&=(PR)'\int_1^x QS+(QS)'\int_1^x PR-(PS)'\int_1^x QR-(QR)'\int_1^x PS\end{aligned}$$

이므로 $f''(1)=0$이다. $f'''(x)$에서 $\displaystyle\int_1^x$가 없는 항들만 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(PR)'QS+(QS)'PR-(PS)'QR-(QR)'PS\\&=(P'R+PR')QS+(Q'S+QS')PR-(P'S+PS')QR-(Q'R+QR')PS\\&=P'QRS+PQR'S+PQ'RS+PQRS'-P'QRS-PQRS'-PQ'RS-PQR'S=0\end{aligned}$$

따라서 $f'''(1)=0$이다. 그러므로 준식은 $(x-1)^4$으로 나누어진다.

(3)

임의의 자연수 k에 대하여

$$\begin{aligned}\{f(m+n)\}^k&=f((m+n)^k)=f\left(\sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_r m^r n^{k-r}\right)\\&\le\sum_{r=0}^{k}f({}_n\mathrm{C}_r)f(m^r)f(n^{k-r})=\sum_{r=0}^{k}f({}_n\mathrm{C}_r)f(m)^r f(n)^{k-r}\end{aligned}$$

$$\le (k+1)(\max\{f(m),\, f(n)\})^k$$

이므로

$$f(m+n) \le (k+1)^{\frac{1}{k}} \cdot \max\{f(m),\, f(n)\}$$

이다. 이 식은 임의의 자연수 k에 대하여 성립해야 하므로 $k\to\infty$일 때에도 성립해야 한다. $k\to\infty$일 때 $(k+1)^{\frac{1}{k}}\to 1$이므로 $f(m+n) \le \max\{f(m),\, f(n)\}$이 성립해야 한다.

추가 질문

임의의 양의 실수 a에 대하여

$$a^{2k-1}+1=(a+1)\cdot(a^{2k-2}-a^{2k-3}+\cdot\cdot\cdot\cdot-a+1)$$

임을 이용하기위해 주어진 자연수를 다음과 같이 재정렬한다.

$$10^{2n-1}+10^{2n-3}+....+10+n=\sum_{k=0}^{n-1}(10^{2k+1}+1)$$

각 $0 \le k \le n-1$에 대하여 $10^{2k-1}+1$이 각각 11로 나누어지기 때문에

$\sum_{k=0}^{n-1}(10^{2k+1}+1)$로 11로 나누어짐을 알 수 있다.

2011

문제 1

1. 연속함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족한다고 한다.
 (가) $f(a)=f(b)=0,\ a<b$
 (나) $0\le f(x)\le 1,\ a\le x\le b$
 (다) $f''(x)<0,\ a<x<b$
 그래프 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ 의 길이는 $(b-a)+2$보다 크지 않음을 보여라.

2. 자연수 n에 대하여 다음과 같이 주어진 A의 정수 부분을 구하여라.

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2-2}}+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2}}$$

3. 20그루의 나무가 작은 숲을 이루고 있다. 이 중 어떤 두 나무 사이의 거리도 그 두 나무의 높이의 차의 두 배를 넘지 않는다고 한다. 모든 나무의 높이가 10m보다 작을 때, 이 숲을 길이가 40m인 울타리로 둘러쌀 수 있음을 보여라. (단, 모든 나무의 굵기는 무시하고 각 나무의 위치는 한 점으로 표시한다.)

선생님 클리닉

1. $f'(c)=0$인 c가 (a,b)에 존재하고, 곡선의 길이를 두 구간으로 나누어 생각해본다.
2. 함수 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$를 구간 $\left[1,(2n-1)^2\right]$에서 적분한 값과 A를 비교해본다.
3. 나무의 위치를 높이 순으로 지정하여 생각해본다.

관련 학습

1. 곡선 $y=f(x)$ $(a \le x \le b)$의 길이는 다음과 같다. 여기서 f는 미분가능한 함수이다.

$$(\text{곡선의 길이}) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

2.평균값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

3. 함수의 증가와 감소

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

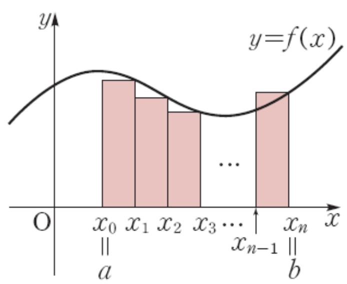
4. 정적분의 정의[2)]

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x) \ge 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$와 $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

닫힌 구간 $[a,\ b]$를 n등분하고 양 끝점을 포함하여 각 분점의 x좌표를 차례로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라고 하면 각 구간의 길이 Δx는 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$이다.



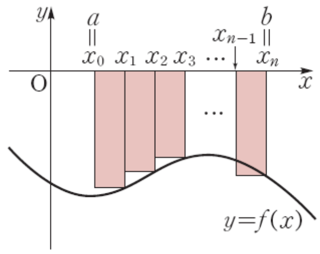
그림의 각 직사각형의 넓이의 합 S_n은

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이다. n이 한없이 커지면 S_n의 극한값은 S와 일치하므로 다음이 성립한다.

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

한편 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)<0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$와 $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자.



그림의 각 직사각형의 넓이의 합 S_n은

$$S_n=\{-f(x_1)\}\Delta x+\{-f(x_2)\Delta x\}+\cdots+\{-f(x_n)\}\Delta x=-\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

이다. n이 한없이 커지면 S_n의 극한값은 S와 일치하므로 다음이 성립한다.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$가 반드시 존재한다.

이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

추가 질문

연속함수 $f(x)$의 점 $(a, f(a))$부터 점 $(b, f(b))$까지의 곡선의 길이를 정적분의 정의를 이용해서 구하려고 한다. 닫힌구간 $[a, b]$를 n개의 균등한 소구간으로 나누어 계산하는 방법을 설명하여 보시오.

2) 좋은 책 신사고 미적분과 통계 기본

예시 답안

문제 1

(1)

주어진 조건에 의하여 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 존재하고, (a, c)에서 $f'(x)>0$이고 (c, b)에서 $f'(x)<0$이다. 따라서 주어진 구간에서의 곡선의 길이를 L이라 하면

$$\begin{aligned}L&=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^c \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx+\int_c^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\\&\le\int_a^c \sqrt{\{1+f'(x)\}^2}\,dx+\int_c^b \sqrt{\{1-f'(x)\}^2}\,dx\\&=\int_a^c \{1+f'(x)\}dx+\int_c^b \{1-f'(x)\}dx\\&=[x+f(x)]_a^c+[x-f(x)]_c^b\\&=c-a+f(c)-f(a)+b-c-f(b)+f(c)\\&=(b-a)+2f(c)\le(b-a)+2\end{aligned}$$

(2)

함수 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$을 생각하자.

$$\int_1^{(2n-1)^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<2A<2+\int_1^{(2n-1)^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$\left[2\sqrt{x}\,\right]_1^{(2n-1)^2}=4n-2-2=4n-4<2A<4n-2$ 이므로 $2n-2<A<2n-1$이다.
따라서, $n\ge 2$인 경우 A의 정수부분은 $2n-2$이고 $n=1$일 때는 1이다.

다른풀이

2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}<\frac{1}{2\sqrt{2k-1}}<\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k-3}}$$

$$\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}<\frac{1}{\sqrt{2k-1}}<\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k-3}$$

이므로 왼쪽 부등식에 $k=1$부터 $2k-1=(2n-1)^2$까지 대입하여 더하면 $\sqrt{(2n-1)^2+2}-\sqrt{1}<A$에서 $2n-2<A$를 얻고 오른쪽 부등식에 $k=2$부터

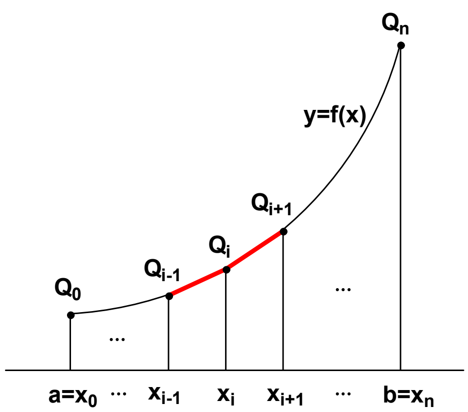
$2k-1=(2n-1)^2$까지 대입하여 더하면 $A-1<\sqrt{(2n-1)^2}-1$에서 $A<2n-1$을 얻는다. 따라서 A의 정수부분은 $2n-2$이다. 단 $n=1$일 때는 1이다.

(3)
각 나무의 위치를 높이 순으로 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots, \mathrm{A}_{20}$이라 하고 높이를 각각 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{20}$이라 하면 울타리의 길이를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}+\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}+\cdots+\overline{\mathrm{A}_{19}\mathrm{A}_{20}}+\overline{\mathrm{A}_{20}\mathrm{A}_1} &\le 2(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+2(a_{20}-a_1)\\ &=4(a_{20}-a_1)\le 40\end{aligned}$$

이다.

추가 질문



구간 $[a, b]$를 n등분하여 그 분점을 각각 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 라 하고, 그 점에 대응되는 곡선 $y=f(x)$위의 점을 각각 $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 이라 하자.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \ (i=1,2,\cdots,n) \ (\Delta x_i = \frac{b-a}{n})$$

$$Q_i = (x_i, f(x_i)) \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

라 하면

$$\overline{Q_{i-1}Q_i} = \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

이다. 그런데 여기서 $f(x)$가 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수이므로 평균값정리에 의하여

$$f'(z_i) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

을 만족하는 $z_i \in (x_{i-1}, x_i)$가 존재한다. 따라서 위 선분의 길이는

$$\overline{Q_{i-1}Q_i} = \sqrt{1+\{f'(z_i)\}^2}\,\Delta x_i$$

가 되고 각 구간에서 구한 이러한 선분의 총합은

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{Q_{i-1}Q_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\{f'(z_i)\}^2}\,\Delta x_i.$$

가 된다.

여기서 $f'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이므로 $n \to \infty$이면 $f'(z_i) \to f'(x_i)$이다.

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \overline{Q_{i-1}Q_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\,\Delta x_i \ \left(\Delta x_i = \frac{b-a}{n},\ x_i = a+i\Delta x_i\right)$$

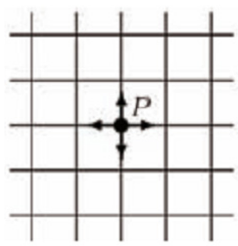
이다. 정적분의 정의에 의하여 이는 $\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ 와 같다.

2010

문제 1

1. 1번부터 5번까지의 농구 선수가 한 줄로 섰는데 모든 선수의 키가 앞뒤 선수의 평균키보다 크다고 한다. 즉, i번 선수의 키를 x_i라고 하면 $x_{i+1} > \dfrac{x_i + x_{i+2}}{2}$, $i=1, 2, 3$이다. 이때, 짝수 번 선수들의 평균키가 홀수 번 선수들의 평균키보다 큼을 보여라.

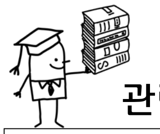
2. 점 P가 그림과 같이 격자점을 따라 한 번에 한 칸씩 상하좌우로 자유롭게 움직인다. 이러한 운동을 10번 했을 때 점 P의 마지막 위치로 가능한 모든 점의 개수를 구하여라.



3. $f(x)$는 다항식이고, 방정식 $f(x)-\sin x=0$은 무한개의 해를 갖는다면 $f(x)$는 -1과 1 사이의 상수임을 보여라.

선생님 클리닉

1. 조건을 이용해서 x_2+x_4와 $x_1+x_3+x_5$사이의 관계부등식을 찾는다.
2. 원점에서 거리 0, 2, 4, 6, 8, 10인 점들의 개수를 센다.
3. $f(x)$를 n차 다항식이라고 가정하고 롤의 정리를 이용하여 모순을 이끌어낸다.



관련 학습

1. 롤의 정리[3)]

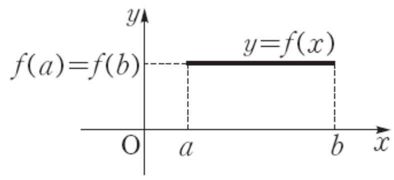
<롤의 정리 정의>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$ 인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

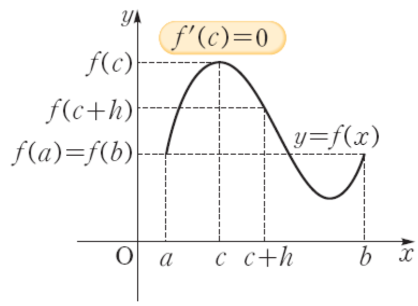
<롤의 정리 증명>

i) 함수 $f(x)$가 상수함수일 때,

열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=0$이다.



ii) 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닐 때,



$f(a)=f(b)$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

$x=c$에서 최댓값을 가질 때 절댓값이 충분히 작은 수 $h(h\neq 0)$에 대하여 $f(c+h)-f(c)\leq 0$ 이므로

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0,\ \lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

이다.

그런데 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 위의 좌극한과 우극한이 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

같은 방법으로 함수 $f(x)$가 $x=c\ (a<c<b)$에서 최솟값을 갖는 경우에도 $f'(c)=0$ 임을 보일 수 있다.

2. 함수 $y=x^n$과 상수함수의 도함수

① $y=x^n$ (n은 양의 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$

② $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

추가 질문

평균값정리는 다음과 같다
함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (a<c<b)$$

인 c가 열린구간 (a, b)안에 적어도 하나 존재한다.
위 정리를 증명하고 아래 문제에 답하시오.

< 문제 >
함수 $y=f(x)$ 가 다음 네 조건을 만족한다.

(1) $f(0)=0$
(2) $x>0$ 이면 항상 $f(x)>0$이다.
(3) $y=f(x)$ 는 미분가능하다.
(4) 도함수 $y'=f'(x)$ 는 연속이다.

이때, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x+f(x))}{f(x)}=f'(0)+1$ 임을 보여라.

예시 답안

문제 1

(1)

문제의 조건에 의하여 $x_2>\dfrac{x_1+x_3}{2}$, $x_3>\dfrac{x_2+x_4}{2}$, $x_4>\dfrac{x_3+x_5}{2}$이므로

$x_2+x_4>\dfrac{x_1+x_3}{2}+\dfrac{x_3+x_5}{2}=\dfrac{x_1+x_3+x_5}{2}+\dfrac{x_3}{2}>\dfrac{x_1+x_3+x_5}{2}+\dfrac{x_2+x_4}{4}$이고

$\dfrac{3}{4}\cdot(x_2+x_4)>\dfrac{x_1+x_3+x_5}{2}$, 즉, $\dfrac{x_2+x_4}{2}>\dfrac{x_1+x_3+x_5}{3}$이다.

(2)
도달할 수 있는 점의 위치는 이동 횟수가 짝수인지, 홀수인지에 따라 달라진다. 마지막 위치로 가능한 점들은 원점에서 택시거리로 $0, 2, 4, \cdots, 10$인 점들이고 개수의

3) 좋은 책 신사고 수학 2

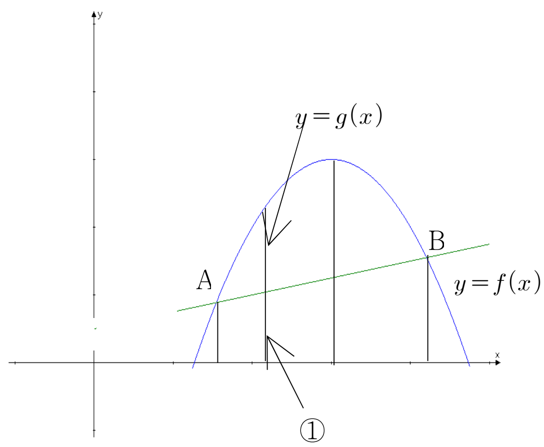
합은 다음과 같다. $1+4\times(2+4+6+8+10)=121$

(3)

$f(x)$를 n차 다항식이라 하고($n\neq0$), $g(x)=f(x)-\sin x$라 하자. $g(x)=0$의 해가 무한하다면 롤의 정리에 의하여 $g'(x)=0$의 해가 무한하고 이를 계속하면 $g^{(n-1)}(x)=0$의 해도 무한해야 한다. $f^{(n-1)}(x)=ax+b$라 하면 $g^{(n-1)}(x)=0$은 $ax+b=\pm\sin x(\text{or }\cos x)$인데 이는 $a\neq0$이면 무한한 해를 가질 수 없다. 따라서 $a=0$이고, $f(x)=b\,(-1<b<1)$ 이다.

추가 질문

[평균값정리의 증명]



그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, 열린구간 (a,b)에서 미분가능하다고 하자. 이 때, 직선 AB의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\cdots①$$

여기서,

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

라 하면 $g(a)=0,\ g(b)=0$

또 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, 열린구간 (a,b)에서 미분가능하므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c)=0\,(a<c<b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

그런데 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이므로 $g'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ 즉,

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 c가 열린구간 (a,b)안에 적어도 하나 존재한다.

< 문제 증명 >

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x+f(x))}{f(x)}=f'(0)+1$ 에서 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{f(x+f(x))}{f(x)}-1\right)=f'(0)$ 이다.

즉, $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{f(x+f(x))-f(x)}{x+f(x)-x}\right)=f'(0)$ 임을 보이면 된다. (2)에서 $x>0$에서 $f(x)>0$ 이므로 $0<x<x+f(x)$ 이다. (3)에서 $f(x)$ 는 미분 가능하므로 평균값 정리를 $[x, x+f(x)]$에서 적용하면 $\dfrac{f(x+f(x))-f(x)}{x+f(x)-x}=f'(c_x)$가 성립되는 c_x가 $x<c_x<x+f(x)$ 에서 적어도 한 개 존재한다.

(1)에서 $f(0)=0$ 이고 (3)에서 $f(x)$ 는 연속이므로 $x\to+0$이면 $x+f(x)\to+0$이므로 $x\to+0$이면 $c_x\to+0$이다. (4) 에서 도함수 $y'=f'(x)$ 는 연속이므로

$\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{f(x+f(x))-f(x)}{x+f(x)-x}\right)=\lim\limits_{c_x\to+0}f'(c_x)=f'(0)$이다.

2009

문제 1

1. a가 양의 실수일 때 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(na-[na])$가 수렴하는 a를 모두 구하여라.
   여기에서 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 표시한다.
2. 자연수 n, p가 $n\geq 2$이고 p는 소수일 때 방정식 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+p=0$이 정수해를 가지지 않음을 보여라.
3. 세 실수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2\leq 1$과 $z\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$을 만족할 때

$$(x-\cos\theta)^2+(y-\cos\theta)^2+(z-\sqrt{2}\sin\theta)^2$$

   의 최솟값을 구하여라. (단, θ는 0과 $\dfrac{\pi}{2}$ 사이의 상수이다.)

선생님 클리닉

1. a가 자연수인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각해본다.
2. 주어진 방정식이 정수해를 가진다고 가정하고 모순을 이끌어낸다.
3. $(\cos\theta, \cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$들의 집합은 중심을 원점으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 구를 평면 $y=x$로 자른 단면의 일부이다.

관련 학습

1. 아르키메데스의 원리

$0 < a < b$이면 $na > b$인 자연수 n이 항상 존재한다.
즉 아무리 작은 양수라도 여러 배하면 언젠가는 어떠한 큰 수 보다 커진다.

2. 귀류법(歸謬法)

귀류법은 증명하려는 명제의 부정이 참이라는 것을 가정하였을 때 모순되는 결과가 나온다는 것을 보여, 원래의 명제가 참인 것을 증명하는 방법이다. 배리법(背理法)이라고도 한다. 귀류법은 유클리드가 2300년 전 소수의 무한함을 증명하기 위해 사용하였을 정도로 오래된 증명법이다.

유클리드의 귀류법을 살펴보자.

명제 '소수(素數)의 개수는 무한히 많다'

증명) 소수가 유한하다고 가정하자.

유한개의 소수를 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 라 하면

$N = (p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n)$ 에 대하여 $N+1$ 은 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 와 다른 소수이다.

이것은 소수가 n 개라는데 모순이므로 소수의 개수는 무한히 많다.

또한 '$\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다'라는 명제의 다음과 같은 증명은 귀류법의 예로서 자주 인용되고 있다.

$\sqrt{2}$ 가 유리수라고 가정하면 $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수, 단 $m \neq 0$)과 같은 기약분수로 나타낼 수 있다. 이 식의 양변을 제곱하면 $2m^2 = n^2$ 이 되며, 좌변은 짝수이므로 n 은 짝수, 즉 $n = 2k$ 인 k (k 는 정수)가 있다.

따라서, $m^2 = 2k^2$ 이다. 역시 우변은 짝수이므로 m 도 짝수이다.

m, n 이 모두 짝수가 된다면 m, n 은 공약수 2를 가지며 이는 m, n 이 서로소라는 사실에 모순이다. 따라서, 가정 '$\sqrt{2}$ 는 유리수이다'는 거짓이 된다. 즉, $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

귀류법은 수학이나 자연과학에서 애호되는 논증법의 하나이다. 이 경우의 귀류법은 한 명제 A의 부정으로부터 모순을 끌어내어 A의 부정이 옳지 않다는 것을 증명한다. 즉, A가 성립함(참)을 말해 주는 증명 방법이다. 이 때 증명의 최종목적은 A의 증명에 있으며, 직접적으로는 A를 증명하지 않고, 우선 귀류법에 의하여 A의 부정을 부정하는 것을 시도해 보는 간접적인 방법을 사용한다.

3. 좌표공간에서 두 점 사이의 거리

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

추가 질문

$P(x)$가 n차 다항식일 때, 방정식 $P(x) = 0$의 근의 개수는 n보다 클 수 없음을 증명하시오.[4)]

예시 답안

문제 1

(1)
$a=k+\alpha$ (단, k는 정수, $0\le\alpha<1$)라 하자.

$\sum_{n=0}^{\infty}(na-[na])=\sum_{n=0}^{\infty}(n\alpha-[n\alpha])$에서 $n\alpha-[n\alpha]=\{n\alpha\}$라 하자.

$\alpha=0$이면 자명하다.

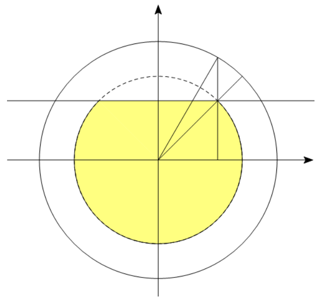
$0<\alpha<1$일 때 $\sum_{n=0}^{\infty}\{n\alpha\}$에서 $\{n\alpha\}\ge\frac{1}{2}$인 항들이 무수히 많음을 보이자.

$0<\alpha<\frac{1}{2}$인 경우 α에 계속 2를 곱해서 $\frac{1}{2}$를 넘는 최초의 순간을 찾을 수 있다. 즉 $1>\alpha\times2^{N_1}>\frac{1}{2}$인 N_1이 존재한다. $\{\alpha\times2^{N_1+1}\}$에서 같은 일을 수행하여 N_2를 찾는 방법으로 이를 반복하면 $\frac{1}{2}$ 이상인 항이 무수히 많음을 알 수 있다. 따라서 준식이 수렴하려면 $\alpha=0$, 즉 a는 자연수일 수 밖에 없다.

(2)
주어진 방정식이 정수해 α를 가진다고 가정하면 $\alpha(\alpha^{n-1}+\cdots+1)=-p$에서 α는 p의 음의 약수일 수밖에 없으므로 -1 또는 $-p$이다.
$\alpha=-1$이면 $\alpha^{n-1}+\cdots+1$의 값은 0 또는 1되어 모순이다.
$\alpha=-p$이면 $\alpha^{n-1}+\cdots+1=1$이어야 하는데 $-p+(-p)^2+\cdots+(-p)^{n-1}=0$
즉 $1-(-p)^{n-1}=0$이어야 하므로 $p=\pm1$이므로 모순이다.
그러므로 주어진 방정식은 정수해를 갖지 않는다.

(3)
(x,y,z)들의 집합은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구 및 그 내부와 평면 $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 아래 부분의 공통부분이고, $(\cos\theta, \cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$들의 집합은 중심을 원점으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 구를 평면 $y=x$로 자른 단면의 일부이다. 평면 $y=x$로 자른 단면을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

4) 서울대 2005 수시전형



$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$에 대한 주어진 식의 최솟값을 $f(\theta)$라 하면 다음과 같이 구간별로 정의할 수 있다.

i) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$인 경우: $f(\theta) = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$

ii) $\dfrac{\pi}{4} \le \theta < \dfrac{\pi}{3}$인 경우:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \cos\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sin\theta\right)^2 \\ &= 3 - 2(\sin\theta + \cos\theta) \end{aligned}$$

iii) $\dfrac{\pi}{3} \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$인 경우: $f(\theta) = \left(\sqrt{2}\sin\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2\left(\sin\theta - \dfrac{1}{2}\right)^2$

추가 질문

$P(x) = 0$의 근의 개수가 n보다 크다고 가정하자.

근을 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ (단, $m > n$)이라면

$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$이므로 $P(x)$는 m차 다항식이 된다.

이것은 $P(x)$가 n차 다항식이라는 것에 모순이다.

$\therefore$ 방정식 $P(x) = 0$의 근의 개수는 n보다 클 수 없다.

2008

문제 1

1. 양의 정수 n의 모든 양의 약수들의 합이 $2n$일 때, n의 모든 양의 약수의 역수들의 합은 얼마인가?

2. 평면 위에 두 조건 $x^2+y^2 \le 1$과 $(x-y)^2+y^2 \le 1$을 동시에 만족하는 점들로 이루어진 영역을 U라고 하자. 임의의 실수 a에 대해, 점 $\mathrm{P}=\left(a,\ \dfrac{a}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)$과 영역 U 사이의 거리를 구하여라.

3. 양의 정수 n에 대하여, $A(n)$을 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1,\ y=-x,\ x=-2007$ $x=2007$ 에 의해 둘러싸인 영역의 면적이라 하자. 다음 극한값을 구하여라. $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)$

선생님 클리닉

1. n의 약수들은 두 수의 곱이 n이 되는 쌍으로 짝지을 수 있다.
2. 원과 평행이동 된 원이 공유하는 부분을 나타내는 연습을 해볼 수 있고 영역에서 정해진 점으로의 거리를 구할 수 있다.
3. $|x| \le 1$일 때와 $|x| > 1$일 때로 나누어서 그래프를 추측한다.

관련 학습

1. 로피탈(L'Hospital) 정리

미분을 정의하는데 극한을 사용하지만, 미분은 로피탈(L′Hospital) 정리를 이용하면 극한을 구하는데 도움을 줄 수 있다. 로피탈(L′Hospital) 정리는 $\frac{0}{0}$ 또는 $\frac{\infty}{\infty}$ 형의 부정형을 갖는 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 모양의 함수의 극한을 구할 때 유용하며, 구체적으로, “a 의 근방에서 f 와 g 가 미분가능하고 $g'(a) \neq 0$ 일 때, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ 이거나, 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$이고, 극한값 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 이 존재하면, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 이 성립한다.” 는 것이다.

2. 미분법

① 합성함수의 미분법

미분가능한 두 함수 $y = f(z)$, $z = g(x)$에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$의 도함수는 $y' = f'(g(x))g'(x)$

② 로그함수의 도함수

$$y = \ln x \ (x > 0) \text{이면 } y' = \frac{1}{x}$$

③ ①,②를 이용하여 함수 $y = \ln f(x) \ (f(x) > 0)$의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$y' = (\ln\ f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

추가 질문

공간의 xy평면 위에 원$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$가 주어져 있다.

(1) 공간의 한 점$\mathrm{P}(a,b,c)$에서 S 까지의 최단 거리를 구하는 방법을 설명하시오.

(2) xz평면 위의 원 $T = \{(x,y,z) \mid x^2 + (z-1)^2 = 1,\ y = 0\}$에서 S까지의 최단 거리를 구하는 방법을 설명하시오.

(3) xz평면 위의 타원 $E = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + z^2 = 1,\ y = 0\right\}$에서 S까지의 최단 거리를 구하시오. 또한, xz 평면 위에 임의로 주어진 곡선과 원S 사이의 최단거리를 구하는 방법을 생각해 보시오. [5]

5) 서울대 2003 수시전형

예시 답안

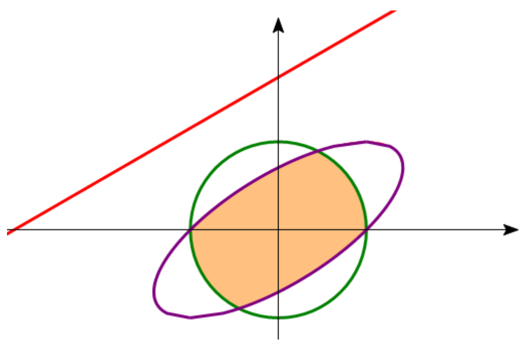
문제 1

(1)

n의 모든 양의 약수를 원소로 갖는 집합을 $A=\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$라 하면, $\frac{n}{p_i} \in A$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 이다. 따라서 $\left\{\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}, \cdots, \frac{n}{p_m}\right\}=\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$이 성립한다. 그러므로 $\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_m}=p_1+p_2+\cdots+p_m=2n$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}=2$이다.

(2)

주어진 영역을 그래프로 표시하면 그림과 같다



점 $\mathrm{P}=\left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)$의 자취가 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\sqrt{3}$이고 그림의 직선과 같을 때 점 $\mathrm{P}=\left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)$에서 영역까지 거리는 영역에 접하는 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$인 직선과 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\sqrt{3}$ 위의 임의의 점과의 거리와 같다. 주어진 영역에 접하는 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$인 직선을 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+b$라고 하고 $(x-y)^2+y^2=1$에 대입하여 판별식을 사용하여 b를 구하면 $\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}$이 된다. 이때 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\sqrt{3}$ 위의 점 $(0, \sqrt{3})$을 잡아 구한 직선과의 거리를 구하면 거리$(d)=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}}=\dfrac{3+\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}$ 이다.

(3)

$x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$에서 $y=\sqrt[2n+1]{1-x^{2n+1}}$ 이다. $-1<x_0<1$인 x_0에 대해

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1-x_0^{2n+1}}=1$이고 $x_0=-1$일 때도 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1-(-1)^{2n+1}}=1$이므로

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$의 그래프는 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ -1)$을 잇는 ㄱ 모양에 가까워진다.

$x_0<-1$인 x_0에 대해 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1-x_0^{2n+1}}=y_0$에서

$$\ln y_0=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+(-x_0)^{2n+1})}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-x_0)^{2n+1}\ln(-x_0)\times 2}{1+(-x_0)^{2n+1}}}{2}=\ln(-x_0)$$ 이므로 $y_0=-x_0$

이다. $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$은 $y=x$에 대해 대칭이므로 $x_0>1$인 x_0에 대해서도 $y_0=-x_0$이다. 이상을 정리하면 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$의 그래프는 아래와 같다.

$|x|\le 1$일 때, $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ -1)$을 잇는 ㄱ 모양의 선분

$|x|>1$일 때, $y=-x$에 매우 가까워진다.

그러므로 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$, $y=-x$, $x=-2007$, $x=2007$에 의해 둘러싸인 영역의 면적은 꼭짓점이 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ -1)$인 삼각형의 넓이와 같으므로 2이다.

x의 구간을 나누어 $n\to\infty$일 때의 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$의 그래프를 그려보자.

㈎ $|x|<1$ 인 경우 : $\lim\limits_{n\to\infty} y^{2n+1}=1$이므로 $y=1$이다.

㈏ $x=1$ 인 경우 : $\lim\limits_{n\to\infty} y^{2n+1}=0$이므로 $|y|<1$

㈐ $x=-1$ 인 경우 : $\lim\limits_{n\to\infty} y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{2}=1$

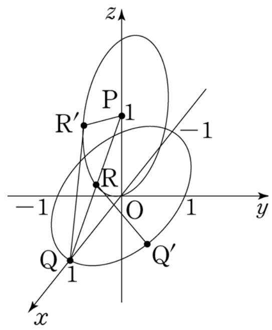
㈑ $|x|>1$인 경우 : $\lim\limits_{n\to\infty} y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1-x^{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{-x^{2n+1}}=-x$이다.

따라서, $n\to\infty$일 때의 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$의 그래프와 x축, $y=-x$, $x=-2007$, $x=2007$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이는 2007^2+1이다.

추가 질문

(1) 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 xy평면$(z=0)$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{P}'(a,\ b,\ 0)$이라 하고, 선분 $\mathrm{P}'\mathrm{O}$와 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 공간의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 S까지의 최단 거리이다.

(2)



그림과 같이 $P(0,\,0,\,1)$, $Q(1,\,0,\,0)$이라 하고, $\overline{PQ}$와 원 T가 만나는 점을R라 하면 $\overline{RQ}$가 원 T와 S 사이의 최단 거리이다. 왜냐하면 그림에서 원T 위의 한 점을R'이라 하면$\triangle PR'Q$에서 $\overline{RQ} \leqq \overline{R'Q}$

또, 원 S 위의 한 점을Q', 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$이라 하고, $\overline{PQ'}$과 구가 만나는 점을 Q''이라 하면 $\overline{RQ}=\overline{Q'Q''}$이므로$\triangle PRQ'$에서 $\overline{Q'Q''} \leqq \overline{RQ'}$

$$\therefore \overline{RQ} \leqq \overline{RQ'}$$

(3)

타원 위의 임의의 점 $P(x,\,0,\,z)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(x,\,0,\,0)$이다. 이 때, $\overline{PH}^2=z^2=1-\dfrac{x^2}{4}$이다.

점 H에서 원점에 그은 직선이 원 S와 점 H에서 가까운 곳에서 만나는 점을 Q라 하면 $\overline{HQ}=\left|\,|x|-1\,\right|$

원 S 위의 임의의 점을 Q'이라 하면 $\overline{HQ} \leqq \overline{HQ'}$이고,

$\triangle PHQ$, $\triangle PHQ'$은 모두 직각삼각형이므로 $\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HQ}^2}$이 최소 거리가 된다.

$$\therefore \overline{PQ}^2=\overline{PH}^2+\overline{HQ}^2=1-\frac{x^2}{4}+\left|\,|x|-1\,\right|^2$$

$$=\frac{3}{4}\left(|x|-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

따라서 $\overline{PQ}$는 $|x|=\dfrac{4}{3}$일 때 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$인 최소 거리를 갖는다.

일반적으로, xz평면 위의 임의의 곡선 위의 점 $P(x,\,0,\,z)$에서 x축에 내린 수선의 발인$H(x,\,0,\,0)$에서 원 S까지의 최단 거리 $\overline{HQ}$를 구하여 $\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HQ}^2}$의 최솟값을 구하면 xz평면 위의 주어진 곡선과 원 S 사이의 최단 거리가 된다.

12 한양대학교

I 한양우수과학인 수리 사고력 평가 순서 및 유의사항(2012학년도 기준)

1. 사고력 평가 지필 시험 소개

평가 관련	내용	비 고
평가 형식	• 전공 교과형 지필 평가 수학(2문항 : 소문항 2~3개)	시간 : 120분

⇩

평가내용	• 고등학교 교과과정의 수학에 속하는 개념의 정확한 이해와 고등학교 수학을 통해 습득한 논리적 추론능력을 평가한다. • 각 문제마다 하나의 주제를 중심으로 서로 연관되어 있는 다수의 소문항을 제시함으로써 논리적 추론 능력을 효율적으로 평가한다. • 해결을 위해서는 창의적 발상이 필요한 질문이 포함된다. 단순히 주입식으로 수학을 학습한 것이 아니라 스스로 문제를 해결하는 능력을 키운 학생들이 해결할 수 있는 문제가 되도록 함으로써 창의적 사고력을 평가한다.	희망 과학은 원서접수 시 선택

2. 유의 사항

내용	세부 설명
• 고사장 및 사고력 평가 관련 숙지	고사장 위치 및 사고력 평가 관련 내용 등을 숙지하고, 고사장 위치는 홈페이지에서 조회한 후, 잘 기록해 두시기 바랍니다.
• 수험표 미지참자 사고력 평가 참여 불가	수험표가 없는 학생은 진행요원에게 즉시 알려주시기 바라며, 개인신분 확인을 위하여 반드시 신분증을 지참해 주시기 바랍니다.
• 이름표 부착	면접 시 사용될 이름표는 면접이 시작되기 전에 배부해 드립니다. 면접위원이 잘 볼 수 있도록 부착하시기 바랍니다.
• 휴대전화 사용 절대 금지	휴대전화는 전원을 끄고 면접시작 전에 진행요원에게 맡겨 둡니다.

3. 동점자 처리기준

순위	기준
1	수리사고평가 성적 우위자
2	서류평가 성적 우위자
3	학생부 수학 교과 성적 우위자

Ⅱ 연도별 기출문제

2013 모의 수시 1차 의예과 외

문제 1

모든 자연수 n에 대하여 $S_n < S_{n+1}$이면서 $S_n < M$ 인 실수 M 이 존재하면 $\{S_n\}$은 수렴하고 그 수렴하는 값은 M보다 작거나 같다.

$x \geq 1$인 범위에서 다음 조건 (가)와 (나)를 연속함수 $f(x)$가 있을 때,
(가) $f(x) > 0$
(나) $1 \leq x < y$ 에 대하여 $f(x) > f(y)$

1. 자연수 n에 대하여 $A_n = \int_1^n f(x)dx$일 때, 다음 두 명제는 동치임을 설명하시오.

   명제 1 : 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$는 수렴한다.

   명제 2 : $\lim_{n \to \infty} A_n$은 수렴한다.

2. 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\{\ln(k+1)\}^2}$이 수렴함을 설명하시오.

문제 2

f와 g는 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 정의된 연속함수이고, 폐구간 $[0,\ a]$의 임의의 원소 x에 대하여, 다음을 만족한다. $f(a-x) = f(x)$, $g(x) + g(a-x) = k$(단, k는 실수)

1. $\int_0^a f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}k\int_0^a f(x)dx$임을 보이시오.

2. 정적분 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 값을 구하시오.

선생님 클리닉

1. 무한급수의 수렴, 발산 여부를 적분판정법을 통해 알아보는 것으로 문제에서 주어진 단조수렴정리로 엄밀히 증명해본다.
2. $t=a-x$로 치환하여 적분을 간단히 할 수 있도록 주어진 식을 변형해 본다.

관련 학습

1. 단조수렴정리

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$(또는 $a_n > a_{n+1}$)인 단조수열이 수렴하기 위한 필요충분조건은 수열 $\{a_n\}$이 유계인 것이다.

2. 무한급수의 적분판정법

함수 $f(x)$가 구간 $[1, \infty)$에서 연속이면서 감소함수이고, $f(x) \geq 0$이며 $k=1,2,3,\cdots$일 때, $f(k)=a_k$라 하자. 그러면

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \ : \text{수렴} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ : \text{수렴}$$

추가 질문

[제시문]

함수 $f(x)$가 구간 $[1, \infty)$에서 연속이면서 감소함수이고, $f(x) \leq 0$일 때, $f(k)=a_k(k=1,2,3,\cdots)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \ : \text{수렴} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ : \text{수렴}$$

제시문을 적용하여 다음 급수의 수렴, 발산 여부를 판정하여라.

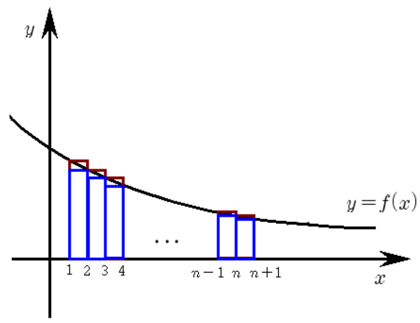
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

예시 답안

문제 1

(1)

$\lim_{n\to\infty} A_n = \alpha$ (α는 실수) 라고 가정하고 $\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n$이라 두자.



그러면 $S_{n+1} = S_n + f(n+1) > S_n$ 이고 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^n f(x)dx < f(1) + \alpha$이다.

따라서 <제시문>에 의해서 수열 $\{S_n\}$은 수렴한다. 즉, 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$는 수렴한다.

역으로, 이제 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ (M은 실수)이라고 가정하자. 그러면

$A_{n+1} = A_n + \int_n^{n+1} f(x)dx > A_n$ 이고 $A_n \le f(1) + f(2) + \cdots + f(n) < \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$이므로 <제시문>에 의해서 수열 $\{A_n\}$은 수렴한다.

(2)

$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\{\ln(x+1)\}^2}$ 이라 두면 $x \ge 1$인 범위에서 $f(x) > 0$ 이다.

또한, $1 \le x < y$ 이면 $1 < x+1 < y+1$, $0 < \ln(x+1) < \ln(y+1)$ 이 성립한다.

그러므로 $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{y+1} > 1$ 과 $\dfrac{1}{\{\ln(x+1)\}^2} > \dfrac{1}{\{\ln(y+1)\}^2}$ 에 의해 $\dfrac{1}{(x+1)\{\ln(x+1)\}^2} > \dfrac{1}{(y+1)\{\ln(y+1)\}^2}$ 이 성립한다. 그러므로 $1 \le x < y$ 에 대하여 $f(x) > f(y)$이다.

한편, $A_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \dfrac{1}{(x+1)\{\ln(x+1)\}^2}dx = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \dfrac{1}{t^2}dt = \dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ 이

므로 $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{\ln 2}$ 이고, 따라서 (1)의 결과에 의해서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\{\ln(k+1)\}^2}$ 은 수렴한다.

문제 2

(1)

$f(a-x) = f(x)$, $g(x)+g(a-x) = k$이므로 $\int_0^a f(x)\{g(x)+g(a-x)\}dx = k\int_0^a f(x)dx$이다. 이를 $a-x=t$로 치환하면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\int_0^a f(x)\,g(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(a-t)\,g(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,g(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,g(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\{g(x)+g(a-x)\}dx &= \int_0^a f(x)g(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,g(a-x)\,dx \\ &= 2\int_0^a f(x)g(x)\,dx \\ &= k\int_0^a f(x)dx\end{aligned}$$

그러므로 $\int_0^a f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}k\int_0^a f(x)dx$ 이다.

(2)

$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, $g(x) = x$로 두자. 그러면 f와 g는 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 연속함수이다. 또한, 닫힌구간 $[0, \pi]$의 임의의 원소 x에 대하여

$f(\pi-x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)^2} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = f(x)$, $g(x)+g(\pi-x) = x+(\pi-x) = \pi$ 이 성립한다. 그러므로 (1)의 결과에 의해서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt \qquad (\cos x = t\text{로 치환}) \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta \qquad (t = \tan\theta\text{로 치환}) \\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

추가 질문

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$이라 하자.

$f(x)>0$인 연속함수이고 $k\geq 1$일 때, $f(k)=\dfrac{1}{1+k^2}=a_k$이라 하자. 또한 $x\in(0,\infty)$일 때,

$$f'(x)=(-1)(1+x^2)^{-2}(2x)<0$$

이므로 $f(x)$는 감소함수이고, 이는 제시문의 조건을 모두 만족한다.

따라서, 다음과 같이 이상적분으로 무한급수의 수렴, 발산여부를 판정해보면

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{R\to\infty}(\tan^{-1}R-\tan^{-1}0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

로 수렴한다.

따라서, 무한급수 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}$도 수렴한다.

2013 모의 수시 1차 의예과

문제 1

모든 자연수 n에 대하여 $S_n < S_{n+1}$이면서 $S_n < M$ 인 실수 M이 존재하면 $\{S_n\}$은 수렴하고 그 수렴하는 값은 M보다 작거나 같다.

$x \geq 1$인 범위에서 다음 조건 (가)와 (나)를 연속함수 $f(x)$가 있을 때,
(가) $f(x) > 0$
(나) $1 \leq x < y$ 에 대하여 $f(x) > f(y)$

1. 자연수 n에 대하여 $A_n = \int_1^n f(x)dx$일 때, 다음 두 명제는 동치임을 설명하시오.

명제 1 : 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$는 수렴한다.

명제 2 : $\lim_{n\to\infty} A_n$은 수렴한다.

2. 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\{\ln(k+1)\}^2}$이 수렴함을 설명하시오.

문제 2

아래 제시된 자연수 m, n에 대하여 정의되는 세 종류의 무한수열에 대하여 문제에 답하시오.

가. 무한수열 $\{a_n\}$은 $a_1 \neq 0, a_2 = 3, a_m a_n = a_{n+m-1} + a_{n-m+1}$을 만족한다.
(단, $n \geq m$)

나. 무한수열 $\{b_n\}$은 $b_1 = 1, b_2 = 1, b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$을 만족한다.

다. 무한수열 $\{c_n\}$은 $c_1 = 2, c_2 = 1,\ c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$을 만족한다.

1. 모든 자연수 $m(\geq 2)$, n에 대하여 무한수열 $\{b_n\}$은 관계식 $b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$이 성립함을 보이시오.

2. 모든 자연수 n에 대하여 두 무한 수열 $\{a_n\}$과 $\{c_n\}$의 관계식은 $a_n = c_{2n-1}$임을 보이시오.

선생님 클리닉

제시된 조건을 바탕으로 적분판정법을 사용하여 무한급수의 값이 수렴함을 증명하는 문항이다. 적분판정법의 내용이 다소 어렵긴 하지만 문제내에서 주어진 조건을 정확하게 이해한 후 문제에 적용한다면 문제의 흐름을 순조롭게 따라갈 수 있을 것이라 생각된다.

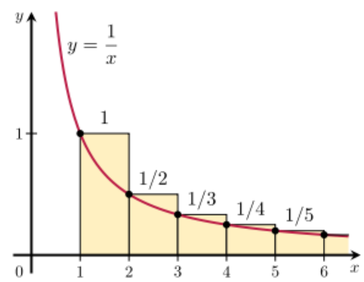
관련 학습

적분판정법(Integral test)이란 음이 아닌 항을 가지는 무한급수의 수렴성을 판정하는 기법 중의 하나이다. 적당한 양의 정수 N 이 있고, 구간 $[N, \infty)$ 에서 적분 가능한 음이 아닌 단조 감소(monotone decreasing) 함수 f가 주어져 있을 때, 무한급수 $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$가 수렴하는지 판정하고자 한다.

이 때, 적분값 $\int_{N}^{\infty} f(x)dx$이 유한하다면 위 무한급수는 수렴하게 된다.

마찬가지로, 위 적분값이 발산한다면, 위 무한급수도 발산하게 된다.

기하학적으로, 무한급수를 계산한 값은 함수 $f(x)$ 그래프의 아래쪽을 덮는 직사각형들의 면적의 총합이 된다. 그러므로 그 직사각형들의 일부에 포함되는 그래프의 아래쪽 면적(적분)값이 발산한다면 무한급수도 발산하게 되는 것이다.



추가 질문

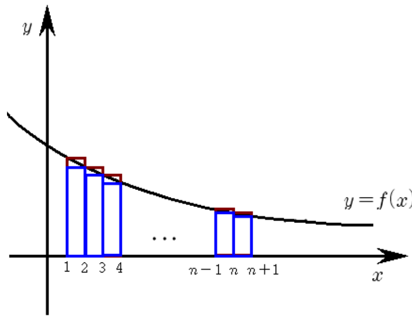
$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$가 수렴함을 보여라.

예시 답안

문제 1

(1)

$\lim_{n\to\infty} A_n = \alpha$ (α는 실수) 라고 가정하고 $\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n$ 이라 두자.



그러면 $S_{n+1} = S_n + f(n+1) > S_n$ 이고 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^n f(x)dx < f(1) + \alpha$이다.

따라서 <제시문>에 의해서 수열 $\{S_n\}$은 수렴한다. 즉, 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$는 수렴한다.

역으로, 이제 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ (M은 실수)이라고 가정하자. 그러면

$$A_{n+1} = A_n + \int_n^{n+1} f(x)dx > A_n \text{ 이고 } A_n \le f(1) + f(2) + \cdots + f(n) < \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$$

이므로 <제시문>에 의해서 수열 $\{A_n\}$은 수렴한다.

(2)

$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\{\ln(x+1)\}^2}$ 이라 두면 $x \ge 1$인 범위에서 $f(x) > 0$ 이다.

또한, $1 \le x < y$ 이면 $1 < x+1 < y+1$, $0 < \ln(x+1) < \ln(y+1)$ 이 성립한다.

그러므로 $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{y+1} > 1$ 과 $\dfrac{1}{\{\ln(x+1)\}^2} > \dfrac{1}{\{\ln(y+1)\}^2}$ 에 의해

$$\frac{1}{(x+1)\{\ln(x+1)\}^2} > \frac{1}{(y+1)\{\ln(y+1)\}^2}$$

이 성립한다. 그러므로 $1 \le x < y$ 에 대하여 $f(x) > f(y)$이다.

한편, $A_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \dfrac{1}{(x+1)\{\ln(x+1)\}^2} dx = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \dfrac{1}{t^2} dt = \dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ 이

므로 $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{\ln 2}$ 이고, 따라서 (1)의 결과에 의해서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\{\ln(k+1)\}^2}$ 은 수렴한다.

문제 2

(1)

$m \geq 2$라고 하고 $b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1} \cdots\cdots$① 이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하자.

(i) $b_{m+1} = 1\cdot b_m + 1\cdot b_{m-1} = b_2 b_m + b_1 b_{m-1}$이므로 $n=1$일 때 ①식이 성립한다.

(ii) $n \leq k$인 자연수 n에 대하여 ①식이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$b_{m+k} = b_{k+1}b_m + b_k b_{m-1}, \quad b_{m+k-1} = b_k b_m + b_{k-1}b_{m-1}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} b_{m+k+1} &= b_{m+k} + b_{m+k-1} = b_{k+1}b_m + b_k b_{m-1} + b_k b_m + b_{k-1}b_{m-1} \\ &= (b_{k+1} + b_k)b_m + (b_k + b_{k-1})b_{m-1} \\ &= b_{k+2}b_m + b_{k+1}b_{m-1} \end{aligned}$$

이 성립한다.

즉, $n=k+1$일 때도 ①식이 성립한다.

따라서 모든 자연수 $m(\geq 2)$, n에 대하여 관계식 $b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$이 성립한다.

다른풀이

$F_0 = 0, F_1 = 1$으로 주고 모든 자연수 n에 대하여 관계식 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$이 성립한다고 하면 $b_n = F_n$이다. 그리고 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이라 하면, 다음이 성립한다.

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_k & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_{k-2} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} F_{k-1} & F_{k-2} \\ F_{k-2} & F_{k-3} \end{pmatrix} = \cdots = A^{k-1}\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = A^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^k,$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+m} & F_{n+m-1} \\ F_{n+m-1} & F_{n+m-2} \end{pmatrix} &= A^{n+m-1} = A^n A^{m-1} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_m & F_{m-1} \\ F_{m-1} & F_{m-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} & F_{n+1}F_{m-1} + F_n F_{m-2} \\ F_n F_m + F_{n-1}F_{m-1} & F_n F_{m-1} + F_{n-1}F_{m-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서, $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1}$, 즉, $b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$ 이 성립한다.

(2)

식 $a_m a_n = a_{n+m-1} + a_{n-m+1}$에 $m=1$, $n=2$을 대입하면 $a_1 a_2 = a_2 + a_2$, $3a_1 = 6$,

$a_1=2$. $c_1=2$이므로 $n=1$일 때, 식 $a_n=c_{2n-1}$은 성립한다. $n\le k$인 자연수 n에 대하여 이 식이 성립한다고 하자. 그러면 $a_2a_k=a_{k+2-1}+a_{k-2+1}$이므로

$a_{k+1}=a_2a_k-a_{k-1}$이다. 한편,

$$\begin{aligned} a_2a_k-a_{k-1} &= 3c_{2n-1}-c_{2n-3}=c_{2n-1}+c_{2n-1}+c_{2n-1}-c_{2n-3} \\ &= c_{2n-1}+c_{2n-1}+(c_{2n-2}+c_{2n-3})-c_{2n-3}=c_{2n-1}+(c_{2n-1}+c_{2n-2}) \\ &= c_{2n-1}+c_{2n}=c_{2n+1} \end{aligned}$$

그러므로 $a_{k+1}=c_{2n+1}$이고, 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=c_{2n-1}$이다.

추가 질문

$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$가 수렴함을 증명하기 위해 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 $f(x)=xe^{-x^2}$을 생각하자. 그러면 구간 $[1,\ \infty)$의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. 그리고 구간 $[1,\ \infty)$의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)\le 0$이므로 감소함수이다.

$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^{\infty} e^{-u}du=\dfrac{1}{2e}<\infty$이므로 적분값이 유한하기 때문에 무한급수

$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$는 수렴한다.

2013 수시 1차 학업우수자

문제 1

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1은 1, 둘째항 a_2는 2이고, 이웃하는 세 항 사이의 관계는 다음과 같이 행렬로 주어진다.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}, n \geqq 2$$

1. 이차 정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $\det(A) = ad - bc$라고 정의하면, 모든 자연수 n에 대해 $\det(A^n) = \{\det(A)\}^n$이 성립함을 보이시오.(단, A^n은 행렬 A의 n개의 곱인 행렬이다.)

2. 문제 1의 결과를 이용해서 모든 $n \geq 1$에 대해 등식 $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$이 성립함을 보이시오.

3. 문제 2의 결과를 이용해서 수열 $\left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$의 극한이 존재함을 보이고, 그 값을 구하시오.

문제 2

아래 제시된 자연수 m,n에 대하여 정의되는 세 종류의 무한수열에 대하여 문제에 답하시오.

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에 속하는 임의의 두 수 x_1,x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 증가한다고 하고 $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 감소한다고 한다.

1. 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 증가하고 함수 $g(x)$는 구간 $[a,b]$에서 감소할 때, 만약 $f(x)$와 $g(x)$의 함숫값이 항상 양수이면 부등식 $f(a)g(b)\le f(x)g(x)\le f(b)g(a)$가 구간 $[a,b]$에 속하는 모든 x에 대하여 성립함을 설명하시오.

2. 구간 $[0,1]$에 속하는 임의의 x에 대하여 부등식 $1\le \dfrac{x+1}{2^x}\le 2$가 항상 성립함을 설명하시오.

3. 방정식 $x\cos x=2$가 구간 $\left[\dfrac{(n-1)\pi}{4},\dfrac{n\pi}{4}\right]$에서 해를 갖게 되는 10이하의 자연수 n을 모두 구하고 그 이유를 설명하시오.

선생님 클리닉

1. 모든 자연수에 성립하는 명제를 수학적 귀납법에 의해 증명을 해보고, 증명한 성질을 활용하여 수열의 점화식을 세워 극한의 존재성을 알아본다.
2. (1)의 증명을 통해 주어진 함수를 증가함수와 감소함수의 곱으로 보면 함숫값의 범위를 구할 수 있으므로 중간값 정리를 통해 해의 존재성을 알아볼 수 있다.

관련 학습

1. 수학적 귀납법

수학적 귀납법은 수학에서 어떤 주장이 모든 자연수에 대해 성립함을 증명하기 위해 사용되는 방법이다. 무한개의 명제를 함께 증명하기 위해, 먼저 '첫 번째 명제가 참임을 증명'하고, 그 다음에는 '명제들 중에서 어떤 하나가 참이면 언제나 그 다음 명제도 참임을 증명'하는 방법으로 이루어진다.

일반적으로 자연수의 집합 N의 부분집합을 S라 할 때, 두 조건

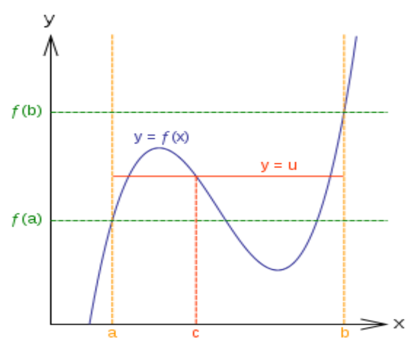
(1) $1 \in S$

(2) $k \in S$이면 $k+1 \in S$ 을 만족하면 $N=S$이다.

2. 중간값 정리

중간값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 실수 l에 대하여 $f(c)=l$인 c가 닫힌구간 $[a, b]$에 적어도 하나 존재한다.



추가 질문

$a>3$이고 수열 $\{x_n\}$이 $x_1=a, x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2x_n-3}$이다.

(1) $x_n>3$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$임을 증명하여라.

(2) $x_{n+1}<3+\dfrac{1}{2^n}(a-3)$임을 증명하여라.

(3) $n \geq \log_2(a-3)$일 때, $x_{n+1}<4$임을 증명하여라.

예시 답안

문제 1

(1)

수학적 귀납법을 이용한다.

$n=1$이면 $\det(A^1)=\det(A)$이므로 등식이 성립한다.

$n\geq 2$일 때, $n=k$ 이면 등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때도 성립함을 보이자.

$A=\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$, $A^k=\begin{pmatrix} p\,q \\ r\,s \end{pmatrix}$라 하면, $\det(A)=ad-bc$이고 가정에 의해 $\det(A^k)=ps-qr$이다.

따라서, 다음 식이 성립하고 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\det(A^{k+1}) &= \det(A\,A^k)=\det\left(\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p\,q \\ r\,s \end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}\right) \\ &= (ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr) \\ &= (ad-bc)(ps-qr) \\ &= \det(A)\{\det(A)\}^k=\{\det(A)\}^{k+1}\end{aligned}$$

(2)

행렬을 이용한 수열 $\{a_n\}$의 표현으로부터

$\begin{pmatrix} a_{n+2}\,a_{n+1} \\ a_{n+1}\;\;a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}^{n+1}$ 이 성립한다.

여기서 (문제1)의 결과에 의해 $\det\left(\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}\right)^{n+1}=\left\{\det\left(\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}\right)\right\}^{n+1}=(-1)^{n+1}$이 성립하므로, $a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2=\det\left(\begin{pmatrix} a_{n+2}\,a_{n+1} \\ a_{n+1}\;\;a_n \end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}^{n+1}\right)=(-1)^{n+1}$을 얻는다.

(3)

(문제2)의 등식에 $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$을 대입해서 정리하면,

$a_{n+2}^2-2a_na_{n+1}-a_n^2+(-1)^{n+1}=0$이 되고, 이 등식을 다시 a_{n+1}에 대해 정리하면

$a_{n+1}=a_n\pm\sqrt{2a_n^2+(-1)^n}$ 이다. 이 때 $a_{n+1}>0$이므로 $a_{n+1}=a_n+\sqrt{2a_n^2+(-1)^n}$ 이고,

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1+\sqrt{2+\dfrac{(-1)^n}{a_n^2}}\right\}=1+\sqrt{2}$ 이다.

문제 2

(1)
구간 $[a,b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 다음의 두 부등식
$0 \le f(a) \le f(x) \le f(b), 0 \le g(b) \le g(x) \le g(a)$이 성립하므로, 부등식의 성질에 의해
$f(a)g(b) \le f(x)g(x) \le f(b)g(a)$가 성립한다.

(2)
$f(x) = x+1$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$라 할때, 구간 $[0,1]$에서 $f(x)$는 증가함수이고, $h(x)$는 감소함수이다. 따라서, $\dfrac{x+1}{2^x} = f(x)h(x) \le f(1)h(0) = 2$이다.

한편, 구간 $[0,1]$에서 항상 $0 < g(x) \le f(x)$이므로 $1 \le \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x+1}{2^x}$가 성립한다.

그러므로 구간 $[0,1]$에서 $1 \le \dfrac{x+1}{2^x} \le 2$이 항상 성립한다.

(3)
$f(x) = x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x\cos x$라 하자.

(ⅰ) 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 $h(x) \le \dfrac{\pi}{4} \le 1$이므로, $h(x) = 2$ 는 해를 갖지 않는다.

(ⅱ) 구간 $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $f(x)$는 증가하고 $g(x)$는 감소하므로
$h(x) = f(x)g(x) \le f(\dfrac{\pi}{2})g(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} < 2$ 임을 알 수 있다. 따라서, $h(x) = 2$는 구간 $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 해를 갖지 않는다.

(ⅲ) 구간 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$에서 $h(x) \le 0$이므로 이 구간에서는 $h(x) = 2$는 해를 갖지 않는다.

(ⅳ) 구간 $\left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$에서 $h(\dfrac{3\pi}{2}) = 0$이고 $h(\dfrac{7\pi}{4}) = \dfrac{7\pi}{4\sqrt{2}} > 2$이므로 중간값정리에 의해서 $h(c) = 2$를 만족하는 c가 구간 $\left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right)$에 존재한다. 즉, 이 구간에서 방정식 $h(x) = 2$는 적어도 하나의 해를 가지며 $h(x)$는 증가함수이므로 오직 하나의 해를 갖는다.

(ⅴ) 구간 $\left[\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$에서 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 증가하므로 $h(x)$도 증가한다. 따라서, 이 구간에서 $h(x) \ge h(\dfrac{7\pi}{4}) > 2$이므로 $h(x) = 2$는 해를 갖지 않는다.

(vi) 구간 $\left[2\pi, \frac{9\pi}{4}\right]$에서 $f(x)$는 증가하고 $g(x)$는 감소하므로 $h(x)=f(x)g(x) \geq f(2\pi)g(\frac{9\pi}{4})=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}>2$이므로 이 구간에서 $h(x)=2$는 해를 갖지 않는다.

(vii) 구간 $\left[\frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right]$에서 $h(\frac{9\pi}{4})>2$이고 $h(\frac{5\pi}{2})=0$이므로 중간값 정리에 의해 $h(c)=2$인 방정식의 해를 구간 $\left(\frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right)$에서 갖는다.

이상으로부터 $x \cos x=2$이 구간 $\left[\frac{(n-1)\pi}{4}, \frac{n\pi}{4}\right]$에서 해를 갖게되는 10이하의 자연수 n은 7과 10이다.

추가 질문

(1)

$$x_{n+1}-3=\frac{x_n^2-3(2x_n-3)}{2x_n-3}=\frac{(x_n-3)^2}{2x_n-3}$$

$n=1$일 때, $x_1=a>3$이므로 성립.

$n=k$일 때 $x_k>3$이 성립한다고 가정하면 $x_{k+1}-3=\frac{(x_k-3)^2}{2x_k-3}>0$이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $x_n>3$이 성립한다. 또한 $x_n>3$이므로 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n}{2x_n-3}<1$이 성립한다.

(2)

$$x_{n+1}-3=(x_n-3)\frac{x_n-3}{2x_n-3}<\frac{1}{2}(x_n-3)$$

$\therefore\ x_{n+1}-3<\frac{1}{2^n}(x_1-3)$, 즉, $x_{n+1}<3+\frac{1}{2^n}(a-3)$이다.

(3)

$n \geq \log_2(a-3)$에 의하여 $\frac{1}{2^n}(a-3) \leq 1$이므로 $x_{n+1}<3+\frac{1}{2^n}(a-3) \leq 4$ 성립한다.

2013 수시 1차 한양우수과학인(의예과 외)

문제 1

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1은 1, 둘째항 a_2는 2이고, 이웃하는 세 항 사이의 관계는 다음과 같이 행렬로 주어진다.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix},\ n \geq 2$$

1. 이차 정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $\det(A) = ad - bc$라고 정의하면, 모든 자연수 n에 대해 $\det(A^n) = \{\det(A)\}^n$이 성립함을 보이시오.(단, A^n은 행렬 A의 n개의 곱인 행렬이다.)

2. 문제 1의 결과를 이용해서 모든 $n \geq 1$에 대해 등식 $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$이 성립함을 보이시오.

3. 문제 2의 결과를 이용해서 수열 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$의 극한이 존재함을 보이고, 그 값을 구하시오.

문제 2

(1) 평균값의 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분 가능하면

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a}=f'(c)$$

을 만족하는 c가 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(2) 함수 $f(x)$가 구간 $[0,1]$에서 연속이고 구간 $(0,1)$의 모든 x에 대하여 $f''(x)$가 존재하고 $f''(x) \geq 0$이 성립하며 $f(0)=0, f(1)=0$이면, $f(x) \leq 0$이 구간 $[0,1]$에서 성립한다.

1. 다음으로부터 시작하고 평균값의 정리를 사용하여 제시문 (2)의 증명을 완성하시오.

제시문 (2)의 증명 : 만약 구간 $(0,1)$의 어떤 실수 a에 대해 $f(a)>0$이 성립했다고 하자. 구간 $[0,a]$와 $[a,1]$에서 함수 $f(x)$에 대해 평균값의 정리를 적용하면 $f'(c_1)=\dfrac{f(a)}{a}$인 c_1이 구간 $(0,a)$에 존재하고, $f'(c_2)=-\dfrac{f(a)}{1-a}$인 c_2가 구간 $(a,1)$에 존재한다.

2. 함수 $f(x)$가 다음을 만족한다.

함수 $f(x)$는 구간 $[0,1]$에서 연속이고, 구간 $(0,1)$의 모든 x에 대해 $f'(x)^2+f(x)f''(x) \geq 0$이 성립하고 $f(0)=1, f(1)=2$이다.

구간 $[0,1]$에서 $f(x) \leq \sqrt{3x+1}$이 성립함을 보이시오.

선생님 클리닉

1. 모든 자연수에 성립하는 명제를 수학적 귀납법에 의해 증명을 해보고, 증명한 성질을 활용하여 수열의 점화식을 세워 극한의 존재성을 알아본다.
2. 증명하려고 하는 $f(x) \leq 0$을 부정하여 $f(a)>0$인 a가 구간 $(0,1)$에 존재한다면 어떤 모순이 생기게 될지 주어진 평균값 정리를 이용해 찾아본다.

관련 학습

1. 수학적 귀납법

수학적 귀납법은 수학에서 어떤 주장이 모든 자연수에 대해 성립함을 증명하기 위해 사용되는 방법이다. 무한개의 명제를 함께 증명하기 위해, 먼저 '첫 번째 명제가 참임을 증명'하고, 그 다음에는 '명제들 중에서 어떤 하나가 참이면 언제나 그 다음 명제도 참임을 증명'하는 방법으로 이루어진다.

일반적으로 자연수의 집합 N의 부분집합을 S라 할 때, 두 조건

(1) $1 \in S$

(2) $k \in S$이면 $k+1 \in S$

을 만족하면 $N = S$이다.

2. 평균값 정리

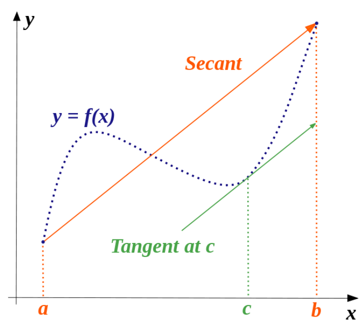
평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고

열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

를 만족하는 c가 a와 b사이에 존재한다.



추가 질문

$a_i > 0 (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$이고 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 1$일 때,

$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$임을 증명하여라.

예시 답안

문제 1

(1)

수학적 귀납법을 이용한다.

$n=1$이면 $\det(A^1)=\det(A)$이므로 등식이 성립한다.

$n\geq 2$일 때, $n=k$ 이면 등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때도 성립함을 보이자.

$A=\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$, $A^k=\begin{pmatrix} p\,q \\ r\,s \end{pmatrix}$라 하면, $\det(A)=ad-bc$이고 가정에 의해 $\det(A^k)=ps-qr$이다.

따라서, 다음 식이 성립하고 $n=k+1$일 때도 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\det(A^{k+1})=\det(A\,A^k)= \det\left(\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p\,q \\ r\,s \end{pmatrix}\right)&=\det\left(\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}\right)\\ &=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)\\ &=(ad-bc)(ps-qr)\\ &=\det(A)\{\det(A)\}^k=\{\det(A)\}^{k+1}\end{aligned}$$

(2)

행렬을 이용한 수열 $\{a_n\}$의 표현으로부터

$\begin{pmatrix} a_{n+2}\,a_{n+1} \\ a_{n+1} \quad a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}^{n+1}$ 이 성립한다.

여기서 (문제1)의 결과에 의해 $\det\left(\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}\right)^{n+1}=\left\{\det\left(\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}\right)\right\}^{n+1}=(-1)^{n+1}$이 성립하므로, $a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2=\det\left(\begin{pmatrix} a_{n+2}\,a_{n+1} \\ a_{n+1} \quad a_n \end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix} 2\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}^{n+1}\right)=(-1)^{n+1}$을 얻는다.

(3)

(문제2)의 등식에 $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$을 대입해서 정리하면,

$a_{n+2}^2-2a_na_{n+1}-a_n^2+(-1)^{n+1}=0$이 되고, 이 등식을 다시 a_{n+1}에 대해 정리하면

$a_{n+1}=a_n\pm\sqrt{2a_n^2+(-1)^n}$ 이다. 이 때 $a_{n+1}>0$이므로 $a_{n+1}=a_n+\sqrt{2a_n^2+(-1)^n}$ 이고,

따라서, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\sqrt{2+\frac{(-1)^n}{a_n^2}}\right\}=1+\sqrt{2}$ 이다.

문제 2

(1)

만약 구간 $(0,1)$의 어떤 실수 a에 대해 $f(a)>0$이 성립한다고 가정하자.

그러면 평균값의 정리를 적용하여 $f'(c_1)=\dfrac{f(a)}{a}$인 c_1이 구간 $(0,a)$에 존재하고, $f'(c_2)=-\dfrac{f(a)}{1-a}$인 c_2가 구간 $(a,1)$에 존재한다.

함수 $f'(x)$의 미분 $f''(x)$가 구간 $(0,1)$에서 항상 정의되므로 $f'(x)$는 같은 구간에서 연속이다. 따라서, 구간 $[c_1, c_2]$에서 함수 $f'(x)$에 평균값의 정리를 적용할 수 있다.

즉, $f''(d)=\dfrac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1}=\dfrac{-f(a)(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{a})}{c_2-c_1}$인 d가 구간 (c_1, c_2)에 존재한다.

그런데 $f(a)>0$이므로 $f''(d)<0$이고, 이것은 구간 $(0,1)$에서 항상 $f''(x)\geq 0$이라는 가정에 모순이다. 따라서, $f(x)\leq 0$이 구간 $[0,1]$에서 성립한다.

(2)

구간 $[0,1]$에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)^2-(3x+1)$이라 정의하자. 그러면

$g(0)=f(0)^2-1=0$, $g(1)=f(1)^2-(3+1)=0$이 성립한다.

또한 구간 $(0,1)$에서 $g''(x)=2\{f'(x)^2+f(x)f''(x)\}>0$이 성립한다.

따라서 문제 (1)에 의해 $g(x)\leq 0$이 구간 $[0,1]$에서 성립한다.

그러므로 $f(x)\leq \sqrt{3x+1}$이 구간 $[0,1]$에서 성립한다.

추가 질문

$n=1$일 때, 주어진 조건에 의하여 $a_1=1$이므로 문제의 식이 성립한다.

$n=k$일 때 문제의 식이 성립한다고 가정하자. 즉, k개 양수의 곱이 1이상일 때, 이 k개의 양수의 합이 k보다 크거나 같다고 가정하자.

$n=k+1$일 때, $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\in R^+$($R^+$는 양의 실수의 집합) 및

$a_1\cdot a_2\cdots a_k\cdot a_{k+1}=1$에 의하여 이 $k+1$개의 양수에서 적어도 하나는 1보다 크거나 같고, 또 적어도 하나는 1보다 작거나 같고 0보다 크거나 같다는 것을 알 수 있다.

$0<a_1\leq 1$, $a_{k+1}\geq 1$이라고 하고 $A=a_1a_{k+1}$이라고 하면 $A, a_2, \cdots, a_k>0$이므로 가정에 의해 다음 식을 만족한다.

$Aa_2a_3\cdots a_k=(a_1a_{k+1})a_2a_3\cdots a_k=a_1a_2\cdots a_{k+1}=1$

따라서, $A+a_2+a_3+\cdots+a_k\geq k$이다.

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} &= (A+a_2+a_3+\cdots+a_k)+a_1+a_{k+1}-a_1a_{k+1}\\
&\geq k+a_1+a_{k+1}-a_1a_{k+1}\\
&=k+1+(a_{k+1}-1)-(a_{k+1}-1)a_1\\
&=k+1+(a_{k+1}-1)(1-a_1)\geq k+1
\end{aligned}$$

그러므로, $n=k+1$일 때 문제의 식이 성립한다.

2013 수리 사고력 평가

문제 1

(가) $x \geq 0$인 실수 x에 대해 $1-x \leq e^{-x}$이다.

(나) $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$인 실수 x 에 대해 $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x$가 성립한다.

(다) 평균이 0, 표준편차 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 곡선 $y=e^{-x^2}$인 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

즉, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 1$이다.

$I_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\{1-(1-x^2)\sin^2\theta)\}^{\frac{n}{2}}d\theta$ 라고 하자.

1. $I_n(x) \leq \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2}d\theta$ $(x\in[-1,1])$를 증명하여라.

2. $I_n(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ $\left(x\in\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]\right)$를 증명하여라.

문제 2

(가) X_k는 k번째 동전던지기 시행에서 앞면이 나오면 1, 뒷면이 나오면 0의 값을 가진다.(단, 각 시행은 독립이고, 앞면, 뒷면이 나올 확률은 각각 $\dfrac{1}{2}$이다.)

(나) $Y_n = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ (a_i는 상수)일 때,

$E(Y_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$이다. (단, $E(X_i)$는 X_i의 기댓값)

1. $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}$일 때, $E(Z_n)$의 값을 구하여라.

2. m이 2이상인 정수이고 $n>m$일 때, $P\left(Z_n \geq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^m}\right)$의 값을 구하여라.

   (단, $P(a)$는 a일 확률임.)

3. m,n이 자연수이고 $n>m$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P\left(\left|Z_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2^m}\right)$의 값을 구하여라.

선생님 클리닉

문제 2는 X_k들이 동전을 던져 나왔으므로 0 또는 1의 값을 가지게 되고, $\frac{X_k}{2^k}$의 값은 0 또는 $\frac{1}{2^k}$중 하나임을 이용해 확률을 계산해보자.

관련 학습

1. 정규분포

평균이 m, 표준편차가 σ인 변량 X가 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$으로 주어지는 확률밀도함수를 가질 때, X는 정규분포를 따른다고 하고 $X\sim N(m,\sigma^2)$으로 표시된다. 이 함수는 이항분포에서 차수(power)를 충분히 크게 한 경우에 어떤 양을 측정해서 얻는 우연오차의 확률분포로부터 생기는 함수로서 통계방법론상 가장 중요한 것이며, 대수법칙도 이 함수의 성질로부터 설명된다. 또한 표본추출조사를 할 때에는 주로 이 함수가 많이 이용되고 있다.

2. 이산확률변수의 평균과 분산

(1) 확률변수 X가 취하는 값이 유한개 또는 자연수 일 때, X를 이산확률변수라 한다.

(2) 확률변수 X가 이산확률변수일 때

X의 값 x_i와 X가 x_i를 취할 확률 $P(X=x_i)$과의 대응관계를 이산확률변수 X의 확률분포라고 하고, $P(X=x_i)$를 확률질량함수라고 한다.

(3) 평균 $E(X)$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot P(x=x_i),\ E(aX+b)=aE(X)+b$$

(4) 분산 $V(X)$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\cdot P(x=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot P(x=x_i)-m^2,\ V(aX+b)=a^2V(X)$$

추가 질문

한 개의 주사위를 계속 던져 k번째에 나온 눈의 수를 3으로 나눈 나머지를 X_k라 한다.
$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n (n=1,2,\cdots)$로 정해진 확률변수 Y_n이 있다.
확률변수 $(Y_n)^m (m=1,2)$의 기댓값을 $E((Y_n)^m)$이라 할 때 다음 물음에 답하여라.
(1) $Y_3 = 3$인 확률을 구하여라.
(2) $E(Y_n)$을 구하여라.
(3) $E((Y_{n+1})^2)$을 $E((Y_n)^2)$과 n으로 나타내어라.
(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{E((Y_n)^2)}{n^2}$을 구하여라.

예시 답안

문제 1

(1)

$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{1-(1-x^2)\sin^2\theta\right\}^{\frac{n}{2}}d\theta$에서 $1-(1-x^2)\sin^2\theta$는 제시문 (가)에 의해

$1-(1-x^2)\sin^2\theta \le e^{-(1-x^2)\sin^2\theta}$가 된다. 그리고 제시문 (나)에 의해

$$1-(1-x^2)\sin^2\theta \le e^{-(1-x^2)\sin^2\theta} \le e^{-(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2}$$

$$(1-(1-x^2)\sin^2\theta)^{\frac{n}{2}} \le e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)\sin^2\theta} \le e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2}$$

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{1-(1-x^2)\sin^2\theta\right\}^{\frac{n}{2}}d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-(1-x^2)\sin^2\theta\right\}^{\frac{n}{2}}d\theta \\ &\le \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2}d\theta \end{aligned}$$

(2)

$$x\in[-1,1]\text{에서 } I_n(x) \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2}d\theta$$

이 성립하므로 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서도 성립한다.

$$\begin{aligned} I_n(x) &\le \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2} d\theta \\ &\le \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2n(1-x^2)}} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{\frac{3n}{2}}} \\ &\le \frac{2}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

다른풀이

$x \in [-1,1]$에서 $I_n(x) \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2} d\theta$이 성립하므로 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서도 성립한다. 그리고 $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$에서는 $\frac{3}{4} \leqq 1-x^2 \leqq 1$의 값을 가지므로

$$I_n(x) \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n}{2}(1-x^2)(\frac{2}{\pi}\theta)^2} d\theta \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{n}{2}\frac{3}{4}(\frac{2}{\pi}\theta)^2} d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{3n}{2\pi^2}\theta^2} d\theta$$

$u = \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{2}\,\pi}\theta$로 치환해보면 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$이므로 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이고,

$$I_n(x) \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{3n}{8}}} e^{-u^2}\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{3n}}du = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3n}}\int_0^{\sqrt{\frac{3n}{8}}} e^{-u^2}du \leqq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3n}} \leqq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

문제 2

(1)

X_k가 1와 0을 가지므로 $P(X_k=1)=\frac{1}{2}$, $P(X_k=0)=\frac{1}{2}$이다. $E(X_k)=\frac{1}{2}$이 된다.

그러므로 $E(Z_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{E(X_k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$

(2)

$Z_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k} \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{2^m}$ 이 되어야 하므로, $k=1$일 때 $X_1=1$이 되어야 한다.

$P(X_1=1)=\frac{1}{2}$이다. $k>m$일 때 X_k가 어떤 값을 가지든 $\sum_{k=1+m}^{n}\frac{X_k}{2^k} \le \frac{1}{2^m}$이므로 $k>m$일 때는 무시하여도 상관없다.

$$P(X_k = 1 \text{ or } \ 0) = 1 \ \ (k > m)$$

$1 < k \le m$에서 X_k 중 적어도 하나만 1을 가지면 된다. 여집합을 생각하여 모두 0인 경우를 제외하면 된다.

$$1 - P(X_2 = 0)P(X_3 = 0)\cdots P(X_m = 0) = 1 - \frac{1}{2^{m-1}}$$

그러므로 $P\left(Z_n \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{2^m}\right)$의 확률은 $\frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2^{m-1}}) \times 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^m}$

(3)

$Z_n \ge \frac{1}{2}$일 때와 $Z_n < \frac{1}{2}$두 경우를 나누어 생각 할 수 있다.

$Z_n \ge \frac{1}{2}$일 경우 $X_1 = 1$이 되어야 한다.

$$\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k} - \frac{1}{2}\right| = \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{X_k}{2^k}\right| = \sum_{k=2}^{n} \frac{X_k}{2^k} < \frac{1}{2^m}$$

이 되어야 한다. $k > m$에 대해 X_k가 어떤 값을 가져도 상관이 없고 $1 < k \le m$에 대해 $X_k = 0$을 가져야 한다.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2^m}\right) = P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 0) \cdot P(X_4 = 0) \cdots P(X_m = 0) = \frac{1}{2^{m-1}}$$

$Z_n < \frac{1}{2}$일 경우 $X_1 = 0$이 되어야 한다. 그리고 $\frac{1}{2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}$이 된다.

$$\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k} - \frac{1}{2}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 - X_k}{2^k}\right|$$
$$< \frac{1}{2^m}$$

이 되어야 한다. $k > m$에 대해 X_k가 어떤 값을 가져도 상관이 없고 $1 < k \le m$에 대해 $X_k = 1$을 가져야 한다.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2^m}\right) = P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) \cdot P(X_4 = 1) \cdots P(X_m = 1) = \frac{1}{2^{m-1}}$$

$Z_n \ge \frac{1}{2}$일 때와 $Z_n < \frac{1}{2}$두 경우의 확률역시 $\frac{1}{2}$이므로

총 확률은

$$Z_n \ge \frac{1}{2} \text{ 일 때 } \lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2^m}\right) + Z_n < \frac{1}{2} \text{ 일 때 } \lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2^m}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

추가 질문

(1)

X_k가 취하는 값은 $X_k = 0, 1, 2$

$$P(X_k = 0) = P(X_k = 1)\,P(X_k = 2) = \frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$Y_3 = X_1 + X_2 + X_3 = 3$로 되는 것은 $X_1 \le X_2 \le X_3$일 때,
$(X_1, X_2, X_3) = (0,1,2), (1,1,1)$의 경우이므로 구하는 확률은

$$P(Y_3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 3! + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}$$

(2)

①에서 $E(X_k) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$이므로

$$\therefore E(Y_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n$$

(3)

$Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$이므로

$$(Y_{n+1})^2 = (Y_n)^2 + 2X_{n+1}Y_n + (X_{n+1})^2$$

①에서 $E((X_{n+1})^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

그리고 X_{n+1}과 Y_n은 독립적이므로

$$E(X_{n+1}Y_n) = E(X_{n+1})E(Y_n) = 1 \cdot n = n$$

따라서

$$E((Y_{n+1})^2) = E((Y_n)^2) + 2n + \frac{5}{3}$$

(4)

$$E((Y_n)^2) = E((Y_1)^2) + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ E((Y_{k+1})^2) - E((Y_k)^2) \right\}$$

$$= E((X_1)^2) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(2k + \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}n(3n+2)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{E((Y_n)^2)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{3n}\right) = 1$$

2012 모의 한양우수과학인

문제 1

어떤 구간에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간의 끝점이 아닌 모든 실수 x에 대해 부등식 $f''(x)<0$ 을 만족한다.

1. 직선 $y=cx+d$ 가 곡선 $y=f(x)$ 의 끝점이 아닌 점에서의 접선이면, $f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대해 부등식 $f(x) \le cx+d$가 성립함을 설명하시오.

2. 위 (1)의 부등식을 사용하여 임의의 양의 정수 n 과 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 임의의 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 에 대해 부등식
$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n}\{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\}$$
이 성립함을 설명하시오. 등식이 성립할 조건은 무엇인가?

3. 위 (2)의 부등식을 사용하여 임의의 양의 정수 n 과 임의의 양수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 에 대해 부등식 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$
이 성립함을 설명하시오. 등식이 성립할 조건은 무엇인가?

문제 2

함수 $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,\infty)$는 일대일 대응이고, 다음 등식
$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)},\quad \left(-\frac{\pi}{2}<x,\, y<\frac{\pi}{2}\right)$$을 만족한다.

1. 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$이 점화식 $a_1=a_2=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ (n\ge 2)$을 만족할 때, 임의의 자연수 n에 대하여 관계식 $a_{2n-1}a_{2n+1}=a_{2n}^2+1$이 성립함을 보이시오.

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 위 (1)에서 주어진 수열일 때, 모든 양의 정수 n에 대하여 함수 값 $f\left(f^{-1}\left(\dfrac{1}{a_{2n+1}}\right)+f^{-1}\left(\dfrac{1}{a_{2n+2}}\right)\right)$은 무엇인가?

선생님 클리닉

1. 볼록함수(convex)의 개념을 이해할 수 있다
2. 함수의 증감표를 이용하여 최댓값을 이해할 수 있다.
3. 수학적 귀납법에 대하여 이해할 수 있다.

관련 학습

1. 젠센부등식 : 임의의 양의 정수 n 과 양의 실수 $a_1,\ a_2, \cdots, a_n$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 아래로 볼록함수 이면 (등호는 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 일 때 성립)

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\left\{f\left(a_1\right) + f\left(a_2\right) + \cdots + f\left(a_n\right)\right\}$$

2. 아래로 볼록과 위로 볼록의 개념($f''(x)$ 의 관련된 문항 학습)

3. 수학적 귀납법을 일반적으로 하기 전에 다음과 같은 과정이 중요
$a_1 a_3 = {a_2}^2 + 1$ 을 만족한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} a_3 a_5 &= \left(a_2 + a_1\right)\left(a_4 + a_3\right) \\ &= a_2 a_4 + a_2 a_3 + a_1 a_4 + a_1 a_3 \\ &= a_2 a_4 + a_2 a_3 + a_1 a_4 + {a_2}^2 + 1 \\ &= a_4\left(a_1 + a_2\right) + a_2\left(a_3 + a_2\right) + 1 \\ &= a_4 a_3 + a_2 a_4 + 1 = {a_4}^2 + 1 \end{aligned}$$

추가 질문

1. (1)번 문항을 기하적으로 설명하시오.
2. (1)번 문항에서 $f''(x) > 0$ 일 때 어떻게 되는지 설명하시오.
3. (2)번 문항에서 $f(x)$ 를 $\tan x$ 로 놓고 생각해보시오.

예시 답안

문제 1

(1)

접선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면 $c=f'(t)$이고 $d=f(t)-f'(t)t$이다. 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x)-cx-d$ 라 두자. 그러면 $g'(x)=f'(x)-c$ 이고, $g'(t)=0$이다. 또한, $f''(x)<0$에 의해 $f'(x)$ 가 감소함수이므로 $x>t$ 일 때 $g'(x)<0$, $x<t$ 일 때 $g'(x)>0$ 이다. 따라서 $g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	t	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

따라서, $g(x)$ 의 최댓값은 0 이 되어 $g(x)\le 0$, 즉 $f(x)\le cx+d$이다.

(2)

$m=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$이라 두면 $(m,f(m))$에서의 접선의 방정식 $y=cx+d$ 은 $c=f'(m)$, $d=f(m)-f'(m)m$으로 주어진다. 구간에 속하는 모든 x 에 대해 $f(x)\le cx+d$ 이므로 다음의 부등식이 성립한다.

$$\begin{cases} f(a_1)\le ca_1+d \\ f(a_2)\le ca_2+d \\ \quad\cdots \\ f(a_n)\le ca_n+d \end{cases}$$

그런데,

$$\begin{aligned} f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) &\le (ca_1+d)+(ca_2+d)+\cdots+(ca_n+d) \\ &=c(a_1+a_2+\cdots+a_n)+nd \\ &=f'(m)nm+n(f(m)-f'(m)m) \\ &=nf(m) \end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{1}{n}\{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\}\le f\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$이다.

이 부등식에서 등식이 성립하기 위해서는 모든 $i=1,2,\cdots,n$에 대해 $f(a_i)=ca_i+d$ 가 성립해야 한다. 위 (1)의 논의에 의하면 등식이 성립하는 경우는 $x=m$ 인 경우로, 이는 모든 i 에 대해 $a_i=m$인 경우, 즉, 접선일 때를 의미한다. 같은 의미로 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 을 사용할 수 있고, 따라서 등식이 성립하는 경우는 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 일 때 뿐이다.

(3)

$f(x)=\ln x$ 라 두면 $f(x)$ 는 구간 $(0,\infty)$에서 정의되고 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ 을 만족한다. 따라서 위 (2)에 의해 $\ln\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\dfrac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)$이다.

그런데 $\dfrac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ 이고 함수 $\ln x$는 증가함수이므로

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 이다. 또한, 위 (2)에 의해 등식이 성립하는 경우는 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 일 때 뿐이다.

문제 2

(1)

수학적 귀납법을 사용하여 $a_{2n-1}a_{2n+1}=a_{2n}^2+1(n\geq 1)$ 을 증명하자.

$n=1$인 경우 $a_1a_3=a_1(a_2+a_1)=a_1a_2+a_1^2=1\cdot 1+1^2=2$, $a_1^2+1=1^2+1=2$이므로,

$a_1a_3=a_1^2+1$ 이 성립한다.

$n=k$일 때 성립한다고 가정하자. 즉, $a_{2k-1}a_{2k+1}={a_{2k}}^2+1$ 이라 하면

$$\begin{aligned}a_{2k+1}a_{2k+3}&=(a_{2k}+a_{2k-1})(a_{2k+2}+a_{2k+1})\\&=a_{2k}a_{2k+2}+a_{2k}a_{2k+1}+a_{2k-1}a_{2k+2}+a_{2k-1}a_{2k+1}\\&=a_{2k}a_{2k+2}+a_{2k}a_{2k+1}+a_{2k-1}a_{2k+2}+{a_{2k}}^2+1\\&=a_{2k+2}(a_{2k}+a_{2k-1})+a_{2k}(a_{2k+1}+a_{2k})+1\\&=a_{2k+2}a_{2k+1}+a_{2k}a_{2k+2}+1\\&=a_{2k+2}(a_{2k+1}+a_{2k})+1\\&={a_{2k+2}}^2+1\end{aligned}$$

따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}a_{2n+1}=a_{2n}^2+1$이 성립한다.

(2)

함수 f는 임의의 실수 x, $y\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$에 대하여 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$이 성립하므로, 임의의 자연수 n에 대하여

$$f\left(f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2n+1}}\right)+f^{-1}\left(\frac{1}{a_{2n+2}}\right)\right)=\frac{\frac{1}{a_{2n+1}}+\frac{1}{a_{2n+2}}}{1-\frac{1}{a_{2n+1}}\cdot\frac{1}{a_{2n+2}}}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n+1}\cdot a_{2n+2}-1}$$

$$=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n+1}\cdot(a_{2n+3}-a_{2n+1})-1}$$

$$=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n+1}\cdot a_{2n+3}-a_{2n+1}^2-1}$$

$$=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n+2}^2+1-a_{2n+1}^2-1}$$

$$=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{(a_{2n+2}+a_{2n+1})\cdot(a_{2n+2}-a_{2n+1})}$$

$$=\frac{1}{a_{2n+2}-a_{2n+1}}=\frac{1}{a_{2n}}$$

이다.

추가 질문

1. 함수 $f(x)$가 위로 볼록이므로 항상 $f(x)$의 접선이 함수 $f(x)$보다 크거나 같게 그릴 수 있다.

2. 함수 $f(x)$가 아래로 볼록이므로 젠센의 부등식에 의하여 부등호 방향이 반대로 나타난다.

3. 삼각함수의 덧셈정리를 나타낸 것과 동일하다.

2012 모의 수리 1차 학업우수자

문제 1

어떤 구간에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간의 끝점이 아닌 모든 실수 x에 대해 부등식 $f''(x) < 0$을 만족한다.

1. 직선 $y=cx+d$가 곡선 $y=f(x)$의 끝점이 아닌 점에서의 접선이면, $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대해 부등식 $f(x) \le cx+d$가 성립함을 설명하시오.

2. 위 (1)의 부등식을 사용하여 임의의 양의 정수 n과 $f(x)$의 정의역에 속하는 임의의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대해 부등식

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n}\{(f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n))\}$$

이 성립함을 설명하시오. 등식이 성립할 조건은 무엇인가?

3. 위 (2)의 부등식을 사용하여 임의의 양의 정수 n과 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대해 부등식 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 이 성립함을 설명하시오. 등식이 성립할 조건은 무엇인가?

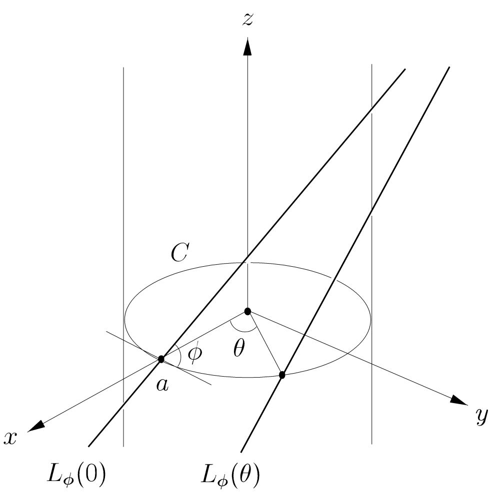
문제 2

반지름 1인 원기둥을 잘라 생기는 한 원을 생각하자. 이 원의 각 점마다 원기둥에 접하고 원과 일정한 각 ϕ를 이루는 직선을 붙이면, 이 직선들 전체는 어떤 곡면을 이룬다. 이 곡면을 S_ϕ로 표시하자. 특히 $\phi = \dfrac{\pi}{2}$이면 이 곡면은 원래의 원기둥과 일치한다. 민재는 다른 각 $\phi\,(0 < \phi < \pi)$가 주어진 경우, 곡면 S_ϕ의 모양을 알아보기 위해 다음의 과정을 생각하였다.

(가) 아래 그림과 같이 xy-평면 안의 단위원 C를 지나는 수직 원기둥을 그린다. 원 C의 한 점 $a = (1, 0, 0)$에서 원기둥과 접하고 xy-평면과 ϕ의 각을 이루는 직선 $L_\phi(0)$를 그린다.

(나) 직선 $L_\phi(0)$을 z-축을 중심으로 각 θ만큼 회전 이동한 직선 $L_\phi(\theta)$를 생각한다. 그러면 곡면 S_ϕ는 $0 \le \theta < 2\pi$인 모든 θ에 대해 $L_\phi(\theta)$위의 모든 점들의 집합이다.

(다) 곡면 S_ϕ를 z축을 포함하는 임의의 평면으로 자르면 어떤 곡선이 얻어진다. 따라서 S_ϕ는 이 곡선을 z-축을 중심으로 회전시킬 때 생기는 곡면이라고 할 수 있다.



1. 직선 $L_\phi(\theta)$의 벡터방정식을 구하고 이를 성분으로 나타내시오.

2. 과정 (다)에서 말한 곡선은 어떤 곡선인지 구체적으로 설명하시오.

3. 서로 다른 두 각 ϕ_1, ϕ_2 $(0 < \phi_1 < \phi_2 < \pi)$에 대해 곡면 S_{ϕ_1}과 S_{ϕ_2}가 동일한 곡면일 수 있는가?

선생님 클리닉

1. 볼록함수(convex)의 개념을 이해할 수 있다
2. 함수의 증감표를 이용하여 최댓값을 이해할 수 있다.
3. 벡터방정식 및 축을 중심으로 하는 회전변환을 이해할 수 있다.

관련 학습

1. 젠센부등식 : 임의의 양의 정수 n 과 양의 실수 $a_1,\ a_2, \cdots, a_n$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 아래로 볼록함수 이면 (등호는 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 일 때 성립)

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)\}$$

2. 아래로 볼록과 위로 볼록의 개념($f''(x)$ 의 관련된 문항 학습)

3. 공간좌표에서

ⅰ) x 축으로 θ 만큼 회전하는 회전변환 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ⅱ) y 축으로 θ 만큼 회전하는 회전변환 : $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

ⅲ) z 축으로 θ 만큼 회전하는 회전변환 : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

추가 질문

1. (1)번 문항을 기하적으로 설명하시오.
2. (1)번 문항에서 $f''(x) > 0$ 일 때 어떻게 되는지 설명하시오.

예시 답안

문제 1

(1)

접선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면 $c=f'(t)$이고 $d=f(t)-f'(t)t$이다. 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x)-cx-d$ 라 두자. 그러면 $g'(x)=f'(x)-c$ 이고, $g'(t)=0$이다. 또한, $f''(x)<0$에 의해 $f'(x)$ 가 감소함수이므로 $x>t$ 일 때 $g'(x)<0$, $x<t$ 일 때 $g'(x)>0$ 이다. 따라서 $g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	t	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

따라서, $g(x)$ 의 최댓값은 0 이 되어 $g(x)\le 0$, 즉 $f(x)\le cx+d$이다.

(2)

$m=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$이라 두면 $(m, f(m))$에서의 접선의 방정식 $y=cx+d$ 은 $c=f'(m)$, $d=f(m)-f'(m)m$으로 주어진다. 구간에 속하는 모든 x 에 대해 $f(x)\le cx+d$ 이므로 다음의 부등식이 성립한다.

$$\begin{cases} f(a_1)\le ca_1+d \\ f(a_2)\le ca_2+d \\ \qquad\cdots \\ f(a_n)\le ca_n+d \end{cases}$$

그런데,

$$\begin{aligned} f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n) &\le (ca_1+d)+(ca_2+d)+\cdots+(ca_n+d) \\ &= c(a_1+a_2+\cdots+a_n)+nd \\ &= f'(m)nm+n(f(m)-f'(m)m) \\ &= nf(m) \end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{1}{n}\{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\}\le f\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$이다.

이 부등식에서 등식이 성립하기 위해서는 모든 $i=1,2,\cdots,n$에 대해 $f(a_i)=ca_i+d$ 가 성립해야 한다. 위 (1)의 논의에 의하면 등식이 성립하는 경우는 $x=m$ 인 경우로, 이는 모든 i 에 대해 $a_i=m$인 경우, 즉, 접선일 때를 의미한다. 같은 의미로 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 을 사용할 수 있고, 따라서 등식이 성립하는 경우는 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 일 때 뿐이다.

문제 2

(1)

임의의 실수 t 에 대하여 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$에서 $\phi=0, \dfrac{\pi}{2}$일 때의 직선의 벡터 방정식은 각각 $L_{\frac{\pi}{2}}(0)$: $x=1$, $y=0$, $z=t$, $L_0(0)$: $x=1$, $y=t$, $z=0$ 이다. 따라서, $L_\phi(0)$는 $L_{\frac{\pi}{2}}(0)$와 $L_0(0)$를 동시에 포함하는 평면 위에 있으며, $L_\phi(0)$의 xy-평면으로의 정사영은 $L_0(0)$이다. 따라서, $L_\phi(0)$는 $L_0(0)$를 ϕ만큼 회전한 직선이다. 따라서 $L_\phi(0)$의 벡터방정식은

$$L_\phi(0):\ x=1,\ y=t\cos\phi,\ z=t\sin\phi$$

이다.

$L_\phi(\theta)$는 $L_\phi(0)$를 z축을 중심으로 θ만큼 회전시켜 얻을 수 있다. 따라서 $L_\phi(\theta)$의 벡터방정식은 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ t\cos\phi\\ t\sin\phi\end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{cases}x=\cos\theta-t\sin\theta\cos\phi\\ y=\sin\theta+t\cos\theta\cos\phi\\ z=t\sin\phi\end{cases}$ 이다.

(2)

직선 $L_\phi(\theta)$에 대한 벡터방정식에서 θ와 t를 소거하면 $x^2+y^2=1+t^2\cos^2\phi=1+z^2\cot^2\phi$이고, 곡면 S_ϕ 상의 임의의 점 (x,y,z)는 위의 방정식을 만족한다.

또한, 이 곡면을 z-축을 포함하는 임의의 평면으로 잘라서 생긴 곡선의 모양은 일정하므로, xz-평면으로 자른 경우를 생각해보자. 곡선의 임의의 점 $(x,0,z)$는 $x^2-z^2\cot^2\phi=1$를 만족하고, 이는 $\cot^2(\phi)\neq 0$이면 xz-평면 위의 쌍곡선의 방정식이다. 따라서, 구하는 곡선은 $0<\phi<\pi$인 ϕ에 대해, $\phi\neq\dfrac{\pi}{2}$이면 쌍곡선이고, $\phi=\dfrac{\pi}{2}$이면 원기둥 안의 마주보는 두 직선이다.

(3)

곡면 S_{ϕ_1}과 S_{ϕ_2}가 동일하다면 ϕ_1과 ϕ_2는 위에서 구한 쌍곡선의 방정식으로부터 $\cot^2\phi_1=\cot^2\phi_2$ 를 만족해야 한다. 이 식을 풀면 $\phi_1+\phi_2=\pi$, 또는 $\phi_2-\phi_1=\pi$를 얻을 수 있다. 하지만 주어진 조건에서 $0<\phi_1<\phi_2<\pi$ 이므로, 두 곡면이 동일할 조건은 $\phi_1+\phi_2=\pi$이다.

추가 질문

1. 함수 $f(x)$ 가 위로 볼록이므로 항상 $f(x)$ 의 접선이 함수 $f(x)$ 보다 크거나 같게 그릴 수 있다.
2. 함수 $f(x)$ 가 아래로 볼록이므로 젠센의 부등식에 의하여 부등호 방향이 반대로 나타난다.

2012 학업우수자 모의 수리 2차 사고력 평가

문제 1

다음 제시문을 활용하여 물음에 답하시오.
평면에 유한개의 직선과 한 원이 주어져 있으면, 주어진 원의 내부에는 주어진 직선 중 어떤 것 위에도 있지 않는 점이 존재한다.

1. 원 O의 내부에 있는 하나 이상의 유한개의 점으로 이루어진 집합을 A라 하자. A에 속한 점들로부터의 거리가 모두 서로 다르게 되는 점이 원 O의 내부에 있음을 설명하시오.

2. 위 1. 에서 A의 원소의 개수가 n이고, k는 n 이하의 자연수라고 하자. A에 속하는 점들 중 내부에 정확히 k개만 포함하는 원이 원 O의 내부에 있음을 설명하시오.

문제 2

다음 제시문을 활용하여 물음에 답하시오.
집합 $S=\left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}: x,y\text{는 실수}\right\}$에서 복소수들의 집합 C로 가는 함수 f를 다음과 같이 정의하자. $f(\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix})=x+iy$ (단, $i^2=-1$)

1. 함수 f가 임의의 두 원소 $A,B\in S$ 에 대해 $f(A+B)=f(A)+f(B)$, $f(AB)=f(A)f(B)$를 만족하는 일대일 대응임을 보이시오. 또한, 이 결과를 사용하여 복소수들의 집합에서 정의된 곱셈에 대해 결합법칙이 성립함을 보이시오.
2. 집합 $S^1=\{A\in S: |A|=1\}$이 행렬의 곱에 닫혀 있음을 보이시오. S의 각각의 원소들은 S^1의 어떤 한 원소의 상수곱으로 나타남을 보이시오 ($|A|$ 는 A의 행렬식을 의미한다).

선생님 클리닉

1. 여집합의 개념(같은 거리에 있는 점들의 모임)을 이해할 수 있다.
2. 일대일 대응의 증명, 복소수 집합에서의 결합법칙, 곱셈에 대한 닫혀있음을 이해할 수 있다.

관련 학습

1. 고정된 두 점에서 같은 거리에 있는 점들의 집합은 그 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선이다.
2. $x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 로 표현되는 복소수의 극형식에서 r 을 $x+yi$ 의 크기라 부른다. 그리고 행렬을 복소수로 대응시킬 때, 행렬식을 복소수의 크기로 대응시키는 문항들을 많이 볼 수 있다.
3. 행렬에서 곱셈의 결합법칙은 항상 성립한다.
4. 2×2 행렬에서 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ 임을 보여줘야 한다.
5. 결국 고급수학에서 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ 는 $n\times n$ 행렬까지 확대되어 나타나고 있다.

추가 질문

2-(2)번에서 S^1 의 어떤 한 상수의 곱으로 나타난다는 것은 무슨 의미를 말하는가?

예시 답안

문제 1

(1)

집합A의 원소 개수가 n개라 하자. n개 중 2개를 선택하여 같은 거리에 존재하는 점의 자취는 두 점을 잇는 선분에 대한 수직이등분선이 된다. 같은 방법으로 총 ${}_n\mathrm{C}_2$ 개의 수직이등분선을 그을 수 있고, 이는 모두 원과 만난다. 따라서, 제시문에 의하면 어떤 수직이등분선 위에도 존재하지 않은 점이 원 내부에 존재 한다. 이 점은 어떤 두 점과도 거리가 같지 않다. 그러므로 A에 속한 점들로부터의 거리가 모두 서로 다르게 되는 점이 원 O의 내부에 존재한다.

(2)
$A=\{a_1,\ a_2,\cdots,a_n\}$, A의 원소가 아닌 점을 p라 하고 원 O의 반지름을 R라 하자.
가정에 의해 $\overline{pa_1}=d_1$, $\overline{pa_2}=d_2$, $\cdots$, $\overline{pa_n}=d_n$ 이라 할 수 있다.

ⅰ) p: 원 O의 중심인 경우
$l=R-d_n(>0)$ 이라 하고,
p를 중심으로 하고 반지름이 $d_{k+1}(k=1,\ 2,\cdots,n-1)$인 원을 그리면, 정확하게 $k(k=1,\ 2,\cdots,n-1)$개의 점을 포함하는 원 O의 내부에 존재한다. 그리고 p를 중심으로 하고 반지름이 $d_n+\dfrac{l}{2}$ 인 원을 그리면 n개의 점을 포함하는 원이 원 O의 내부에 존재한다.

ⅱ) p: 원 O의 중심이 아닌 경우
원의 반지름을 R이라 두고, 원의 중심에서 가장 먼 점까지의 거리를 d라 하자. (점이 유한개이기 때문에 가장 먼 거리가 존재한다.)
그러면, 모든 점이 원의 내부에 존재하므로 $d<R$이 된다. $0<R-d$이 되고, O를 원의 중심, 반지름을 $\dfrac{R-d}{2}$ 인 원 Q를 그리자.
1)번 풀이처럼 모든 직선을 그으면 제시문처럼 직선위에 있지 않고 원 Q 내부에 존재하는 점이 존재하며 원의 중심에서 가장 가까운 점을 q(결국엔 이 점을 p로 정한다.)라 하자. 이 점 q는 직선위에 있지 않으므로 다른 점과 거리가 모두 다르다. 그러므로 ⅰ)과 같은 방법으로 하면 성립한다.

문제 2

(1)
$A,B\in S$ $\left(A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)$라 하자.
$A+B=\begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$ 이므로
$f(A+B)=(a+c)+(b+d)i$, $f(A)+f(B)=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
따라서, $f(A+B)=f(A)+f(B)$
$AB=\begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$ 이므로
$f(AB)=(ac-bd)+(ad+bc)i$, $f(A)f(B)=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
따라서, $f(AB)=f(A)f(B)$

일대일 대응을 보이기 위해서는 전사이면서 일대일 함수임을 보여야 한다.

임의의 $a \in C$, $(a=x+yi)$에 대해서, $a=x+yi=f\left(\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\right)$ 이므로 $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in S$ 이고, 따라서 f는 전사함수이다.

또한, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in S$, $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in S$에 대해, $f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)$ 이면 $a+bi=c+di$ 이다. 이는 복소수의 상등에 의하여 $a=c$, $b=d$ 이므로 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ 이 성립한다.

따라서 일대일 함수이다.

A, B, $C \in S$에 대해

$$\begin{aligned}\{f(A)f(B)\}f(C) &= f(AB)f(C) \\ &= f((AB)C) \\ &= f(A(BC)) \\ &= f(A)f(BC) \\ &= f(A)\{f(B)f(C)\}\end{aligned}$$ 이다.

따라서 위의 제시문에 의하여 복소수들의 집합에서 정의된 곱셈에 대하여 결합법칙이 성립한다.

(2)

A, $B \in S^1$ 에 대하여, $AB \in S$ 이고, $|AB|=|A||B|=1$ 이므로 $AB \in S^1$ 이다.

$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in S$에 대하여, $A=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\,B$

($|B|=1$)로 나타낼 수 있다. 따라서 성립한다.

추가 질문

$\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$에 대응되므로 $a+bi$ 의 극형식 형태이다.

2012 수시 1차 수리 사고력 평가

문제 1

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

함수 $u(x)$가 $x \geq 0$인 범위에서 '$x_1 \leq x_2$이면 $u(x_1) \leq u(x_2)$'를 만족하면

$\lim_{x \to \infty} u(x) = \infty$ 혹은 $\lim_{x \to \infty} u(x) = L$ (L은 어떤 실수)가 성립한다.

함수 $f(x)$가 $x \geq 0$인 범위에서 다음 조건을 만족한다.

① $f(x) \geq 0$이고 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

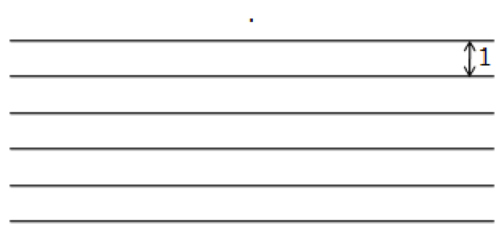
② $f''(x)$가 존재하고 연속이며 $f''(x) \geq f(x)$

이 때 다음이 성립함을 설명하시오.

1. $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$이고 $f'(x) \leq 0$
2. $f(x) \leq f(0)e^{-x}$ [힌트: 함수 $g(x) = e^{-x}\{f'(x) + f(x)\}$를 미분]

문제 2

아래 그림과 같이 마루에 일정한 1의 간격으로 평행선들이 그려져 있다.



1. 둘레의 길이가 1인 원을 마루에 던질 때, 이 원이 어떤 평행선과 만날 확률을 구하시오.
2. 둘레의 길이가 1인 정삼각형을 마루에 던질 때, 이 정삼각형이 어떤 평행선과 만날 확률을 구하시오.
3. 둘레의 길이가 1인 정사각형을 마루에 던질 때, 이 정사각형이 어떤 평행선과 만날 확률을 구하시오.
4. 둘레의 길이가 1인 정n ($n = 5, 6, \cdots$)각형을 마루에 던질 때, 이 정n각형이 어떤 평행선과 만날 확률을 구하시오.

선생님 클리닉

주어진 범위에서 증가하는 함수를 이용하여 도함수의 극한값이 0으로 수렴함을 보이는 문항으로, 깊은 수학적 지식보다는 주어진 조건과 힌트를 이용하여 문제를 해결하는 전략을 세우는 것이 바람직하다.

관련 학습

1. 정적분의 기본 정리

$f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $F'(x) = f(x)$이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. 정적분 함수의 성질

$a \geq b$에 대해 $f(x) \leq g(x)$이면 $\int_b^a f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$

추가 질문

한 변의 길이가 d인 정사각형모양의 격자무늬가 무한히 연속되는 무한평면 위에 길이가 l인 바늘 한 개를 던졌을 때 바늘이 격자라인과 만날 확률을 구하라. (단, $d > l$)

예시 답안

문제 1

(1)

$f''(x) \geq f(x) \geq 0$이므로 $a \geq b$에 대해 $\int_b^a f''(x)dx \geq \int_b^a f(x)dx \geq 0$ 이 성립한다.

즉, $\int_b^a f''(x)dx = f'(a) - f'(b) \geq 0$ 가 되어 $f'(a) \geq f'(b)$ 이고, 제시문에 의해 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ 또는 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = L$ (L은 어떤 실수)가 된다.

먼저, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$인 경우, 어떤 양의 정수 m에 대해 자연수 N이 존재해서 $y > N$ 이면 $f'(y) > m$을 만족해야 한다. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}\{f(x) - f(0)\} = k$ 이 되고,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\{f(x)-f(0)\} &= \lim_{x\to\infty}\int_0^x f'(z)dz = \lim_{x\to\infty}\left\{\int_0^N f'(z)dz + \int_N^x f'(z)dz\right\} \\
&= \lim_{x\to\infty}\int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz \\
&= \int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz \geq \int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x mdz = \infty
\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 이 되어 모순이 된다.

또한, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = L$ (L은 0이 아닌 어떤 실수)라 해보자.

(i) $L > 0$인 경우, $\frac{L}{2}$에 대해 적당한 자연수 N이 존재해서 $y > N$이면 $|f'(y) - L| < \frac{L}{2}$을 만족해야 하므로 $\frac{L}{2} < f'(x) < \frac{3L}{2}$가 된다. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0) = k$ 이 되고,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\{f(x)-f(0)\} &= \lim_{x\to\infty}\int_0^x f'(z)dz = \lim_{x\to\infty}\left\{\int_0^N f'(z)dz + \int_N^x f'(z)dz\right\} \\
&= \lim_{x\to\infty}\int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz \\
&= \int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz \\
&\geq \int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x \frac{L}{2}dz = \infty
\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이 되어 모순이 된다.

(ii) $L < 0$인 경우, $\frac{L}{2}$에 대해 적당한 자연수 N이 존재해서 $y > N$이면 $|f'(y) - L| < \frac{-L}{2}$을 만족해야 하므로 $\frac{3L}{2} < f'(x) < \frac{L}{2}$이다. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)-f(0)=k$ 이 되고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x)-f(0)\} &= \lim_{x\to\infty}\int_0^x f'(z)dz=\lim_{x\to\infty}\left\{\int_0^N f'(z)dz+\int_N^x f'(z)dz\right\}\\ &=\lim_{x\to\infty}\int_0^N f'(z)dz+\lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz\\ &=\int_0^N f'(z)dz+\lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz\\ &\le \int_0^N f'(z)dz+\lim_{x\to\infty}\int_N^x \frac{L}{2}dz=-\infty\end{aligned}$$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이 되어 모순이 된다. 그러므로 $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$이 된다.

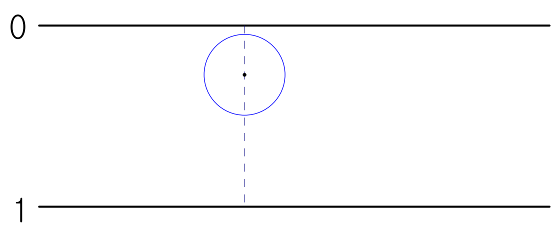
따라서, $\lim_{x\to\infty} f'(x)=L$ (L은 0이 아닌 어떤 실수)인 경우 역시 $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ 이고, $f'(x)$는 증가함수이면서 $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$이므로 $f'(x)\le 0$이다.

(2)

$g'(x)=e^{-x}\{f''(x)+f'(x)\}-e^{-x}\{f'(x)+f(x)\}=e^{-x}\{f''(x)-f(x)\}$이고, $f''(x)\ge f(x)$이므로 $g'(x)\ge 0$이다. 따라서, $a\ge b$에 대해 $0\le \int_b^a g'(x)dx=g(a)-g(b)$이고, $g(b)\le g(a)$ 이다. 또한, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} e^{-x}\{f'(x)+f(x)\}=0$ 이므로 $g(x)$는 증가하면서 0에 수렴하여 $g(x)\le 0$임을 알 수 있다. 따라서, $f'(x)+f(x)\le 0$이므로 $\{e^x f(x)\}'=e^x\{f'(x)+f(x)\}\le 0$ 이 성립하고, $e^x f(x)|_0^y=\int_0^y e^x(f'(x)+f(x))dx\le 0$에서 $e^y f(y)-e^0 f(0)\le 0$이 되어 $f(y)\le e^{-y}f(0)$이 성립한다.

문제 2

1. 둘레의 길이가 1인 원의 반지름은 $\frac{1}{2\pi}$이다. 일정한 1의 간격으로 평행선이 무수히 많으므로 하나의 간격만을 생각해서 확률을 이야기 할 수 있다.



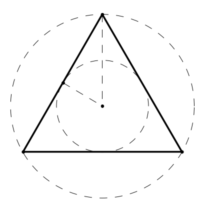
좌우로 이동하는 것을 확률적으로 의미를 가지지 않으므로 평행선 사이에 한 수선을 그어, 그 위에 원의 중심이 존재할 경우만 생각하자. 위쪽 평행선으로 부터 원의 중심까지의 거리 d라 할 때, 원이 평행선과 만나기 위한 조건을 생각해보자.

⑴ $d \le \dfrac{1}{2\pi}$인 경우, 원은 항상 윗 쪽 평행선과 만나게 된다.

⑵ $1-\dfrac{1}{2\pi} \le d \le 1$인 경우, 아래쪽 직선과 만나게 된다.

따라서, $0 \le d \le 1$ 에 대하여 ⑴, ⑵의 두 경우를 d의 범위로 계산하면, 총 $\dfrac{2}{2\pi}=\dfrac{1}{\pi}$이므로, 확률은 $\dfrac{1}{\pi}$이다.

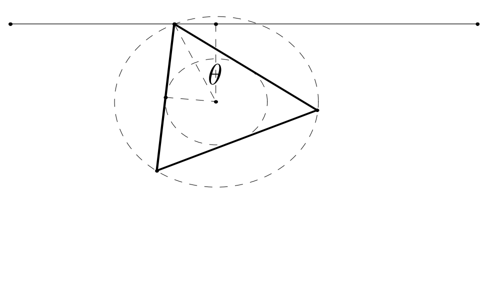
2. 실제 2~4의 풀이 과정은 같다.
둘레가 1인 정삼각형의 경우를 생각해보자.
둘레가 1인 정삼각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{1}{3}$이고, 내접원의 반지름을 r, 외접원의 반지름을 R이라 하자.



내접원과 외접원의 중심은 일치하고 $R=\dfrac{1}{3\cdot 2\sin\dfrac{2\pi}{3\cdot 2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$,

$r=\dfrac{1}{3\cdot 2\tan\dfrac{2\pi}{3\cdot 2}}=\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$이므로, $\dfrac{r}{R}=\cos\dfrac{2\pi}{3\cdot 2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$이다.

1번과 같은 방법으로 생각하자.
원의 중심으로부터 윗쪽 평행선과의 거리를 d라 할 때, 정삼각형이 평행선과 만나기 위한 조건을 생각해보자.
⑴ $0 \le d \le r$ 인 경우, 정삼각형은 항상 위쪽 평행선과 만나게 된다.



⑵ $r \le d \le R$ 인 경우, 삼각형의 회전 각도에 따라 상황이 달라진다. 이 경우, 어떤 꼭짓점 부분이 만나는가와 만나면 어느 각도로 만나냐가 문제가 된다.
 삼각형의 경우 3개 꼭짓점에서 만나므로 정삼각형의 특정한 한 꼭짓점과 원의 중심을 이은 선분이 두 평행선의 한 수선과 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

이 때, $R\cos\theta \ge d$ $\left(-\dfrac{2\pi}{3\cdot 2} \le \theta \le \dfrac{2\pi}{3\cdot 2}\right)$이면 정삼각형은 위쪽 평행선과 만나게 된다. $\cos\theta$은 우함수이므로 $0 \le \theta \le \dfrac{2\pi}{3\cdot 2}$에 대한 경우를 구해서 2배를 해주는 방법을 취할 수 있다. 결국 2π에서 $R\cos\theta \ge d$ $\left(0 \le \theta \le \dfrac{2\pi}{3\cdot 2}\right)$ 인 θ의 범위 내에 2와 3을 곱

해주는 값 부분일 때만 원과 만나게 된다. 이것을 식으로 정리하면 $2\cdot3\cdot\dfrac{Arc\cos\frac{d}{R}}{2\pi}$ 가 된다.

따라서, 두 평행선의 간격에서 만나는 거리를 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^1(\text{거리에 따른 만날 확률})dx$$
$$=\int_0^r 1dx+\int_r^R 3\cdot\frac{Arc\cos\frac{x}{R}}{\pi}dx+\int_R^{1-R}0dx+\int_{1-R}^{1-r}2\cdot3\cdot\frac{Arc\cos\frac{x}{R}}{2\pi}dx+\int_{1-r}^1 1dx$$
$$=2\left(\int_0^r 1dx+\int_r^R 3\cdot\frac{Arc\cos\frac{x}{R}}{\pi}dx\right)$$
$$=2\left(r+\frac{3}{\pi}\int_r^R Arc\cos\frac{x}{R}dx\right)$$
$$=2\left(r+\frac{3R}{\pi}\int_{\frac{r}{R}}^1 Arc\cos y\,dy\right)$$
$$=2\left[r+\frac{3R}{\pi}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}-\frac{r}{R}Arc\cos\frac{r}{R}\right\}\right]$$
$$=2\left\{\frac{1}{6\sqrt{3}}+\frac{3}{\pi}\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}$$

가 된다.

3. 2번의 방식과 상동

4. 2번의 풀이를 이용하면 된다.

둘레가 1인 정n각형의 경우, 한 변의 길이가 $\dfrac{1}{n}$이다. 내접원의 반지름을 r, 외접원의 반지름을 R이라 하면, 내접원과 외접원의 중심은 일치하고,

$R=\dfrac{1}{n\cdot2\sin\frac{\pi}{n}}$, $r=\dfrac{1}{n\cdot2\tan\frac{\pi}{n}}$ 이므로 $\dfrac{r}{R}=\cos\dfrac{\pi}{n}$가 된다.

(2)번과 같은 방법으로 생각하면, 원의 중심과 윗선과의 거리를 d라 할 때,

(1) $0\le d\le r$ 인 경우, 정n각형은 항상 위쪽 평행선과 만나게 된다.

(2) $r\le d\le R$ 인 경우, 정n각형의 회전 각도에 따라 상황이 달라진다.

이 경우, 어떤 꼭짓점 부분이 만나는가와 만나면 어느 각도로 만나냐가 문제가 된다. n각형의 경우 n개의 꼭짓점에서 만나므로 정n각형의 특정한 한 꼭짓점과 원의 중심을 이은 선분이 두 평행선의 한 수선과 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

n각형의 경우 n개 꼭짓점에서 만나고, 각은 $R\cos\theta \geq d$ $\left(-\frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}\right)$이면 만나게 된다. $\cos\theta$은 우함수이므로 범위를 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$을 구해서 2배를 해주는 방법을 취할 수 있다. 결국 2π에서 $R\cos\theta \geq d$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}\right)$인 θ의 범위에 2와 n을 곱해주는 값 부분일 때 만 원과 만나게 된다. 이것을 식으로 나타내면 $2n \cdot \dfrac{Arc\ \cos\dfrac{d}{R}}{2\pi}$이다.

따라서, 두 평행선의 간격에서 만나는 거리를 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^1 (\text{거리에 따른 만날 확률})\,dx$$

$$= \int_0^r 1dx + \int_r^R 2 \cdot n \cdot \frac{Arc\ \cos\dfrac{x}{R}}{2\pi}dx + \int_R^{1-R} 0dx + \int_{1-R}^{1-r} 2 \cdot n \cdot \frac{Arc\ \cos\dfrac{x}{R}}{2\pi}dx + \int_{1-r}^1 1dx$$

$$= 2\left(\int_0^r 1dx + \int_r^R n \cdot \frac{Arc\ \cos\dfrac{x}{R}}{\pi}dx\right)$$

$$= 2\left(r + \frac{n}{\pi}\int_r^R Arc\ \cos\frac{x}{R}dx\right)$$

$$= 2\left(r + \frac{nR}{\pi}\int_{\frac{r}{R}}^1 Arc\ \cos y\,dy\right)$$

$$= 2\left[r + \frac{nR}{\pi}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} - \frac{r}{R}Arc\ \cos\frac{r}{R}\right\}\right]$$

$$= 2\left\{r + \frac{nR}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}cos\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

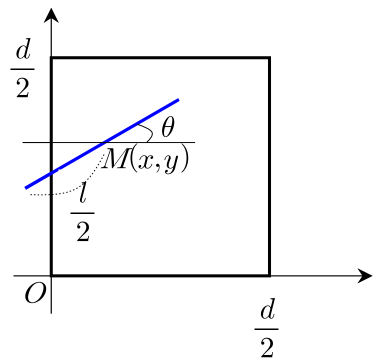
$$= \frac{1}{\pi}$$

추가 질문

(ⅰ) 한 개의 격자정사각형에서 생각하자. 바늘의 중점은 어디에든 올 수 있으므로 다시 정사각형을 사등분한 도형 중 아래 왼쪽 부분을 생각하자. 바늘의 중점을 $M(x, y)$라 하면,

$0 \le x \le \frac{d}{2}$, $0 \le y \le \frac{d}{2}$이고 수평면과 바늘의 이루는 각을 θ 라 하면 회전하면 마찬가지이므로

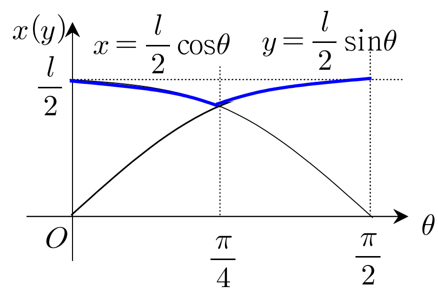
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 에서만 살펴도 충분하다.



(ⅱ) 이제 정사각형의 옆 변과 만나는 경우는 $x \le \frac{l}{2}\cos\theta$ 또는 $y \le \frac{l}{2}\sin\theta$ 이면 된다.

(ⅲ) x와 y는 θ에 대한 매개변수 함수이므로 구하는 확률은 아래 그림과 같이 겹쳐 두 그래프의 윗부분에 대한 넓이를 구하면 된다. 그러므로 바늘이 격자라인과 만날 확률 P 는 $P = \dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{l}{2} \cos\theta\, d\theta}{\frac{d}{2} \cdot \frac{\pi}{4}} = \dfrac{2\sqrt{2}\,l}{\pi d}$

이다.



2012 수시 수리 사고력 평가

문제 1

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

함수 $u(x)$가 $x \geq 0$인 범위에서 '$x_1 \leq x_2$이면 $u(x_1) \leq u(x_2)$'를 만족하면

$\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = \infty$ 혹은 $\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = L$ (L은 어떤 실수)가 성립한다.

함수 $f(x)$가 $x \geq 0$인 범위에서 다음 조건을 만족한다.

① $f(x) \geq 0$이고 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

② $f''(x)$가 존재하고 연속이며 $f''(x) \geq f(x)$

이 때 다음이 성립함을 설명하시오.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$이고 $f'(x) \leq 0$

2. $f(x) \leq f(0)e^{-x}$ [힌트: 함수 $g(x) = e^{-x}\{f'(x) + f(x)\}$를 미분]

문제 2

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

(가) 복소수 $z = x + iy$ (x, y는 실수)에 대해 z의 크기 $|z|$은 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$으로 정의된다.

(나) 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$이 성립한다.

집합 A, B, C를 다음과 같이 정의하자.

$A = \{a^2 + b^2 \mid a, b\text{는 정수}\}$, $B = \{a^2 + b^2 \mid a, b\text{는 양의 정수}\}$,

$C = \{a^2 + ab + b^2 \mid a, b\text{는 정수}\}$

1. 집합 A가 곱셈에 대하여 닫혀있음을 설명하시오.

2. 집합 B가 곱셈에 대하여 닫혀있지 않음을 설명하시오.

3. 집합 C가 곱셈에 대하여 닫혀있는지 여부를 논하시오.

선생님 클리닉

1. 문제에서 주어진 조건을 적용하여 $f'(x)$의 극한을 먼저 생각해보고 모순되는 상황이 발생하지 않는지 조사해본다.
2. 주어진 집합에서 닫혀있음을 증명하는 문제로 직접 보일 수도 있지만, 복소수의 곱셈과 관련지어 생각해보면 쉽게 해결할 수 있다.

관련 학습

1. 함수의 극한

x에 대한 함수 $f(x)$에서 x가 어떤 값 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$도 어떤 값 c에 한없이 가까워지면 수렴한다고 하고 기호로 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$로 나타낸다.

($\epsilon-\delta$방법) 함수의 극한 정의 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

임의의 양의 실수 $\epsilon>0$에 대하여 어떤 실수 δ가 존재하여

$0<|x-a|<\delta$ 이면 $|f(x)-c|<\epsilon$ 성립

2. 복소수

임의의 복소수z는 $z=a+bi$꼴($i^2=-1, a, b$는 실수)로 나타낼 수 있으며 다음과 같은 성질이 성립한다.

(1) $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

(2) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

(3) $|z\cdot\omega|=|z|\cdot|\omega|$

(4) $|z+\omega|\le|z|+|\omega|$

(5) $\overline{z+\omega}=\overline{z}+\overline{\omega}$, $\overline{z\omega}=\overline{z}\cdot\overline{\omega}$($\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

(6) $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

추가 질문

z_1, z_2는 복소수이고 $A=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$, $B=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$이다.

A, B의 크기를 비교할 수 있는가? 비교할 수 있다면 그 대소관계를 비교해 증명하고, 비교할 수 없다면 그 원인을 설명하여라.

예시 답안

문제 1

(1)

$f''(x) \geq f(x) \geq 0$이므로 $a \geq b$에 대해 $\int_b^a f''(x)dx \geq \int_b^a f(x)dx \geq 0$ 이 성립한다.

즉, $\int_b^a f''(x)dx = f'(a) - f'(b) \geq 0$ 가 되어 $f'(a) \geq f'(b)$ 이고, 제시문에 의해

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ 또는 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = L$ (L은 어떤 실수)가 된다.

먼저, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$인 경우, 어떤 양의 정수 m에 대해 자연수 N이 존재해서 $y > N$

이면 $f'(y) > m$을 만족해야 한다. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}\{f(x) - f(0)\} = k$ 이 되고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x)-f(0)\} &= \lim_{x\to\infty}\int_0^x f'(z)dz = \lim_{x\to\infty}\left\{\int_0^N f'(z)dz + \int_N^x f'(z)dz\right\} \\ &= \lim_{x\to\infty}\int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz \\ &= \int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz \geq \int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x m dz = \infty\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 이 되어 모순이 된다.

또한, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = L$ (L은 0이 아닌 어떤 실수)라 해보자.

(i) $L > 0$인 경우, $\frac{L}{2}$에 대해 적당한 자연수 N이 존재해서 $y > N$이면

$|f'(y) - L| < \frac{L}{2}$을 만족해야 하므로 $\frac{L}{2} < f'(x) < \frac{3L}{2}$가 된다. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0) = k$ 이 되고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x)-f(0)\} &= \lim_{x\to\infty}\int_0^x f'(z)dz = \lim_{x\to\infty}\left\{\int_0^N f'(z)dz + \int_N^x f'(z)dz\right\} \\ &= \lim_{x\to\infty}\int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz \\ &= \int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz \\ &\geq \int_0^N f'(z)dz + \lim_{x\to\infty}\int_N^x \frac{L}{2}dz = \infty\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이 되어 모순이 된다.

(ii) $L<0$인 경우, $\frac{L}{2}$에 대해 적당한 자연수 N이 존재해서 $y>N$이면

$|f'(y)-L|<\frac{-L}{2}$을 만족해야 하므로 $\frac{3L}{2}<f'(x)<\frac{L}{2}$이다. $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)-f(0)=k$ 이 되고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\{f(x)-f(0)\}&=\lim_{x\to\infty}\int_0^x f'(z)dz=\lim_{x\to\infty}\left\{\int_0^N f'(z)dz+\int_N^x f'(z)dz\right\}\\&=\lim_{x\to\infty}\int_0^N f'(z)dz+\lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz\\&=\int_0^N f'(z)dz+\lim_{x\to\infty}\int_N^x f'(z)dz\\&\le\int_0^N f'(z)dz+\lim_{x\to\infty}\int_N^x \frac{L}{2}dz=-\infty\end{aligned}$$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이 되어 모순이 된다. 그러므로 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$이 된다.

따라서, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=L$ (L은 0이 아닌 어떤 실수)인 경우 역시 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ 이고,

$f'(x)$는 증가함수이면서 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$이므로 $f'(x)\le 0$이다.

(2)

$g'(x)=e^{-x}\{f''(x)+f'(x)\}-e^{-x}\{f'(x)+f(x)\}=e^{-x}\{f''(x)-f(x)\}$이고, $f''(x)\ge f(x)$이므로 $g'(x)\ge 0$이다. 따라서, $a\ge b$에 대해 $0\le\int_b^a g'(x)dx=g(a)-g(b)$이고, $g(b)\le g(a)$ 이다. 또한, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}e^{-x}\{f'(x)+f(x)\}=0$ 이므로 $g(x)$는 증가하면서 0에 수렴하여 $g(x)\le 0$임을 알 수 있다. 따라서, $f'(x)+f(x)\le 0$이므로 $\{e^x f(x)\}'=e^x\{f'(x)+f(x)\}\le 0$ 이 성립하고, $e^x f(x)|_0^y=\int_0^y e^x(f'(x)+f(x))dx\le 0$에서 $e^y f(y)-e^0 f(0)\le 0$이 되어 $f(y)\le e^{-y}f(0)$이 성립한다.

문제 2

(1)

$a^2+b^2\in A$, $c^2+d^2\in A$라 하여 곱해서 닫혀있음을 보여줄 수 있다.

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\in A$가 된다.

복소수와 연계해서 생각해 보자.

$a^2+b^2\in A$에 대해 $|a+bi|^2$으로 생각할 수 있다.

$C^1=\{a+bi|a,b\in$정수$\}$ 라 두면 C^1의 원소 x 를 $|x|^2$로 두면 $|x|^2\in A$

즉, 함수 $f: C^1 \to A$, $f(x)=|x|^2$이라 이라두면 이것은 전사가 되고,
$f(x)f(y)=|x|^2|y|^2=|xy|^2=f(xy)\in A$가 되어 닫혀 있음을 알수 있다.

(2)

$A=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\in S^1$ $(|A|=x^2+y^2=1)$이라 두면 이것은 $|A|=x^2+y^2=|x+yi|^2=|f(A)|^2$ 이 된다. $B=\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\in S^1(|B|=u^2+v^2=1)$와 A를 곱하여 닫혀있음을 보이자.

$|A\cdot B|=|f(A\cdot B)|^2=|f(A)\cdot f(B)|^2=(|f(A)|\cdot|f(B)|)^2=|f(A)|^2\cdot|f(B)|^2=|A|\cdot|B|=1$
그러므로 닫혀 있다.

(3)

$a^2+b^2\in B$, $c^2+d^2\in B$ 라 하면, $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ 이다.

(i) $ad-bc>0$ 인 경우, $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\in B$ 이다.

(ii) $ad-bc<0$ 인 경우, $bc-ad>0$ 이고 $(ad-bc)^2=(bc-ad)^2$이므로
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\in B$ 이다.

(iii) $ad-bc=0$ 인 경우, $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\not\in B$ 이다.

반례) $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=1$이라 두면, $2\in B$가 되고 $2\times 2=4=e^2+f^2$이 되는 양의 정수 $e,\ f$가 존재 하지 않는다.
그러므로 B는 덧셈이 닫혀 있지 않다.

(4)

$a^2+ab+b^2\in C$, $x^2+xy+y^2\in C$ 인 두 원소에 대하여
$(a^2+ab+b^2)(x^2+xy+y^2)=(ax-by)^2+(ax-by)(bx+ay+by)+(bx+ay+by)^2\in C$ 이다.
이것을 이렇게 접근할 수 있다.

$a^2+ab+b^2=a^2+ab+\dfrac{b^2}{2^2}+\dfrac{3b^2}{2}=\left|(a+\dfrac{1}{2}b)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}bi\right|^2$이 된다.

$C^2=\left\{a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}bi \mid a,b\in \text{정수}\right\}$라 두면 C^2의 원소 u 에 대하여, $|u|^2\in C$이 성립한다. 즉, 함수 $f: C^2\to C$, $f(u)=|u|^2$이라 하면, 이것은 전사가 된다.

$u,v\in C^2$ $\left(u=a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{\sqrt{3}}{2}bi,\ v=x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}yi\right)$에 대하여,

$$\begin{aligned} g(u)g(v)&=|u|^2|v|^2=|uv|^2 \\ &=\left|ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bx-\frac{1}{2}by+\frac{\sqrt{3}}{2}i(bx+by+ay)\right|^2 \\ &=\left|ax-by+\frac{1}{2}(bx+ay+by)+\frac{\sqrt{3}}{2}i(bx+ay+by)\right|^2 \end{aligned}$$

$ax-by$, $bx+ay+by$ 는 정수이므로 $uv\in C^2$이고, 결국 $g(u)g(v)=g(uv)\in C$가 된다.
따라서, 집합 C는 곱셈에 닫혀 있다.

추가 질문

A,B의 크기를 비교할 수 있다.

$\overline{A}=\overline{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}=\overline{z_1\overline{z_2}}+\overline{\overline{z_1}+z_2}=\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}=A$이므로 A는 실수이다.

$B=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+|z_2|^2$이므로 B는 실수이다.

그러므로 A,B의 크기를 비교할 수 있다.

$A-B=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})=-(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=-(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$\quad =-|z_1-z_2|^2\le 0$

$\therefore A\le B$ 이고, $z_1=z_2$일때 등호가 성립한다.

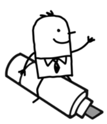
부록 부산대학교

Ⅰ 수시모집 순서 및 유의사항(2014학년도 기준)

새로이 생기는 전형임

모집요강 4월-5월 중 확정예정이기에 모집요강을 보고 확인하시기 바람

Ⅱ 연도별 기출문제



2014 일반전형 학업역량 평가

문제

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

임의의 실수 α, β 에 대하여 아래의 결과는 쉽게 유도할 수 있는 성질이다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

1. 제시문의 성질을 이용하여, 실수 α, β 에 대하여

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

이 성립함을 보이시오. (10점)

2. 실수 x $(0<|x|<\frac{\pi}{2})$ 에 대하여, 부등식 $|\sin x|<|x|<|\tan x|$ 이 성립하는 이유를 설명하시오. (20점)

3. 위의 부등식을 이용하여, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 이 됨을 증명하시오. (10점)

4. 도함수의 정의를 이용하여, $(\sin x)'=\cos x$ 임을 증명하시오. (20점)

2014 특별전형 수학과학 우수자 수학사고력 평가

문제

제시문

피보나치 수열(Fibonacci sequence) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$은 귀납적으로

$a_1=1,\ a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n (n \ge 1)$으로

정의된 수열이다. 이 수열의 항을 순서대로 적어보면 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … 이다. 이 때 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$이 존재하고,

그 극한값 $g=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$를 황금비(golden ratio)라고 한다.

(1) 황금비 g 가 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 근임을 보이고, g의 값을 구하시오. (15점)

(2) β가 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 근이면, 모든 $n \ge 2$ 에 대하여, $\beta^n = a_n\beta + a_{n-1}$이 성립함을 증명하시오. (15점)

(3) 모든 $n \ge 1$ 에 대하여, $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$이 성립함을 증명하시오. (15점)

(4) 모든 $n \ge 1$에 대하여, 실수 $\frac{1}{\sqrt{5}}g^n$ 에 가장 가까운 자연수가 a_n 임을 증명하시오. (15점)

선생님 클리닉

(학업역량 평가)

삼각함수의 도함수가 유도되는 과정을 잘 이해하고 있는지, 또 미분적분 계산에서 삼각함수를 올바르게 활용할 수 있는지를 측정하려고 한다.

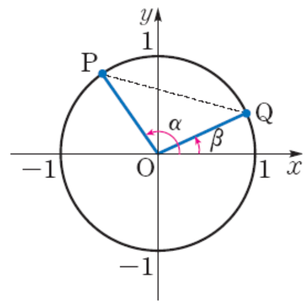
(수학과학 우수자 수학사고력 평가)

수열의 극한에 대한 이해능력과 수학적 귀납법을 올바르게 응용할 수 있는지를 측정하고자 한다.

관련 학습

1. 삼각함수에 덧셈에 관한 정리[6]

두 각 α, β의 삼각함수를 사용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$의 삼각함수를 나타내는 방법을 알아보자.



오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 두 각 α, β를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 P, Q라고 하면 두 점의 좌표는 $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$

이고, $\angle POQ=\alpha-\beta$이다. 이때 삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의하여 $\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\cos(\alpha-\beta)$

이다. 여기서 $\overline{OP}=\overline{OQ}=1$이므로 이 식은

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$

이고, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$이므로 이 식을 정리하면

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. ①에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

즉 다음이 성립한다. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ②$

한편 ②에서 α 대신에 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$를 대입하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$이고, 이 식을 정리하면

다음이 성립한다. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ③$

③에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

즉 다음이 성립한다. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ④$

또한 ②와 ④를 이용하면 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

이 식에서 분자, 분모를 $\cos\alpha\cos\beta\,(\cos\alpha\cos\beta\neq0)$로 나누어 정리하면 다음과 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

즉 다음이 성립한다. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \cdots\cdots ⑤$

⑤에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

2. 피보나치수열과 비네 공식(Binet formula)

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 라 두면 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$. 그러므로 α, β는 방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근이다. 따라서 $\alpha^2-\alpha-1=0$, $\beta^2-\beta-1=0$, $\alpha^2=\alpha+1$, $\beta^2=\beta+1$. $\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}+\alpha^n$, $\beta^{n+2}=\beta^{n+1}+\beta^n$. 그러므로

$$\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}.$$

$H_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ 이라 두면 위 식은 $H_{n+2}=H_{n+1}+H_n$. 한편 $H_1 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1=u_1$, $H_2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1=u_2$. 따라서 $H_n=u_n$. 즉,

$$u_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

추가 질문

(2013 중앙대 모의 사고력 평가)

초깃값이 $F_0=0, F_1=1$으로 주어지고 모든 자연수 n에 대하여 관계식 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$을 만족하는 수열 $\{F_n\}$을 피보나치 수열이라고 부른다.

1) 다음을 만족하는 2×2 행렬 A를 구하시오.

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k=1,\ 2,\ 3, \cdots$$

2) 행렬 A^k의 각 성분을 피보나치 수열 $\{F_n\}$을 이용하여 나타내시오.

3) $F_{n+1}F_m+F_nF_{m-1}=F_{n+m}$이 성립함을 유도하시오.

6) 신사고 수2, 2012

2014 일반전형 학업역량 평가

예시 답안

문제 1

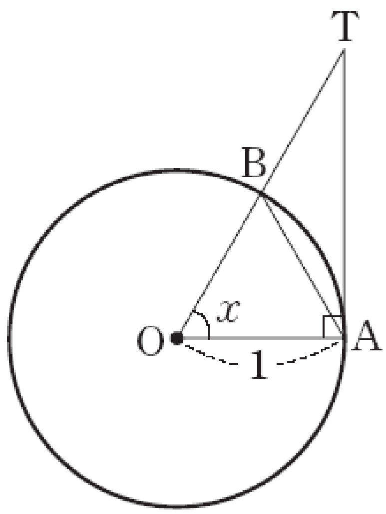
(1) $\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 이므로

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

이다. 그러므로 $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 이 성립한다.

문제 2



[반지름 1인 원]

위의 그림과 같이 반지름 1인 원을 하나 그리고, 중심을 O라 하자. 원주 위의 두 점 A, B 를 중심각이 $\angle AOB=x$가 되도록 잡고, A를 지나는 원의 접선과 직선 $\overleftrightarrow{OB}$가 만나는 점을 T 라고 하자. 분명히 삼각형 OAB의 면적은 부채꼴 OAB 의

면적보다 작고, 또 부채꼴 OAB 의 면적은 삼각형 OAT의 면적보다 작다. 한편 삼각형 OAB 의 면적은 $\frac{1}{2}|\sin x|$, 부채꼴 OAB 의 면적은 $\frac{1}{2}|x|$, 그리고 직각삼각형 OAT 의 면적은 $\frac{1}{2}|\tan x|$이다. 그러므로 부등식 $|\sin x| < |x| < |\tan x|$ 이 성립한다.

문제 3

주어진 범위의 x 값에 대하여 $x, \sin x, \tan x$ 의 부호가 모두 같으므로 $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ 이고, 역수를 취하면 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ 이다. 그러므로 $1 = \lim\limits_{x \to 0} \cos x \le \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \le 1$ 이 되어 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 이다.

문제 4

도함수의 정의에 의하여 $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ 이다. 한편

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

이므로, 위의 부등식을 적용하면

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x\end{aligned}$$

이다.

2014 특별전형 수학과학 우수자 수학사고력 평가

문제 1

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$ 이므로

$g=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}=1+\dfrac{1}{g}$ 이고, 따라서 $g^2=g+1$이다. 그러므로 g 는 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 한 근이고, $g\geq 1$ 이 되어 $g=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

문제 2

β가 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 근이므로, $\beta^2=\beta+1$이다. $n\geq 2$ 에 관한 수학적 귀납법으로 증명하자. $a_1=a_2=1$이므로 $n=2$일 때는

$\beta^n=a_n\beta+a_{n-1}$이 성립한다. 이제 $n\geq 2$ 이고 $\beta^n=a_n\beta+a_{n-1}$이 성립한다고 가정하자.

$$\begin{aligned}\beta^{n+1}&=\beta^n\beta=(a_n\beta+a_{n-1})\beta=a_n\beta^2+a_{n-1}\beta\\&=a_n(\beta+1)+a_{n-1}\beta=(a_n+a_{n-1})\beta+a_n=a_{n+1}\beta+a_n\end{aligned}$$

이 되어 $n+1$ 일 때도 성립한다.

문제 3

$g=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 와 $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 가 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 두 근이므로 위의 (2)에 의하여 $g^n=a_n g+a_{n-1}$와 $\beta^n=a_n\beta+a_{n-1}$가 성립한다.

그러므로 $g^n-\beta^n=a_n(g-\beta)=\sqrt{5}\,a_n$이다. 따라서

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(g^n-\beta^n)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$이다.

문제 4

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(g^n - \beta^n)$으로부터 $\left|a_n - \frac{1}{\sqrt{5}}g^n\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n < \frac{1}{2}$을 얻는다. 그러므로 모든 $n \geq 1$ 에 대하여, 실수 $\frac{1}{\sqrt{5}}g^n$ 에 가장 가까운 자연수가 a_n이다.

추가 질문

(1)

$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, $F_k = F_k$ 이므로, 이를 각각 행렬식으로 나타내면,

$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$이다. 따라서, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이다.

(2)

$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$이고 $\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{pmatrix}$ 이므로, 이 두 식을 정리하여

$\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_k & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_{k-2} \end{pmatrix}$을 얻는다. 따라서,

$\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_k & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_{k-2} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} F_{k-1} & F_{k-2} \\ F_{k-2} & F_{k-3} \end{pmatrix} = \cdots = A^{k-1}\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = A^k$ 이다.

(3)

$A^n A^m = A^{n+m}$으로부터

$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{pmatrix}$ 을 얻는다.

양변의 (2, 1) 성분을 비교하여 $F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} = F_{n+m}$을 얻어낸다.

발간을 도와주신 분들

기 획

천정국	부산광역시교육청 교육국장
김 영	부산광역시교육청 교수학습기획과장
변용권	부산광역시교육청 교수학습기획과 학력지원담당장학관
강여순	부산광역시교육청 교수학습기획과 장학사

집필위원(수학나침반 교사동아리)

강진희	동래고등학교
김무진	부산과학고등학교
김정수	부산과학고등학교
원태경	부산일과학고등학교
이우영	만덕고등학교
정순진	부산강서고등학교
조동석	부산강서고등학교
최기원	신정고등학교
황성미	만덕고등학교

수리 심층구술면접 나침반

발 행 일	2013. 5. 10.
편집 · 발행	부산광역시교육청