01. [역행렬]

sol)

$A^{-1} = B = \dfrac{1}{-8+9}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$로부터 모든 성분의 합은 -2입니다.

02. [특수각인가 비특수각인가]

sol)

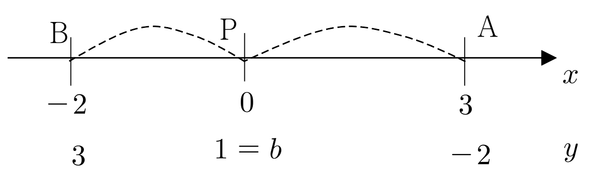
$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{6}$로 특수각이네요. 고로, 삼각함수들 공식을 안 써도 $\tan 2\theta = \tan\dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$이 나옵니다.

03. [내분점/외분점의 기하학적 의미]

sol)

세 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{P}$의 x좌표만을 보면 $3, -2, 0$이 되고, 이는

$3:2$로 점 P가 내분하는 상황입니다. 여기서 $a=3$을 얻고,



그 밑에 y좌표도 깔아서 그 간격을 이용하여 계산해보면 $b=1$임을 알 수 있습니다. 따라서, $a+b=4$가 되네요.

04. [A, B가 독립이면]

sol)

$\mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c) = \dfrac{1}{3}$이고, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3} \to \mathrm{P}(A^c) = \dfrac{2}{3}$

이므로 $\mathrm{P}(B^c) = \dfrac{1}{2}$가 되어, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$가 됩니다.

※ 두 사건 A, B가 서로 독립이면, A^c, B도 서로 독립이고, A, B^c도 서로 독립이고, A^c, B^c가 독립입니다. 네 가지 명제가 모두 동치로서 하나의 조건만 제시되어도 나머지 세 가지도 이용할 수 있습니다.

05. [실전용 스피드 풀이]

sol)

우선 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)(x-2)$이고, $\sqrt{f+3} - \sqrt{f-2} = 1$은

$y = \sqrt{x+3}$과 $y = \sqrt{x-2}+1$의 그래프 간 교점을 생각해봤을 때, 한 군데에서만 근이 존재할 수 밖에 없으니, $f+3, f-2$ 모두 완전제곱수인 자연수 중에 찾으면 $f(x) = 6$뿐이고, 최고차항 $\dfrac{1}{2}$과 상수항 -7에서 근과 계수와의 관계에 의해 모든 실근의 곱은 -14가 되네요.

06. [어떤 점에서 미분 가능하기 위한 필요충분조건은?]

sol)

각 구간마다 정의된 함수는 연속이므로, 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분 가능하려면 함수의 정의가 달라지는 $x=0$에서의 연속성과 좌우미분계수만을 체크해줘도 충분합니다. 그러면 $a=2$와 $2a = b-0$에서 $b=4$이므로 $a+b=6$이 나오네요.

07. [최고차항 위주로 계산해주세요]

sol)

공차를 d라 했을 때, $a_n = dn + \triangle$이고, 극한 식의 분자는

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{d}{2}n^2 + \cdots$ 이고, 분모는 $(a_n)^2 = d^2n^2 + \cdots$ 이므로

$\dfrac{d}{2} \times \dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{2d} = \dfrac{1}{6} \to d = 3$입니다. 고로, $a_n = 3n-1$이므로

$a_5 = 14$가 나오네요. 초항 2조건은 불필요한 정보였네요. 하지만 평가원은 정보를 허투루 주지는 않다는 점을 명심하세요.

※ 처음부터 $a_n = d(n-1)+2 = dn - d + 2$로 잡고서, 극한 식의 분자와 분모를 열심히 계산하려면 당연히 시간이 많이 걸리죠! 문제 해결에 있어서 필요한 수치가 무엇인지 고민한 다음, 가능한 한 빠른 시간 내에 정확하게 문제를 풀기 위해 무엇을 구할지 전략을 잘 세우는 것이 중요합니다.

[2008년 06월 평가원 수리(가형) 16번]

16. 공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2-1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_n = n$이면 $b_n = 4n-4$이다.
ㄴ. $d_1 d_2 = 4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$이면 $a_n = n$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

08. [빠름빠름빠름빠름]

sol)

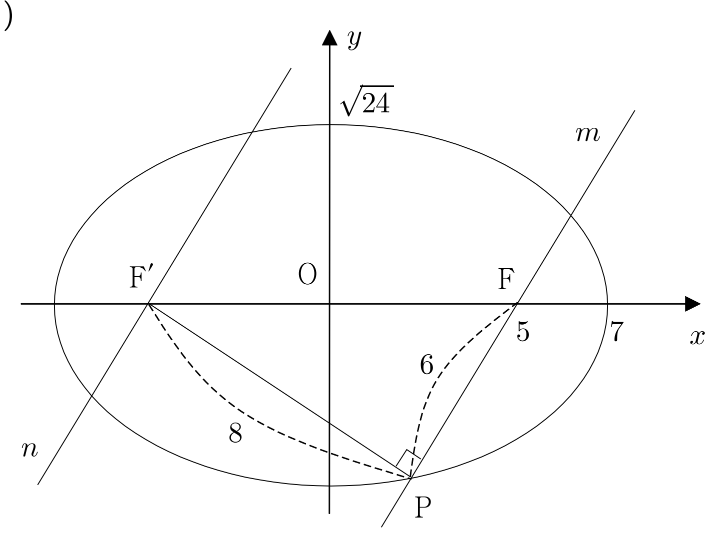
지금 상태로는 인수분해도 잘 안 보이니, 편의상 $\cos x = c$로 치환하여 전개해보면 $2c(4c^2-1) = 4c^2+4c-3$, 즉 $8c^3 - 4c^2 - 6c + 3 = 0$이고,

이를 조립제법 해보면 $(2c-1)(4c^2-3) = 0$에서 $\cos x = \dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, $[0, \pi]$에서 실근 $x = \dfrac{1}{6}\pi, \dfrac{1}{3}\pi, \dfrac{5}{6}\pi$의 합은 $\dfrac{4}{3}\pi$가 됩니다.

09. [계산을 간단하게 만드는 피타고라스 세 수]

sol)



따라서 $a=24$입니다.

10. [수식에 의해 압도 되느냐 마느냐]

sol)
직선 $y=2x-2$를 원점을 중심으로 반시계방향으로 45° 만큼 회전 이동시키면 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 2x-2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-x+2\\ 3x-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$이 됩니다. 여기서 $l:y'=mx'+n\to l:y=mx+n$의 꼴로 고쳐줄 필요 없이, 어차피 문제에서 묻고 있는 것은 직선 l의 절편들의 곱이므로 x절편은 y'값이 0이 되는 $x=\frac{2}{3}$를 대입했을 때이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이고, 마찬가지로 y절편은 x'값이 0이 되는 $x=2$를 대입했을 때이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}}(3\cdot2-2)=2\sqrt{2}$가 됩니다. 이들의 곱은 $\frac{8}{3}$로 답은 ④번이네요.

> [2011년 10월 교육청 수리(가형) 26번]
>
> *26.* 행렬 $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & a\end{pmatrix}$가 나타내는 일차변환 f에 의하여 서로 수직인 두 직선 $l,\ l'$이 각각 두 직선 $x=2,\ y=x+1$로 옮겨지도록 하는 실수 a의 값을 구하시오. [4점]

11. [무엇을 회전축 삼아 계산해야 하는지]

sol)

$$\therefore\ \pi\int_{-3}^{3}y^2dx=2\pi\int_0^3(x^2-9)^2dx=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-6x^3+81x\right]_0^3$$

$$=2\pi\cdot3^4\left(\frac{3}{5}-2+3\right)=\frac{16\pi}{5}\times3^4$$

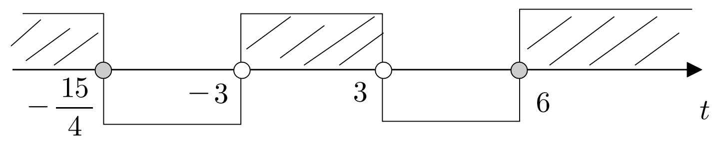
12. [출제 의도의 파악]

sol)
$\frac{g(-x)}{f(-x)}$가 눈에 확 들어오네요. 그런데 $g(x)$는 직선으로서 대칭성이 없으므로, $f(-x)=f(x)$임을 감안해 $-x=t$로 치환하여서 $1-\frac{g(t)}{f(t)}\ge0$으로 계산을 다 한 다음에, 적절한 타이밍에 다시 $t=-x$로 치환하든가, t에 대해 계산하여 나온 값에 맨 마지막에 부호를 뒤집어 줄 수 있겠네요. 계산을 마저 하면

$$1-\frac{g(t)}{f(t)}\ge0\ \Leftrightarrow\ \frac{f(t)-g(t)}{f(t)}\ge0$$

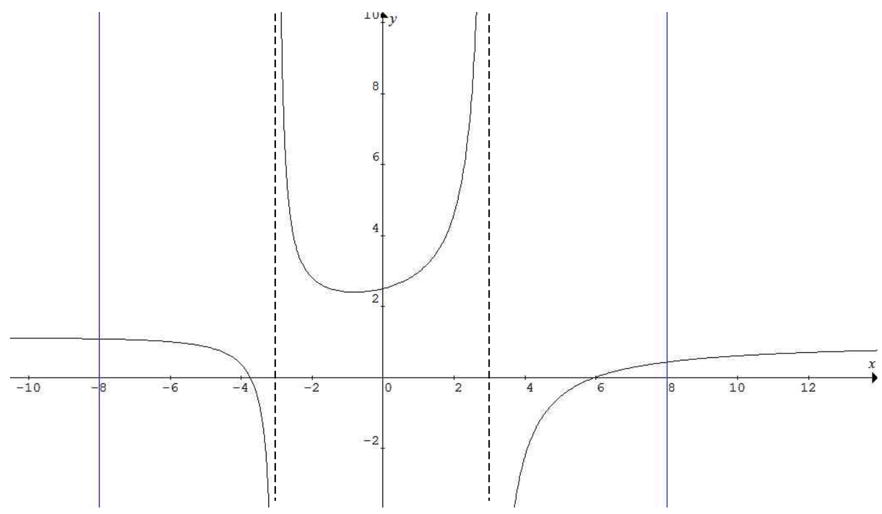
의 꼴에서 분자인 $f(t)-g(t)=t^2-9-\frac{27}{12}(t+6)=(t-6)\left(t+\frac{15}{4}\right)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차식으로서 $t=-\frac{15}{4},6$이 부등식 범위의 경계로 작용하고, 분모에선 $t=\pm3$이 부등식의 경계로 작용합니다. 마치,

$$\frac{f(t)-g(t)}{f(t)}\ge0\ \Leftrightarrow\ \frac{k\left(t+\frac{15}{4}\right)(t-6)}{k(t+3)(t-3)}\ge0\quad(k>0)$$ 사실 $k=1$



그리고 $(-8,8)$로 구간이 한정되어 있으므로 만족하는 t값은 $-7,-6,-5,-4,-2,-1,0,1,2,6,7$로서 총 합은 -9입니다. 따라서, 주어진 부등식을 모두 만족하는 정수 x값의 합은 9가 됩니다.

※ $y=\dfrac{\left(x+\frac{15}{4}\right)(x-6)}{(x+3)(x-3)}$ 의 그래프는 다음과 같습니다.



하지만 매번 이런 부담스러운 그래프를 그릴 수 없으니까 우리는 해집합의 보존 하에 '동치변형'이라는 도구를 이용해서 생각하는 거죠!

13. [평면을 나타내는 여러 가지 방법]

sol)
좌표평면 상에서 x,y축 절편이 a,b인 직선의 방정식이 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이었던 것처럼 좌표공간 상에서 x,y,z축 절편이 a,b,c인 평면의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$이 됩니다. 이 경우 평면의 방정식은 금방 세울 수 있다는 이점이 있지만 법선벡터로서 (a,b,c)가 될 수 없을뿐더러 곧바로 점과 평면사이의 거리 공식을 이용하기에는 약간의 조작이 필요하다는 점에 유념해야 합니다. 따라서, 해당 평면의 방정식은 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$, 즉 $x+2y+z=6$이 되고, $d=\frac{6}{\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{6}$이고, 다른 평면

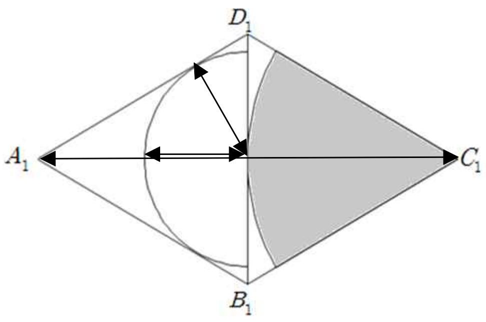
$x-2y+2z=1$과 이루는 이면각 θ에 대하여

$$\cos\theta = \frac{|1-4+2|}{\sqrt{6}\cdot 3} \rightarrow |\cos\theta| = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

이므로 $d\times|\cos\theta| = \dfrac{1}{3}$이 답이 됩니다.

14. [이것도 초항과 공비만 구하면 끝나는군]

sol)



어김없이 특수각으로서 60° 가 등장하여 계산을 간단하게끔 해주고 있습니다. 이때 닮음비는 마름모의 긴 대각선 길이로서 $4:1$임을 알 수 있고, 공비로 작용하는 건 닮음비의 제곱인 넓이비로 $\dfrac{1}{16}$입니다. 그리고, 초항을 구해주면

$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$이므로 구하고자 하는 값은

$\dfrac{S_1}{1-\dfrac{1}{16}} = \dfrac{16}{15}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{8\pi}{15}$가 됩니다.

15. [결국에는 멋지게 상쇄될 수치들]

sol)

클래식(classic)과 락(rock)을 좋아할 모비율을 각각 $p_c = \dfrac{1}{5}, p_r = \dfrac{1}{10}$이라 하겠습니다. $n=1600$만큼의 임의 추출 결과 클래식과 락을 좋아할 각각의 표본비율을 $\hat{p_c}, \hat{p_r}$이라 하면, 표본비율들은 다음과 같이 정규분포를 따른다고 볼 수 있습니다.

$$\hat{p_c} \sim \mathrm{N}\left(\frac{1}{5}, \left(\frac{1}{100}\right)^2\right),\ \hat{p_r} \sim \mathrm{N}\left(\frac{1}{10}, \left(\frac{3}{400}\right)^2\right)$$

이때, $\hat{p_c}$가 $a\%$이상일 확률이 0.0228이라는 부분에서,

$\mathrm{P}\left(\hat{p_c} \geq \dfrac{a}{100}\right) = 0.0228 = \mathrm{P}(Z\geq 2)$임을 알 수 있고,

$$Z = \frac{\hat{p_c}-p_c}{\sqrt{\dfrac{p_cq_c}{n}}} \geq \frac{\dfrac{a}{100}-p_c}{\sqrt{\dfrac{p_cq_c}{n}}} = 2 \text{에서 } \frac{a}{100} = \frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{100} \rightarrow a = 22$$

따라서, $\hat{p_r}$이 $a-11.25(=10.75)\%$이상일 확률은

$$\mathrm{P}\left(\hat{p_r}\geq\frac{10.75}{100}\right) = \mathrm{P}\left(Z\geq\frac{\dfrac{10.75}{100}-\dfrac{1}{10}}{\dfrac{3}{400}}\right) = P(Z\geq 1) = 0.1587 = p$$

가 됩니다.

※ 통계 문제는 역대 수능, 평가원 기출문제들을 훑어보아도 공식의 대입 차원으로 간단하게 나오고 있습니다. 그러니 간혹 숨겨진 평가원 모의고사 같은 개인의 색채가 도드라진 시험에선 대학 수준의 통계 개념까지 건드리기도 하기에 **수험생들이 낯선 통계 문제를 보고 당황하더라도 이상하지 않습니다. 지금 이 문제는, 무지막지하게 어렵지는 않으나 적어도 수치 관계를 적재적소에 이용하려면 기본 원리는 알고 있어야 합니다.**

모비율이란 모집단에서 어떤 특성을 가지는 대상의 비율로 정해진 수치입니다. 그리고 **표본비율**이란 모집단에서 임의추출한 표본에서 그 특성을 가진 대상의 비율로서, 모비율을 p라 한다면, 표본비율은 $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$라 나타냅니다. 여기서 n은 표본의 크기이고, X는 해당 표본에서 사건이 일어나는 횟수를 의미합니다.

또한, 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \dfrac{pq}{n}\right)$에 가까워지고, $Z = \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$ 는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따릅니다. 이에 따라 주어진 문제를 해결할 수 있겠죠?

16. [무연근 따지는 것 못지 않은 귀차니즘]

sol)

$f(n) = n^2(n+1)^2$임은 금방 알 수 있습니다. $\dfrac{S_n}{n^2} = b_n$으로 치환 후

$b_{n+1}-b_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\ (n\geq 2)$로 부분분수를 계산하기 쉽도록 쪼개고, 양변에 $n \Rightarrow 2, 3, \cdots, (n-1)$을 대입하여 변변 더하면, $b_n - b_2 = \dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{n^2}\ (n\geq 3)$이 나옵니다. 이때, $(n-1)$ 또한 2 이상이 되어야 하므로 $n\geq 3$이지만, $b_n-b_2 = \dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{n^2}$는 $n=2$여도 성립하므로, 다시 $b_n - b_2 = \dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{n^2}\ (n\geq 2)$라 할 수 있습니다. 그러면

$$S_n = n^2\left(b_2+\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{S_2}{4}+\frac{1}{4}\right)n^2 - 1\ (n\geq 2)$$

가 되고, $S_2 = a_1+a_2 = a_2$임을 이용해서,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{S_2+1}{4}\{n^2-(n-1)^2\} = \frac{a_2+1}{4}(2n-1)\ (n\geq 3)$$

를 얻습니다. 따라서, $g(n) = 2n-1$이 되어 $\dfrac{f(7)}{g(25)} = \dfrac{7^2\cdot 8^2}{2\cdot 25-1} = 64$가 답이 됩니다.

17. [항상 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 답으로 나오란 보장은 없는데]

sol)

$A+B = AB \rightarrow (E-A)(E-B) = E$를 파악했다면, $A-E, B-E$의 역행렬이 모두 존재함은 물론이고, 나아가 $AB=BA$까지 알 수 있습니다.

다음으로, $A^2B+AB^2 = 2AB-E$에서

$A(A+B)B = A(AB)B = A^2B^2 = (AB)^2 = 2AB-E$를 얻고, 편의상 $AB = A+B = C$로 치환하면 $C^2-2C+E=O$가 됩니다. 여기까지가 준비 단계이고, 본격적으로 보기를 살펴보겠습니다.

ㄱ. 어떤 이차정사각 행렬 X, Y에 대하여 $XY=E$이면 $X^{-1}=Y$이자 $Y^{-1}=X$이므로 $XY = XX^{-1} = E = X^{-1}X = YX$라는 성질을

이용해서, $(E-A)(E-B)=E=(E-B)(E-A)$를 정리하면
$AB=BA$가 나옵니다.

ㄴ. $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=C^2-2C=-E$가 되어 참입니다.

ㄷ. $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2=-E-2C$이고,

$$(A-B)^4=(-E-2C)^2=4C^2+4C+E$$
$$=4(2C-E)+4C+E=12C-3E$$

따라서, $(A-B)^4-12(A+B)=12C-3E-12C=-3E$가 되어 거짓입니다.

18. [낚ㅋ시ㅋ]

sol)

$\log x=f(x)+g(x)=n+\alpha$에서 $f(x)=n$은 정수, $0\le g(x)=\alpha<1$는 가수라고 하고서, 주어진 식에 $f(x), g(x)$ 대신에 n, α를 대입해보면

$$\alpha=\frac{1}{3}\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

임을 알 수 있습니다. α는 그러면 음수가 될 수 없지만, 지표 n이 음수라 하여도 $\log x=-1+0$으로 성립합니다. 그리고 $n=0$이면 $\alpha=0$이 되어 $\log x=0$, 즉 $x=1$이 되는데 모든 실수 x의 곱에는 딱히 영향을 미치지 않습니다. 고로, 이제 지표가 양의 정수라고 한정하고서 만족하는 실수 x를 찾도록 하겠습니다.

한편, 수열 $\left\{n-\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$은 n을 2로 나눈 나머지를 의미하는데,

$$\left\{n-\left[\frac{n}{2}\right]\right\} : 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \cdots$$

가 되고, 이에 대응하는 가수는 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ 까지만 유효합니다. 그러니,

$\log x=-1, 0, 1+\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}, 3+\frac{2}{3}, 4+\frac{2}{3}$이고, 모든 실수 x값들의

곱은 $10^{-1+0+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(2+\frac{1}{3}\right)+\left(3+\frac{2}{3}\right)+\left(4+\frac{2}{3}\right)}=10^{11}$이 됩니다.

[2014년 09월 평가원 수학 영역(B형) 21번]

21. 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

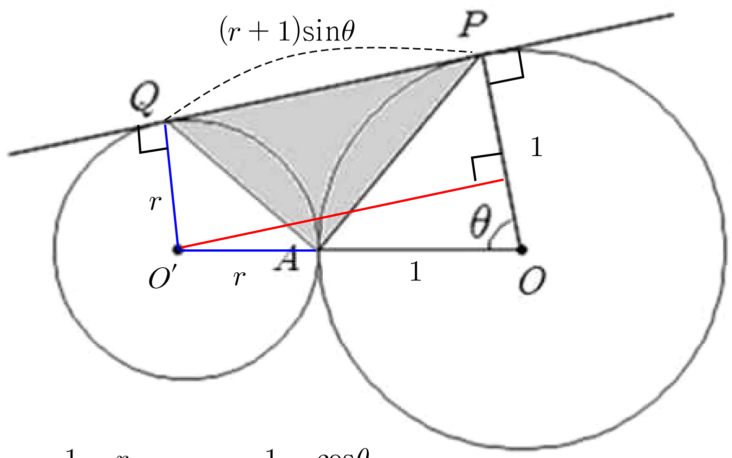
을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

19. [보조선 몇 가닥과 각도 관계 몇 가지만 캐치하면]

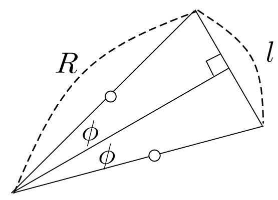
sol)

무난하게 출제자가 시키는 대로 요소 하나하나씩 구해서 최대한 교과서 풀이에 가깝도록 풀어보도록 하겠습니다.



$\cos\theta=\frac{1-r}{1+r}\ \rightarrow\ r=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$가 되고, $\theta\rightarrow+0$일 때 $\cos\theta\rightarrow1-0$이므로 $r\rightarrow+0$임을 알 수 있습니다. 이 타이밍에 테일러 전개에 의한 근사를 구사하겠다면 $1-\cos\theta\simeq\frac{\theta^2}{2}$이므로 $r\simeq\frac{\theta^2}{4}$로 보고서 고속으로 계산을 행할 수 있습니다.

그리고 $\angle AO'Q=\pi-\theta$를 통해서 $\angle PAQ=\frac{\pi}{2}$임을 알 수 있고,



$l=2R\sin\phi$ 와 같은 관계를 거듭 이용해보면

$$\begin{cases}\overline{AQ}=2r\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)=2r\cos\frac{\theta}{2}\\ \overline{AP}=2\sin\frac{\theta}{2}\end{cases}$$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\left(2r\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)=r\sin\theta=\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{1+\cos\theta}$가 되어 주어진

극한값은 $\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$이 됩니다.

20. [어느 지점에 대한 수식인가]

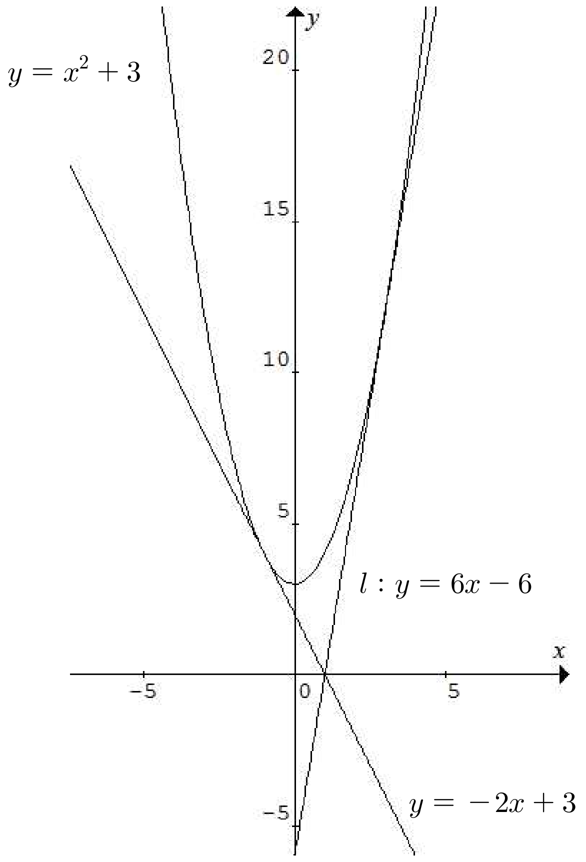
sol)

$y^2=4px$ 꼴의 포물선에 접하는 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+\frac{p}{m}$으로 잡을 수 있던 것과 달리, $y=x^2+3$은 $x^2=4py$ 꼴의 포물선을 적당히 평행이동 시킨 것이므로, 차라리 이차함수로 보고서 기울기가 m이고 정점 $(1, 0)$을 지나는 접선으로 보는 것이 더 편할 것 같네요. 이 경우 포물선의 접선 공식에 집어 넣기에는 상당히 번거로울뿐더러, 접선 개념이란 이차곡선에 한정된 개념이 아니라, 사실은 미분 쪽에서 훨씬 더 많이 다뤄온 친근한 개념이기도 하니까요.

즉, $y=x^2+3$ 위의 한 점에서 그은 접선 l의 x절편이 1이라고 식을 세워보면

$l: y-(t^2+3)=2t(x-t)\ \rightarrow\ -t^2-3=2t(1-t)\ \rightarrow\ t=3, -1$

이고, 두 접선 중에 유의미한 것은 $t=3$인 경우로 $l: y=6(x-1)=6x-6$라 할 수 있습니다.

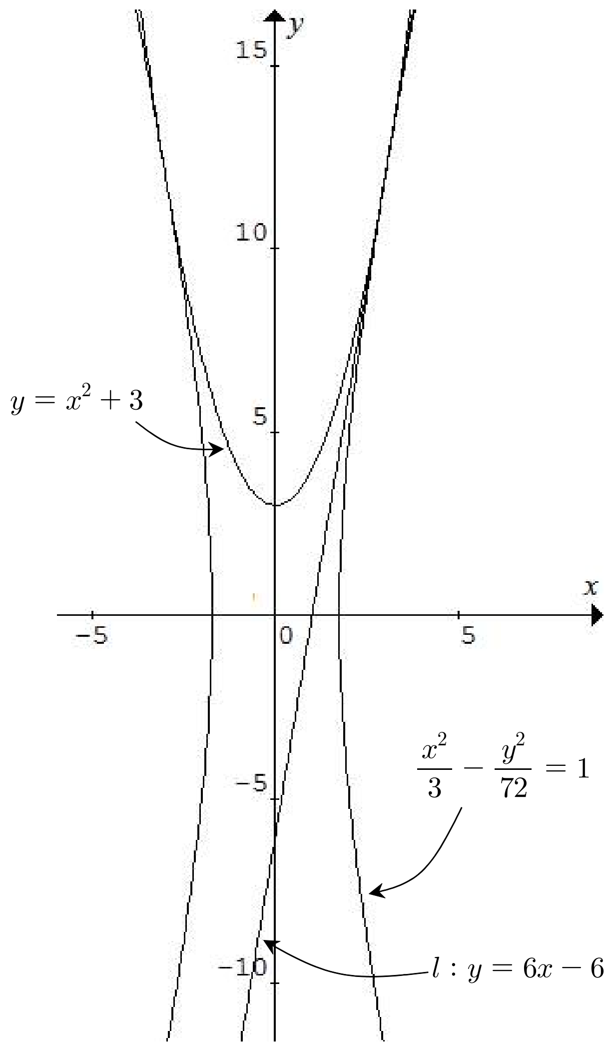


한편, 포물선과 쌍곡선의 공통 접점에서 그은 접선이 l이므로, 다시 쌍곡선에 접하는 접선 공식을 이용해서

$$y = 6x - 6 = 6x - \sqrt{36a^2 - b^2} \ \rightarrow \ 36a^2 - b^2 = 36$$

를 얻고, 문제에서 주어진 초점 조건에서 $a^2 + b^2 = 75$이므로

$a^2 = 3, b^2 = 72$가 되어 $\dfrac{b^2}{a^2} = 24$가 답이 됩니다.



실제로 그려보면 이러한 그림이 됩니다.

21. [치환 적분 or 부분 적분 ?]

sol)

$$\int_1^e f(\ln x)dx = \int_0^1 f(t)e^t dt = e^2 \ (\because \ln x = t)$$

$$\int_1^2 (x-1)f(x-1)e^x dx = \int_0^1 sf(s)e^{s+1}ds = e^2 - e \ (\because x - 1 = s)$$

$$\rightarrow \int_0^1 xf(x)e^x dx = e - 1$$

이 정도는 “학교”를 “school”이라 바꾸어 말한 것처럼 주어진 조건을 치환적분을 이용해서 번역한 것에 불과합니다. 그랬더니, 세 함수의 곱 형태의 적분이 등장하게 되었네요! 보통 $\int f'(x)g(x)\,dx$ 꼴의 적분을 다루는 것이 일반적인데, 부분 적분 공식을 곱의 미분인

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$의 꼴에서

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$로 유도하듯,

$\{A(x)B(x)C(x)\}' = A'(x)B(x)C(x) + A(x)B'(x)C(x) + A(x)B(x)C'(x)$

라도 이용해야 할지 망설여지네요.

하지만, 여기서 $xf(x)$와 e^x를 각각 한 덩어리로 보고 부분 적분을 하면 결국 두 함수에 관한 적분이 되고, 초반에 제시했던 정보들과 맞물려서 반드시 답이 나오게 될 것입니다. 이때, $x, f(x), e^x$를 어떻게 두 함수의 곱으로 묶어야 할지는 가능한 총 3가지 경우를 하나씩 해보고서 시행착오를 거쳐서 파악해야 하는 수 밖에 없습니다.

$$e - 1 = \int_0^1 \{xf(x)\}e^x dx = \left[xf(x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \{f(x) + xf'(x)\}e^x dx$$

$$= 1 \cdot f(1) \cdot e - \int_0^1 f(x)e^x dx - \int_0^1 xf'(x)e^x dx$$

$$e - 1 = e^2 - e^2 - \int_0^1 xf'(x)e^x dx \ \rightarrow \ \int_0^1 xf'(x)e^x dx = 1 - e$$

※ 보통 치환 적분이나 부분 적분 중에서 한 가지 만을 깊게 물어보는 문제들이 주류를 이루었는데, 아래 수능 기출문제를 필두로 해서 한 문제에서 치환 적분과 부분 적분을 동시에 묻는 문제들도 등장하기 시작하였습니다.

[2009년 11월 대수능 수리(가형) 29번]

29. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x) - g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x) - g(x)f'(1-x)\}dx = -k$

ㄴ. $f(0) = f(1)$이고 $g(0) = g(1)$이면, $k = 0$이다.

ㄷ. $f(x) = \ln(1 + x^4)$이고 $g(x) = \sin \pi x$이면, $k = 0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [일차변환의 성질이란]

sol)

일차변환 f를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$로부터

$a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$가 되어 $a + b = 2$가 나옵니다.

23. [수식과 기호들의 의미]

sol)

확률변수 X가 주어진 이항분포를 따른다는 것을, 동전을 5번 던지는 독립시행을 의미하는 것으로 보아도 무방합니다. 그러면

$\mathrm{P}(1 \le X \le 4) = 1 - \mathrm{P}(X=0) - \mathrm{P}(X=5)$

가 되고, $\mathrm{P}(X=0) = \mathrm{P}(X=0) = {}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$이므로

$\therefore \mathrm{P}(1 \le X \le 4) = 1 - \frac{1}{32} - \frac{1}{32} = \frac{15}{16} \to p + q = 31$

24. [이항정리는 이럴 때 써먹어야지]

sol)

$\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^4 = \frac{a^4}{x^4} + \frac{4a^3}{x} + 6a^2x^2 + 4ax^5 + x^8$이므로 주어진 다항식에서

x^3의 계수는 $\frac{1}{2} \times 6a^2 = 3a^2$이고, x^5의 계수는 $6 \times 4a = 24a$가 됩니다.

따라서, $3a^2 = 24a \to a = 0, 8$이지만 유의미한 값은 $a = 8$뿐입니다.

25. [이 문제가 등장했던 평가원 시험의 시행 시기는?]

sol)

$$Q = \boxed{k} \times \frac{\boxed{V}}{t} \log\frac{M_0 - 0.05}{M_t - 0.05}$$

주어진 조건에서 일정한 수치들을 빼면 실제로 대입해야 할 변수들의 자리는 정해져 있습니다. 게다가 겉보기엔 어려워보이지만 사실 독해 문제나 다름없죠. 독특한 점으로 $t = 0$이 분모를 0으로 만들면서 동시에 로그의 진수를 1로 만들어서 $\infty \times 0$꼴의 부정형을 이루는 순간인데, 과감하게 $t = 0$을 대입하는 경우는 무시해도 좋습니다. 그러면

$Q = k \times \frac{V}{1}\log\frac{0.85 - 0.05}{0.45 - 0.05} = k \times \frac{V}{t}\log\frac{0.85 - 0.05}{0.10 - 0.05}$

에서 $t = \frac{\log 16}{\log 2} = 4$가 답이 됩니다.

26. [직관의 유혹]

sol.1)

처음부터 $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$라고 두겠습니다. 그러면

$f(e^x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}$이고, $3y = e^x + 2 \to g(x) = \ln(3x-2)$가 되어

$g'(x) = \frac{3}{3x-2}$으로 $g'(1) = 3$이 나옵니다.

sol.2)

$f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{3}$이고, $g(f(e^x)) = x$라고 두었을 때,

$g'(f(e^x))f'(e^x)e^x = 1$이고, $x = 0$ 대입시 역시

$g'(1)f'(1) = 1 \to g'(1) = \frac{1}{f'(1)} = 3$이 나옵니다.

27. [수학적 확률의 정의에 따라]

sol)

전체 경우의 수는 ${}_6\Pi_3 = 6^3 = 216$가지이고, 태균이가 이기는 경우의 수는, 태균이가 던진 주사위의 숫자가 $6, 5, 4, 3, 2$인 경우 각각 $5^2, 4^2, 3^2, 2^2, 1^2$가지로 총 55가지 경우가 가능합니다. 이때, 지욱이와 지헌이가 던진 주사위의 숫자가 같은 경우는 216가지가 아닌 55가지로 근원사건의 개수가 축소된 상태에서 헤아리자면

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$가지입니다.

따라서, $\frac{15}{55} = \frac{3}{11} \to p + q = 14$ 가 답이 됩니다.

28. [축차대입법]

sol)

$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1}\frac{k}{2^n}$에서 양변에 $n \Rightarrow 1, 2, 3, \cdots, 9$를 대입하여 변변 더하면 좌변은 상쇄되고, 우변은 등비급수형태가 되어

$$a_{10} - a_1 = k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \cdots + \frac{1}{2^9}\right) = k \cdot \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{k}{3} \cdot \frac{513}{512} = \frac{171}{512}k$$

즉, $86 - \frac{1}{2} = \frac{171}{2} = \frac{171}{512}k \to k = 256$이 나옵니다.

29. [변곡접선]

sol)

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하겠습니다. 물론, $a \neq 0$이고, a, b, c는 실수입니다. 이때, $g(x)=e^{f(x)}>0 \;\rightarrow\; f(x)=\ln g(x)$라 할 수 있고,

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)} \;\rightarrow\; g'=f'g$$

$$\rightarrow\; g''=f''g+f'g'=f''g+(f')^2g=\{f''+(f')^2\}g$$

로부터 $g(x)>0$이므로 (나) 조건에서 언급하고 있는 $g(x)$의 변곡점은 이차함수 $f''(x)+\{f'(x)\}^2=2a+(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+2a+b^2$ 부분의 부호 변화가 일어나는 지점이 됩니다. 고로, $g(x)$는 두 개의 변곡점이 존재하고, x좌표는 바로 $f''(x)+\{f'(x)\}^2=0$의 서로 다른 두 근이 됩니다.

한편, (가) 조건에서 $g(0)=e^c=1 \;\rightarrow\; c=0$이고,

$g'(0)=0 \;\rightarrow\; f'(0)=b=0$이므로 $f(x)=ax^2$임을 알 수 있습니다.

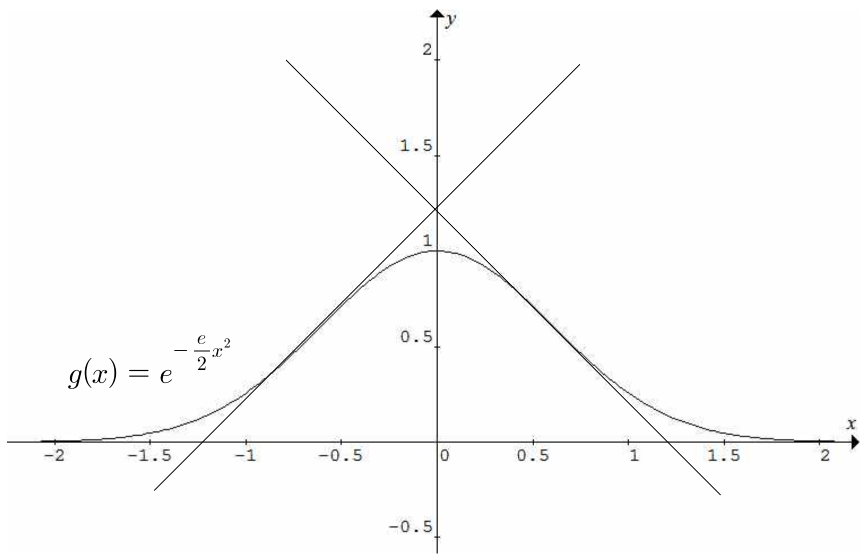
그러면 $g(x)=e^{ax^2}$는 y축 대칭이고, $f''(x)+\{f'(x)\}^2=4a^2x^2+2a=0$에서 $a<0$가 되어야 합니다. 고로, $a=-k\ (k>0)$이라 두면,

$f''(x)+\{f'(x)\}^2=4k^2x^2-2k=0$에서 변곡점의 x좌표는 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$이고,

변곡접선이 서로 수직이므로 $g'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right)=-1=\sqrt{2k}\,e^{-\frac{1}{2}}$에서

$2k=e \;\rightarrow\; k=\dfrac{e}{2}$가 됩니다. 따라서, 마저 계산하면

$f'(x)=-2kx=-ex$이므로 $20f'\left(-\dfrac{1}{e}\right)=20$이 최종 답이 됩니다.



[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 30번]

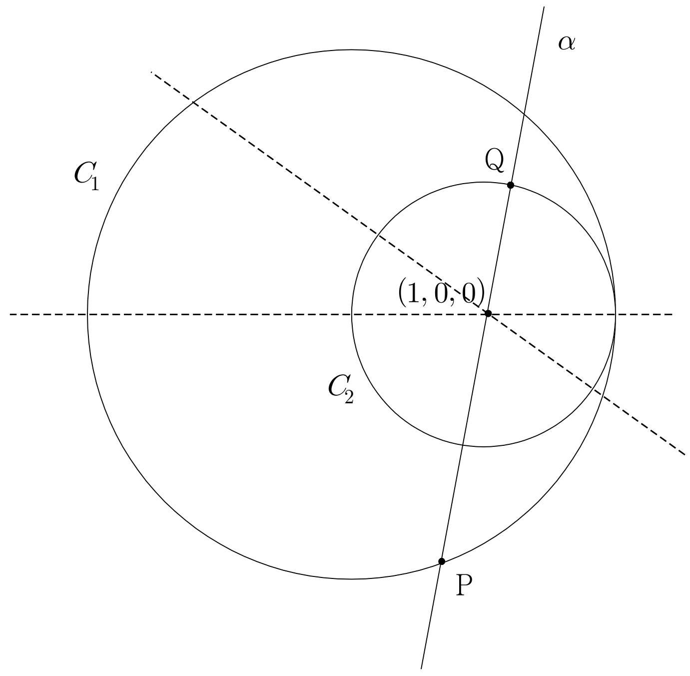
30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

30. [가급적 공간의 모든 정보를 담아내는 단면화]

sol)



이것도 사실 기출문제를 약간 변형한 것입니다.

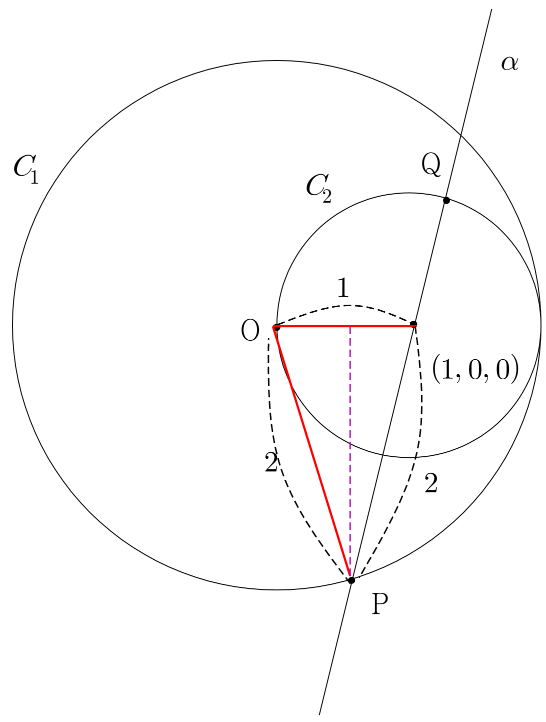
[2012년 09월 평가원 수리(가형) 27번]

27. 좌표공간에서 구

$$S:\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

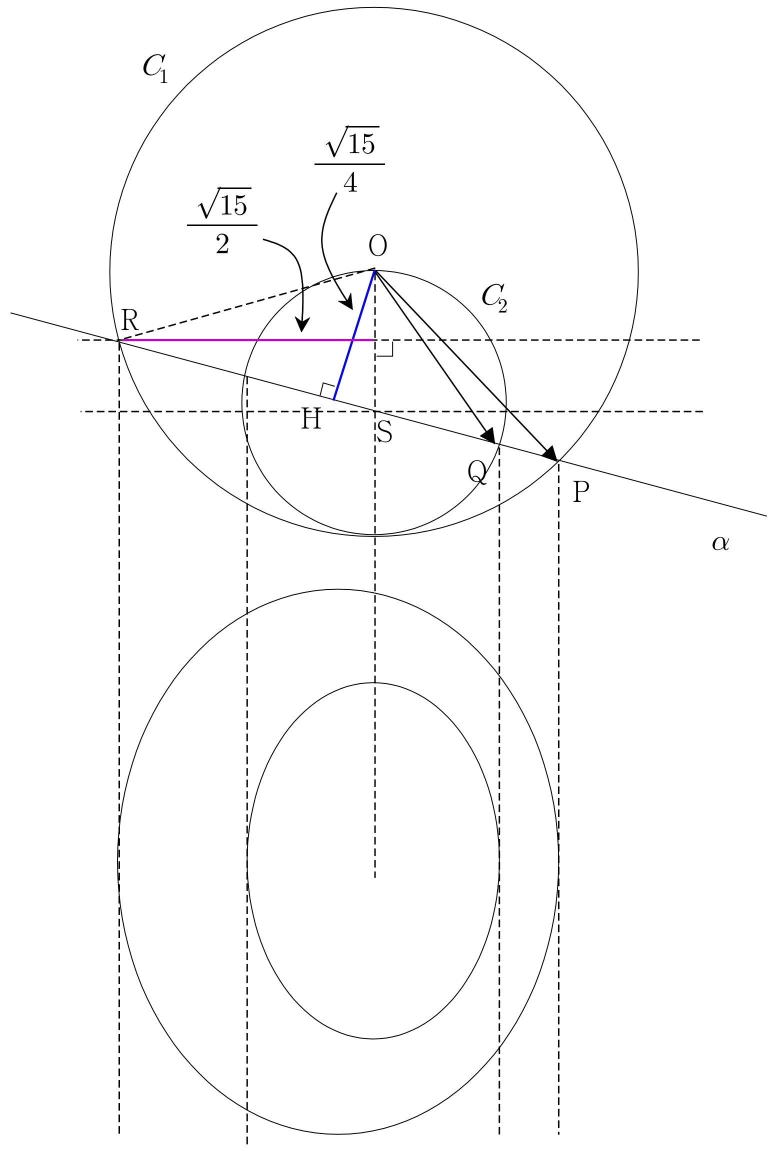
위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 구 S에 접하는 평면이 구 $x^2+y^2+z^2=16$과 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값은 $(a+b\sqrt{3})\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]

다만 지금은 평면 α가 고정되어 있습니다. 안 그러면 평면 α를 xy평면으로 생각했을 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값이 4가 될 수도 있기 때문이죠.

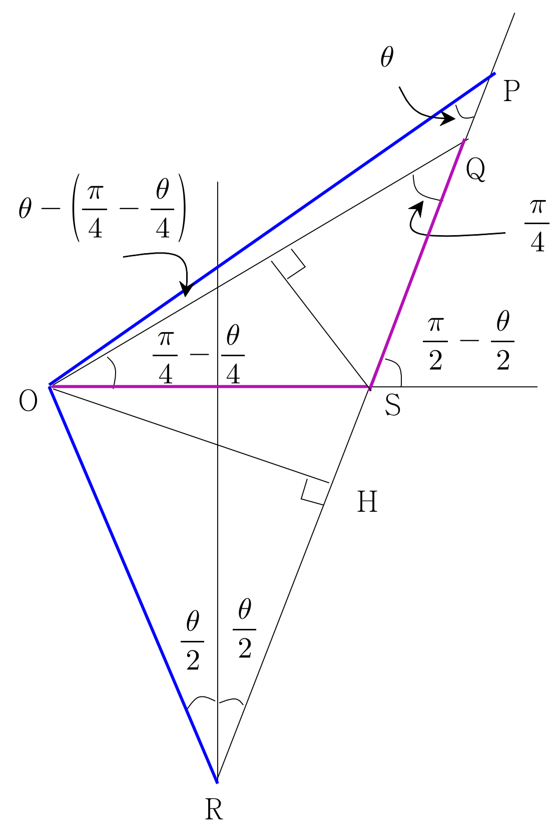


그림은 비록 2차원에서 머무르지만 우리들의 사고는 3차원에서 전개되어야 합니다. 그러면 위와 같이 평면 α와 두 구 C_1, C_2가 이루는 각각의 교원 위를 움직이고 있는 두 점 P, Q 간에 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값이 3인 순간을 포착할 수 있습니다. 그랬더니 아니나 다를까 이등변삼각형이 등장하네요!

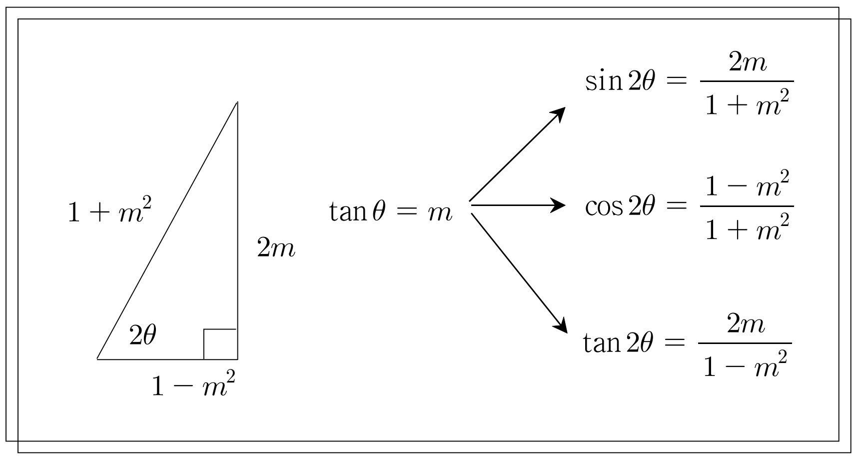
이제 곧바로 필요한 부분을 한 번 더 관찰해보면 다음과 같은 상황이 됩니다.



이때, $|\overrightarrow{OP}|=2$로 일정하고, $|\overrightarrow{OQ}|$는 위 그림과 같이 있을 때 최대가 됩니다. 그리고, 이때 사잇각에 대한 코사인 값을 마저 구하면 원하는 답을 얻을 수 있겠죠? 그러기 위해 아래와 같이 각도 관계의 파악이 선행되어야 합니다.



여기서 두 배 차이나는 각도 간에 삼각함수 값을 쉽게 구할 수 있는 바이어슈트라스 치환을 도입하면



그러면 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{15}}$이므로 $\cos\theta=\frac{7}{8}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$이고,

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{15}$를 얻습니다.

그리고 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=m$이라 하면 $\sqrt{15}=\frac{2m}{1-m^2}$에서

$(\sqrt{5}m-\sqrt{3})(\sqrt{3}m+\sqrt{5})=0$이므로 $m=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

또한 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

$|\overrightarrow{OQ}|=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$가 되어

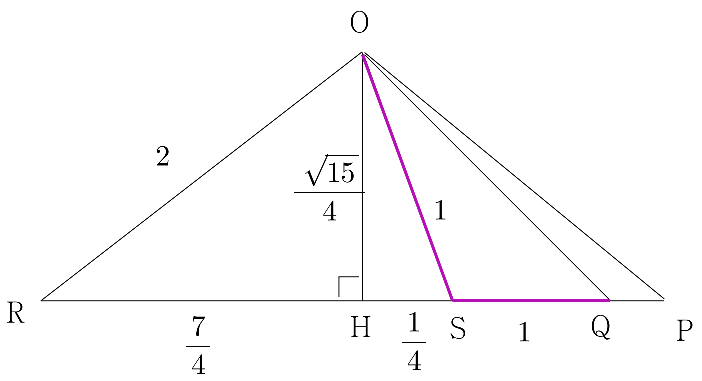
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\left\{\theta-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)\right\}$

$=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{5}(7\sqrt{5}+3\sqrt{5})}{16}$

$=\frac{50}{16}=\frac{25}{8}$

이므로 $p+q=33$이 답이 됩니다. 아무리 마지막 문제라지만 잔계산이 많아서 힘들었네요.

※ 각도 관계를 파악해서 구하는 방법 말고도 간단한 접근이 가능합니다!



이렇게 길이를 구한 다음 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}$와 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HQ}$로서 벡터를 직교 성분 분해를 하고서 내적을 살펴보면

$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP})\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HQ})=|\overrightarrow{OH}|^2+|\overrightarrow{HP}||\overrightarrow{HQ}|$

$=\frac{15}{16}+\frac{7}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{50}{16}=\frac{25}{8}$

이 되어 동일한 결과를 얻게 됩니다.