2014학년도 대수능 9월 모의평가 수학영역 A형 정답 및 해설

1.
출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$$4^{\frac{3}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 2^3 \times 2 = 16$$

<답> ④

2.
출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - A$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은
$3+2+1+1=7$

<답> ①

3.
출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$$

<답> ④

4.
출제의도 : 그래프와 행렬의 관계를 이해하는가?

그래프 G를 나타내는 행렬 M이 5차 정사각행렬이므로 그래프 G의 꼭짓점의 개수는 5이다.

$\therefore\ a=5$

행렬 M의 (i,j)성분과 (j,i)성분은 같으므로 가려진 부분 중 0인 성분은 $(1,4)$, $(3,4)$ 성분의 2개이다.

$\therefore\ b=9$

$\therefore\ a+b=5+9=14$

<답> ②

5.
출제의도 : 정적분을 구할 수 있는가?

$$\int_0^1 (4x^3+a)dx = [x^4+ax]_0^1$$
$$= 1+a = 8$$

$\therefore\ a=7$

<답> ②

6.
출제의도 : 이항분포에서 평균을 구할 수 있는가?

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{3}$$
$$\mathrm{E}(2X+5) = 2\mathrm{E}(X)+5$$
$$= 2\times\frac{n}{3}+5$$
$$= 13$$

$\therefore\ n=12$

<답> ③

7.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

$x \leq 1$ 또는 $x > 1$에서 $f(x)$는 각각 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉, $x=1$에서 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x)$$

$$1+2=-1+a$$

$$\therefore\ a=4$$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 로그의 성질과 점화식을 이해하고 있는가?

$$\log_2 a_{n+1} = 1+\log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2+\log_2 a_n$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2a_n$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n\,(n \geq 1)$$

$a_1 = 2$ 이므로 $a_n = 2^n\,(n \geq 1)$

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 &= 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^8 \\ &= 2^{1+2+3+\cdots+8} \\ &= 2^k \end{aligned}$$

$$\therefore\ k=1+2+3+\cdots+8=\frac{8\times 9}{2}=36$$

<답> ①

9.

출제의도 : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

학생 50명 중에서 임의로 선택한 1명이 1학년 학생인 사건을 A, 주제 B를 고르는 사건을 B라 하면

$$p_1 = P(B|A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$p_2 = P(A|B) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$\therefore\ \frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{5}$$

<답> ③

10.

출제의도 : 중복조합의 수를 이해하고 있는가?

구하는 순서쌍의 개수는

3부터 10까지의 8개의 자연수 중 중복을 허락하여 4개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_{8+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_{11}\mathrm{C}_4 = \frac{11\times 10\times 9\times 8}{4\times 3\times 2\times 1} = 330$$

<답> ④

11.

출제의도 : 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

상담 전화의 상담시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따른다.

이때, 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=20$

$V(\overline{X})=\frac{5^2}{16}=(\frac{5}{4})^2$

이므로 $\overline{X}$도 정규분포 $N(20,(\frac{5}{4})^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(19\le\overline{X}\le 22)$

$=P(\frac{19-20}{\frac{5}{4}}\le Z\le\frac{22-20}{\frac{5}{4}})$

$=P(-0.8\le Z\le 1.6)$

$=P(0\le Z\le 0.8)+P(0\le Z\le 1.6)$

$=0.2881+0.4452=0.7333$

<답> ②

12.

출제의도 : 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식을 증명할 수 있는가?

$a_k=2^k+\frac{1}{k}$이므로

$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}$

$=2k\left(2^k+\frac{1}{k}\right)-\frac{k+2}{k+1}$

$=\boxed{k2^{k+1}+2}-\frac{k+2}{k+1}$

$=k2^{k+1}+\boxed{\frac{k}{k+1}}$

이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식은 각각 $k2^{k+1}+2$, $\frac{k}{k+1}$이므로

$f(k)=k2^{k+1}+2,\ g(k)=\frac{k}{k+1}$

$\therefore f(3)\times g(4)=(3\times 2^4+2)\times\frac{4}{5}=40$

<답> ⑤

13.

출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

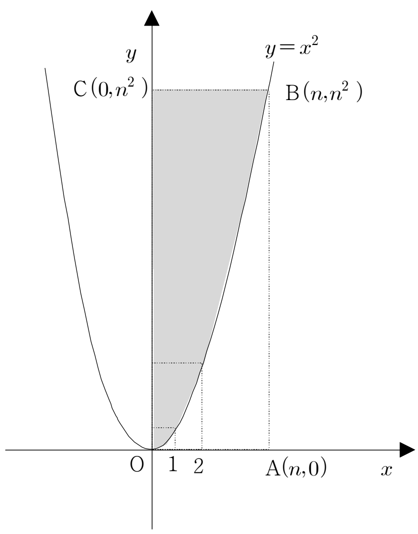
$$\int_0^4\left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\int_0^4\left(\frac{3}{4}x^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^3\right]_0^4=16$$

<답> ②

14.

출제의도 : 일반항 a_n을 추론하고 수열의 극한을 계산할 수 있는가?



직사각형 OABC 또는 그 내부에 있고 부등식 $y\ge x^2$을 만족하는 점의 개수를

점의 x좌표에 따라 구분하여 구하면 다음과 같다.

x좌표가 0일 때, n^2-0^2+1 개

x좌표가 1일 때, n^2-1^2+1 개

x좌표가 2일 때, n^2-2^2+1 개

$\vdots$

x좌표가 n일 때, n^2-n^2+1 개

$$\therefore\ a_n=\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2+1)$$

$$=n^2+1+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=n^2+1+n(n^2+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{4n^3+3n^2+5n+6}{6}$$

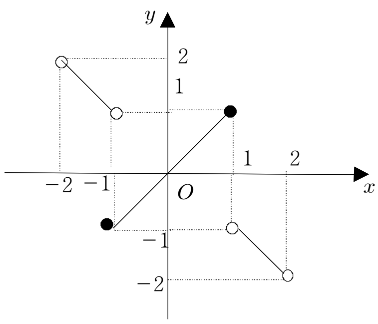
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2+5n+6}{6n^3}=\frac{2}{3}$$

<답> ③

15.

출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$$\therefore\ \lim_{x\to-1+0}f(x)+\lim_{x\to2-0}f(x)$$

$=-1+(-2)=-3$

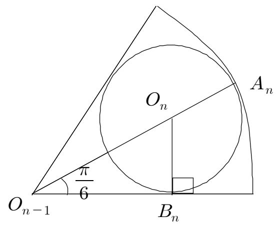
<답> ①

16.

출제의도 : 반복되는 도형에서 무한등비급수를 적용하여 그 합을 구할 수 있는가?

$$S_1=\pi-4\times\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

[그림 n]에서 제일 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면



$$r_{n-1}=\overline{O_{n-1}A_n}=\overline{O_{n-1}O_n}+\overline{O_nA_n}$$

$$=\frac{\overline{O_nB_n}}{\sin\frac{\pi}{6}}+\overline{O_nA_n}$$

$$=2r_n+r_n$$

$$\therefore r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}\ (n\ge2),\ r_1=1$$

따라서 [그림 n]에서 제일 작은 원의 개수는 4^{n-1}, 반지름의 길이는 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$S_n=S_1+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times S_1+\cdots+4^{n-1}\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2\times S_1$$

$$=S_1+\frac{4}{9}\times S_1+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\times S_1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}\pi$$

<답> ③

17.
출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식이 주어진 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때, 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g 이므로

$\log\frac{4}{10}=-1+k\log 8$

$3k\log 2=\log\frac{4}{10}+1=\log(\frac{4}{10}\times 10)$

$=\log 4=2\log 2$

$\therefore\ k=\frac{2}{3}$

따라서, 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 x라 하면

$\log\frac{x}{20}=-1+\frac{2}{3}\log 27=\log\frac{(27)^{\frac{2}{3}}}{10}=\log\frac{9}{10}$

$\frac{x}{20}=\frac{9}{10}$

$\therefore\ x=18$

<답> ⑤

18.
출제의도 : 역행렬을 구하고 역행렬의 성질을 이해할 수 있는가?

ㄱ. $2A-A^2B=E$에서
$A(2E-AB)=E$
$\therefore\ A^{-1}=2E-AB$ (참)

ㄴ. $A^{-1}=2E-AB$ 에서 각 변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면
$E=2A-AAB$ …㉠
$A^{-1}=2E-AB$ 에서 각 변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면
$E=2A-ABA$ …㉡
㉠, ㉡에서 $AAB=ABA$ …㉢
㉢의 각 변의 왼쪽에 A의 역행렬 A^{-1}를 곱하면
$AB=BA$ (참)

ㄷ. $2A-A^2B=E$에서
$A=\frac{1}{2}(E+A^2B)$
$=\frac{1}{2}(E+BA^2)(\because\ AB=BA)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<답> ⑤

19.
출제의도 : 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 구할 수 있는가?

확률변수 X는 정규분포 $N(\frac{3}{2},2^2)$을 따르므로

$H(0)=P(0\le X\le 1)$

$=P(\frac{0-\frac{3}{2}}{2}\le Z\le\frac{1-\frac{3}{2}}{2})$

$=P(-0.75\le Z\le -0.25)$

$=P(0.25\le Z\le 0.75)$

$=P(0\le Z\le 0.75)-P(0\le Z\le 0.25)$

$=0.2734-0.0987=0.1747$

또한, $H(0)=H(2)$ 이므로

$H(0)+H(2)=2\times H(0)=0.3494$

<답> ①

20.

출제의도 : 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가?

$10^n < a < 10^{n+1}$에서

$n < \log a < n+1$

$\log a = n+\alpha \quad (0<\alpha<1)$라고 놓으면

$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a = \frac{1}{n}(n+\alpha) = 1+\frac{\alpha}{n}$

$\log a$와 $\log \sqrt[n]{a}$의 가수의 합이 정수이므로 $\alpha + \frac{\alpha}{n} = 1$

$\therefore \ \alpha = \frac{n}{n+1}$

또한 $(n+1)\log a = n^2+8$ 에서

$(n+1)(n+\alpha) = n^2+8$

$(n+1)\left(n+\frac{n}{n+1}\right) = n^2+8\left(\because \alpha = \frac{n}{n+1}\right)$

$2n = 8$

$\therefore \ n=4, \ \alpha = \frac{4}{5}$

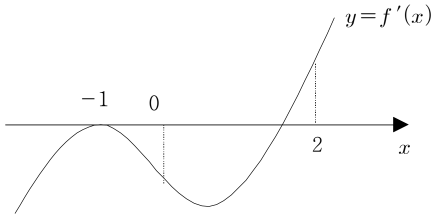
$\therefore \ \frac{\log a}{n} = \frac{4+\frac{4}{5}}{4} = \frac{6}{5}$

<답> ④

21.

출제의도 : 도함수 $f'(x)$를 이해하고 $f'(x)$를 통하여 $f(x)$의 증가와 감소를 판단할 수 있는가?

$f'(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$이고 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



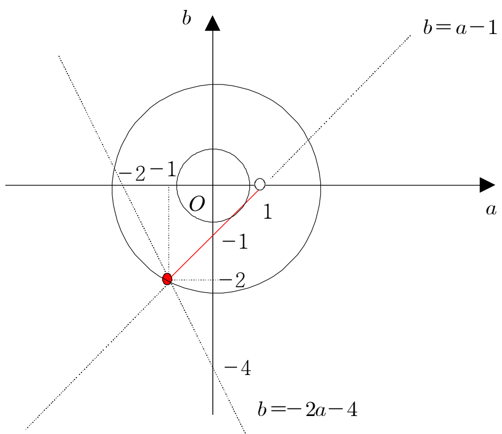
즉,

$(-1)^2 - a + b = 0, \ b = a-1 \cdots$㉠

$f'(0) = b < 0 \cdots$㉡

$f'(2) = 3(4+2a+b) \geq 0, \ b \geq -2a-4 \cdots$㉢

따라서, ㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 실수 a, b의 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, $a^2+b^2 = r^2 \cdots$㉣라 하면 ㉣이 직선 $b=a-1$에 접할 때 r^2은 최소가 되고, ㉣이 점 $(-1, -2)$를 지날 대, r^2은 최대가 된다.

$M = (-1)^2 + (-2)^2 = 5$

$m = (\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \ M+m = \frac{11}{2}$

<답> ③

22.

출제의도 : 수열의 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+28n}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28n}{\sqrt{n^2+28n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28}{\sqrt{1+\frac{28}{n}}+1}$$

$=14$

<답> 14

23.

출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=21x^2-a$ 이므로

$f'(1)=21-a=2$

$\therefore\ a=19$

<답> 19

24.

출제의도 : 행렬을 이용하여 연립일차 방정식의 해를 구할 수 있는가?

$A\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$=B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $(\because\ AB=E)$

$=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

$\therefore\alpha=4$, $\beta=8$

$\therefore\alpha+\beta=4+8=12$

<답> 12

25.

출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

$(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$ 에서

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$

따라서, $\log_3 x=t$라 하면

$t^2-3t+2=0\cdots$㉠

이고 ㉠의 두 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=\log_3\alpha\beta=3$

$\therefore\ \alpha\beta=3^3=27$

<답> 27

26.

출제의도 : 이항계수를 이용하여 수열의 일반항을 구하고 극한을 계산할 수 있는가?

$$a_n={}_nC_3\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}=\frac{n^2-3n+2}{6n^2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{n^2-3n+2}=6$$

<답> 6

27.

출제의도 : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$y'=3x^2+2$ 이므로 접선의 방정식은

$y-4=5(x+1)$, $y=5x+9$

따라서 곡선 $y=x^3+2x+7$과 접선 $y=5x+9$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x+7=5x+9$, $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

즉, $a=2$, $b=19$ 이므로

$a+b=21$

<답> 21

28.

출제의도 : 정적분과 미분법을 활용할 수 있는가?

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면

$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2-2kx \cdots$ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)dt=1-2-2k=k$

$\therefore k=-\dfrac{1}{3}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x-2k$

$\quad =3x^2-4x+\dfrac{2}{3}$

$\therefore f(0)=a=\dfrac{2}{3}$

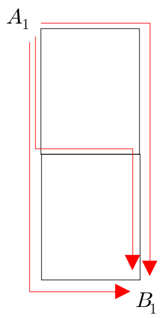
$\therefore 60a=60\times\dfrac{2}{3}=40$

<답> 40

29.

출제의도 : 최단경로의 수를 구하여 규칙을 찾을 수 있는가?

[그림1]에서 최단거리로 가는 경로는 그림과 같다.



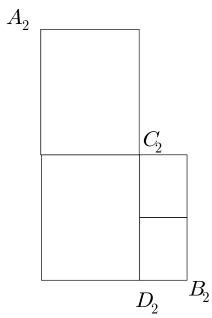
$\therefore\ a_1=3=2^2-1$

[그림2]에서 C_2, D_2 의 지점을 표시하면 최단거리로 가는 경로는

$A_2 \to C_2 \to B_2$

또는

$A_2 \to D_2 \to B_2$ (단, C_2를 지나지 않는다)



$\therefore\ a_2=2\times3+1\times1=7=2^3-1$

[그림3]에서 C_3, D_3, E_3 의 지점을 표시하면 최단거리로 가는 경로는

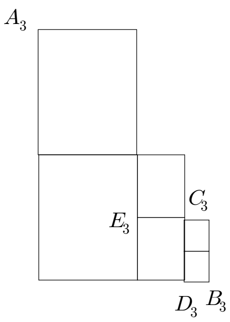
$A_3 \to C_3 \to B_3$

 또는

$A_3 \to E_3 \to D_3$ (단, C_3을 지나지 않는다.)

 또는

$A_3 \to D_3 \to B_3$ (단, C_3, E_3을 지나지 않는다.)



$\therefore\ a_3 = 2\times 2\times 3 + 2\times 1 + 1\times 1$

$\quad = 15 = 2^4 - 1$

같은 방법으로 계속해서 나타내면

$a_n = 2^{n+1} - 1$

이므로 $a_7 = 2^8 - 1 = 255$

<답> 255

30.

출제의도 : 부등식의 성질을 이용하여 일반항을 구하고 분수꼴의 수열의 합을 구할 수 있는가?

$4^k - (2^n + 4^n)2^k + 8^n \le 1 \quad \cdots ㉠$

$(2^k - 2^n)(2^k - 2^{2n}) \le 1$

$f(k) = 2^k - 2^n$, $g(k) = 2^k - 2^{2n}$라고 하자.

ⅰ) $k < n$ 일 때

$f(k) < -1$, $g(k) < -1$ 이므로

 $f(k)g(k) > 1$

ⅱ) $n \le k \le 2n$ 일 때

$f(k) \ge 0$, $g(k) \le 0$ 이므로 $f(k)g(k) \le 1$

ⅲ) $k > 2n$ 일 때

$f(k) > 1$, $g(k) > 1$ 이므로 $f(k)g(k) > 1$

따라서 부등식 ㉠을 만족하는 자연수 k는 $n, n+1, n+2, \cdots, 2n$이고 그 합은 초항이 n, 끝항이 $2n$, 항의 개수가 $n+1$인 등차수열의 합이므로

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{20} \frac{2}{3n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+ \cdots + \left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{21}\right)$$

$$= \frac{40}{63}$$

$\therefore p = 63$, $q = 40$

$\therefore p + q = 63 + 40 = 103$

<답> 103