제 2교시

2015학년도 카이독 수능 대비 직전 모의고사

수학 영역
(B 형)

성명		수험번호	-

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

점수보다 등급이 더 높네

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

수학 영역(B형)

제 2교시

홀수형

5지선다형

$1.$ 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $3A$의 모든 성분의 합이 12일 때, a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2.$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때, $\cos 4\theta$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

$3.$ 좌표공간의 점 $A(a, b, c)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점의 좌표가 $(2, 2, 2)$이다. $a+b+c$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$4.$ 무리방정식

$$x^2-2(\sqrt{x^2-2x-1}+x)=0$$

의 모든 실근의 곱을 구하면? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

5. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$f(\ln x) = x^2 + g\left(\frac{e}{x}\right)$$

를 만족시킨다. $f'(1) = g'(1) = k$ 일 때, k의 값은? [3점]

① $\frac{e}{4}$ ② $\frac{e}{2}$ ③ e ④ e^2 ⑤ e^3

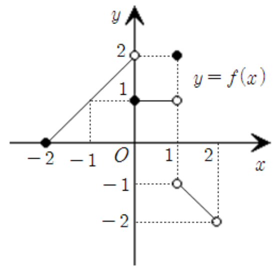
6. 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르고

$$E(X) = 6,\ \ E(X^2) = V(3X+1)$$

를 만족시킨다. n의 값은? [3점]

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

7. 구간 $[-2, 2)$에서 $y = f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$를 만족시킬 때,

$\lim_{x \to 12+0} (f \circ f \circ f)(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 원 $C:(x-a)^2+(y-a)^2=36\,(a>6)$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 점 P가 원 C 위의 다른 한 점으로 옮겨질 때, 이를 만족시키는 θ의 최댓값이 $\frac{\pi}{3}$이다. a의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이다.) [3점]

① $6\sqrt{2}$ ② $12\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$ ④ $24\sqrt{2}$ ⑤ $30\sqrt{2}$

9. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(x+x^2+\cdots+x^n)(x+1)^n$ 의 전개식에서 x^n의 계수가 63일 때, x^2의 계수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

10. $0\le x\le\pi$ 일 때, 자연수 n에 대하여 방정식

$$3\sin x=4\cos x+n$$

의 실근 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

11. 어느 학교에서 도보를 통해 등교를 하는 학생들의 비율을 알아보기 위하여 이 학교의 학생 중 100명을 임의 추출하여 조사한 결과 20명이 도보를 통해 등교를 한다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 학교 학생 전체의 도보를 통해 등교를 하는 학생의 비율에 대한 신뢰도 $x\%$의 신뢰구간이 $[a, b]$이다. $b=3a$일 때, x의 값을 오른쪽의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 68 ② 77 ③ 86 ④ 96 ⑤ 98

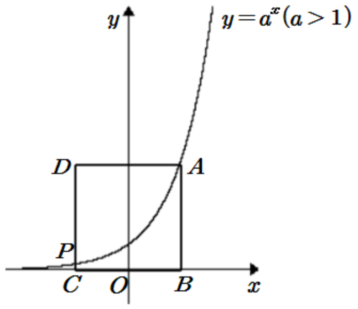
12. 구 $S_1 : x^2+y^2+(z-1)^2=9$ 위의 점 $(2, 2, 2)$에서 구 S_1과 접하는 평면 α가 구 $S_2 : (x-4)^2+(y-4)^2+(z-9)^2=r^2$ 와도 접할 때, r의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

[13 ~ 14] 그림은 $y=a^x(a>1)$의 그래프를 나타낸 것이다. 곡선 $y=a^x$ 위의 제 1사분면에 있는 점 A에 대하여 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. x축의 음의 방향 위에 점 C를 잡고, 제 2사분면에 점 D를 잡을 때, 곡선 $y=a^x$와 직선 CD와의 교점을 P라 하자. 사각형 $ABCD$는 정사각형이다.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



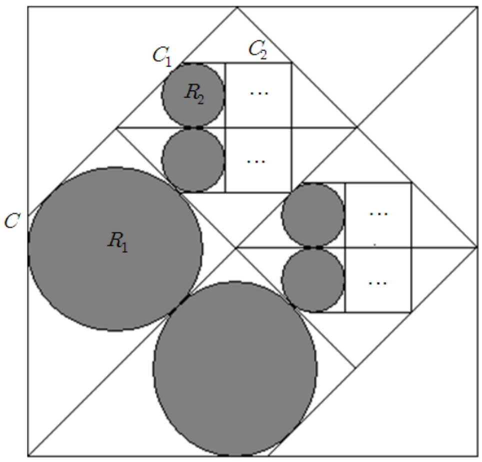
13. $a=2$이고, 직선 AP의 기울기가 $\frac{3}{4}$이다. 삼각형 ADP의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{9}{2}$

14. 곡선 $y=a^x$와 x축, y축 및 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하고, 곡선 $y=a^x$와 x축, y축 및 직선 CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{OB}=\overline{OC}$일 때, $S_1S_2=k(S_1-S_2)$를 만족시키는 실수 k의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)[4점]

① $\frac{1}{e^2}$　② $\frac{2}{e}$　③ $\frac{e}{2}$　④ $2e$　⑤ e^2

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 C에 대하여 정사각형 C의 한 대각선과 평행한 두 직선을 그을 때, 각 직선과 평행한 정사각형 C의 대각선과의 거리를 한 변의 길이로 하고 한 꼭짓점이 정사각형 C 위에 있도록 정사각형 C_1을 두 개 그릴 때, 정사각형 C의 한 변과 정사각형 C_1의 세 변의 연장선에 모두 접하는 원이 존재하는데, 이 때 그려지는 모든 원을 R_1이라 하자.
두 정사각형 C_1의 한 대각선과 평행한 두 직선을 그을 때, 각 직선과 평행한 정사각형 C_1의 대각선과의 거리를 한 변의 길이로 하고 한 꼭짓점이 정사각형 C_1 위에 있도록 정사각형 C_2를 두 개 그릴 때, 정사각형 C_1의 한 변과 정사각형 C_2의 세 변의 연장선에 모두 접하는 원이 존재하는데, 이 때 그려지는 모든 원을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 그려진 원 R_n의 둘레의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}+1}{3}\pi$ ② $\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3}\pi$ ③ $(\sqrt{2}+1)\pi$
④ $\frac{4(\sqrt{2}+1)}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5(\sqrt{2}+1)}{3}\pi$

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + (n+1)a_{n+1} = 6n^2$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에 의하여
> $\sum_{k=1}^{n-1} a_k + na_n = 6(n-1)^2 \ (n \geq 2)$
> 이므로 2 이상의 자연수 n에 대하여
> $(n+1)a_{n+1} = \boxed{(가)} \times a_n + 12n - 6$
> 이다. $b_n = n(n-1)a_n$이라 하면
> $b_{n+1} = b_n + \boxed{(나)} \ (n \geq 2)$
> 이고, $b_2 = 6$ 이므로
> $b_n = n(n-1) \times \boxed{(다)} \ (n \geq 2)$
> 이다. 그러므로
> $a_n = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ \boxed{(다)} & (n \geq 2) \end{cases}$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{g(10)}{f(6) \times h(6)}$의 값은? [4점]

① 15 ② 12 ③ 9 ④ 6 ⑤ 3

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

17. 상자 안에 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀있는 공이 모두 여섯 개 들어 있다. 철수와 영희가 번갈아가며 상자에서 공을 하나씩 꺼낼 때, 각자가 꺼낸 공에 적힌 모든 숫자의 합 또는 곱이 먼저 8이 된 사람이 이기는 게임을 한다고 하자. 철수가 게임에서 이길 수 있는 경우는 다음과 같다. 철수가 게임에서 이겼을 때, 상자 안에 남아 있는 공의 개수가 1일 확률은? (단, 꺼낸 공은 상자 안에 다시 넣지 않으며, 숫자 8이 완성된 순간 게임을 종료한다.) [4점]

	1회	2회	3회	4회	5회	6회	결과
철수	**2**	-	**6**	-	-	-	철수 승
영희	-	**5**	-	-	-	-	
철수	**1**	-	**2**	-	**4**	-	철수 승
영희	-	**3**	-	**6**	-	-	

① $\dfrac{14}{25}$ ② $\dfrac{16}{25}$ ③ $\dfrac{17}{25}$ ④ $\dfrac{18}{25}$ ⑤ $\dfrac{19}{25}$

18. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB = A - E, \quad (B^2 - B)^2 + E = O$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

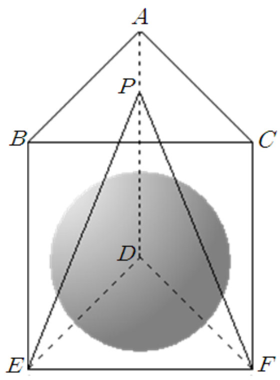
〈 보 기 〉

ㄱ. $AB = BA$
ㄴ. $A^2 = -B^2$
ㄷ. 모든 실수 t에 대하여 $A + tB$의 역행렬이 항상 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형을 밑변으로 하고 높이가 3인 정삼각기둥 $ABC-DEF$와 면 ABC를 제외한 정삼각기둥의 모든 면에 내접하는 구가 있다. 선분 AD 위를 움직이는 점 P에 대하여 면 PEF에 의해 잘린 구의 단면을 면 DEF에 내린 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]



① $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 그 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(x)$는 증가함수이고, 모든 실수 x에 대하여

$$ax+\int_1^x g(t)dt = a+\int_0^{g(x)} f(t)dt$$

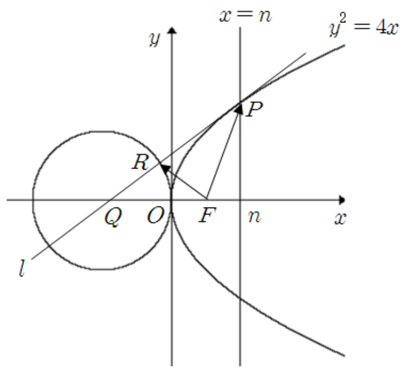
를 만족시킨다. $f(a)+g(a)=8$ 일 때, $f(a^2)+g(a^2)$의 값은?
(단, a는 $a>0$인 상수이다.) [4점]

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

21. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$와 직선 $x=n$ 과의 교점 중 제 1사분면 위에 있는 점을 P이라 하자. 점 P에서의 포물선에 접하는 직선 l이 x축과 만나는 교점을 Q이라 할 때, 점 Q을 중심으로 하고 선분 OQ을 반지름으로 하는 원과 직선 l과의 교점을 R이라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{FP}$, $\overrightarrow{FR}$에 대하여 함수 $f(n)$를

$$f(n)=(\text{내적 } \overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FR} \text{ 의 값})$$

이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

단 답 형

22. $\lim_{x\to1}\frac{\ln(100x-99)+x^2-1}{x-1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 f에 의하여 점 $(3,5)$가 점 $(1,2)$로 옮겨지고, 일차변환 f의 합성변환 $f\circ f$에 의하여 점 $(-3,-5)$가 점 $(0,1)$로 옮겨진다. 일차변환 f에 의하여 점 (a,b)가 점 $(3,5)$로 옮겨질 때, $b-a$의 값을 구하시오. [3점]

24. 어느 데이터 샘플에서 데이터 샘플에 있는 항목의 첫째 숫자가 $n\ (n=1, 2, 3, \cdots, 9)$일 확률을 p_n이라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$p_n = k\{\log 10(n+1) - \log 10n\}\ (\text{단, } k\text{는 상수이다.})$$

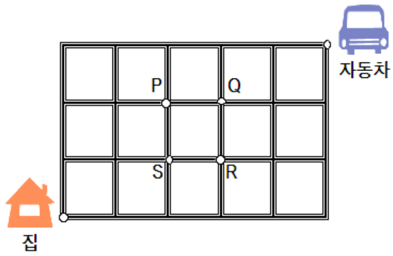
이 때, 10^{k+p_2} 의 값을 구하시오. (단, 데이터 샘플에 있는 항목에는 오류가 존재하지 않는다.) [3점]

25. 방정식

$$x^2 - 2kx + 9 = 0$$

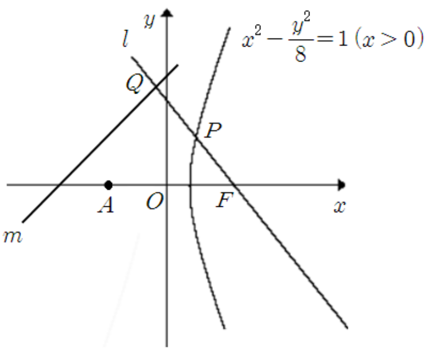
의 두 근을 α, β라 하자. 세 수 $\frac{1}{\alpha}$, k, 4β가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 도둑은 왼쪽 하단의 집에서 출발하여 한번 움직일 때 마다 길을 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 처음 P 지점에서 순찰을 돌고 있는 경찰은 도둑이 움직인 후 멈출 때 마다 낌새를 느끼고 < P → Q → R → S → P → ⋯ > 의 경로를 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 예를 들어, 처음 도둑이 네 번 움직일 동안, 경찰은 순찰을 한 바퀴 돌고 다시 P 지점으로 돌아오게 된다. 도둑이 범행을 저지른 집에서 출발하여 경찰을 따돌릴 수 있는 우측 상단의 자동차까지 경찰에 잡히지 않고 이동할 수 있는 최단 경로의 수를 구하시오. (단, 도둑은 경찰이 정지했을 때만 이동할 수 있고, 도둑과 경찰의 위치가 같을 때를 도둑이 잡힌 경우로 본다.) [4점]



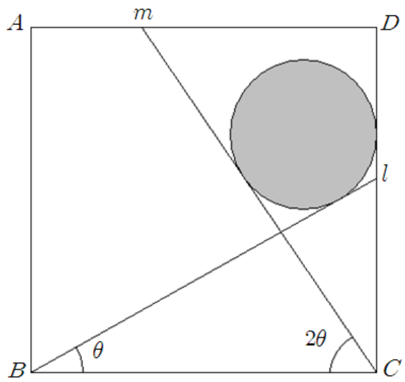
제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

27. 점 $F(3,\,0)$를 지나는 직선 l과 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1\ (x>0)$과의 교점을 P라 하자. 선분 FP를 $2:1$로 외분하는 직선 l 위의 점 Q에서 그은 직선 l의 수선을 m이라 하자. 점 $A(-3,\,0)$에 대하여 점 A와 직선 m 사이의 거리가 2이다. $\overline{FQ}=k$ 라 할 때, k^2의 값을 구하시오. (단, 직선 l의 기울기는 음수이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



28. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$에 대하여 각각 점 B, C를 지나는 두 직선 l, m이 선분 BC와 이루는 각의 크기가 각각 θ, 2θ이다. 두 직선 l, m과 직선 CD에 모두 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)^2}=(p+q\sqrt{2})\pi$ 이다.

p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]

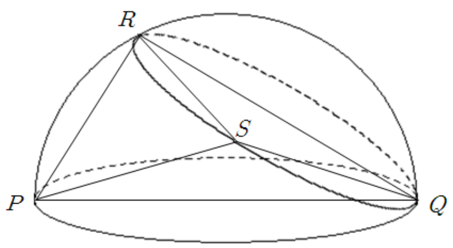


29. 최고차항의 계수가 1이고 $f''(2)>0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=|f(x)|$라 하자. 모든 실수 t에 대하여 함수 $|g(x)-t|$의 미분불가능한 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(8)=2$
(나) $\lim_{t\to\infty}(f\circ h)(t)=0$

$f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 길이가 2인 선분 PQ를 지름으로 하고 평면 α 위에 있는 원 C_1을 밑면으로 하는 반구가 있다. 원 C_1 위의 점들 중 점 Q만을 지나는 평면 β에 의해 반구가 잘린 단면인 원을 C_2라 할 때, 점 Q와 원 C_2의 중심을 잇는 선분의 연장선과 원 C_2와의 교점 중 점 Q가 아닌 점을 R이라 하자. 세 점 P, Q, R과 원 C_2 위의 점 S가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) 평면 PRQ와 평면 PRS가 이루는 각의 크기와 평면 PSQ와 평면 RSQ가 이루는 각의 크기가 같다.
(나) 사면체 $PQRS$의 부피가 $\frac{1}{4}$이다.

평면 α와 평면 β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $120\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 점 S는 점 Q, R과 다른 점이다.) [4점]

제작자 : 카이독 (siwxjed33@naver.com)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.