



Hyper Math

수능 수학 최고난이도 평가

B형 4회

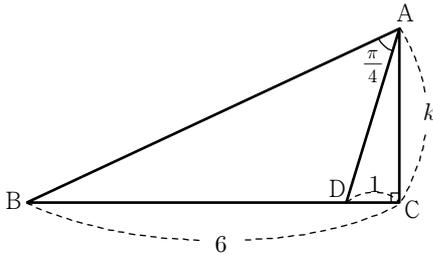
- 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고,
또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 배점은 3점 또는 4점이고, 총점은 50점입니다.
- 시험 시간은 총 50분입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.
- 이 문제지에 관한 저작권은 “청솔학원”에 있습니다.

5지선다형

1. 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$.

$\angle BAC > \frac{\pi}{4}$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{AC} = k$ 이다. 변 BC 위의 점

D에 대하여 $\angle BAD = \frac{\pi}{4}$, $\overline{CD} = 1$ 일 때, 모든 k의 값의
 곱은? [3점]



- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

2. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ 에 대하여 함수 $y = f(2x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(2x) - g(x)}{2x - 1} = \frac{3}{4}$ 일 때, $a - b$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{13}{2}$
- ② $\frac{11}{2}$
- ③ $\frac{9}{2}$
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ $\frac{5}{2}$

3. 그림과 같이 사분원 $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$)의 호의

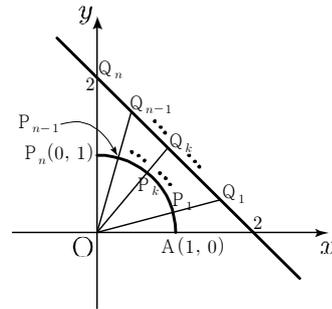
길이를 n등분한 각 분점(양끝점도 포함)을 차례로

$A(1, 0), P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n(0, 1)$

이라 하고, 직선 OP_k ($k=1, 2, \dots, n$)와 직선

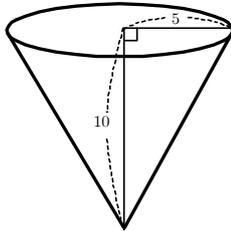
$x + y = 2$ 의 교점을 Q_k 라 하자. 선분 OQ_k 의 길이를 a_k 라

할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{a_k}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

4. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 10인 직원뿔 모양의 빈 용기가 있다. 이 용기에 다음 조건을 만족시키면서 물을 붓는다.



(가) 수면의 높이의 변화율은 물을 붓는 시간에 비례한다.

(나) 1초 후 수면의 반지름의 길이는 $\frac{1}{4}$ 이다.

이때, 2초 후 용기에 채워지는 물의 부피의 시간에 대한 변화율은? [4점]

- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π
 ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

5. 곡선 $y = -2^x$ 을 y 축의 방향으로 적당히 평행이동시킨

곡선을 $y = f(x)$ 라 하자. x 축과 곡선 $y = 2^x$ 이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 B의 x 좌표는 n 이 된다. 점 A를 지나고 y 축과 평행한 직선과 두 곡선 $y = f(x)$, $y = 2^x$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$ 의 값은? (단, n 은 자연수) [4점]

- ① $\frac{1-\ln 2}{\ln 2}$ ② $\frac{1-\ln 2}{2\ln 2}$ ③ $\frac{\ln 2}{1-\ln 2}$
 ④ $\frac{2\ln 2}{1-\ln 2}$ ⑤ $\frac{\ln 2}{2(1-\ln 2)}$

6. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x+2}$ 에 대하여 $g(x) = f(f(x))$ 라 할

때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ [4점]

<보 기>

- ㄱ. 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점은 2개다.
- ㄴ. x 의 방정식 $f'(x) = 1$ 의 실근은 2개다.
- ㄷ. 함수 $g(x)$ 는 $x < 0$ 에서 극댓값을 가진다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

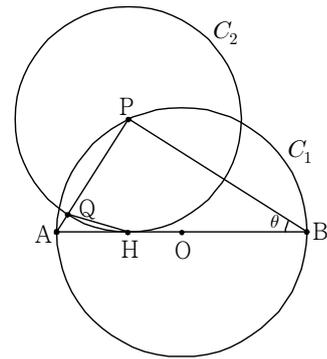
단답형

7. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고

중심이 O인 원 C_1 이 있다. 원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\angle PBA = \theta$ 라 하고, 선분 AB와 점 H에서 접하고 중심이 P인 원 C_2 와 선분 AP의 교점을 Q라 하자.

$\overline{AH} = \frac{15}{32}$ 일 때, \overline{QH} 의 값을 구하면 $\frac{b\sqrt{15}}{a}$ 이다.

$a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

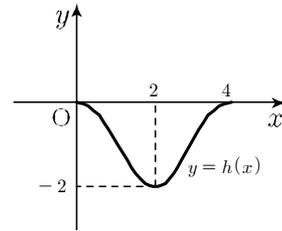


8. 함수 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 의 그래프 위의 점 $A(0, 1)$ 에서 출발하여 이 그래프 위를 움직이는 점 P 가 있다. 점 P 의 x 좌표가 계속 증가하여 곡선을 따라 움직인 거리가 $4\sqrt{3}$ 일 때, 점 P 의 y 좌표를 구하시오. [4점]

9. 감소함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x + 4$ 와 $x = 0, 2, 4$ 에서만 만난다. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$$

라 할 때, $0 \leq x \leq 4$ 에서 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



- $h(2) = -2$ 이고 $\int_2^4 f(x) dx = \frac{7}{2}$ 일 때, $\int_0^4 f(x) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

10. $x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{6e}x & (x \leq t \text{일 때}) \\ \frac{\ln x}{x^n} & (x > t \text{일 때}) \end{cases}$$

로 주어진다. 함수 $y = f(x)$ 가 $x = t$ 에서 미분가능하도록 하는 양의 정수 a, n 에 대하여 $a+n$ 의 최댓값을 구하시오. (단, e 는 자연로그의 밑이다.) [4점]

11. 좌표평면에서 곡선 $y = x^2$ 위의 두 점 A, B의

x 좌표를 각각 s, t ($0 < s < t$)라 하자. 양수 k 에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 k 가 되도록 하는 점 (s, t) 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 x 좌표가 1인 점 P를 지나고 점 P에서 곡선 C 에 접하는 직선과 수직인 직선이 점 $(\frac{3}{2}, 0)$ 을 지날 때, $k = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 0는 원점이고, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[12 ~ 13]

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf'(x) - f(x) = x \sin x + \cos x$$

를 만족할 때 다음 두 물음에 답하시오.

12. 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점 중에서 x 좌표가 최소의

양수인 점에서의 접선의 기울기가 2일 때, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의

값은?

[3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

13. $\int_0^\pi f(x)dx = \pi^2$ 일 때, $\int_0^\pi x^2\{f(x) - 2x\}dx$ 의 값은?

[4점]

- ① -2π ② $-\pi$ ③ 0
- ④ π ⑤ 2π