MAGIC

MAth & loGIC

Open Math Project Team

Written by 솔로깡

PART 1

수리논술의 원리와 기본 논리

[MAth & loGIC - 開소리]

배움은 곧 힘이요, 능력이므로 결국 금전과 지식은 양의 상관관계를 보일 수밖에 없다. 지식에 금전적 가치를 부여할 수 있다고는 하나, 금전적 가치를 가진 자만이 지식을 독점하는 구도는 옳지 않다. 이러한 지식독점구도를 타파하기 위해서는 지식평등이 이루어져야 하며, 이는 누군가 자신의 시간적 손해를 감수하고서라도 금전적 이익을 득하지 않는 지식창출활동을 솔선할 필요가 있다는 것을 의미한다. — Project OMPT

칸토어는 '수학의 본질은 자유에 있다'는 명언을 남겼습니다. 하지만 이는 비단 수학에만 적용되는 것이 아닐 것입니다. 교육 자체의 본질은 사고의 자유뿐만 아니라, 배움에 있어서의 자유도 분명 있어야 할 것입니다. 하지만 여러 시중 교재들을 보면 권당 몇 만원씩 세트로 파는 교재들이 있고, 그 교재들이 수리논술에 도움이 되면 좋긴 한데, 실제로 수리논술을 다년간 분석해온 사람들의 눈에는 다소 짜깁기에 불과한 교재들인 경우가 대부분입니다. 수리논술 학원은 월 몇 백 만원씩 수강료를 납부해야 하며, 인터넷 강의는 프리패스 한 번 끊으면 수 십 만원은 기본이고 백 만원을 넘는 수준으로 강의료가 책정되기도 합니다. 그렇다고 그 컨텐츠가 사실 별다른 내용이 있는 것도 아니고, 일부 훌륭하신 선생님들의 명강의들이 분명 있긴 하지만 대부분의 수리논술 강좌는 그저 논제를 풀어주기만 하거나 논제에서 교훈을 이끌어내지 않고 '아이디어 제공'만 하는 경우들 뿐입니다. 이러한 상황에서, 일격필살 저자 분이신 허혁재님의 배려 하에 저 솔로깡과, 섭씨지벽 이 두 사람을 필두로 하여 '무료 수리논술/심화 수학 컨텐츠 제작 프로젝트'를 창설하였고, 프로젝트 이름 또한 Open Math Project Team, 줄여서 OMPT로 작명하였습니다. 이제 저는 작년 불안정했던 Project VT에서 올해 체계적으로 진행될 OMPT의 멤버로 수리논술 무료자료를 제작하게 되었으며, 이 교재는 그 발걸음의 서막이 될 것입니다.

부디 이 내용이 여러분들에게, 단지 깨어있는 척 하는 학생들의 개소리, 거짓된 소리가 아닌, 정말 순수한 동기로 외치는 열린 소리, 開소리로 다가갈 수 있기를 바랍니다.

교재 제작 및 오류 검토에 큰 도움 주신 (검토해주신 분들의 이름을 넣을 예정입니다.) 그리고 여러 자료들을 많이 제공해주고 옆에서 많이 도와준 지인분들께 모두 감사의 인사를 전합니다. 특히, **Project OMPT 창설 계기를 만들어주시고, 수험생들을 위해 무료로 자료 배포할 공간을 흔쾌히 만들어주신 허혁재님과 정성스럽게 표지를 만들어주신 따개비님께 특별히 감사의 인사를 전합니다.**

수리논술이란 무엇인가? 우리가 가장 제대로 알아야 할 근본적인 질문입니다. 대체적으로 수능 수학영역과 수리논술을 동일시하거나 '수능 수학영역 점수가 조금 더 높은 사람이 수리논술에서도 무조건 유리하다'는 착각을 하기도 합니다만, 사실 수능 수학영역과 수리논술은 근본적인 기본 개념과 유형 몇 가지를 공유할 뿐 사실상 매우 이질적인 시험입니다. 단편적으로 말씀드리면, 수능 수학영역은 문제를 얼마나 빨리 푸느냐, 어떤 방법을 쓰더라도 일단 답을 도출해내기면 하면 그 문제는 '정답'처리 되겠지만 수리논술은 사실상 답의 도출 그 자체보다는 답의 도출과정에 가장 중점을 두어야 합니다. 즉, 단순히 풀고, 답을 이끌어내는 과정만으로는 결코 좋은 점수를 얻을 수 없는 것입니다. 수리'논술'인 만큼 자신이 푼 내용을 잘 서술해야 하고, 논리적으로 아귀가 들어맞게 배열해야 합니다. 이는 수능경향에만 익숙해져있던 학생들에게는 다소 생소한 일일 것입니다.

약 4~5 년간의 수리논술 공부를 통해 얻은 것은 문제를 푼다는 것 이상의, 문제를 풀고 그것을 논리적으로 서술한다는 것 그 자체였습니다. 본인은 일반 고등학교 학생이 아니었고, 고등학교 특성상 학생들의 지원 전형이 모두 논술 혹은 면접으로 선발하는 전형들이기에 학교 수업 자체가 모두 수리논술 및 심층면접에 중심을 두어 진행되었습니다. 하지만, 일반적인 고등학교는 전혀 그런 실정이 아님을 잘 알고 있습니다. 막상 수리논술 문제를 앞에 두면 '어렵다', '막막하다' 혹은 '그냥 풀면 되는 것 아닌가'는 생각을 갖는 경우가 많은 이 시점에서 이 교재의 방향성은 **[수능공부를 중점으로 하고 있는 학생들에게 논술에 대한 방향성 또한 갖추게 한다.]**는 것이 될 것입니다. 조금 덧붙여서 본 교재의 방향성에 대해 설명해보도록 하겠습니다.

1. 수리논술은 단순히 고교 상위의 개념을 단편적으로 배운다고 되는 것이 아닙니다. 시중의 몇 교재들을 보면 단순히 고교과정 이상의 '자료'들 즉, 소스들만 집어넣어두고 그 소스의 활용과 정제는 수험생에게 맡기는 다소 안타까운 사례들이 많습니다. 본 교재는 고교 상위의 개념 중에서도 고교 과정만을 이용하여 이끌어 낼 수 있는 기초적인 수준들만을 다룰 것이며, 그 개념이 실제 문제에 어떻게 반영되는지 여러 대학 기출을 통해 알아볼 것입니다. 단순히 소스만을 갖춘 교재는 좋은 교재가 아닙니다. 이런 소스를 직접 정제하여, 기출과 함께 방향성을 부여해야만 정식적인 '정보'의 가치를 갖는 훌륭한 교재가 되는 것이 아닐까 생각합니다.

2. 수능과 기본 개념은 공유하지만, 본질적으로 중요시되는 부분이 상당히 이질적인 시험입니다. 수능공부와 곁들이면 효과가 좋지만, 수능공부와 결코 동일시되어서는 안 될 것입니다. 가령, 수능 수학영역에 익숙한 최상위권의 학생들 중에서 필요조건 혹은 충분조건 단일 증명과, 필요충분조건의 양 쪽 증명을 구분하지 못하는 사례가 의외로 많습니다. 이 외에도 수능 수학영역만을 대비하는 도중 간과하기 쉬운 부분들이 많기에, 이를 수리논술을 배우면서 다시 다져나갈 것입니다.

3. 수리논술은 말 그대로 '논술하는' 시험입니다. 문제를 풀었다는 사실은 중요하지 않습니다. 그 푼 과정을 어떻게 논리적으로 서술하여 남에게 설득력 있는 수학적 글을 쓰느냐, 이것이 가장 중요한 것입니다. 그런 의미에서 수리논술은 시중의 모 교재들처럼 단순히 소스만을 암기하거나 배우는 것에 그치지 않고 첨삭을 통해 적는 방법을 스스로 터득해야 합니다. 물론 독학을 전제로 하는 교재이기에 자가 첨삭이 될 정도로 여러 첨삭 요인들을 이 교재에 수록하고자 노력하고 있습니다.

4. 수능과는 다르게, 증명이 중요시되는 경우가 많습니다. 사실상 수학이 기본 공리들을 전제로 하여 정의들을 정립하고, 여러 Theorem(정리), Lemma(보조정리), Corollary(따름정리)등을 증명이라는 수단을 통하여 논리적 타당성이 전제된 상태에서 이끌어내는 것이기에 수리논술은 수학 그 자체에 가장 가까운 시험이라고 할 수 있겠습니다. 이러한 증명을 논리적 체계에 맞추어 머릿속에 잘 갖춘 사람들이 수리논술에서 좋은 성적을 거둘 수 있을 것입니다. 단순히 유형화시키고 패턴화 시키는 것 보다는 수학 자체의 본질적 시각이 필요합니다.

5. 수능과는 다르게, 부가문제들이 연달아 이어지는 경우가 많습니다. 차후에 본 교재에서도 다룰 것이지만, 우리는 이를 '계단식 구조'라고 하겠습니다. 이 계단식 구조는 간단히 말해서 1번 논제에서 사용된 풀이법이나 결론에 대한 사고의 확장을 통해 2번 논제를 해결하고, 1,2번 논제를 통합하여 다음 논제를 해결하는 형식입니다. 돌려서 말하면, 이 전의 문제를 풀지 못한다면 계단을 못 올라가듯이 다음 계단으로 나아갈 수 없으며, 난이도 또한 계단을 올라가듯, 점차 어려워지는 경향이 있습니다.

6. 본 교재는 연세대/한양대 파이널 대비를 위한 교재이며, 수능 수학영역에 대한 기본 개념 대비가 이루어지지 않은 학생들을 독자로 설정하여 작성하지 않았습니다. 즉, 교과서 개념에 대한 학습이 아직 완벽하지 않은 분들은 본 교재의 공부를 차후로 미루시는 것이 좋을 것입니다. 본 교재는 고등학교 교육과정에 해당하는 부분들을 모두 설명하지는 않을 것이며, 논제 분석 위주로 진행될 것임을 미리 알려드립니다. 또한 본 교재의 내용들은 사실상 거의 모든 학교의 수리논술에 적용되므로 타 학교 대비를 원하시는 분들께서도 가볍게 보시면 큰 도움 받으실 수 있을 것입니다.

7. 여러분들은 수능대비를 하며 기초적인 문제 해결 능력을 길러오셨고, 이를 굳이 수리논술에서 다시 연마한다는 것은 Final대비 교재가 아닌, 수리논술 기초 교재의 역할일 것입니다. 이러한 기초 교재를 지금 펼쳐보기에는 다소 늦은 시점이며, 이 상황에서 여러분들이 하실 수 있는 최선 혹은 최고의 방법은 수리논술과 수능 수학영역 사이에서 다른 부분들을 중점으로, 과연 수리논술이 어떤 것이며, 지원 대학에서는 어떠한 경향으로 문제가 출제되었는지 잘 파악하는 것입니다. 이를 위해서는 일단 수리논술의 기본 구조 및 형식, 작성법, 논증법등에 대한 이야기를 다루어야 할 것이며, 대학별 기출문제들을 직접 풀어보고, 타 학교 기출문제 중 도움이 될 만한 것들을 풀어보아야 할 것입니다. 이 교재의 목적은 어디까지나 '수리논술 최종 대비'임을 잊지 말아야 합니다. 본 교재는 수리논술 기본 개념 교재가 아닙니다. 연세대와 한양대 수리논술이 얼마 남지 않은 시점에서 조금이라도 더욱 수능 수학영역 공부를 기반으로 한 해결능력과 수리논술의 독자적인 이야기만을 서술하여 효율적인 공부가 될 수 있도록 하기 위한 일종의 '시험 직전 지침서'에 가깝습니다.

8. 독자는 본 저작물을 비상업적인 개인 용도로 인쇄할 수 있습니다. 독자는 이 저작물의 인쇄물이나 파일을 타 사이트, 혹은 타인에게 배포할 수 없습니다. 타 저작물에 지은이의 동의 없이 끼워서 배포할 수 없습니다. 본 저작물이 상업적으로 사용될 가능성을 고의적으로 제공하는 행위를 할 수 없습니다. 본 저작물의 파일을 타인이 임의로 접근할 수 있는 매체에 저장하거나 사이트에 게시할 수 없습니다. 이 외의 언급되지 않은 용도로 본 저작물을 사용할 수 없습니다. **저작권법에 의한 본 게시물에 첨부된 파일의 무단복제, 배포를 절대 금지합니다. 해당 게시물을 개인 학습용으로만 사용하시고, 상업적 용도로 사용하지 마십시오.**

9. 네이버/오르비 등에서 본 교재에 대한 질문을 잘 받지 않을 수도 있습니다.

본 교재는 특수 몇 대학의 수리논술을 대비하기 위한 교재가 아닌, 단순히 수리논술 대비 막바지에 관점의 전환을 급격히 유도하는 교재입니다. 절대 이 교재 하나만으로 수리논술을 대비하지 마십시오. 적당한 Final 강의 하나 정도는 함께 이용하시거나, 그럴 경제적 여건이 되지 않으신다면 ebsi의 무료강의들 혹은 직접 논제를 몇 개년 정도 프린트하셔서 함께 보십시오. 다시 강조 드립니다만, 절대로 이 교재 하나만으로 수리논술을 완벽히 대비하시려는 생각은 하지 마십시오. 본 교재는 수리논술 완벽 대비 교재가 아닌, 단순히 끝마무리용 수리논술 Final 교재일 뿐입니다. 지원 대학의 논제를 풀어보는 것이 이 교재를 보는 것보다 더 중요할 수 있습니다.

[Magic 0 - 수학, 그리고 논리]

수학이란 기본적으로 공리의 내용이 논리적으로 서술되는 학문입니다. 수학적 진술은 명제와 집합의 언어로 논리성에 맞게 잘 맞추어져 있으며, 이러한 명제의 기본 성질을 이해하는 것이 곧 수학을 잘 이해하는 것입니다. 수리논술 교재에서 뜬금없이 논리타령 한다고 생각하실 수도 있겠지만, 사실 논리체계의 성립은 수리논술에 있어서 매우 중요합니다. (이는 이 교재를 끝내실 때 즈음에 알게 되실 겁니다.)

이 수학의 내용들은 증명의 과정을 통해 당위성을 부여받습니다. 증명을 통해 주어진 내용이 참인지, 혹은 거짓인지 판별할 수 있게 되고, 이 증명을 하기 위해서는 주어진 '조건'들을 잘 분석해야 합니다. 가령 수리논술에서는 제시문이나 문제에서 제한 조건을 설정해줄 것이며 이 조건들을 응용하여 증명해내는 것이 되겠습니다. 사실 이러한 조건들이 성립함을 끊임없이 증명하여 역추적 하다보면 끝이 없다는 느낌을 받게 되실 수 있습니다. 혹은, 순환논증의 오류에 빠져 A를 B로 증명하고, B를 C로 증명하고, C를 A로 증명하는 논리적 오류를 범하게 될 수도 있습니다. 이는 곧 '수학에서 가장 본질적인 조건에 해당하는 것이 무엇인가'에 대한 논의로 확장 가능합니다. 즉, 증명을 하지 않을 정도로 가장 자명한 것이 무엇인가? 이 질문에 우리는 대답해야만 합니다.

수학에서는 이를 '공리'로 받아들입니다. 어떠한 개념을 정의하여 정립하기 위해서는 다른 정립된 개념이 필요한데, 그러한 개념 자체도 이미 타 개념에 의해 정의된 것이므로 결국 개념들의 나열이 이루어지며, 이렇게 계속하여 정의를 하다보면 언젠가는 더 이상 정의할 수 없거나, 정의할 필요가 없는 상태에 다다르게 됩니다. 이러한 개념을 '수학적 무정의 용어'라고 합니다. 마찬가지로, 수학에서 증명을 이어나가다보면 증명할 수 없고 정당성만을 판별할 수 있는 사실이 있으며 이를 '공리'라고 하게 되는 것입니다. 요컨대, 수학을 공부한다는 것은 이러한 공리를 기반으로 형성된 논리의 나열과 증명을 통해 정립된 새로운 정리들, 수학적 무정의 용어를 통해 정립된 다른 수학적 정의들을 퍼즐조각처럼 '논리의 흐름에 맞게' 짜맞추어나가는 과정인 것입니다. 요약하자면 다음과 같습니다. **(이해가 잘 되지 않으시는 분들께서는 본 단원을 가볍게 교양서적 보듯이 읽으시면 됩니다. 근본적으로는 중요하긴 하지만, 반드시 세세하게 알아야 하는 부분은 아니기 때문입니다.)**

1. 정의할 수 없지만, 수학적 개념으로 존재하는 수학적 무정의 용어가 존재한다.
2. 증명하여 당위성을 판별할 필요가 없는 수학적 명제인 공리가 존재한다.
3. 어떠한 수학적 내용이 타 수학적 내용으로부터 논리적 흐름에 따라 추론가능하고, 증명가능하다.
4. 수학적 논의에 사용되는 단어와 기호는 무정의 용어를 통해 성립하며, 이에 대해서 규정한 것이 '정의'이다. 이 정의는 수학을 하는데 있어서 상당히 중요한 밑바탕이 된다.

이미 우리는 많은 공리들을 직관적으로든, 논리적으로든 알고 있습니다. 유클리드 평행선 공리, 데데킨트의 공리 등 여러 공리들을 직접 배우진 않았지만, 직관적으로 통찰하고 있습니다. 이러한 수학적 정의, 공리들은 명제의 형태로 진술되어야만 그 의미를 정확히 전달할 수 있습니다. 사실 명제와 공리, 정의에 대한 개념, 그리고 명제의 증명에 대한 개념은 고등학교 1학년 과정 집합과 명제에서 다루어지고 있습니다. 우리가 그 부분을 깊게 생각하지 않고 단순히 명제와 집합이 다른 것이라고 인식하게 되어서 '중요하지 않은 단원'이라는 착각을 하게 된 것입니다.

명제가 참이나 거짓이 분명히 판단되는 문장을 말한다는 등의 기본적인 사실은 이미 알고 계시는 것으로 간주하겠습니다. ~~근데 은근슬쩍 명제가 뭔지 설명한 것 같네요.~~ 원래 이 단원에서 논리곱, 논리합, 쌍조건, 조건 등에 대한 이야기를 자세하게 다루어볼까 싶었습니다만, 그리 중요한 부분은 아니고, 파이널 교재 주제에 너무 많은 것을 수록해두는 것 또한 공부 시간 효율성을 떨어트리는 요인이기에 간단하게만 언급하겠습니다.

미지의 수를 수학적으로 표기하기 위해 문자를 사용하듯, 논리에 있어서도 한 명제를 p, q, r등의 문자로 많이 사용합니다. 당연하지만 이 문자들은 하나의 단일명제를 의미할 수도 있고, 두 명제가 나열된 합성명제를 나타낼 수도 있습니다. 이 두 명제들을 연결하여 합성명제를 구성하게 되는데, 이 연결고리는 주로 화살표로 표시합니다. 아래 표를 통해서 용어의 정확한 정의들을 깔끔하게 정리해보도록 하겠습니다.

기호	이름	표기	의미
$\sim$	부정	$\sim p$	p가 아니다.
$\wedge$	논리곱	$p \wedge q$	p이고 q이다. (교집합적 의미)
$\vee$	논리합	$p \vee q$	p또는 q이다. (합집합적 의미)
$\rightarrow$	조건	$p \rightarrow q$	p이면 q이다.
$\leftrightarrow$	쌍조건	$p \leftrightarrow q$	p이면 q이고, q이면 p이다.

이렇게, 논리에 대한 용어들이 정의되었습니다. 그렇다면, 증명이란 무엇일까요. 흔히 '논증'이라 불리는 논리적인 증명은 '참인 명제의 정당성을 밝히는 일' 혹은 '거짓인 명제의 부당성을 밝히는 일' 정도로 정의될 것입니다. 원래 수리논리학에서 기초적인 부분들의 증명은 '진리표'라는 것을 이용하는 것이 근본입니다만, 이러한 진리표는 교과과정 내의 이야기가 아니므로 다루지 않겠습니다. (해당 명제의 T/F를 모두 조건에 따라 표에 나열하는 것이 진리표입니다.) 다만 우리가 항상 주의해야 할 것은, 증명 시 가정으로부터 결론까지 도달하는 모든 과정을 논리적으로 설명할 때, 기존에 정의된 내용들과 증명되어있는 정리만을 사용하여야 합니다. 증명하여야 할 논제를 미리 참으로 받아들여 증명에 사용하는 것은 논리적 오류입니다. 일반적으로 한 명제에 대한 증명은 타 명제의 동치변형으로 증명되기도 하고, 여러 논리적 법칙에 따라 논리가 나열되기도 합니다. 지금부터 우리가 사용할 수 있는 논리의 법칙들을 살펴보도록 하겠습니다. 해당 정리들은 논리들의 변형으로 모두 증명가능하지만, 현재 우리는 학부과정 혹은 석사과정 논리학을 배우는 것이 아니라 단순히 고교 과정에서 약간 더 심화된 논리들을 배우는 것이므로 '당연한 것으로 취급하도록 하겠습니다.' 기호 '$\Rightarrow$'는 참인 명제에 대한 방향을 의미합니다. 증명이 궁금하신 분들께서는 직접 진리표를 그려서 증명해보시기 바랍니다.

합의 법칙	$p \Rightarrow p \vee q$
단순화 법칙	$p \wedge q \Rightarrow p,\ p \wedge q \Rightarrow q$
논리합의 삼단논법	$(p \vee p) \wedge \sim p \Rightarrow q$
이중 부정법칙	$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
교환법칙	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p,\ p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
멱등법칙	$p \wedge p \Leftrightarrow p,\ p \vee p \Leftrightarrow p$
대우법칙	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow p)$
드 모르간의 법칙	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q,\ \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
결합법칙	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r),\ (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
분배법칙	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
추이법칙	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$
구성적 양도논법	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \vee r) \rightarrow (q \vee s),\ (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$
파괴적 양도논법	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r) \rightarrow (\sim q \vee \sim s)$, $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r) \rightarrow (\sim q \wedge \sim s)$
귀류법	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \rightarrow (q \wedge \sim q)$

진리표를 이용하지 않고 정의, 전제로 받아들인 공리, 이미 증명해낸 정리들과 위의 표에 있는 추론규칙들을 논리적으로 변형하고, 논리를 이어나가서 증명해내는 것을 ‘연역적 추론 증명법’이라고 합니다. 굳이 진리표를 모두 그리지 않고서 위의 논리적 법칙들을 나열하는 방법이며, 사실상 상당수의 증명법들은 이런 연역적 추론 방법을 통해 증명하는 방식에 속해있습니다. 가령 대우법칙에 해당하는 $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to p)$의 증명을 위해 진리표를 모두 그려도 되겠지만 해당 주어진 다른 조건들을 이용해서

$$(p \to q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow q \vee \sim p \Leftrightarrow \sim(\sim q) \vee (\sim p) \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$$

와 같은 연역적인 추론들로 최종적으로 $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to p)$의 결론을 이끌어 낼 수 있다는 것입니다.

왜 이 단원이 **Magic 0** 일까요? 이 부분은 그 자체로 수리논술에서 썩 중요한 부분은 아닙니다만, 앞으로 보시게 될 Part 1인 ‘수리논술의 원리와 논리’를 작성하는데 있어서 **가장 기초적인 부분**이 되기 때문입니다. 굳이 이해하려 들지 마십시오. 저 부분을 ‘당연한 것’으로 받아들이십시오. 당연하고 자명한 것은 납득의 대상일 뿐, 적어도 고등학교에서 배운 중등교육과정의 논리로는 논증할 수 없는 부분입니다. 위의 내용들은 해석학을 공부하기 시작할 즈음에 나오는 심도 있는 내용이며 고등학교 교육과정에서는 굳이 알 필요 없는 것이 당연합니다. ‘수학적으로 당연한 것’으로 받아들이시고 다음 파트의 내용을 이해하는 것에 있어서 큰 무리가 없도록 하기 위한 목적 이상으로 Magic 0에 매달리지는 않으셨으면 좋겠습니다. 수학에 있어서 직관을 서술에서 배척하고, 논리만을 채택해야 할 필요성이 있다는 것을 보여드리고 싶었고, 가장 기본은 어디까지나 논리일 뿐, 직관은 논제를 이해하고 풀어내는 것 이상으로 활용해서는 안 될 것이라는 주장을 하기 위한 기초적인 토대일 뿐입니다.

마지막으로 강조합니다. **Magic 0의 내용에 크게 휘둘리지 마십시오. 모르면 모르는 대로, ‘이게 당연한 것이구나,’하고 받아들이시면 됩니다.** 이해가 간다면 좋은 것이고, 이해가 잘 가지 않는다고 하더라도 꼼꼼하게 보실 필요는 없습니다. 단순히 본 챕터가 논리적 기반 그 이상이 될 수 없기에 한 번 가볍게 읽어보시고, 바로 다음 챕터로 넘어가시는 것을 권장합니다. 이 챕터의 목적은 결코 ‘이 내용을 모두 이해하는 것’이 아닙니다. 단지 ‘이런 내용이 있다는 것을 알고 계시고, 결국 수학의 주된 관점은 어디까지나 논리적으로 이야기를 서술해나가는 것이다.’는 것임을 아는 것입니다.

수리논술 내용과는 별로 상관없이 참고로 드리는 말씀이지만. 본 내용에 극심한 혐오감을 느끼면서도 수학과를 지망하려는 분이 계시다면 진지하게 자신의 관심분야를 고려해보시기를 권유합니다. 극한의 엄밀한 정의, 조합론과 그래프이론, 선형대수학의 수많은 내용들, 디리클레 함수 등의 수학과 학부과정의 내용들은 직관 혹은 추측으로 메우기에는 너무나도 깊이 있는 우물과도 같아서, 자신의 직관이 천재 수학자 라마누잔 급이 아닌 이상 수학과 지망을 진지하게 고려해보셔야 할 것입니다. 위와 같은 내용들이 재미있고 배워볼만하다고 느끼시는 분들께서는 수학과 혹은 수학교육과 지망을 한 번 고려해보시는 것이 좋겠습니다.

PART 2

수리논술 행동전략

[Magic 1 - 형식적 논증법]

가장 처음으로, 논증 자체에서 많이 이용되고 직관적인 부분이 많이 도움 될 수 있는 형석적 논증법에 대해서 알아보겠습니다. 용어가 조금 어렵긴 하지만, 일반적으로 '직접 증명법'이라고 불리는 것이 바로 이 형식적 논증법입니다. 명제 $p \to q$를 증명하기 위해서 이미 논증되었거나 공리로 받아들인 $p \to p_1$, $p_1 \to p_2$ 등의 삼단논법적인 나열을 통해 최종적으로 $p_n \to q$까지 연역적 추론으로 논증하는 방법입니다. 수능에서 가장 많이 쓰이는 방법이기도 하며, 당연하겠지만 수리논술에서도 상당수의 증명이 이러한 형식적 논증법을 통해 진행됩니다. 사실 이 직접 증명법은 운에 의존하는 요소가 상당히 클 수밖에 없습니다. 당연한 이야기지만 실제 수학적인 증명을 할 때 어떠한 힌트도 없이 p에서 임의의 명제 p_1으로 연장시켜야 하지만, 그 p_1으로의 연장이 궁극적으로는 q의 최종증명에 이어질 수 있을지 아니면 전혀 관련 없는 방향일지 그 아무도 알 수 없기 때문입니다. 이러한 직접증명법으로 증명해야 하는 수리논술 논제가 있다면, 거의 100%의 확률로 제시문 혹은 문제에 조건이 주어져 있거나, 이전 문제에서 사고했던 방식을 심층적으로 확장해서 사용하여야 하는 겁니다. 고교과정에서 필요 이상의 직관력과 수학적 통찰력을 요구하지는 않으니까요. 단순히 '힌트를 분석할 수 있을 정도의 수학적 능력과, 교과과정의 충실한 이행'을 평가하는 것이 대학의 목적일 뿐입니다. 그리 어렵진 않으니 예시 하나 정도만 보고 넘어가도록 하겠습니다.

다음 제시문을 읽고 정적분 $\int_{a_1}^{a_2} f(t)dt$를 구하시오. (2011 연세대 모의논술 응용)

> 함수 f는 실수의 집합을 정의역과 공역으로 가지고, 미분가능하며 $f'(0)=1$, $f(0)=1$이다. 또한 임의의 실수 a_1, a_2, a_3에 대하여 다음과 같은 식들이 성립한다.
>
> $$f(a_1)=b_1,\ f(a_2)=b_2,\ f(a_3)=b_3,\ a_3=a_1+a_2,\ b_3=b_1b_2$$

<예시답안>

$f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$, $f(a_3)=b_3$이고 $a_3=a_1+a_2$, $b_3=b_1b_2$이므로

$b_3=b_1b_2$에 $f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$, $f(a_3)=b_3$을 대입하면

임의의 a_1, a_2에 대하여 $f(a_1+a_2)=f(a_1)f(a_2)$가 성립한다.

또한, 함수 f는 $f(0)=1$이고 미분 가능하므로 다음이 성립한다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(f(h)-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(f(h)-f(0))}{h}$$

$$=f(x)f'(0)\ \left(\because \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)\right)=f(x)\ (\because f'(0)=1)$$

따라서 $\int_{a_1}^{a_2} f(t)dt=\int_{a_1}^{a_2} f'(t)dt=[f(t)]_{a_2}^{a_1}=f(a_2)-f(a_1)=b_2-b_1$이다.

그리 어려운 내용이 아니고, 직렬적인 구조로 이루어진 문항들에 자주 등장하는 증명법이며 사실상 수리논술 혹은 수능에서 요구되는 증명의 상당수가 수학적 귀납법 또는 형식적 논증법으로 이루어지므로 이미 여러분들에게 많이 익숙한 내용일 것입니다.

[Magic 2 - 간접 논증법]

상당수의 증명이 직접증명법으로 이루어지긴 하지만, 모든 증명이 그러한 것은 아닙니다. 직접적으로 어떤 명제를 직렬적으로 증명하기 어려운 경우, 해당 공리계가 참이라는 전제가 있을 때 명제의 전제를 뒤틀어 모순을 유도해내는 방법을 사용합니다. 근본적으로 대우명제 증명법, 귀류법(배리법) 등이 있으며 그 중 귀류법은 수리논술에서 은근히 자주 등장하는 방법입니다. 현 교육과정상 배리법이라는 용어보다 귀류법이라는 용어가 더욱 자주 사용되고, 실제 배리법과 귀류법이 다른 용어로 취급받는 경우도 많긴 하지만 '귀류법'이라는 용어를 사용하시는 것이 더욱 자연스러울 겁니다. 귀류법이라 함은, 다들 잘 아시겠지만 결론을 부정하여 가정 혹은 수학적 공리에 모순된다는 사실을 밝혀내어 '이 부정된 결론이 틀렸으므로, 부정되지 않은 결론이 맞다'는 사실을 이끌어내는 방법입니다. Magic 0에서 보셨듯이, $(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \to (q \wedge \sim q)$ 가 성립합니다.

가령 [한 평면 위의 서로 다른 두 직선 l, m 에 대하여 직선 m을 포함하고 직선 l을 포함하지 않는 평면 α는 직선 l과 평행함을 증명하여라.] 는 논제에 대한 증명을 해야 하는 경우를 생각해봅시다. 형식적 논증법을 통해 직관적인 영역을 논증으로 끌어오기 보다는, 귀류법을 적용하여 결론을 부정해야 하는 편이 훨씬 이득입니다. 즉, 평면 α와 직선 l이 평행하지 않는다고 결론을 부정해보는 것입니다. 이 때, 평면 α과 직선 l은 한 점 P에서 만나게 됩니다. 또한, 전제에서 직선 l과 직선 m은 평행하므로, 두 직선을 포함하는 평면 β를 생성할 수 있습니다. 직선 m은 평면 α와 평면 β의 두 교선이 됩니다. 그리고 직선 l은 평면 β에 포함되므로 점 P는 두 평면 α와 β위에 동시에 존재하게 됩니다. 즉, 점 P는 두 평면의 교선인 직선 m위에 있다는 것입니다. 따라서 점 P는 두 직선 l, m의 교점이 됩니다. 하지만, 이것은 직선 l과 직선 m이 평행하다는 조건에 모순이 됩니다. 결국, 귀류법으로의 논리전개에 의하면 평면 α는 직선 l과 평행할 수밖에 없습니다.

다음 물음에 답하시오. (2008 연세대 특기자 심층면접 1번논제)

> $[0,\ \infty)$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)>0$, $f(x) \geq \int_0^x f(t)dt$를 만족한다. 이 때 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않음을 증명하여라.

<예시답안>

(귀류법)

방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다고 하자.

$f(0)>0$이고 $[0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(x)=0$은 최소의 실근을 갖는다. 이 때 최소의 실근을 α라고 하면 $f(0)>0$이고 $f(x)$는 연속이므로 $0<x<\alpha$에서 $f(x)>0$이다.

따라서 $0<\int_0^\alpha f(t)dt$가 성립한다.

그런데, $f(\alpha)=0$이므로 $f(\alpha)<\int_0^\alpha f(t)dt$가 성립한다.

이것은 함수 $f(x)$가 $f(x) \geq \int_0^x f(t)dt$를 만족한다는 사실에 위배된다. (모순의 발생)

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 존재하지 않는다. (증명끝)

정리해보자면, 다음과 같습니다.

1. $p_1 \to q,\ p_2 \to q, \cdots,\ p_n \to q$
2. $\sim q,\ p_1,\ p_2, \cdots,\ p_n \to C$ (단 C 는 모순인 명제)
3. $\sim q,\ p_1,\ p_2, \cdots,\ p_n \to \sim p_k$ (단 k는 1이상 n이하의 자연수)
4. 귀류법에서 위의 세 가지는 모두 논리적으로 동치관계에 있다.
5. 2번에서의 C 는 기존에 정립된 수학적 공리에 위배된 조건일수도 있으며, 귀류법 진행을 위해 고려했던 본 명제의 부정된 결론에 위배된 조건일수도 있다. (3번의 내용에 대한 설명)

대우명제 증명법은 귀류법에서 패턴이 약간 고착화된 방법입니다. $p \to q$를 논증하기 위해서 대우법칙을 이용하는 과정입니다. $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to p)$ (Magic 0참고)에서 보시듯이, 화살표 양쪽의 명제는 참 혹은 거짓을 공유합니다. (화살표가 양쪽으로 모두 성립한다는 것이 참이니, 서로 참과 거짓을 공유하게 됩니다.) 잘 생각해보시면 이러한 대우명제 증명법이 귀류법과 어느 정도 비슷하다는 것을 아실 수 있습니다. 약간 두 증명법이 다르긴 하지만 '근본적으로 두 증명법이 같은가?'에 대한 내용은 별로 중요하지도 않은 주제며, 이 지면을 빌려서 작성하기에는 지나치게 심화된 주제이므로 생략하도록 하겠습니다. 대우명제 증명법에 대한 문항은 아직까지는 수리논술에서 찾아보지 못했으며, 적용 자체가 그렇게 어려운 방법은 아니니 이 글을 읽는 독자분께 맡기도록 하겠습니다. 굳이 예시를 들자면, 'a를 실수라고 할 때, $a > 0$이면 $\dfrac{1}{a} > 0$이다'는 명제를 'a를 실수라고 할 때, $\dfrac{1}{a} \le 0$이면 $a \le 0$이다' 를 변형시켜 논증하는 방법 정도로 생각하시면 되겠습니다.

[Magic 3 - 수학적 귀납법]

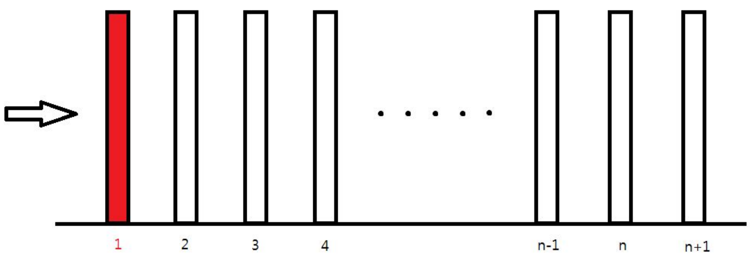
일반적인 과학적 분석법에는 귀납적 방법과, 연역적 방법 두 가지가 있습니다. 연역적 방법이라 함은, 뛰어난 통찰력으로 가설을 세우고 실험으로 이를 논증하는 방법입니다. 귀납적 방법의 경우 쌓여진 수많은 데이터들을 통하여 추론하고, 일반화하는 방법입니다. 물론 귀납적 방법은 다소 논리적으로 부족한 방법이라는 문제점을 안고 있지만, 대상에서 추론하여 일반화하는 것 자체는 충분히 가설 수립에 큰 도움이 됩니다. 참고로, 과학계에서는 귀납적으로 수립된 가설과 적당한 실험에 의한 검증데이터가 있고, 2년 이내에 이에 대한 타당한 반례가 제시되지 않으면 정식 학설로 채택합니다. 귀납법에는 일치법, 차이법, 잉여법 등의 5가지 방법이 있습니다. 물론 이에 대해서 자세하게 알 필요는 전혀 없습니다. 귀납법에 대한 설명을 바로 시작하도록 하겠습니다.

1은 홀수이다. 3은 홀수이다. 5또한 홀수이다. 따라서 $2n-1$ (단, n은 자연수)은 홀수이다.

홀수에 대한 귀납추론의 사례입니다. 이런 귀납추론은 맞을 가능성이 높을 때도 많으며, 과학적으로 의미 있는 가설들을 수립하는 것에 큰 도움이 됩니다. 물론 제가 제시한 사례처럼 세 가지, 네 가지 사례만 탐구하지는 않습니다. 상당히 높은 신뢰도를 가질 만큼 수천 개, 수만 개의 성립 사례들이 근거로 제시됩니다. 하지만 귀납추론이 사실 반드시 옳은 논제만을 이끌어내는 것은 아닙니다. 다음 사례를 봅시다.

3은 소수이다. 5도 소수이다. 7또한 소수이다. 따라서 소수는 곧 양의 홀수를 의미한다.

귀납적으로 추론된 것이지만, 분명 틀렸다는 것을 알 수 있습니다. 2는 소수이지만 홀수가 아니고, 또한 9는 홀수이지만 소수가 아닙니다. 결론적으로 위의 귀납추론은 틀린 것이 됩니다. 여기서 우리가 알아야 할 사실은 '귀납추론은 의미 있는 가설에 대한 도출의 방법으로 훌륭한 것은 맞으나, 맹신할 수는 없다'는 것입니다. 하지만, 이 단원에서는 적어도 수학에서만큼은 논리적으로 입증되고, 귀납적 방법이 논리적으로 증명되어 '자명하다'고 판정할 수 있는 창의적인 방법에 대해서 배워볼 것입니다. '수학적 귀납법'이라는 것은 사실 해석학의 완비성공리를 배우고, 정수론에서 페아노 공리를 배우고, 이를 이용하여 Well Ordering Principle을 증명하고, 이 WOP와 수학적 귀납법이 사실상 동치관계에 놓여있음을 보이는 과정을 통해 이 증명 방식이 수학적 토대에서 논리적이라는 것을 증명하게 됩니다. 물론 전혀 아실 필요 없습니다. 우리가 알아야 할 사실은 따로 정해져 있습니다. 수학적 귀납법이란 무엇인지 알아야만 합니다. 과연 수학적 귀납법이란, 어떤 방법일까요?



(1) $n=1$일 때 성립함을 보인다. (2) $n=k$일 때 성립한다고 가정한다. (3) $n=k+1$일 때 성립함을 보인다.

수학적 귀납법은, 중심이 되는 기준 사건 하나에 대해 자명하게 성립함을 보이고, 임의의 n에 대하여 성립한다고 가정할 때, $n+1$에서 또한 성립한다는 사실을 이끌어내는 과정입니다. 위의 그림에서 $n=1$을 기준으로 쓰러진다는 것을 보이고, 이미 "n일 때 성립하면 $n+1$일 때 또한 성립한다."는 사실을 논증으로 밝혀내었으므로 도미노 효과로 인해 $n=1$일 때, 2가 성립하고, $n=2$일 때 3이 성립하고, 이런 무한순환을 지속하므로 결국 수학적으로 논증되었다고 할 수 있는 것입니다.

이러한 증명법은 실수범위와 같은 연속적인 수들에 대해 성립한다는 것을 입증할 때에는 사용할 수 없습니다. 다만, 자연수, 정수와 같이 이산적이고 일정 간격으로 떨어진 수들에 대해서 성립한다는 것을 입증하기 위한 강력한 도구가 될 수 있습니다. 예전 2003학년도에 이런 문제가 출제된 적이 있습니다.

자연수 n에 대하여 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하고자 할 때, 수학적 귀납법을 사용한다. 이 때, 수학적 귀납법의 과정을 설명하고, 수학적 귀납법이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보일 수 있는 이유를 설명하시오. (2003 단국대 수시)
<예시답안> 수학적 귀납법은, 가장 기준이 되는 사건 $P(1)$에 대하여 증명하고자 하는 논제가 성립한다는 것을 확인하고, 임의의 $P(n)$사건에 대하여 성립한다고 가정한 후, $P(n)$의 성립 가정 이후 제작된 식의 적당한 논리적 변형을 통해 $P(n+1)$이 성립한다는 사실을 증명하는 방법이다. 이는 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보일 수 있다. 자연수는 이산적이며 이웃하는 자연수의 차이는 1이라는 사실은 이미 알려져 있다. $P(1)$에 대해 성립하는 것이 증명되었을 때, $n=1$을 대입하면 $P(2)$가 성립하고, 이는 곧 $n=2$에 대해 성립한다는 사실을 의미한다. 또 다시 $n=2$를 대입하면 $n=3$일 때 또한 성립하며, 이런 도미노와도 비슷한 현상에 의해 모든 자연수 n에 대하여 수학적 귀납법을 적용할 수 있다는 것을 설명할 수 있다.

의외로(?) 쉬운 문항입니다. 물론 거의 10년이 되어가는 문제이기에 현재의 경향과 다소 많이 다르지만, 결국 논술은 이렇게 '본질적인 것'과 '교과과정에서 충분히 대답할 수 있는 것'으로 출제된다는 것을 기억하셔야 합니다. ~~쫄지 마세요! 논술 잘 공부하면 전혀 어렵지 않아요!~~ 수학적 귀납법이 무엇인지 알아보았으니, 이제 실제로 수학적 귀납법이 문제에서 어떻게 적용되는지 보아야겠지요? 난이도가 많이 높아지지는 않을 것입니다. ~~쫄지 말라니까요. 쫄면이세요?~~ 수학적 귀납법이 실제로 어떻게 사용되는지 직접 문제를 풀며 알아보겠습니다.

n이 1 이상의 자연수이고 $x>-1$, $x\neq 0$일 때, $(1+x)^n \geq 1+nx$임을 증명하시오.
<예시답안> pf) (수학적 귀납법) $n=1$을 대입하면 성립함을 자명하게 알 수 있다. $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $(1+x)^k \geq 1+kx$가 성립한다. 부등식의 양 변에 $(1+x)$를 곱하면, $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) \Leftrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2$ 이 된다. ($\because 1+x \geq 0$) 이 때, $kx^2 \geq 0$이므로, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+kx^2 \geq 1+(n+1)x$가 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 $(1+x)^n \geq 1+nx$이 성립함을 알 수 있다. *Q.E.D.*

이번에도 그리 어렵지는 않았습니다. 사실 위의 부등식은 베르누이 부등식(Bernoulli's Inequality)라고 하는 부등식인데, 다른 부등식의 증명 과정 중 어려운 부분이 있을 때 보조정리 격으로 자주 사용됩니다. ~~사실 동경대학교 입시문제 중 하나로 출제되어서 유명한건 함정.~~ 일부러 증명과정이 다소 쉬운 부등식을 선정해 보았습니다.

한 가지 추가 설명을 드리자면, 굳이 $n=1$부터 증명을 시작하지 않고 $n=2$, 혹은 음수로 시작해도 됩니다. 또는 변형으로 0.5단위로 증명을 원하신다면 기준이 되는 n을 잡고, $n=k$일 때 성립한다고 가정한 후, $n=k+0.5$가 성립함을 보여도 되겠지요. 어디까지나 응용은 사용하는 여러분들의 몫입니다. 결국 수학적 귀납법의 본질은 '도미노 효과'라는 것이지, 결코 $n=1$, $n=k$, $n=k+1$의 세 수가 아니니까요. 앞으로 누군가 수

학적 귀납법이라고 하면 $n=1$, $n=k$, $n=k+1$의 세 수를 떠올리시는 고정관념을 깨트리시고 '도미노 효과' 용어를 반드시 떠올리셔야 합니다. 수학적 귀납법의 본질이 바로 그것이니까요. 더욱 사고를 확장시켜서, 정수 전체에 대한 증명은 $n=0$을 기준으로 $n=k$가 성립할 때, $n=k+1$, $n=k-1$모두 성립하는 것을 보이는, 요컨대 $n=0$을 기준으로 양 쪽 방향 모두 도미노처럼 수학적 귀납법이 진행되도록 증명하시면 되겠습니다. 물론 증명할 때 k가 양수인지, 음수인지 잘 구분해서 하는 것 잊지 마시기 바랍니다. ~~뭔가 계속 한 가지만 더 설명한다는 것을 반복하는 것 같지만~~ 정말로 한 가지만 더 설명 드리자면, 정해진 자연수 범위에서 수학적 귀납법을 증명하기 위해서 $n=k$를 설정하고, $n=k-1$이 성립함을 보이는 방식으로 진행하기도 합니다. 이 때, 증명 범위는 $1 \leq n \leq k$인 자연수들이 된다는 것을 자명하게 알 수 있습니다. 항상 융통성 있게 수학적 귀납법을 적용하시면 되겠습니다. 이제 곧 나올 문제들은 이미 많이 접한 적이 있을 수도 있기에 여러분들에게 다소 익숙하실 문항들일 것입니다.

임의의 자연수 n에 대하여 $\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!}<\dfrac{2}{n+1}$이 성립함을 증명하시오. (08 평가원 응용)

<예시답안>

pf) (수학적 귀납법)

자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!}$으로 정의할 때, $a_n<\dfrac{2}{n+1}$임을 보이자.

우선 $n=1$일 때 $a_1=\dfrac{1}{2}<1$이므로 자명하게 성립한다. $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 k번째 항 a_k에 대하여 $a_k=\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+k!}{(k+1)!}$가 성립한다.

$n=k+1$일 때 $a_{k+1}=\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}=\dfrac{1+a_k}{k+2}<\dfrac{1}{k+2}\left(1+\dfrac{2}{k+1}\right)=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}$이다.

자연수 k에 대하여 $\dfrac{2}{k+1}\leq 1$이므로 $\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}\leq\dfrac{1}{k+2}$이고, $a_{k+1}<\dfrac{2}{k+2}$이다. 따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다. 수학적 귀납법에 의해 $\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!}<\dfrac{2}{n+1}$이 임의의 자연수 n에 대하여 성립한다는 것을 증명하였다. $Q.E.D.$

어떤 식이 '임의의 자연수' 혹은 어떤 일정한 값을 두고 나열된 수들에 대해 성립함을 증명할 때 수학적 귀납법을 사용하면 매우 효율적이라는 것을 잊지 맙시다. 이제, 실제 논술 기출문제를 이용해서 연습을 하겠습니다.

수열 A_n이 $\{A_n\}=2^{2^n}+1$, (단, n은 음이 아닌 정수)로 정의될 때, $A_n-(A_0A_1\cdots A_{n-1})$의 값을 구하시오.
(단, $n\geq 1$) (2012 한양대 수시2차 중 발췌)

<예시답안>

귀납적으로 $A_0A_1\cdots A_{n-1}$의 값을 구했을 때, $2^{2^n}-1$이다. 이를 증명하면 다음과 같다.

$n=1$일 때 $A_0=2^{2^0}+1=3$이고 $2^{2^1}-1=3$이므로 위 명제는 성립한다.

$n=k$일 때 $A_0A_1\cdots A_{k-1}=2^{2^k}-1$이라 가정하자. $A_0A_1\cdots A_k=(2^{2^k}-1)(2^{2^k}+1)=(2^{2^k})^2-1=2^{2^{k+1}}-1$이다. 즉, $n=k+1$일 때도 성립한다. 곧, 수학적 귀납법의 원리에 의해 위 명제는 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로 $A_n-(A_0A_1\cdots A_{n-1})=2^{2^n}+1-(2^{2^n}-1)=2$가 성립한다.

귀납 추론과 수학적 귀납법이 적당히 어우러진 문제였습니다. 일부 교재들에 수록된 바에 의하면 다음과 같은 잘못된 방법으로 본 문제를 해설해두었습니다. 어떤 점이 다른지 잘 주목하여 차이점을 찾아보시기 바랍니다.

<잘못된 예시답안>

$A_n - 2 = 2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1) = A_{n-1}(2^{2^{n-1}} - 1)$이므로, 귀납추론에 의해 다음 식을 도출할 수 있다.
$A_n - 2 = A_{n-1}(2^{2^{n-1}} - 1) = A_{n-1}A_{n-2}(2^{2^n} - 1) = \cdots = A_{n-1}A_{n-2} \cdots A_1A_0(2^{2^0} - 1) = A_{n-1}A_{n-2} \cdots A_1A_0$ 이므로, $A_n - (A_0A_1 \cdots A_{n-1}) = 2$ 이다.

과연 무엇이 문제일까요? 이미 눈치 채셨겠지만 '수학적 귀납법'의 여부에 있습니다. 위의 과정은 일반적으로 많은 수리논술 교재에 수록된 해설입니다. 하지만 명백히 잘못되었지요. 그 이유는 **풀이 자체가 단순히 '귀납 추론'에 그쳤기 때문입니다. 모든 n에 대하여, 해당 식이 '무한히 저렇게 변형가능하다'는 보장이 없습니다.** 즉, A_{n-1}을 묶어내고, A_{n-2}를 묶어내고, 계속적으로 묶어내긴 하지만 **'과연 이런 과정이 중간에 끊어지지 않는가?'**에 대한 논리적인 대답을 깔끔하게 할 수 없습니다. 결국 귀납 추론에 그쳐버린 풀이과정일 뿐이지요. 이 귀납 추론을 완벽하게 만들어주는 방법으로 '수학적 귀납법'을 사용한 것입니다. **'이 과정이 무한하게 지속된다는 보장이 있는가?'**에 대한 논리적인 증명을 할 수 없다면 이를 수학적 귀납법을 통해 마지막으로 더 증명해주어야 할 것입니다. 이것이 바로 수리논술 자체에서만 배울 수 있는 지식이며, 수능 수학을 연마해 오셨던 여러분들에게 많이 생소하게 느껴질 부분일 것입니다. 당연한 이야기지만, 수능 수학에서는 직관을 통해서도 답이 도출되는 경우가 많으며 이 직관이 논리적 서술방법에 비해서 훨씬 빠른 경우가 많기 때문입니다. 하지만, 수리논술에 있어서 직관은 '답을 내기 위해 방향성을 제시하는 것' 그 이상의 것이 되지 못합니다. 아무리 답을 잘 도출하여도 자신이 작성한 답안지에 '어떻게 그 답을 도출하였는지 논리적으로 잘 서술'하지 못한다면 좋은 점수를 기대하기 어렵습니다. 치밀하게, 단 하나의 논리적 비약 혹은 오류 없이 서술해야만 좋은 점수를 받을 수 있는 것입니다. 가끔 여러 후배들에게 수리논술에 대해서 가르치다 보면 '둘 다 같은 방법으로 풀었는데 왜 점수가 많이 차이 나는가요?'라는 질문을 많이 받습니다. 두 답안의 차이점을 살펴보면 꼭 차이가 나는 것이 있습니다. 바로 '논증의 엄밀성'입니다. 일반적으로 논증의 엄밀성을 잘 드러내는 답안이 좋은 점수를 받는 것입니다. 위의 두 사례처럼 말이지요. 이제 한 문제만을 더 풀며 본 단원을 마치겠습니다. 고려대학교 문항을 약간 수정하여 틀에 맞춘 문제입니다.

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

무한개의 집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$을 생각하자. 어떤 자연수 n에 대하여 $x \in A_n$을 만족하는 x들의 모임을 집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$의 합집합이라 하고 이 집합을 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$과 같이 나타낸다. 즉,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{어떤 자연수 } n\text{에 대하여 } x \in A_n\}$$

이다. 모든 자연수 n에 대하여 $x \in A_n$을 만족하는 x들의 모임을 집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$의 교집합이라고 하고 이 집합을 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$과 같이 나타낸다. 즉 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{모든 자연수 } n\text{에 대하여 } x \in A_n\}$이다.

어떤 집합 X에 대하여 X의 모든 부분집합들의 집합을 Y라 하자. 집합 X에서 X로의 함수 $f: X \to X$에 대하여 집합 Y에서 Y로의 함수 $F: Y \to Y$를 $F(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$와 같이 정의하자. 자연수 n에 대하여 B_n을 $B_1 = X$, $B_n = F(B_{n-1})$, $n = 2, 3, \cdots$과 같이 정의하고 $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$이라 하자. 이 때 Y의 원소 C_1과 C_2가 $C_1 \subset C_2$를 만족하면 $F(C_1) \subset F(C_2)$가 성립한다. Y의 원소 D가 $F(D) = D$를 만족할 때, $D \subset B$가 성립함을 증명하여라. (2012 고려대 모의논술 일부 발췌 후 변형)

<예시답안>

pf) (수학적 귀납법)

D가 Y의 원소이므로 D는 X의 부분집합이다. $D \subset X$, $B_1 = X$이므로 $D \subset B_1$이다. 즉, 위의 명제는 $n=1$일 때 자명하게 성립한다. $n=k$일 때 위 명제가 참이라 가정하면 $D \subset B_k$가 성립한다. Y의 원소 C_1과 C_2가 $C_1 \subset C_2$를 만족하면 $F(C_1) \subset F(C_2)$가 성립하므로 $D \subset B_k$이면 $F(D) \subset F(B_k)$이다. $F(D) = D$, $B_{k+1} = F(B_k)$이므로 $D \subset B_{k+1}$이 성립한다. 즉, 위의 명제는 $n = k+1$일 때도 성립한다. 따라서 수학적 귀납법의 원리에 의해 $D \subset B_n$은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

결론적으로, $D \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$이고 $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$이므로 $D \subset B$가 성립한다. $Q.E.D.$

[Magic 4 - 논리적 증명의 방향성]

일반적으로 고교 수준의 증명은 대부분 단일 방향성으로 이루어지는 경우가 많습니다. 행렬 합답형의 경우, ‘주어진 식이 성립할 때’, ㄱ, ㄴ, ㄷ 선지의 참/거짓을 살펴보는 것으로, p (주어진 식이 성립) $\rightarrow$ q (ㄱ, ㄴ, ㄷ 선지가 성립)의 단일 방향 증명이 주로 이루어집니다. 하지만 실제 수리논술 및 수학 전체에서의 증명은 반드시 한 방향으로만 진행되지 않습니다. 가령, 다음과 같은 평가원 문항을 봅시다.

두 이차정사각행렬 A, B가 $AB+A+B=2E$, $A^3+E=O$ 일 때, $A+B=E$ 인가? (2015학년도 9월 모의평가 18번 문항 변형 및 발췌)

이 문항을 풀기 위하여, 우리는 ㄱ에서 $A+E$의 역행렬이 존재한다는 사실과, ㄴ에서 $AB=BA$라는 사실을 이끌어 내었습니다. 첫 번째 식과, 두 번째 식을 변형하여 이차정사각행렬 $AB=E$, $AC=E$에 대하여 $B=C$ 이라는 사실을 적용하면 $A+B=E$ 라는 사실을 이끌어내어 위의 명제가 참임을 밝히는 것이었습니다. (원래 문항은 $-E$ 였기에 거짓입니다.) 여기에서, $A+B=E$ 를 역대입하여 문제의 조건이 참이라는 것을 이끌어내어 맞춘 사람은 제대로 논증한 것일까요? 그렇지 않습니다. 증명에는 논리적 방향성이 있기 때문입니다.

$AB+A+B=2E$, $A^3+E=O$를 만족하는 모든 행렬의 집합을 p, $A+B=E$ 를 만족하는 모든 행렬의 집합을 q라고 할 때, 우리가 증명해야 할 것은 $p \rightarrow q$인 것이지, $q \rightarrow p$가 아니기 때문입니다. p가 참이 되도록 하는 진리집합 P와 q가 참이 되도록 하는 진리집합 Q의 관계에서 우리가 보여야 할 것은 $P \subset Q$ 라는 것입니다. 절대 $P \supset Q$ 가 아닙니다. 이 두 가지를 헷갈려서 필요조건으로의 증명과 충분조건으로의 증명을 혼용하는 사태가 일어나서는 안 될 것입니다. 조금 더 논의를 확장해보겠습니다. 다음 문제를 봅시다.

다음 제시문에서 논리적 근거를 도출하여 물음에 구체적으로 답하시오. (2010 한양대 수시 논술 일부 발췌)

(가) 실수 a를 포함하는 개구간에서 정의되는 함수 f의 $x=a$에서의 미분계수는 다음과 같이 정의된다.

$$f'(a)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(나) 실수 a를 포함하는 개구간에서 정의되는 함수 f의 $x=a$에서의 미분계수는 다음과 같이 정의된다.

$$f'(a)=\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

문제 : 제시문 (가)와 (나)의 미분계수의 정의는 동일한 것인지 아닌지 답하고 설명하여라.

<예시답안>

제시문 (가)의 정의에서 $x=a+h$라고 하면 $h\rightarrow 0$일 때 $x\rightarrow a$가 된다. 이것을 이용해 (가)의 식을 치환하면 (나)의 식이 얻어진다. 또한 (나)의 정의에서 $h=x-a$로 치환하면 (가)의 식이 얻어지므로 두 가지 정의는 논리적으로 동일선상에 놓여있다고 할 수 있다. 즉, 제시문 (가)와 (나)의 미분계수의 정의는 동일하다.

본 문항에서 혹시라도 (가)→(나)의 과정 혹은 (나)→(가)의 과정 둘 중 하나만을 보였다면 안타깝게도 작성하신 답안은 오답처리 될 가능성이 높습니다. ‘동일하다’ 즉, 우리는 (가)이면 (나)이고, (나)이면 (가)이므로 (가)와 (나)의 진리집합은 동일하다, 따라서 둘은 동일하다는 것을 보여야 한다는 것입니다.

한쪽의 과정을 보인다는 것은 단지 '한쪽 방향으로 변형이 가능하다,' 혹은 '한쪽의 해집합이 다른 쪽의 해집합에 완벽히 포함된다,'는 의미일 뿐 '양쪽방향 모두 변형이 가능하므로 두 조건이 동일한 해집합을 갖는다,'는 의미로는 확장이 불가능합니다.

말장난 조금 더 해볼까요. 제가 한 가지 결론을 내려 보겠습니다.

[저는 고양이를 좋아합니다. 바보는 고양이를 좋아합니다. 따라서 저는 바보입니다.]

이 논제가 올바르게 추론된 연역 추론일까요? 그렇지 않습니다. 저를 p라는 원소라고 하고, 고양이를 좋아하는 사람들을 p라고 합시다. $p \to q$ 입니다. 저는, 고양이를 좋아하는 사람이니까요. 그리고 바보를 r이라고 합니다. $r \to q$ 입니다. 바보도 고양이를 좋아하니까요. 여기서 삼단논법을 적용하여 $p \to r$을 이끌어 낼 수 있나요? 이끌어 낸 것처럼 보인다면 그건 두 번째 조건을 $q \to r$로 잘못 해석하여 받아들이신 겁니다.

명제의 진행 방향과 순서, 그리고 증명방향, 동치명제는 양쪽 방향으로 모두 증명해야 한다는 사실을 잊지 말아야 할 것입니다. 이는 대부분의 수리논술 논제에서 그러합니다. 수리논술에서 논증적인 태도는 결국 논증에 있어서 기본적인 사항들을 지켜야 한다는 것을 의미하며, 이는 논증에 있어서 방향성 또한 중요시하여야 한다는 것을 의미하기도 합니다. 항상 문항을 보고, 필요조건과 충분조건을 구분하는 습관을 가지십시오. 수능 합답형 문항에 젖어 타인이 구분해주는 필요조건과 충분조건을 그대로 받아들이지 마시고, 스스로 이 논증에서 필요조건과, 충분조건이 무엇인가, 증명해야 할 것은 무엇인가, 논증의 방향은 무엇인가, 두 식이 동치임을 보이는 필요충분조건은 아닌가, 이런 사항들을 꼼꼼하게 검토해보셔야 할 것입니다.

[Magic 5 - 직관 불가능한 논증의 해결전략]

수학 문제를 풀 때, 직관은 논증의 방향을 잡는 훌륭한 도구가 될 수 있지만 반드시 그런 것만은 아닙니다. 예전 2012학년도 한양대 학업우수자 모의논술 문항을 보면 논증과정에 직관을 사용할 수 없도록 출제되었습니다.

다음 제시문을 활용하여 물음에 답하시오. (2012학년도 한양대 모의 논술 - 학업우수자 전형)

> 평면에 유한개의 직선과 한 원이 주어져 있으면, 주어진 원의 내부에는 주어진 직선 중 어떤 것 위에도 있지 않는 점이 존재한다.

1) 원 O의 내부에 있는 하나 이상의 유한개의 점으로 이루어진 집합을 A라 하자. A에 속한 점들로부터의 거리가 모두 서로 다르게 되는 점이 원 O의 내부에 있음을 설명하시오.

2) 위 1)번 논제에서 A의 원소의 개수가 n이고, k는 n이하의 자연수라고 하자. A에 속하는 점들 중 정확히 k개만 그 내부에 포함하는 원이 원 O의 내부에 있음을 설명하시오.

해설을 작성하기 전에, 조금 추가 설명을 하겠습니다. 다소 특이한 문제입니다. 미적분 문제도 아니고, 고교범위에서 배웠던 내용과도 거리가 좀 멀죠. 이런 경우에는 학생들에게 한 가지를 크게 요구합니다. [고등학생이 가져야 할 기본적인 수리적 사고력]입니다. 이 문제에 대한 한양대학교의 출제 의도는 다음과 같습니다.

[간단한 기하학적 사실을 제시하고 그것을 근거로 논리적으로 사고할 수 있는 능력이 있는가를 평가하려는 의도로 출제하였다. 단순히 논리적으로 유효한 추론을 하는 능력뿐만 아니라 자신의 생각을 간결하고 분명하게 정리하는 능력이 있는가를 평가하고자 하였다.]

<해설>

1) 원의 내부에 주어진 서로 다른 두 점을 택하면, 그 두 점으로부터 거리가 같은 평면 위의 모든 점의 집합은 직선을 이룬다. 주어진 점 중 서로 다른 두 점을 택하는 방법이 유한개이므로, 이와 같이 주어진 직선도 유한개이다. 제시문에 의해 원 O의 내부에는 이들 직선 중 어느 것에도 속하지 않는 점이 적어도 하나 존재한다. 그 점이 바로 주어진 점들과의 거리가 모두 다른 점이다.

2) 원 O의 중심을 C라 하고 반지름을 r이라 하자. 주어진 점 중 하나를 P라 하면 $CP < r$이므로, $r - CP$ 중 가장 작은 수를 s라 하면 s는 양수이다. 중심이 C이고 반지름이 s인 원 O'을 택하면 첫째 문제의 풀이와 마찬가지로 하여 원 O'의 내부에 주어진 점들과 거리가 모두 다른 점 D가 존재한다. 주어진 점들을 $DP_1 < DP_2 < \cdots < DP_n$이 성립하도록 $P_1,\ P_2, \cdots, P_n$이라 부르기로 하자.
만약 $k < n$이면, t를 $DP_k < t < DP_{k+1}$이도록 택해서 중심이 D 반지름이 t인 원을 O''이라 하면 O''내부에는 주어진 점 중 정확히 k개가 있게 된다. 또한 $CD + t < s + (r - s) = r$이므로 원 O''은 중심이 C 반지름이 r인 원, 즉 원 O의 내부에 있다.
만약 $k = n$이면 중심이 C 반지름이 $1 - s$와 r사이에 있는 원을 택하면 된다.

주로 기하와 관련된 문제들이 주를 이루고 있습니다. 주류로 출제되는 문항은 아니므로 크게 개의치 않으셔도 좋긴 합니다다만, 혹시 이 문항의 서술에 '자명하다'라는 발언으로 해석 가능한 답안을 적으셨다면 논증에 대해서 다시 자신의 실력을 검토해보아야 하지 않을까 싶습니다. 이번 단원은 이걸 끝으로 짧게 넘어가겠습니다.

[Magic 6 - 추론, 발상 그리고 전략]

이번에는 중요도는 낮은 편이나, 한번 정도 보는 것이 그리 큰 손해는 아닌 것들을 배워봅시다. 창의적인 발상이나 치밀한 추론을 통하여 거의 운에 가까운 창의력을 요구하는 논제들이 여기에 해당합니다. 심지어 어떠한 문제들은 철저하게 최소한의 조건만으로 많은 것을 이끌어내야 하기도 합니다. 문제 시작합니다.

$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+e^x}dx$의 값을 구하여라.
<해설> $f(x) = \frac{x^2}{1+e^x}$라고 하자. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(-t)dt + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \{f(-x)+f(x)\}dx$ $f(-x)+f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}} + \frac{x^2}{1+e^x} = \frac{x^2(1+e^x)}{1+e^x} = x^2$ $\therefore \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}$

첫 번째 문제였습니다. 뭔가 심오해 보였고, 이것저것 치환을 해 보아도 안 되었을 것입니다. 뚫어져라 쳐다보면 "정적분의 구간의 절댓값이 같다"는 사실을 알 수 있습니다. 여기서도 감이 잡히지 않으셨다면, x^2이 우함수라는 사실에서 깨달으셨어야 합니다. 우함수와 관련된 기법으로, 기본 발상 자체는 매우 간단합니다. $f(x)$와 $f(-x)$가 같다는 사실을 이용하는 것입니다. 이러한 기함수, 우함수를 이용한 적분적인 기술들은 발상적인 부분들이 있기에 나올 가능성이 높진 않습니다만, 제시문에 약간의 힌트가 주어진다면 나올 법한 것 같습니다.

이제 두 번째 문제를 보도록 합시다.

$\int_{0}^{\pi} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$의 값을 구하여라.
<해설> $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$로 나타내자. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$에서 $\cos x + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2}$를 이끌어 낼 수 있다. 이를 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$에 대입한다. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2}dx = \left[\tan\frac{x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 \cdots ①$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1+\cos x}dx = -\left[\ln(1+\cos x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 \cdots ②$ $\therefore \int_{0}^{\pi} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = ① + ② = 1 + \ln 2$

아무리 치환을 해보아도 안 되었을 겁니다. 이것도 무작정 치환하려 들면 안 되는 것이거든요. 잘 안보였을 겁니다. 적분 안 될 것 같으면 어떻게든 적분 가능하게 바꾸세요. ~~안 되면 되게 하라.~~

다음 문제는 수리논술의 계단 구조를 적용하기 딱 좋습니다. (마지막 단원 참고)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$의 값을 구하여라.

<해설>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\ln\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right\}dt \ \left(\because x \leftrightarrow \frac{\pi}{2}-t\text{로 치환}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt = I \text{ (치환)}$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t)dt = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)dt\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(I+I) \ (\because \ln(\sin t) = \ln\{\sin(\pi - t)\}) \text{ 즉, } 2I = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} + I,\ I = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$$

이 문제 해결을 위해 보아야 할 따름정리가 있습니다. 기본적으로 아시면 좋은 따름 정리를 살펴봅시다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

이 따름정리의 증명은 다음과 같습니다. 잘 살펴두시고 꼭 숙지해두시면 언젠가는 사용될 날이 올 것입니다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

이 정리를 이미 알고 계셨다면 위의 문제를 풀기 한결 수월했을 것입니다. 물론, 이 정리 자체를 외우실 필요는 없습니다. 다만, 이렇게 치환하는 방식 자체를 기억해두고 숙지하여 실전에 활용하자는 것이지요.

두 가지만 더 짚고 넘어가겠습니다. 적분 자체가 불가능한 문제는 적분식 자체를 I 등의 문자로 치환하여 방정식 형태로 나타내면 풀리는 경우가 있습니다. 위의 적분 결과를 직접 적분하여 유도하고 싶으시다면 대학교 과정의 해석학을 파셔야 합니다. ~~자매품으로 복소수 영역까지 다루는 것은 덤입니다.~~ 다음 문제를 봅시다.

$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$의 값을 구하여라.

네, 해설이 바로 나오지 않을 겁니다. 일단 문제를 푸시기 전에 이 보조정리를 하나 보도록 하죠.

$$f(a-x) = f(x)\text{일 때, } \int_0^a xf(x)dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$$

이것을 증명해 보도록 하겠습니다. (사실, 이 보조정리를 알지 못하는 상태에서는 문제접근이 불가능합니다. 실제로 수리논술 혹은 심층면접에 비슷한 방식이 나온다면, 이 보조정리가 지문에 언급될 가능성이 매우 높지요.)

$$I=\int_0^a xf(x)dx=-\int_a^0 (a-t)f(a-t)dt=\int_0^a (a-t)f(t)dt=a\int_0^a f(t)dt-\int_0^a tf(t)dt=a\int_0^a f(t)dt-I$$

따라서 $2I=a\int_0^a f(t)dt$, 즉 $I=\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$이다.

위에서 이미 보았던 적분식 치환 방식을 통하여 증명 해보았습니다.

<해설>

$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$일 때 $f(\pi-x)=f(x)$이므로 보조정리를 적용하면, $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

이 때, $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_1^{-1}\frac{1}{1+t^2}dt=\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$ (삼각치환 $t\leftrightarrow \tan\theta$)

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1\cdot d\theta=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$

다음 문제로 넘어가겠습니다.

이번 문제의 경우 교육과정 외에 해당하지만, 나름대로 수리논술 빈출 주제인 적분판정법과 어느 정도 관련이 있는 문제입니다. 적분 판정법은 무한급수 꼴로 변형 가능한 급수를 이미 수렴한다는 사실이 알려진 적분식과의 부등식관계를 통해 수렴/발산 결과를 이끌어내는 방법입니다. 더욱 자세히 알고 싶으신 분들께서는 해석학 책 혹은 미분적분학 책을 참고하시기 바랍니다. 인터넷에 간단히 검색하셔도 나옵니다. 지금 보실 이 문제의 아이디어를 알아두시는 것만으로도 수리논술에서 출제되는 어느 정도 수준까지는 대비 가능할 것입니다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$의 값을 구하여라.

<해설>

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $f(x)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$, $g(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $h(x)=1+\int_1^n \frac{1}{x}dx$로 설정할 때 $f(x)\le g(x)\le h(x)$가 성립한다. (이 부분은 직접 그래프를 통하여 증명할 수 있다 - 이 부분은 생략한다.) 즉, $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$이며 이는 곧 $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}<\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{\ln n}+1$이 되며, 해당 식에 n이 무한대로 발산하는 극한을 취하게 되면 조임정리 (샌드위치 정리)에 의하여 주어진 식 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$의 값이 1이 된다는 것을 알 수 있다. $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

실제 한양대학교에서 기출된 수리논술 모의평가 문항을 보도록 하겠습니다. 마찬가지로, 적분판정법입니다.

(페이지의 여백이 충분하지 않아, 다음 페이지에 문항을 수록하였습니다.)

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오. (2013 한양대 수리사고평가 모의고사)

> 모든 자연수 n에 대하여 $S_n < S_{n+1}$이면서 $S_n < M$인 실수 M이 존재하면 수열 $\{S_n\}$은 수렴하고 그 수렴하는 값은 M보다 작거나 같다.

$x \geq 1$인 범위에서 다음 조건 (가)와 (나)를 만족하는 연속함수 $f(x)$가 있을 때,

(가) $f(x) > 0$
(나) $1 \leq x < y$에 대하여 $f(x) > f(y)$

(1) 자연수 n에 대하여 $A_n = \int_1^n f(x)dx$일 때, 다음 두 명제가 동치임을 설명하시오.

명제 1 : 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$는 수렴한다.

명제 2 : $\lim_{n\to\infty} A_n$ 은 수렴한다.

(2) 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$이 수렴함을 설명하시오.

<예시 답안>

(1) **명제 1 → 명제 2** : 적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$이다. 가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$이라 하자. 적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$이며, $A_n < M$이다.

명제 2 → 명제 1 : 적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$이면 $A_n > \sum_{k=2}^{n} f(k)$이다. 가정에 의하여 $\lim_{n\to\infty} A_n = M$ 이라 하자. 적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^{n} f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{n=2}^{n} f(k) < M$ 이다.

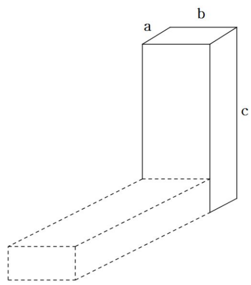
(2) $B_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1)^2)}$ 이고, $C_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}$ 라 하자. $k+2 > k+1$이므로 $B_n < C_n$이다. $C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx$ 이므로 수열 $\{D_n\}$이 수렴함을 보이면 충분하다. $z = \ln(x+1)$이라 두면 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1}$ 이므로, $D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$ 이다. $B_n < B_{n+1}$이고 $B_n < \frac{1}{\ln 2}$이므로 수열 $\{B_n\}$은 수렴한다. 따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 은 수렴한다.

적분판정법 자체가 출제 문항으로 나온 사례입니다. 대놓고 적분판정법 자체를 준 것이나 다름없긴 하지만, 잘 생각해보고 이를 직접 논증하려 생각해보면 그리 어렵지만은 않았습니다. 제시문에 '이렇게 사고하라'는 재료를 이미 제시해두었고, 이 제시문의 논리를 1번에 적용하기만 하면 되었습니다. 그리고 이렇게 증명한 적분판정법을 2번에 적용하는 계단식 구조였습니다. (계단식 구조에 대한 자세한 사항은 마지막 단원 참고) 또한, 위에서 살펴본 쌍방향 논증의 예시이기도 합니다. 명제1과 명제2가 동치임을 보이기 위해서는 단순히 한 방향으로의 증명만으로 끝낼 것이 아니라, 두 방향 모두 진행해야 합니다.

이번 문제는 참신하고 특색 있는 문제입니다. '최소한의 조건을 통해, 교과 내 과정의 지식을 이용하여 조건들을 이끌어내는' 문항입니다. 조건이 적으면 적을수록 문항의 난이도는 높아지는 경향이 있으며, 이 부분이 가장 수험생들에게 어려운 부분이 아닐까 싶습니다.

세 변의 길이가 a, b, c인 직육면체가 있다. 길이가 b인 한 변을 회전축으로 하여 90° 회전시켰을 때, 이 직육면체가 지나간 전체 영역의 부피를 V라 하자. $a+b+c=1$일 때, V의 범위를 구하여라.

<해설>



왼쪽의 그림을 참고하여, V를 구하면 $V=\left\{\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}\times b$가 된다.

$a+b+c=1$이므로, $b=1-(a+c)$가 되며, 이를 V의 식에 대입하자.

$V=\left\{\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}\{1-(a+c)\}$에서 $a+c=k$, $ac=h$ 로 치환한다.

이 때, $h=ac=a(k-a)$이고, 산술기하 부등식에 의하여 $0<h\le\frac{k^2}{4}$이다.

따라서 $V=\left\{\frac{\pi}{4}(k^2-2h)+h\right\}(1-k)=\left\{\frac{\pi}{4}k^2+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)h\right\}(1-k)$ 가 된다.

$0<h\le\frac{k^2}{4}$이고, h의 값에 의하여 결국 V의 범위도 제한되므로 V의 범위를 구해보자.

$\left\{\frac{\pi}{4}k^2+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\frac{k^2}{4}\right\}(1-k)\le V<\frac{\pi}{4}k^2(1-k)$ 즉, $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)k^2(1-k)\le V<\frac{\pi}{4}k^2(1-k)$이다.

$f(k)=k^2(1-k)$ (단, $0<k<1$)로 설정할 때, 미분하여 최대 및 최솟값을 구해보면 $0<f(x)\le\frac{4}{27}$이다.

이 $f(x)$의 범위를 V에 대한 부등식에 대입하면 결론적으로 $0<V<\frac{\pi}{27}$의 범위가 도출된다.

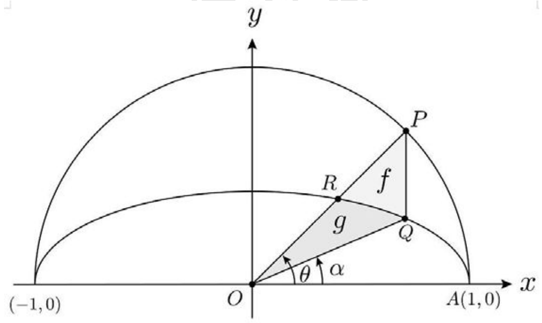
위의 문항처럼, 문제에서 주어진 조건이 별로 없음에도 스스로 문자들을 추가하고, 기존에 알고 있던 자명한 정리들을 활용하여 깔끔한 결론을 이끌어 낸다면 매우 훌륭한 점수를 받을 수 있을 것입니다. 그렇다고, 무리하셔서 너무 창의적인 답안을 내려고 하실 필요는 없습니다. 실제 저렇게 창의적이고 발상적인 문제는 자주 출제되는 편이 아니기 때문입니다. 문제에서 요구하는 정도를 벗어나지 않는 선에서 생각하는 것이 유리합니다.

[Magic 7 - 계단식 구조의 활용]

이번에는 수리논술에서 상당히 특이한 부분을 논하게 될 것입니다. 이미 수능에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 진위판정 문제에서 많이 보셨겠지만, 대부분의 수리논술은 '계단식 직렬형 구조'를 가지고 있습니다. 즉, 1번 논제에서 유도 혹은 증명하였던 공식이 2번 논제를 증명하는 것에 사용되고, 3번에서는 1번과 2번에서 유도한 공식 혹은 그에 준하는 사고방식을 통하여 증명해내는 것입니다. 이러한 계단식 구조는 우리에게 [수리논술 논제를 각각 개별적으로 보지 말고, 논제들의 흐름을 통하여 전체적인 그림을 그리라고] 요구하고 있습니다. 문제를 풀다 조건이 부족하면, 그 조건은 사실 이미 전 문항에서 증명했거나 이끌어내었던 조건이며 계단을 올라가듯이 논제를 따라 풀어 나가다 보면 어느 새 마지막 논제, 즉 계단의 마지막 단계에 올라와 있는 것입니다. (난이도도 이에 비례하여 높아지는 경향이 있습니다.) 사례들을 보겠습니다.

제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오. (2011 연세대 수시 논술)

(가) 단위원 $x^2+y^2=1$위를 점 $A(1,\ 0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 움직이는 점 P의 시간 t에서의 좌표를 $(x(t),\ y(t))$라고 하자. 타원 $x^2+k^2y^2=1$ (단, $k>1$인 실수)은 두 점 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$에서 단위원에 접한다. 점 P에서 x축으로 내린 수선이 타원과 처음 만나는 점을 Q라고 하자.



(나) 점 P와 원점 O를 이은 선분이 타원과 만나는 점을 R이라고 하자. 선분 OA와 선분 OP가 이루는 각을 θ, 선분 OA와 선분 OQ가 이루는 각을 α라고 하자. 선분 PQ, 선분 PR과 타원의 호 RQ로 둘러싸인 도형 PQR의 넓이를 f, 선분 OQ, 선분 OR과 타원의 호 RQ로 둘러싸인 도형 OQR의 넓이를 g라고 하자.

[1-1] 점 $P(x(t),\ y(t))$가 단위원 위의 점 $A(1,\ 0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 시각 t에 따라 일정한 속력으로 돌고 있다. 선분 OA, 선분 OQ와 타원의 호 AQ로 둘러싸인 도형 OAQ의 넓이를 $S(t)$라고 하자. $S(t)$의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{dS}{dt}$가 상수임을 논리적으로 설명하시오. (15점)

[1-2] 각 α의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{d\alpha}{dt}$가 각 θ의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{d\theta}{dt}$와 같아지는 θ가 구간 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$에서 적어도 하나는 존재함을 논하고, 또한 이 때 α와 θ사이의 관계식을 구하시오. 또한, 극한값 $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$를 구하시오. (단 $\alpha(t)$, $\theta(t)$는 미분가능한 함수이고 $\theta'(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$이다.) (20점)

[1-3] 극한값 $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g}$를 구하시오. (25점)

<예시답안>

[1-1] (답안 1 - 카발리에리 원리의 간접적 이용)

시각 t에서 도형 OAP(부채꼴)의 넓이를 $T(t)$, 호 AP의 길이를 $l(t)$, $\angle AOP=\theta(t)$라 하자. 주어진 조건에 의해 $\frac{dl}{dt}$는 일정하고 $l(t)=\theta(t)$이므로 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수이다. $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때

$T(t)=\frac{1}{2}\theta(t)=\int_0^{x(t)}\tan\theta(t)x\,dx+\int_{x(t)}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$이다. 점 Q의 좌표는 $Q\left(x(t),\ \frac{y(t)}{k}\right)$이므로

$S(t)=\int_0^{x(t)}\tan\theta(t)\frac{x}{k}dx+\int_{x(t)}^1\frac{1}{k}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{T(t)}{k}=\frac{1}{2k}\theta(t)$ 이다. 따라서 $S'(t)=\frac{1}{2k}\theta'(t)$이고 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수이므로 $\frac{dS}{dt}$는 상수이다. $\theta\ge\frac{\pi}{2}$일 때도 같은 원리에 의해 $\frac{dS}{dt}$는 상수이다.

(답안 2 - 적분을 이용한 넓이 직접 계산)

시각 t에서 도형 OAP(부채꼴)의 넓이를 $T(t)$, 호 AP의 길이를 $l(t)$, $\angle AOP=\theta(t)$라 하자. 주어진 조건에 의해 $\frac{dl}{dt}$는 일정하고 $l(t)=\theta(t)$이므로 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수이다. $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때 점 Q의 좌표는

$Q\left(\cos\theta,\ \frac{1}{k}sin\theta\right)$ 이므로 $s(t)=\frac{1}{2k}\cos\theta\sin\theta+\int_{x(t)}^1 y\,dx$ 이다. 이 때 $\int_{x(t)}^1 y\,dx$에서 $x=\cos\rho$,

$y=\frac{1}{k}\sin\rho$이고 $x=1$일 때 $\rho=0$이고 $x=x(t)$일 때 $\rho=\theta$이므로

$S(t)=\frac{1}{2k}\cos\theta\sin\theta+\int_\theta^0\frac{1}{k}\sin\rho(-\sin\rho)d\rho=\frac{1}{2k}\cos\theta\sin\theta+\int_0^\theta\frac{1}{k}\frac{1-\cos2\rho}{2}d\rho$

$=\frac{1}{4k}\sin2\theta+\frac{1}{k}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta\right)=\frac{\theta}{2k}$ 이다. 따라서 $S'(t)=\frac{1}{2k}\theta'(t)$이고 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수이므로 $\frac{dS}{dt}$는 상수이다. $\theta\ge\frac{\pi}{2}$일 때에도 같은 원리에 의해 $\frac{dS}{dt}$는 상수이다.

[1-2] $f(t)=\theta(t)-\alpha(t)$라 하자. 문제의 조건으로부터 θ는 t에 관한 증가함수이므로 $\theta(0)=0$이고, $\theta(T)=\frac{\pi}{2}(T>0)$인 T가 존재한다. $t=0$일 때 $\theta(0)=\alpha(0)=0$, $t=T$일 때 $\theta(T)=\alpha(T)=\frac{\pi}{2}$이므로 $f(0)=0$, $f(T)=0$이다. 이 때, $\alpha(t)$, $\theta(t)$는 미분 가능한 함수이므로 $f(t)$는 $[0,\ T]$에서 연속, $(0,\ T)$에서 미분 가능하다. 따라서 평균값의 정리 (또는 롤의 정리)에 의해 $f'(t_0)=0$인 $t_0\in(0,\ T)$가 존재한다. 즉, $\theta'(t_0)=\alpha'(t_0)$인 t_0가 구간 $[0,\ T]$에서 존재하므로 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}$인 θ가 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 적어도 하나 존재한다.

$Q\left(x(t),\ \frac{y(t)}{k}\right)$이므로 삼각비의 정의에 의해 $\tan\theta=\frac{y(t)}{x(t)}=k\frac{\frac{1}{k}y(t)}{x(t)}=k\tan\alpha\cdots$ ①이 성립한다. 양변을 t에 관해 미분하고 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}$인 조건을 적용하면, $\theta'(t)\ne0$, $\alpha'(t)\ne0$이므로 α와 θ사이의 관계식은

$(1+\tan^2\theta)=k(1+\tan^2\alpha)\cdots$ ②이다. ①과 ②를 연립하면 $(\tan\theta\tan\alpha-1)(\tan\theta-\tan\alpha)=0$이고 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}$인 경우 $\theta\ne\alpha$이므로 $\tan\theta\tan\alpha=1$ 즉, $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$의 관계식을 도출해낼 수 있다.

$\theta \to \frac{\pi}{2} - 0$이면 $\alpha \to \frac{\pi}{2} - 0$이므로 식 ①과 삼각함수의 극한 $\lim_{h \to 0} \frac{\tan h}{h} = 1$을 이용하여 극한값을 구한다.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\tan\alpha}{\tan\theta} = \frac{1}{k} \ (\because ①)$$

[1-3] 점 R에서 y축에 평행한 직선을 작도하고, 그 직선이 단위원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 P'이라 하자. 그리고 $\angle P'OA$의 크기를 β라고 하자. 이 때, 논제 1-1의 결과에 의해 $g = \frac{\beta}{2k} - \frac{\theta}{2k}$이다.

또한 $g+f = \frac{1}{2}\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{k}\sin\theta\right)$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{f+g}{g} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cos\theta\sin\theta}{\frac{\beta-\theta}{2k}} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{(k-1)\cos\theta\sin\theta}{\beta-\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{(k-1)\cos\theta\sin\theta}{\beta-\theta} \frac{\tan(\beta-\theta)}{\frac{\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\tan\theta}}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{(k-1)\cos\theta\sin\theta(1+k\tan^2\theta)}{(k-1)\tan\theta} \frac{\tan(\beta-\theta)}{\beta-\theta} (\because \tan\beta = k\tan\theta)$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{\tan\theta}+k\tan\theta\right)\frac{\tan(\beta-\theta)}{\beta-\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} (\cos^2\theta + k\sin^2\theta)\frac{\tan(\beta-\theta)}{\beta-\theta}$$

$\theta \to \frac{\pi}{2}-0$일 때 $\beta-\theta \to 0$이므로 위 극한값은 k이다. 즉, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{f+g}{g} = k$이다.

따라서 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{f}{g} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{f+g}{g} - 1\right) = k-1$이다.

잘 보시면 이전에서 사용되었던 논리적 흐름이 다음 논제에 유사하게 적용되고, 특히 1-3번은 대놓고 1번의 결과를 차용하고 있음을 알 수 있습니다. 이처럼 수리논술은 각각의 논제가 개별적이 아니라 약간의 직렬성을 갖고 제작된다는 사실을 숙지하여, 문제 풀이가 쉽지 않을 경우 이전 문항에서 사용되었던 논리적 흐름을 다시 잘 파악하여 전체를 아우르는 그림을 그리시는 것이 좋을 것입니다. 이러한 구도의 문항을 몇 개 더 보도록 하겠습니다. 연습하시면서 계단식 구조를 직접 활용해보시는 것을 추천 드립니다. 마지막 단원인 만큼, 실전적이고 어려운 문항들을 선별하여 수록하겠습니다.

(2008 서울대학교 특기자전형)

1) 양수 a, b, c에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=A$일 때, 극한값 A를 구하여라.

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=0$ 임을 보이고, $\lim_{n\to\infty}n^k\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 가 0이 아닌 극한값을 가질 때 양수 k의 값을 구하여라. (참고 : $0<a<1$인 a에 대하여 $1+ax-\frac{1}{2}a(1-a)x^2\le(1+x)^a\le1+ax$ 가 성립한다.)

3) $0<a<b<c$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-A}{B_n}$이 0이 아닌 극한값을 가진다고 할 때, 수열 $B_n=\frac{1}{n}r^n$에서 상수 r의 값을 구하시오.

<논제 해설>

1) $a\le b\le c$라고 가정하자. (a, b, c각각에 정해진 조건이 없으므로, 해당 조건은 일반성을 잃지 않는다.)
이 때 다음 부등식 $c^n<a^n+b^n+c^n\le3c^n$이 성립하므로 $c<(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\le3^{\frac{1}{n}}c$라고 할 수 있다. $\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}c=c$ 이므로, 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=c$ 가 된다. 이를 해석하면, a, b, c중 가장 큰 수로 수렴한다는 것이므로, $\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,\ b,\ c\}$라는 극한 값을 도출해낼 수 있다.

2) $1+ax-\frac{1}{2}a(1-a)x^2\le(1+x)^a\le1+ax$ 의 식에 $a=\frac{1}{n}(n\ge2)$, $x=\left(\frac{1}{2}\right)^n$을 대입하면, 다음과 같은 부등식

$1+\frac{1}{n\cdot2^n}-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\le\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}\le1+\frac{1}{n\cdot2^n}$을 도출할 수 있다. 각각에 1을 빼고, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$을 나누면 $1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n\le\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\le\frac{1}{n}$ 이 성립한다. 양 변에 $n\to\infty$로 진행하는 극한을 취하면 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=0$ 이 성립한다.

$1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n\le\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\le\frac{1}{n}$의 각 항에 n^k을 곱하면,

$n^{k-1}\left\{1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2^n}\right\} \le n^k \frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \le n^{k-1}$ 이다. $k=1$일 때 해당 부등식에 샌드위치 정리를 적용하면 $\lim_{n\to\infty} n^k \frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$ 이고, $k>1$일 때, 무한대로 발산하며, $0<k<1$일 때 0으로 수렴함을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 양수 k의 값은 1이다.

3) 1)번 논제에서, 극한값 A가 $\max\{a,\ b,\ c\}$임을 밝혀내었으며 $0<a<b<c$이므로 $A=c$이다.

해당 조건을 이용할 때, $\frac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-A}{B_n}=\frac{c\left\{\left(1+\left(\frac{b}{c}\right)^n+\left(\frac{a}{c}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}}{\frac{1}{n}\times r^n}$이다. 2)번 논제에서 사용한 부등식을 한 번 더 활용하자. $1+ax-\frac{1}{2}a(1-a)x^2 \le (1+x)^a \le 1+ax$에 $x=\left(\frac{b}{c}\right)^n+\left(\frac{a}{c}\right)^n$, $a=\frac{1}{n}\,(n\ge 2)$을 대입하면 다음과 같은 식이 된다.

$$c\left\{\left(\frac{b}{rc}\right)^n+\left(\frac{a}{rc}\right)^n\right\}\left\{1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\left(\frac{b}{c}\right)^n+\left(\frac{a}{c}\right)^n\right)\right\} \le \frac{c\left\{\left(1+\left(\frac{b}{c}\right)^n+\left(\frac{a}{c}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}}{\frac{1}{n}r^n} \le c\left\{\left(\frac{b}{rc}\right)^n+\left(\frac{a}{rc}\right)^n\right\}$$

$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\left(\frac{b}{c}\right)^n+\left(\frac{a}{c}\right)^n\right)\right\}=1$ 임을 고려할 때, 샌드위치 정리를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. $\left(\frac{b}{rc}\right)^n+\left(\frac{a}{rc}\right)^n$의 값에 따라 수렴, 발산이 결정되므로 $a<b$임을 고려할 때, $\left|\frac{b}{rc}\right|$의 값에 따라 극한값이 결정된다.

① $\left|\frac{b}{rc}\right|<1$인 경우 : $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{b}{rc}\right)^n+\left(\frac{a}{rc}\right)^n\right\}=0$이므로, 문제에서 구하고자 하는 경우가 아니다.

② $\left|\frac{b}{rc}\right|>1$인 경우 : $\left(\frac{b}{rc}\right)^n+\left(\frac{a}{rc}\right)^n$이 발산하므로 값을 정할 수 없다.

③ $\frac{b}{rc}=1$인 경우 : $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{b}{rc}\right)^n+\left(\frac{a}{rc}\right)^n\right\}=1$이므로, 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-A}{B_n}=1$ 이다.

④ $\frac{b}{rc}=-1$인 경우 : $\left(\frac{b}{rc}\right)^n+\left(\frac{a}{rc}\right)^n$이 발산(진동)하므로 값을 정할 수 없다.

결론적으로, $r=\frac{b}{c}$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}-A}{B_n}$이 0이 아닌 극한값을 가진다.

다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오. (동경대학교 입시문항 - 추정)

> n, N은 자연수이고, 함수 $f(x)$가 $f(x)=f(x+k)$ (단, k는 양수)를 만족한다.

[1-1] $T_n=\int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x}f(x)dx$, $S_N=\sum_{n=1}^{N} T_n$으로 정의할 때, T_n, S_N을 T_1으로 나타내어라. [40점]

[1-2] $f(x)\geq 0$일 때, k이상의 실수 z에 대하여 $S_N \leq \int_0^z e^{-x}f(x)dx < S_{N+1}$이 성립하도록 하는 N을 k와 z를 이용하여 나타내어라. [25점]

[1-3] 극한값 $\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-x}f(x)dx$가 존재함을 보이고, 이 극한값을 T_1으로 나타내어라. [10점]

[1-4] $h(x)=e^{-x}|\cos\pi x|$일 때, $y=h(x)$, x축, y축, 직선 $x=z$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $V(z)$라 하자. 극한값 $\lim_{z\to\infty}V(z)$를 구하여라. [25점]

<예시답안> (본 답안의 경우 논리적 흐름만을 서술했습니다.)

[1-1]

$f(x)=f(x+k)$이므로, $e^{-x}f(x)=e^{-(x+k)}f(x+k)e^k$

$T_n=\int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x}f(x)dx=\int_{k(n-1)}^{kn} e^{-(x+k)}f(x+k)e^k dx=e^k\int_{k(n-1)}^{kn} e^{-(x+k)}f(x+k)dx$

$=e^k\int_{kn}^{k(n+1)} e^{-x}f(x)dx=e^kT_{n+1}\qquad \therefore T_{n+1}=\frac{1}{e^k}T_n$

즉, 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 T_1이고 공비가 $\frac{1}{e^k}$인 등비수열이다.

$\therefore T_n=T_1\left(\frac{1}{e^k}\right)^{n-1}$, $S_N=\sum_{n=1}^{N} T_n=\frac{T_1\left(1-\frac{1}{e^{kN}}\right)}{1-\frac{1}{e^k}}$ 이 된다.

[1-2]

$S_N=\sum_{n=1}^{N} T_n=T_1+T_2+\cdots+T_N$

$=\int_0^k e^{-x}f(x)dx+\int_k^{2k} e^{-x}f(x)dx+\cdots+\int_{k(N-1)}^{kN} e^{-x}f(x)dx=\int_0^{kN} e^{-x}f(x)dx$

$\therefore S_{N+1}=\int_0^{k(N+1)} e^{-x}f(x)dx$

$S_N\leq\int_0^z e^{-x}f(x)dx<S_{N+1}$에서 $\int_0^{kN} e^{-x}f(x)dx\leq\int_0^z e^{-x}f(x)dx<\int_0^{k(N+1)} e^{-x}f(x)dx$

$e^{-x}f(x)\geq 0$이므로 $kN\leq z<k(N+1)\qquad \therefore \frac{z}{k}-1<N\leq\frac{z}{k}$ 즉, $N=\left[\frac{z}{k}\right]$

[1-3]

$z\to\infty$ 이면, $N\to\infty$ 이므로 $\lim_{N\to\infty} S_N \le \lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-x}f(x)dx \le \lim_{N\to\infty} S_{N+1}$

$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_{N+1} = \frac{T_1}{1-\frac{1}{e^k}}$ (조임정리의 활용)

따라서, 조임정리에 의해 극한값이 존재하며, 그 극한값은 $\frac{T_1}{1-\frac{1}{e^k}}$ 이다.

[1-4]

$h(x) \ge 0$이므로 $V(z) = \int_0^z h(x)dx = \int_0^z e^{-x}|\cos\pi x|dx$

$f(x) = |\cos\pi x|$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 1인 함수이므로 $f(x) = f(x+1)$이 성립한다.

$\therefore \lim_{z\to\infty} V(z) = \lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-x}f(x)dx = \frac{T_1}{1-\frac{1}{e}}$ ($\because$ 논제 [1-3])

이 때, $T_1 = \int_0^1 e^{-x}|\cos\pi x|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}\cos\pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x}\cos\pi x = \frac{2\pi\sqrt{e}+e-1}{\pi^2 e+e}$ 이므로

$\therefore \lim_{z\to\infty} V(z) = \frac{2\pi\sqrt{e}+e-1}{(\pi^2+1)(e-1)}$

아마 동경대학교 기출문항으로 추정되는 문항인데, 예전 학교에서 받았던 문항들 중에서 눈에 띄는 문항이 있기에 수록해보았습니다. 그렇게까지 어렵진 않았지만 계단식 구조를 매우 잘 드러내고 있다고 판단하였습니다. 이 문제 역시 1-1번에서 밝힌 등비수열이라는 내용이 1-4번까지 걸쳐 전반적으로 활용되고 있으며, 1-3의 내용이 1-4에 직접적으로 쓰이고 있습니다. 이는 전체 흐름상 계단을 이루는, 계단식 구조의 전형적인 예시라고 할 수 있을 것입니다. 이러한 계단식 구조를 이용하여, 이전 문제에서 힌트를 얻거나, 풀이에서 중요한 요소를 얻어내어 풀 수 있어야 수리논술을 제대로 풀 수 있는 실력이 된다고 할 수 있을 것입니다.

(2011 서울대학교 특기자전형)

1) 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음을 증명하여라.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$

2) 폐구간 $[0,\ 1]$에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 $[0,\ 1]$에서 $f'(x)$가 연속일 때 다음을 증명하여라.

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 \{f'(x)\}^2 dx$$

3) 폐구간 $[a,\ b]$에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 $f(a)=f(b)=0$, $\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = 1$을 만족한다. 이 때 $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$이고 $\frac{1}{4} \le \int_a^b \{f'(x)\}^2 dx \int_a^b x^2\{f(x)\}^2 dx$ 임을 증명하여라.

<논제 해설>

1) $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$ 뭔가 익숙한 식입니다. 이미 아는 분도 계시겠지만, 코시 슈바르츠 부등식의 적분형태입니다. 이 식은 가장 널리 쓰이는 증명법이 하나 있고, 이 외에도 몇 가지 추가적인 증명 방법들이 존재합니다. 적분 형태로 나타내어진 코시 슈바르츠 부등식의 증명법을 미리 알고 있었다면 좋았겠지만 모르고 있었다면 가장 일반적인 형태의 코시 슈바르츠 부등식에서 추론해낼 수 있는 방법을 사용하셔야 할 것입니다. 사실 첫 번째로 설명드릴 방법은 스스로 발상하는 것이 어려울 것 같습니다. 일단, 두 가지 방법 모두 소개하겠습니다.

$pf-1)$ 임의의 실수 t에 관하여 $\int_a^b \{f(x)-tg(x)\}^2 dx \ge 0$이 성립한다. ($\because$ 항상 양수) 이를 t에 관한 이차식으로 정리하면 $t^2\int_a^b g(x)^2 dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)^2 dx \ge 0$이 된다. 최고차항의 계수에 대해 두 경우로 분리하자.

① $\int_a^b g(x)^2 dx = 0$ 일 경우 : $[a,\ b]$에서 $g(x)=0$이 되므로 논제의 부등식은 항상 성립.

② $\int_a^b g(x)^2 dx > 0$ 일 경우 : $t^2\int_a^b g(x)^2 dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)^2 dx \ge 0$의 이차식이 임의의 실수 t에 대하여 성립하므로 $\frac{D}{4} = \left(\int_a^n f(x)g(x)dx\right)^2 - \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right) \le 0$이 되어야 한다. 이항하면 위의 논제가 된다.

이 방법이 가장 전형적이고, 널리 알려진 방법이긴 하지만 수험생들이 현장에서 이 방법을 이끌어내기는 어렵지 않았을까 싶습니다. 실제 출제 의도는 지금 소개할 두 번째 방법이라고 생각합니다.

$pf-2$) 코시 슈바르츠 부등식 : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

$\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)^2\right)$에서, $\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\Delta x\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)^2\Delta x\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)^2\Delta x\right)$이 된다. n을 ∞로 발산시킬 때, 정적분의 정의에 의해 자명하게 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$ 이 유도된다.

2) $f(0)=0$이고, 미분가능하다는 조건이 주어졌으므로 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$가 성립한다. 여기서, 1)번 논제에서 증명한 적분형태의 코시 슈바르츠 부등식을 사용하여 다음과 같은 과정을 유도해낼 수 있다.

$\{f(x)\}^2 = \left\{\int_0^x f'(t)dt\right\}^2 = \left\{\int_0^x 1\times f'(t)dt\right\}^2 \le \int_0^x 1^2 dt \int_0^x \{f'(t)\}^2 dt \le x\int_0^1 f'(t)^2 dt$

($\because [0,\ 1]$에서 $0 \le x \le 1$)

여기서, 양 변을 적분하면 $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \le \int_0^1 x dx \int_0^1 \{f'(x)\}^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \{f'(x)\}^2 dx$ 이므로 해당 논제가 성립한다.

3) $\int_a^b x f(x) f'(x) dx = \left[x\times\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 dx = -\frac{1}{2}\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = -\frac{1}{2}$ ($\because$ 문제 조건 참고할 것) 여기서, 1)번 논제의 부등식에 의해, $\int_a^b \{f'(x)\}^2 dx \int_a^b x^2\{f(x)\}^2 dx \ge \left(\int_a^b x f(x) f'(x) dx\right)^2 = \frac{1}{4}$ 를 유도할 수 있다.

[Last Magic - 집필을 마치며]

과학고등학교 졸업 후 몇 년이 지났지만, 수리논술 문제들의 아름다움에 빠져서 저만의 교재를 쓰고 싶다는 생각을 했던 그 시절이 엊그제 같습니다. 제가 만족할 수 있는, 저만의 독특한 교재 하나만 있었으면 좋겠다는 소원이 이렇게라도 이루어진 것에 성취감을 느끼고 있고, 일종의 행복감마저 듭니다.

제가 자료를 무료공개 하게 된 이유는 이 작업을 '재미있게 하기 위한 목적'이 가장 큽니다. 어떠한 금전적인 목적 없이 (심지어 내년에는 과외도 금전적으로 힘든 학생들 중심으로 무료로 진행할 계획입니다.) 스스로 만족하여 자기위안을 얻기 위함이며, '저 인간은 자기 인생이나 챙기지, 혼자서 정의감에 불타오르는 부질없는 인간이다'라고 생각하셔도 사실 별 할말없는게 진짜 그러고 있으니까요. (....) 누군가에게 도움이 되는 일이 즐겁기도 하고, 제 자신의 창작욕에 불타올라서 교재를 집필한 것도 있으며, 누군가를 가르쳐보고, 친해지고, 타인에게 도움이 되는 것 하나만으로도 금전적 행복이 아닌, 단순히 취미생활로의 행복은 충분히 충족시킬 수 있습니다. 내가 즐겁기 위해서, 그리고 타인에게 도움을 주는 일이 즐겁기에 시작한 일.

이 점을 허혁재님 께서는 이미 깨닫고 일타삼피 A형 100문항을 출판을 포기하고 무료공개 하신 것 같습니다. 저에게 많이 자극이 된 일입니다. 금전적으로 힘들 때 마다, 뭔가 창작한 것들을 소정의 금액을 받고 유료화할까 생각하기도 했고 고액 과외를 시작해볼까 하는 생각도 했었지만, 허혁재님을 보고 많은 것을 느꼈고, 무료공개만으로도 충분히 재미를 추구할 수 있다는 것을 잘 체감할 수 있었습니다.

이 자료를 보시는 여러분들이 누구신지 모르겠습니다. 수험생들일 수도 있고, 단순히 흥미 위주의 자료를 발굴하다 본 글을 보게 된 대학생 분들이실 수도 있고, 수리논술을 가르치시는 학원 강사분들, 혹은 학교 선생님일 수도 있을 것입니다. 대부분은 수험생 분들이겠지만요. 누가 되었든 좋습니다. 이 자료를 예쁘게 봐주시고, 도움을 받으셨다면 그것으로 저는 만족합니다. 어떠한 대가를 바라지도 않습니다. 저, 우리, 그리고 이 교재에 연관된 모든 사람들은 이 교재를 만드는 것 자체만으로 충분히 재미있었으니까요.

혹시라도 이 자료가 마음에 들지 않으시거나, 비판하실 것이 있다면 달게 받겠습니다만, 어디까지나 무료공개라는 것, 일개 아마추어 과학고, 의과대학 출신 학생들 몇 명이 모여서 시작한 것, 그리고 좋은 의도에서 시작했다는 것을 고려해주셔서 예쁘게 봐주시면 좋겠습니다.

밤이 깊었네요. 이만 글을 줄여야겠습니다. 이 지면을 통해 제가 하고 싶은 말은 엉성하게나마 표현된 것 같습니다. 모두들 건승하시고, 앞날에 좋은 일들만 가득하시기를 바랍니다.

<u>본 교재는 지속적으로 갱신될 수 있습니다.</u>