제 2 교시

2015학년도 대학수학능력시험 대비

강기원 모의고사 제 2회

수 학 영 역 [B형]

성명	

수험 번호					-				

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

수능 건승 하세요

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역 [B형]

5 지 선 다 형

1. $\log_5 \frac{3}{4} + \log_5 \frac{4}{3}$의 값은? [2점]

① 0　② 1　③ 5　④ 25　⑤ 125

2. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

3. $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$에서 삼각방정식 $\sin 3x = \sin 2x$의 해를 구하면? [2점]

① $\frac{\pi}{10}$　② $\frac{\pi}{5}$　③ $\frac{3\pi}{10}$　④ $\frac{2\pi}{5}$　⑤ $\frac{\pi}{2}$

4. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A - 2B$가 역행렬을 갖지 않도록 하는 모든 상수 k의 값의 합은? [3점]

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

5. 함수 $f(x)=x^3-9x^2+9x+1$에 대하여 부등식 $f(3^x)\leqq 9^x+1$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

6. 좌표공간에서 $(0,0,3)$를 중심으로 하는 구 C가 직선 $x+y=4,\ z=0$과 한 점에서만 만날 때, 구 C의 반지름의 길이를 구하면? [3점]

① $\sqrt{17}$ ② $\sqrt{19}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ 5

7. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다. (단, E는 단위행렬이고, O은 영행렬이다.)

(가) $A^2-3A-4E=O$

(나) $(A-E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$(A-2E)\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 x,y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면? [3점]

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

8. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $(1,3)$을 지나고 함수 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$의 그래프 위의 점 $(1,9)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, $f'(1)g(1)-f(1)g'(1)$의 값을 구하면? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 3 ④ 9 ⑤ 27

9. 정수되기 전 물에 포함된 이물질의 비율이 $I_0(\%)$인 물을 필터의 개수가 n개, 필터의 두께가 $\mu\,(\mathrm{mm})$인 정수기 A로 정수하면 정수된 물에 포함된 이물질의 비율 $I(\%)$가 다음 등식을 만족한다.

$$\log_a I = n + \log_a(\mu I_0) \text{ (단, } a\text{는 } 0<a<1\text{인 상수)}$$

두께가 $0.4\,\mathrm{mm}$인 필터가 3개 장착되어 있는 정수기 A를 이용해 이물질의 비율이 $20\,\%$인 물을 정수했더니 정수한 물에 포함된 이물질의 비율이 $1\,\%$가 되었을 때, 이물질의 비율이 $60\,\%$인 물을 이물질의 비율이 $2\,\%$이하인 물로 정수하기 위해서 정수기 A에 두께가 $0.3\,\mathrm{mm}$인 필터를 최소 몇 개 장착해야 하는지 구하시오. [3점]

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

10. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}\ (n\geq 1)$$

를 만족시킨다. 다음은 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+2}$의 값을 구하는 과정이다.

주어진 점화식에 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$$

이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 공차가 2인 등차수열이다. 이제

$b_n=\frac{1}{a_n}$이라 정의하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_nb_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_{n+2}-b_n}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+2}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\boxed{(가)}}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\boxed{(가)}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\boxed{(가)}}\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}-\boxed{(나)}\right)$$

$$=\frac{1}{\boxed{(가)}}(a_1+a_2)=\boxed{(다)}\quad\left(\because \lim_{n\to\infty}a_n=0\right)$$

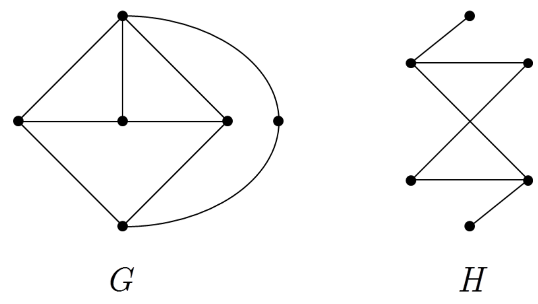
위의 (가)와 (다)에 알맞은 값을 각각 p, q라 하고 (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\frac{f(p)}{q}$의 값은? [3점]

① $\frac{8}{33}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{14}{33}$ ④ $\frac{17}{33}$ ⑤ $\frac{20}{33}$

11. 쌍곡선 $x^2 - ay^2 = 1$ 위의 y좌표가 1인 점 A에서의 쌍곡선의 접선이 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$을 지날 때, a의 값을 구하면? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12. 다음과 같은 두 그래프 G, H의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 할 때, 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]



① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

[13~14] $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 $\triangle ABC$에 대하여 $\angle B$의 이등분선이 선분 $\overline{AC}$와 만나는 점을 D라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

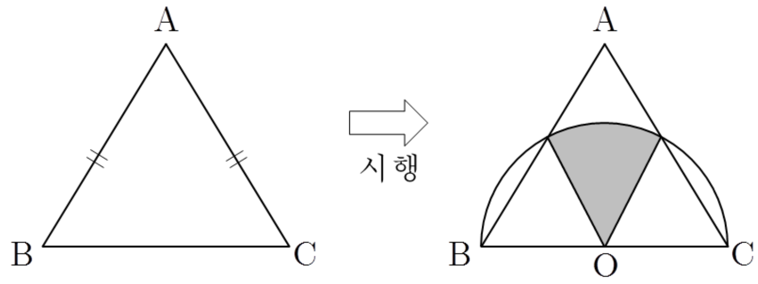
13. $\overline{BC}=\overline{BD}$일 때, $\overline{AB}:\overline{BC}=1:x$인 x값을 구하시오. [3점]

① $\frac{\sqrt{5}-2}{4}$　② $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　③ $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$　④ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

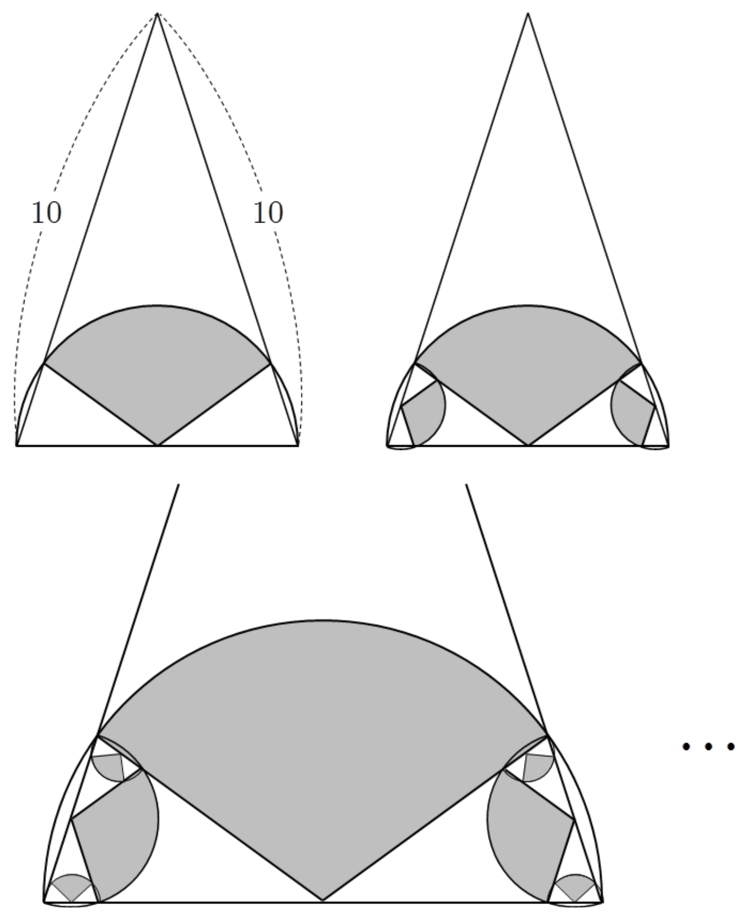
14. $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 $\triangle ABC$에 대하여 다음과 같이 [시행]을 정의한다.

[시행]

BC를 지름으로 하는 반원을 이등변삼각형 $\triangle ABC$와 교점을 가지도록 그린다. 이 때 생기는 B, C가 아닌 두 개의 교점을 각각 B′, C′라 할 때 반원의 중심 O에 대하여 부채꼴 OB′C′의 내부를 색칠한다.



$\overline{AB}=\overline{AC}=10$인 이등변삼각형 $\triangle ABC$에 대하여 $\angle B$의 이등분선과 선분 AC의 교점 D가 $\overline{BC}=\overline{BD}$를 만족한다. 이등변삼각형 $\triangle ABC$에 대하여 [시행]을 한 후 반원의 내부와 이등변삼각형의 내부의 공통부분에서 색칠된 부채꼴을 뺀 부분이 나타내는 두 이등변삼각형에 대하여 마찬가지로 [시행]을 한다. 이와 마찬가지로 계속하여 [시행] 후에 생기는 두 개의 이등변삼각형에 [시행]을 할 때, 무한히 색칠되는 부분의 넓이를 구하시오. [4점]



① $(10\sqrt{5}-30)\pi$　② $(15\sqrt{5}-20)\pi$　③ $(15\sqrt{5}-30)\pi$　④ $(20\sqrt{5}-20)\pi$　⑤ $(20\sqrt{5}-30)\pi$

15. 양의 실수에서 정의된 연속함수 $f(x)$가

$f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\int_1^4 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$를 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① $\sqrt{e}$ ② $2\sqrt{e}$ ③ $3\sqrt{e}$
④ $4\sqrt{e}$ ⑤ $5\sqrt{e}$

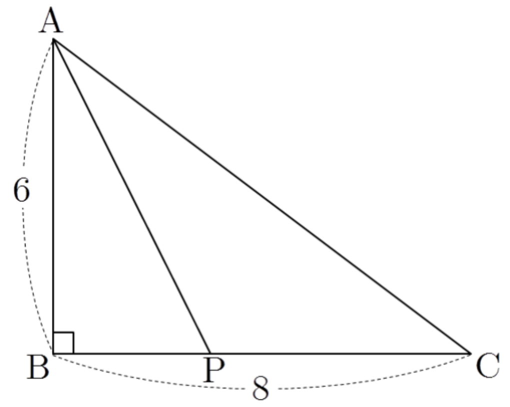
16. 작년까지의 통계자료에 따르면 고속도로를 이용하는 차량의 20%가 과속중인 차량이며 고속도로에서 과속중인 차량이 교통사고가 날 확률이 0.1%, 과속중이지 않은 차량이 교통사고가 날 확률이 0.01%이라고 한다. 올 해 1년 동안 고속도로에서 교통사고가 난 차량이 1960대라 할 때, 이 중에서 과속하지 않은 상태에서 교통사고가 난 차량이 520대 이상일 확률을 작년까지의 통계자료에 근거하여 구하시오. (단, 모든 교통사고는 독립적으로 발생하며 차량 한 대의 잘못으로 발생하고 잘못한 차량만 교통사고를 낸 것으로 한다.) [4점]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.192
1	0.341
1.5	0.433
2	0.477

① 0.341 ② 0.692 ③ 0.841
④ 0.933 ⑤ 0.977

17. 그림과 같이 $\angle B = 90^{\circ}$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$인 직각삼각형 ABC가 있다.



선분 BC위의 점 P가 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{PB}$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 다음 중에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 점 P는 두 점 B, C를 $3:2$로 내분한다.
ㄴ. 선분 AC 위의 점 Q가 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BC}$를 만족하면 $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{18}{5}$이다.
ㄷ. $0 \leq t \leq 1$인 실수 t에 대하여 $|t\overrightarrow{PA} + (1-t)\overrightarrow{PC}|$의 최소값은 $\frac{72}{25}$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 제 1사분면에서 두 곡선 $y = x^n$, $x = y^n$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 a_n이라 하자. 이 때,

$\sum_{n=2}^{70}\left(a_n a_{n+1} - a_{n+1} - a_n + 1\right)$의 값을 구하면? [4점]

① $\frac{10}{9}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{11}{9}$
④ $\frac{23}{18}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

19. 철수와 영희가 각각 단위원 $x^2+y^2=1$ 위의 한 점을 임의로 선택한다. 철수가 선택한 점을 P, 영희가 선택한 점을 Q라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\leq 1$이 성립할 확률을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

20. 사차함수 $f(x)=x^4-2x^2+3x-4$에 대하여 점 $(0,\ -5)$ 에서 $y=f(x)$의 그래프로 그은 접선의 개수를 구하시오. [4점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

21. 수열 $\{a_n\}$이 초항이 1, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이고 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족한다.

$$\frac{b_n}{a_n} \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$$

이 때, 다음 중 옳은 것만을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{b_n}{a_n}=2$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{9}$ 이다.

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{b_{n+k}}{a_{n+k}}=\frac{b_n}{a_n}$을 만족하는 자연수 k가 존재하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 유리수다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{16}{27}$이면 $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}=14$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단 답 형

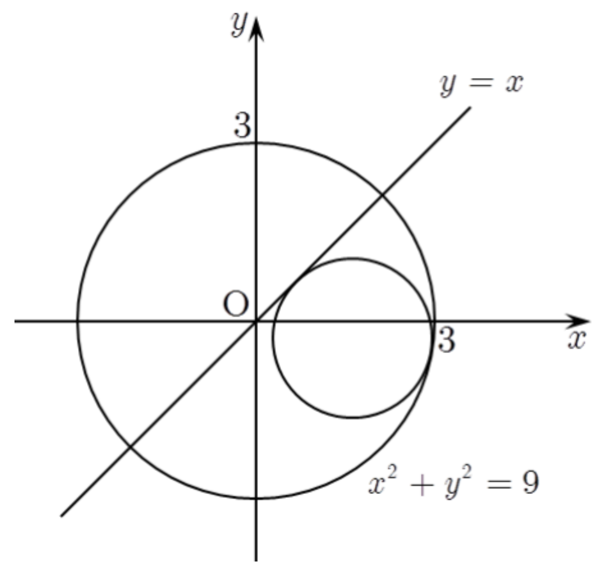
22. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+10x)}{e^x - 1}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_8 + a_{16} = 124$일 때, a_{12}의 값을 구하면? [3점]

24. 좌표평면에서 두 점 $(1, 0)$, $(0, 1)$을 연결한 선분을 I_1, 두 점 $(-12, 0)$, $(0, -5)$을 연결한 선분을 I_2라 하자. 일차변환 f에 의하여 선분 I_1이 선분 I_2로 옮겨질 때, f에 의하여 $(1, 2)$가 옮겨질 수 있는 두 점 사이의 거리를 구하시오. [3점]

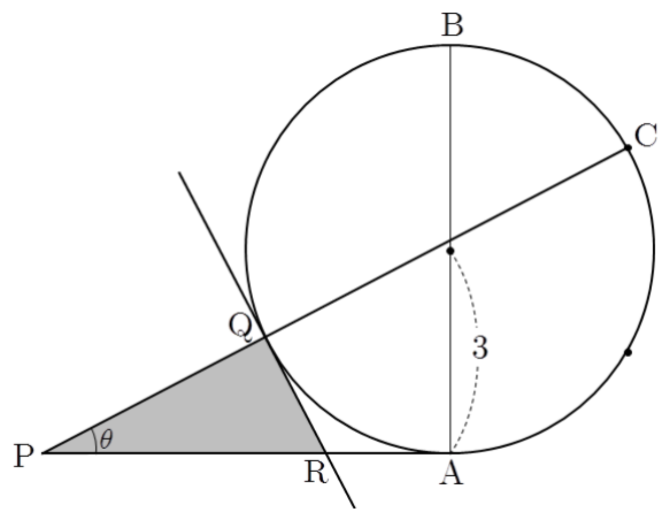
25. 사탕 3개, 초콜릿 5개, 마카롱 2개 중에서 5개를 택하여 선물 세트를 만들려고 한다. 같은 종류의 선물끼리는 서로 구별하지 않는다고 할 때, 만들 수 있는 서로 다른 선물 세트의 개수를 구하시오. [3점]

26. 원 $C: x^2+y^2=9$와 직선 $l: y=x$에 대하여 아래 그림과 같이 C에 내접하며 l에 접하는 원 C'의 중심이 그리는 도형의 넓이를 구하시오. [4점]

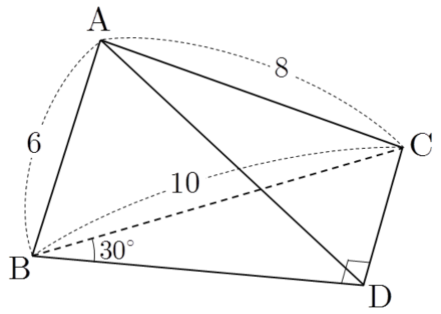


27. 양수 X에 대하여 $\log X$의 지표와 가수를 각각 $f(X)$, $g(X)$라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(n)-g(n)$의 값들을 작은 것부터 시작하여 크기 순서대로 배열할 때, 35 번째에 배열된 수 a_{35}와 100 번째에 배열된 수 a_{100}에 대하여 $a_{100}-a_{35}=\log\frac{q}{p}$이다. 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

28. 반지름의 길이가 3인 원의 지름을 AB라 하자. 원 밖의 점 P를 지나는 한 직선이 A에서 원에 접한다. 그림과 같이 A, B를 잇는 원의 호 중에서 점 P와 가깝지 않은 호의 길이를 3등분하고 그 삼등분 점 중 B와 가까운 점을 C라 하자. $\angle \mathrm{APC}=\theta$일 때, 선분 PC와 원이 만나는 점 중 C가 아닌 점 Q와 Q에서 원에 그은 접선이 선분 PA와 만나는 점 R에 대하여 $\triangle \mathrm{PQR}$의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)^n}$이 0이 아닌 값 T로 수렴할 때, nT의 값을 구하시오. [4점]



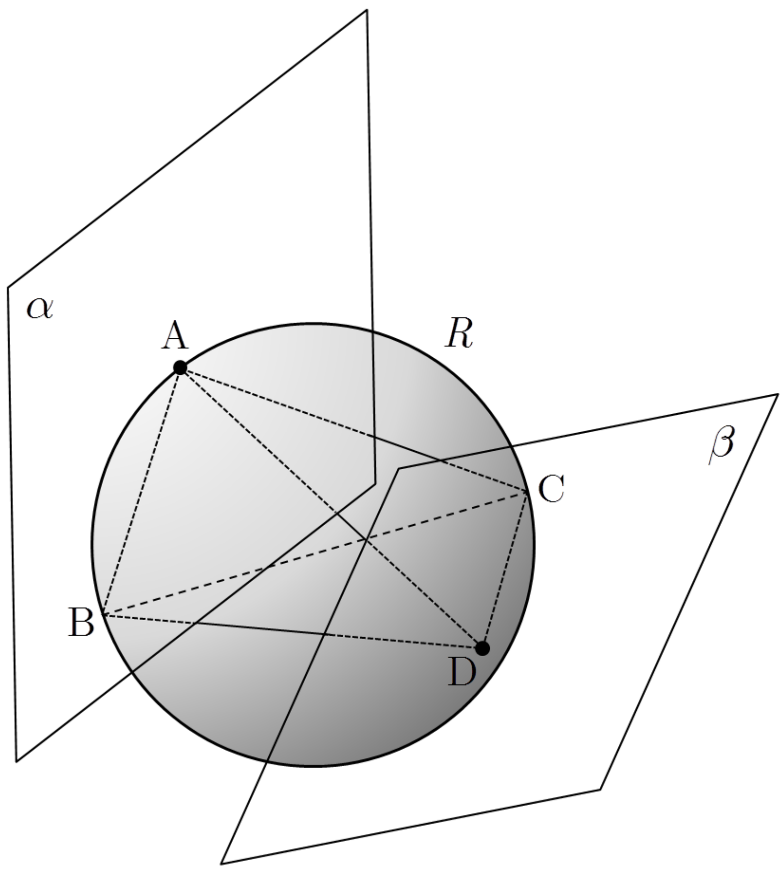
29. 오른쪽 그림과 같이



$\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=10$, $\overline{AC}=8$인 직각 삼각형 $\triangle ABC$와 선분 BC를 공유하는 직각 삼각형 BCD가

$\angle CBD=30^\circ$, $\angle BDC=90^\circ$

를 만족하며 서로 수직으로 만나고 있다. 사면체 ABCD에 외접하는 구 R에 대하여 R에 접하는 두 평면 α, β가 각각 A, D를 지난다고 할 때 두 평면 α와 β가 이루는 예각 θ가 $\cos\theta=\frac{q}{p}$(단, p, q는 서로소인 자연수)를 만족한다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]



30. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$의 그래프 $y=f(x)$를 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시키면 어떤 함수 $g(x)$의 그래프가 된다고 할 때, 두 함수 $f(x), g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(0)=4$
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분 불가능하고 $g(x)$가 미분 불가능한 점은 이 점뿐이다.

$y=-x$, $y=x+4$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.