반드시

인쇄하여

공부하세요

안녕하세요. Bin 입니다.

원래 제 블로그에 행렬 ㄱ, ㄴ,ㄷ 유형 칼럼이 있었으나,

수업용 샘플이여서 내용도 부실하여 보충도 하며,

저번에 어떤 분이 이쪽 파트에선 확실한 풀이법이 없다하여

그래도 나름의 체계는 존재한다는 얘기를 하고 싶어 이렇게 칼럼을

다시 씁니다.

제게 두시간 남짓한 시간뿐이 없어서

많은 유제는 다룰 수 없고, 대표적인 예제들만 다룰거니

이 칼럼 먼저 학습하시고 행렬 ㄱ,ㄴ,ㄷ 기출 뽑아놓고 다시한번

풀어보시기 바랍니다.

행렭 ㄱ,ㄴ,ㄷ 유형은 결국은 모든 행렬파트에서 배운 개념들이

녹아들어있는 파트입니다.

" 시험 " 이라는 특성상 배웠던 것들을 물어보는 식의 구조를 취할 수 밖에

없기 때문에, 교과서에서 배운 개념들을 녹아내어 하나의 문항으로

출제하는 것입니다.

저랑 여러 예제들보면서, 도대체 어떻게 개념을 문제로 녹여냈는지 봅시다.

예제 먼저 풀어보겠습니다.

이차정사각행렬 A, B가 역행렬을 가질 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$

ㄴ. $AB^2=E$이면 $B^{-1}A^{-1}=B$이다.

ㄷ. $AB^2=B^2A$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이 문제를 첫 예제로 쓰는 이유는, 제가 말하고자 하는 대부분의 것이 모두

녹아있는 문항이기 때문입니다.

ㄱ 먼저 보겠습니다.

이미 어느정도 출중하신 분들은 바로 행동에 옮길것입니다만,

아직 학습이 부족하신 분들은, 이 ㄱ을 보고

' ??????? A+B 와 A-B 를 바꿀 수 있는건가?? 이걸 어떻게 알지???

하는 생각이 주를 이룰 것입니다.

그런데, 우리가 저런 개념을 교과서에서 본 적이 있던가요?

배운 적없죠? 그럼 저런 개념을 묻는 문항이 출제될 수 있을까요?

없습니다.

지금 여러분이 어떤 인강이나 수업을 듣는데, 저런 개념. 즉, 배운적없던 개념을

가르치며 " 쉽게, 빠르게 풀 수 있다 " 주장하면,

접으세요.

아무튼,

그럼 어떻게 푸느냐 ?? 다음페이지에서 보죠.

전 이렇게 부릅니다.

" 하란대로 한다 + 직접 해본다 "

무슨 말인가?

ㄱ 을 보는 순간, 세개의 항이 곱해져있으니, 하란대로 곱하고.

곱을 직접해보아, 양변을 비교합니다.

곱을 직접하면,

$$A - BA^{-1}B \ = \ A - BA^{-1}B$$

가 되죠. 바로 참임을 압니다.

이미 ㄱ,ㄴ,ㄷ 유형에 통달하신 분들은

이 " 직접 " 해보는 행동을 무의식중에 합니다. 아무 의식없이 하는것이죠.

그래놓고 " 일정한 기준이 없다 " 라고 하십니다.

하지만, 이 " 직접 " 해보는 행동이 이 유형의 풀이의 80%를 차지합니다.

이 " 직접 " 해보는 풀이 속에 우리가 교과서에서 배운

행렬의 합, 차, 곱 성질들이 쓰이니깐요.

그걸 자유자재로 활용할 수 있는지 묻는 문항이기에,

직접 해보아야만 풀리게끔 내는겁니다.

자 정리. 첫번째 풀이법 :

" 하란대로 한다 + 직접 해본다 "

ㄴ을 보겠습니다. 가독성을 위해 문제를 다시 가져오죠.

이차정사각행렬 A, B가 역행렬을 가질 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$
ㄴ. $AB^2 = E$이면 $B^{-1}A^{-1} = B$이다.
ㄷ. $AB^2 = B^2A$이면 $AB = BA$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

AB^2 이 등장하는군요. 행렬의 제곱에서 우리가 배운 교과개념이 있죠.

$$B^2 = BB, (AB)^2 = ABAB$$

여기에 입각해, 전 이런풀이를 제시합니다.

" 제곱은 늘려라 "

물론, 모든 기출 분석해보면, 늘린다고 다 풀리고 이런건 아니지만,

이 늘리는 행동 하나가 풀이의 힌트를 가져옵니다.

다음 풀이가 쉽게 보인다 이거죠.

ㄴ 에 적용해 보면,

$AB^2 = ABB$,

$\rightarrow BB = A^{-1}$

$\rightarrow B = B^{-1}A^{-1}$

즉, 참.

다시,

" 제곱은 늘려라 "

뭐 이 예제 문제는 쉽지만, 다음같은 문제를 보면 얘기가 다르죠.

두 이차정사각행렬 A, B가 $A^2 = E$, $B^2 = B$를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. 행렬 B가 역행렬을 가지면 $B = E$이다.
ㄴ. $(E-A)^5 = 2^4(E-A)$
ㄷ. $(E-ABA)^2 = E-ABA$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀어보세요. ㄴ,ㄷ 모두 직접해보기 + 제곱은 늘린다. 로 쉽게, 명확하게

해설가능하지만, 전 ㄷ만 풀이해보죠.

두 이차정사각행렬 A, B가 $A^2=E$, $B^2=B$를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. 행렬 B가 역행렬을 가지면 $B=E$이다.

ㄴ. $(E-A)^5=2^4(E-A)$

ㄷ. $(E-ABA)^2=E-ABA$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. $$\begin{aligned}(E-ABA)^2 &= (E-ABA)(E-ABA)\\ &= E-2ABA+ABAABA\\ &= E-2ABA+ABBA\\ &= E-2ABA+ABA\\ &= E-ABA\end{aligned}$$

(왜냐면, $A^2=E$, $B^2=B$)

뭐한거죠? 제곱이니 늘렸고, 그 후 직접 곱했습니다. 참 쉽네요.

아까 문제 계속 볼게요.

이차정사각행렬 A, B가 역행렬을 가질 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$

ㄴ. $AB^2=E$이면 $B^{-1}A^{-1}=B$이다.

ㄷ. $AB^2=B^2A$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ에 제곱이 보이니, 풀어볼게요.

$$AB^2=B^2A,\ ABB=BBA$$

음, 그런데,

$$ABB=ABB$$

오로지 이것만으로,

$$AB=BA$$

이걸 알아낼 수 있나요??

없습니다. 절대로

또한, 여러분이 교과서에서 배운 교과개념 이내에서도 증명해낼 수 없습니다.

전 이걸 이렇게 해석합니다.

" 근거가 없으면, 틀린다. "

여기서, 틀린다는 것은, 저 ㄷ이 무조건 맞는게 아니란겁니다.

ㄷ 자체가 틀린건 아닙니다. ㄷ 이 맞을수도, 틀릴 수도 있으나,

그걸 맞게하는, 혹은 그걸 틀리게 하는 " 근거 " 가 부족하단 얘깁니다.

마치 이차방정식에서 주어진 식이 하나뿐이 없는, 그런 상황인거죠.

물론, ㄱ,ㄴ,ㄷ 외에 처음 문제 시작할 때 행렬 A에 관한

정보가 주어져있으면,

그 정보를 필사적으로 이용하여 저 ㄷ을 증명하려 애써야 합니다.

그런데도 증명이 안되면, 그제서야

아, 근거가 부족하군. 틀리다 이건.

하는 겁니다.

교육청 풀이마냥 반례제시하고 끝내는게 아니구요.

반례 다 외우게요? ?설마?

반례 만드는법도 있던데

ㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋ

자 계속해서 개념 배워볼게요. 지금 6시 되가는데, 7시에 저녁약속 있어서..

아무튼, 다음 예제 볼게요.

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 두 행렬 A, B를 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(A-B)^2=abE$

ㄴ. $A^{-1}=2E-A$

ㄷ. $A+A^{-1}=B+B^{-1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 두 행렬 A, B를

$A=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\b & 1\end{pmatrix}$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(A-B)^2=abE$

ㄴ. $A^{-1}=2E-A$

ㄷ. $A+A^{-1}=B+B^{-1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

문항 해설 전에 개념부터 보고 가시죠.

우린 행렬을 배울 때, 두개의 큰 틀로 배웁니다.

첫째 : 행렬 " 자체 " 를 다루는 개념.

ex) AX = E 면 A 의 역행렬은 X 다.

둘째 : 행렬 " 성분 " 을 도입하는 개념.

ex) 행렬의 곱셈에서의 성질을 설명할 때.

그죠?

전 이걸 문제풀이에 가져옵니다.

즉, 문제풀때도, 이 두개의 큰 틀로 나뉜다 이 말입니다.

예제보면, 문제의 시작에 행렬 A에 성분을 도입합니다.

저 순간 이 문제는 행렬의 " 성분 " 을 도입하여 푸는 문항이란 얘깁니다.

그래서 ㄴ , ㄷ 을 풀면서 행렬자체를 가지고 노는 것이 아니라

바로 행렬의 "성분을 도입"하고 저 식을 " 직접 해봐서 " 정답인지 오답인지를

가려내야합니다.

다음 문항 볼까요?

아, 옆 쪽에서 볼게요.

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB-BA=\begin{pmatrix}p & q\\r & s\end{pmatrix}$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$이면 $ps-qr=0$이다.

ㄴ. 모든 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $p+s=0$이다.

ㄷ. 행렬 $AB-BA$가 영행렬이면 B는 A의 역행렬이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

시작할 때 " 성분 " 을 도입했죠?

즉, 이 문제를 해결할 때는 성분도입해서 푸는 것이 주된 풀이라는 얘기입니다.

ㄴ을 보면,

모든 A,B 에 대해서 p + s = 0 을 만족하냐 물었으면,

정말 " 주저말고 " 바로 A, B 를 임의의 행렬성분을 도입하여 증명하면 됩니다.

이 " 주저말고 " 가 중요합니다.

저도 그렇고 여러 고수분들도 그렇고,

수학 B형 30문제를 50분 안쪽으로 돌파하는 분들은,

문제를 보고 반응하는 그 반응속도가 정말 짧습니다.

보자마자 풀이가 머릿속으로 줄줄 흐르고 펜이 앞선다는 거지요.

어쩔땐 펜 대기도 전에 답이 나오기도 합니다.

머리가 똑똑한걸까요?

아뇨. 그냥 반복에 의한 효율상승효과일 뿐입니다.

평상시 풀어왔던대로 수능도 그냥 푸는거죠 뭐.

똑같습니다.

여러분이 문제풀 때 성분도입으로 시작하는 문제를 보고

성분도입하여 풀이를 써내려가도록 남은 기간 동안 연습하면,

수능날 정말 " 주저않고 " 저 풀이를 시전할 수 있습니다.

잠깐 얘기가 흘렀지만 수학 B형에서 중요한 건 이겁니다.

몰라서 틀려요 여러분들이?

자꾸 뭘 더 배우려 들지말고,

이미 배운것들을 틀을 맞춰 정리하고, 무한복습하여 체화시키세요.

잡소리가 많았네요 ^^; 다음 예제 봅시다.

이차정사각행렬 A가 $A^2+A=3E$를 만족할 때, $A-3E$의 역행렬은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}(A+3E)$
② $\frac{1}{3}(A-3E)$
③ $\frac{1}{3}(A+3E)$
④ $-\frac{1}{9}(A-4E)$
⑤ $-\frac{1}{9}(A+4E)$

ㄱ,ㄴ,ㄷ 유형은 아니지만, 그 전에 중요한 개념 설명할 것이 있어서. 흠.

우리가 역행렬의 정의를 배울 때,

어떤 행렬 A 에 X 를 곱했을 때 , E가 나오면 . 그 X는 행렬 A에 역행렬이다.

식으로 배웠습니다.

그럼, A-3E 의 역행렬은 어떻게 구하죠?

정의대로 풀면 됩니다.

(A-3E)(X) = E.

그럼 이 X 에 무얼넣을지, 즉 A+3E 에 무얼 곱할지 어떻게 알까요?

자 밑줄.

" 조건에 근거하여 "

조건을 보면, $A^2+A=3E$ 가 주어져 있죠?

즉, 우리가 아는 정보는 이것밖에 없단 뜻이니,

X 가 무엇이 될지는 오로지 이것에만 근거하여 풀어야 합니다.

X에 무엇이 들어가야 하죠?

네.

A-4E 죠? 그래야 곱했을 때 A^2+A 꼴이 나오니깐요.

이해가 가죠? 역행렬의 기본 개념입니다.

그런데 행렬 ㄱ,ㄴ,ㄷ 에도 이 개념이 그대로 나오죠.

이번 6평에서도 나왔고, 7월 교육청 문항에서도 나왔습니다.

두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2=-A,\quad A^2+B^2=A+E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^3=A$
ㄴ. $AB^2=B^2A$
ㄷ. B의 역행렬이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이차정사각행렬 X, Y에 대하여 $*$를

$$X*Y=(X-Y)(X+Y)$$

라 정의하자. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $A*O=O$이면 $A=O$이다.
ㄴ. $A*B=A*(-B)$ 이면 $(AB)^2=A^2B^2$ 이다.
ㄷ. $A*E=A$ 이면 $A+E$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

하지만, 저랑 볼 예제는 다음 문항입니다. 풀어보세요.

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2+B^2=O,\ (A+B)^2=O$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $AB=-BA$
ㄴ. $A^3B^3=B^3A^3$
ㄷ. 행렬 $A+B+E$는 역행렬을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가

$A^2+B^2=O$, $(A+B)^2=O$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $AB=-BA$

ㄴ. $A^3B^3=B^3A^3$

ㄷ. 행렬 $A+B+E$는 역행렬을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ만 해설할게요.

A+B+E 의 X 를 곱했을 때 E 꼴이 나와야 합니다만,

무엇을 곱할지는,

" 조건에 근거하여 "

푼다 했습니다.

주어진 주건은 두개인데, 무얼 이용할까요 ?

네. $(A+B)^2=O$

저걸 이용하려면 X엔 어떤 값이 들어가야 할까요?

그렇습니다. (A+B-E) 입니다.

연산해보면,

$$(A+B+E)(A+B-E)=(A+B)^2-E$$

= -E

아. ㄷ 참. 쉽네요

이해 가셨죠? 역행렬의 개념에 근거하되, 그 근거는 주어진 조건에서 찾는다.

꼭 명심하시길 바랍니다.

시간이 없으니, 바로 다음 문항 볼게요.

두 이차정사각행렬 A, B가

$2A-A^2B=E$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}=2E-AB$

ㄴ. $AB=BA$

ㄷ. $A=\frac{1}{2}(E+BA^2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀어보세요. 배울 개념은 다음장에서.

두 이차정사각행렬 A, B가

$$2A-A^2B=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}=2E-AB$
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $A=\frac{1}{2}(E+BA^2)$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

다들 눈치 채셨겠지만, 배울 개념은 ㄴ 입니다.

$$AB=BA$$

이 식이 성립함이 보일때는 두가지를 이용합니다.

첫째, 역행렬의 성질.

우린 이런개념을 배웠죠.

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

그렇죠 ? 다음 식을 볼까요?

$A(B+E)=E$

이걸 보는 순간, 아....역행렬개념이용하는구나. 를 느끼고, 다음행동을 해야죠.

$A(B+E)=B(A+E)=E,$

$AB+E=BA+E,$

$AB=BA$

아하. 납득이 가죠???

둘째. 뭐..이름 붙일게 없어서 제가 붙였습니다. " 한쪽으로 몰기"

바로 이겁니다.

ex) A = B +E

자 행렬의 특성상, 같은 행렬이면 왼쪽에 곱하나 오른쪽에 곱하나 값은 같죠.

그걸 이용해 푸는 겁니다.

$A=B+E,$

$AA=AB+A$
$AA=BA+A$

$\therefore AB=BA$

이해가죠 ??

뭐 , 대충 이정도 입니다만,

사실 대부분 짜잘짜잘한거고,

큰 틀은 " 직접 해보기 " 입니다.

이 행동요소가 정말 큰거거든요.

여기에 제곱은 늘려라, 뭐 역행렬 개념 등등이 쓰인겁니다.

한번 기출펴놓고 도전해보십쇼 ㅎㅎ

개념 설명 중 이해가 안가는건 아래에 블로그로 오셔서

질문주십시요.

유제 못실어논건 죄송합니다 ㅎㅎ.