제 2 교시

2015학년도 셀로판 모의고사 문제지

수학 영역
(B 형)

홀수형

성명	

수험 번호					—				

- ○ 자신이 선택한 유형(A 형/B 형)의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
- ○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

  이젠 정말 기억속에서도 보내야겠습니다

- ○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
- ○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역(B 형)

홀수형

5지선다형

1. $\log_2 3+\log_4 8-\dfrac{1}{\log_3 2}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+AB^2$은? [2점]

① $\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-5\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}4&2\\6&10\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}6&3\\9&15\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}6&3\\-9&-15\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}4&2\\9&15\end{pmatrix}$

3. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 3,\ b)$, $\mathrm{B}(7,\ 0,\ -1)$에 대하여 선분 AB를 $c:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(4,\ 1,\ 0)$이다. $a+b+c$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$에서 함수 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

5. 함수 $y=xe^x$ 위의 점 $(1,\ e)$에서 그은 접선 l의 y절편은? [3점]

① e^2 ② e ③ 1 ④ $-e$ ⑤ $-e^2$

6. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 A에서 포물선의 초점 F(1, 0)까지 거리가 4일 때, 제 1사분면에 위치한 점 A의 y좌표는? [3점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

7. 독립인 두 사건 A, B에 대하여, 사건 A가 발생할 확률이 $1-x$ $(0 \le x \le 1)$ 이고, 사건 B가 발생할 확률이 x^2일 때, 두 사건 A, B가 동시에 발생할 확률의 최댓값은? [3점]

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{3}{27}$ ④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{5}{27}$

8. 행렬 $A=\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}$ 에 대하여,

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{59}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 $(3,\ 4)$이 옮겨지는 점의 좌표는? [3점]

① $(3,\ 4)$ ② $(-4,\ 3)$ ③ $(-3,\ -4)$
④ $(4,\ -3)$ ⑤ $(3,\ -4)$

9. 함수 $f(x)=\int_0^x (x-t)\sin t\, dt$ 에 대하여, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 의 값은? [3점]

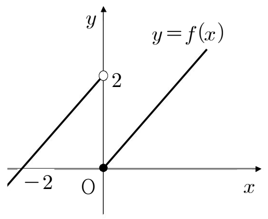
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

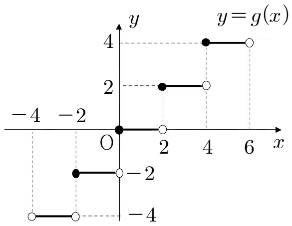
10. 어느 지역의 고등학교 학생들이 수학 B형을 응시하는 비율은 20%라 한다. 이 지역 고등학교 학생들 중 임의로 400명을 추출하여 조사할 때, 수학 B형을 응시하는 학생이 104명 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.0013 ② 0.0062 ③ 0.0075 ④ 0.0228 ⑤ 0.0669

11. 그림과 같이 $-4<x<6$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]





<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to -0} f(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to +0} f(g(x))=0$

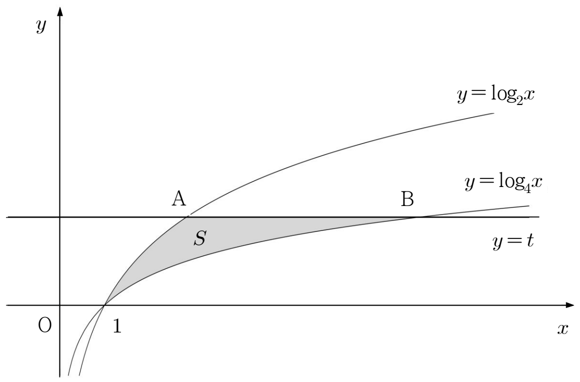
ㄷ. $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AD}//\overline{BC}$이고, $\angle ABC=\angle DAB=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$ 일 때, 삼각형 ABC의 외심 O에 대하여 $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AC}=0$이 성립한다. 이때, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DC}$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ $\frac{15}{4}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 15

[13~14] 아래 그림과 같이 직선 $y=t$가 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_2 x$과 만나는 점을 각각 A, B라고 하고, 두 곡선과 직선 $y=t$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라고 한다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 앞면에는 1이, 뒷면에는 2가 적혀진 동전을 던져서 나온 값을 t라 할 때, 그림에 주어진 넓이 S의 값을 확률변수 X라 한다. E(X)의 값은? [3점]

① $\frac{1}{\ln 4}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ $\frac{3}{\ln 4}$ ④ $\frac{2}{\ln 2}$ ⑤ $\frac{5}{\ln 4}$

14. 수열 $\{a_n\}$이 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{n}$ 을 만족시키는 실수 t의 개수로 정의될 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

15. 사차함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 2]$에서 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 다음 조건들을 만족한다.

> (가) $y=f(x)$는 $x=3$에서 극값 -54를 유일하게 갖는다.
> (나) $y=g(x)$는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.
> (다) $g(0)=0$이다.

이 때, $f(5)$의 값은? [4점]

① 170 ② 190 ③ 210 ④ 230 ⑤ 250

16. 두 이차정사각행렬 $A,\ B$가

$$AB+2A+3B+5E=O,\ \ A^2+2A-3E=O$$

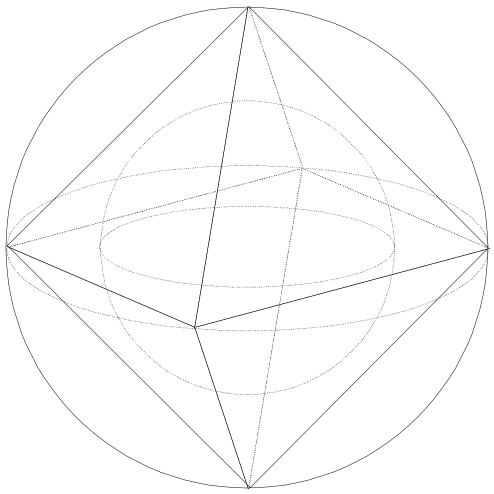
를 만족시킬 때 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$
ㄴ. $A-B=6E$
ㄷ. $B+E$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 반지름이 3인 구 S_1에 정팔면체 O_1이 내접하고, 구 S_2가 정팔면체 O_1에 외접한다고 한다. 정팔면체 O_n의 부피를 V_n이라 하고, 정팔면체 O_n은 구 S_n에 내접하고 구 S_{n-1}에 외접하다고 할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$의 값은? (단, n은 2이상 자연수) [4점]



① $\frac{18(27+3\sqrt{3})}{13}$　② $\frac{51(27+3\sqrt{3})}{13}$
③ $\frac{18(16+4\sqrt{2})}{7}$　④ $\frac{51(16+4\sqrt{2})}{7}$
⑤ $\frac{18(10+4\sqrt{6})}{11}$

18. 곡선 $y=x^2+2$ 위의 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$와 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=r^2$ 내부의 점 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 행렬 $X=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 변환이 f일 때, 역변환 f가 항상 존재하도록 하는 양수 r의 최댓값은? [4점]

① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}-1$　③ $2\sqrt{2}-2$
④ $2\sqrt{2}-3$　⑤ $2\sqrt{2}-4$

19. 좌표공간 상의 한 점 P$(5,\ 0,\ 5)$를 지나고 방향벡터 $\vec{u}=(2,\ 5,\ 4)$인 직선 l과 평면 $\alpha : 3x+z=0$이 한 점 A에서 만난다. 그리고 점 P를 평면 α 위에 정사영한 점을 점 H라고 하자. $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$를 만족하는 점 B가 공간상에 존재할 때, 삼각형 ABP을 평면 α 위에 정사영한 삼각형의 넓이 S의 최댓값은? [4점]

① 23　② 26　③ 29　④ 32　⑤ 35

20. $\int_0^1 f(x)dx=2$ 를 만족하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^1 \sqrt{\{f(x)\}^2-2xe^x f(x)+x^2e^{2x}+1}\,dx$ 의 값이 최소가 되도록 할 때, $f(2)$의 값을 구하면? [4점]

① $2e^2-3$　② $2e^2-2$　③ $2e^2-1$　④ $2e^2$　⑤ $2e^2+1$

21. 다음은 $a>1$일 때, a의 범위에 따라 두 그래프 $y=\log_a x$와 $y=a^x$의 교점의 개수가 어떻게 변하는지를 $1<\ln x<\sqrt{x}$를 이용하여 구하는 과정이다.

> $y=a^x$ 위의 한 점 $\mathrm{T}(t,\ a^t)$가 $y=\log_a x$와 $y=a^x$의 교점이 된다면,
> 점 $\mathrm{T}(t,\ a^t)$는 $y=\log_a x$ 위의 한 점이기도 하다.
> 따라서 $\log_a t=a^t$ 이고, $t=a^{a^t}$이다. $\cdots$ $a=\boxed{(가)}$이다.
> $a=\boxed{(가)}$의 값을 미분법을 이용해서 추적하면,
> $\boxed{(가)}$는 $t=\boxed{(나)}$ 일 때, 최댓값 $\boxed{(다)}$를 갖는다.
> ⋮
> 그런데, $\lim\limits_{t\to\infty}\boxed{(가)}=1$ 이므로, 주어진 두 그래프는
> $1<a<\boxed{(다)}$일 때, 두 점에서 만나고
> $a=\boxed{(다)}$일 때, 한 점에서 만나고
> $a>\boxed{(다)}$일 때, 만나지 않는다.

(가)에 알맞은 식을 $f(t)$, (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 r, s라 고 할 때, $f(4)\times s^r$의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}\,e$ ② $2\sqrt{2}\,e^2$ ③ $3\sqrt{2}\,e^3$ ④ $4\sqrt{2}\,e^4$ ⑤ $5\sqrt{2}\,e^5$

단답형

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\tan 2x}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5+a_8=41$이고 $a_3=10$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

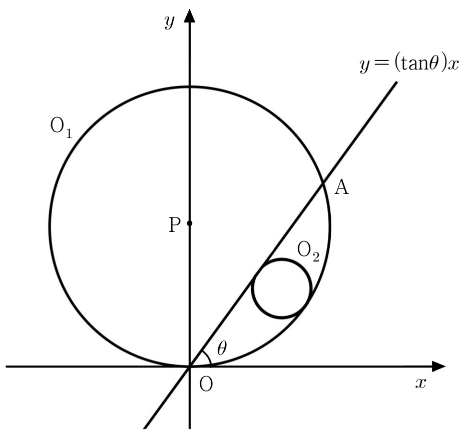
24. 크기와 모양이 동일한 공 6개에 각각 G, L, O, B, A, L을 적고 주머니에 넣어서 임의로 3개의 공을 한 번에 꺼낼 때, 모음이 적힌 공은 오직 한 개이고, L 이 적힌 공의 개수가 두 개가 아니었다고 한다. 이 때 가능한 모든 경우의 수를 구하시오. (단, L이 적힌 두 공은 동일하게 취급한다.) [3점]

25. 어느 전자기기에서 발생되는 전자기파의 양을 T_0, 이 전자기기로부터 $L(m)$ 떨어진 지점의 전자기파의 양을 T라고 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

$$T = T_0 \times a^L \text{ (단, } a\text{는 } 0 < a < 1\text{인 상수)}$$

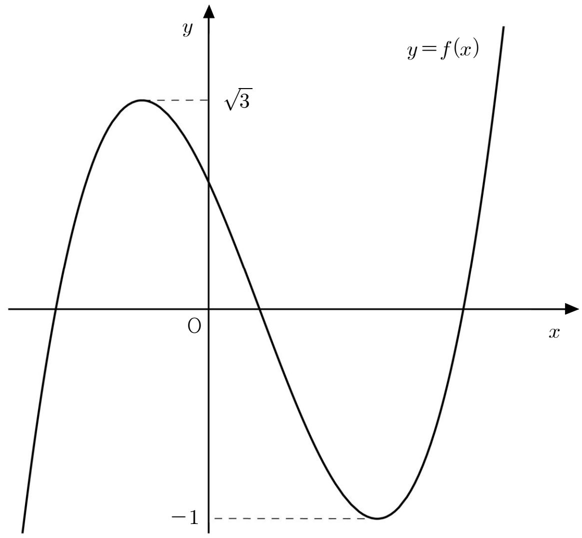
이 전자기기로부터 $20m$ 떨어진 지점의 전자기파의 양은 전자기기에서 발생되는 전자기파 양의 $\frac{1}{9}$이다. 이 전자기기로부터 $t(m)$ 떨어진 지점의 전자기파의 양이 S고 $t+30(m)$ 떨어진 지점의 전자기파 양이 S'일 때, $\frac{S}{S'}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 x축에 원점 O에서 접하고 원의 중심 P가 y축 위에 있는 반지름의 길이가 4인 원 O_1이 있다. 원점 O를 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선이 원 O_1과 만나는 O가 아닌 한 점을 점 A라고 할 때, 중심이 영역 $\{(x,\ y) | y < (\tan\theta)x\}$에 있고, $\overline{OA}$와 원 O_1에 동시에 접하는 원 중 반지름이 최대인 원을 원 O_2이라고 하자.
원 O_2의 둘레의 길이를 $l(\theta)$라 하고 작은 부채꼴 OPA의 넓이를 $S(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{\pi\{S(\theta)\}^2}{l(\theta)}$의 값을 구하시오.
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.) [4점]



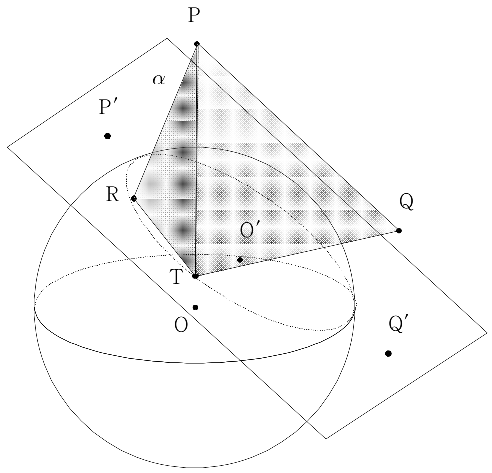
27. 직선 $y=x+k$가 타원 $4x^2+9y^2=144$와 서로 다른 두 점에서 만나고, 원 $x^2+y^2=1$과 만나지 않을 때, k가 될 수 있는 모든 자연수들의 개수를 구하시오. [4점]

28. 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 방정식 $\sqrt{\{f(x)\}^2-3}+\sqrt{\{f(x)\}^2+3}=\sqrt{6}$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. [4점]



29. 중심이 점 O이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 있다. 점 O와의 거리가 2인 평면 α와 구 S의 교선을 곡선 C라고 하자. 점 O의 평면 α위로의 수선의 발을 O′이라 하고, 구 S 외부의 두 정점 P, Q의 평면 α위로의 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 할 때, 곡선 C위의 한 점 T에 대하여 다음 조건들을 만족한다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}=k\overrightarrow{\mathrm{P'O'}}$ (단, k는 0이 아닌 임의의 상수)
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QT}}=0$, $\overline{\mathrm{PT}}=4\sqrt{7}$
(다) $|\overrightarrow{\mathrm{PP'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}|$, $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}>0$



곡선 C위의 동점 R에 대하여 삼각형 PRT를 평면 PQT위로 정사영한 넓이의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. (단, $\frac{\pi}{2}<\angle\mathrm{PP'O}<\pi$이다.) [4점]

30. n, k는 자연수이고, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+3)$일 때, 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

(가) $A_k=\int_{3(k-1)}^{3k}2^{-x}f(x)dx$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}A_k$ 으로 정의한다. (단, $A_1=14$ 이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$일 때 3 이상의 실수 m과 어떤 자연수 N에 대하여 $S_N\leq\int_0^m 2^{-x}f(x)dx<S_{N+1}$ 이 성립한다.
(다) 어떤 자연수 N과 m이 특정한 함수 $N=g(m)$ 을 만족시킬 때, $\lim_{m\to\infty}\int_0^m 2^{-x}f(x)dx=p$, $\sum_{m=3}^{15}g(m)=q$ 가 성립한다.

위의 조건을 모두 만족시키는 자연수 p, q에 대하여, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

CELLOPHAN

2015학년도 셀로판 모의고사

- 모의고사 시행일 : 2014년 9월 13일
- 공동출제 : 솔로깡, Celsius
- 편집 : Celsius
- 디자인 : 따개비 님
- 문항감수 : 허혁재
- 검토위원 : 허혁재, 최지욱, 강예찬, 석민호, 김휘진, 곽재헌, 김민수
  오르비 닉네임 jaehunny 님, 래인 님, Venu 님, Natural 님, 주모씨 님, Nakayama Saki 님, Luxena 님, 동글몬 님, 336490님, 게크로맨서 님

- 문항에 대한 문의는 ******.co.kr에서 해주시기 바랍니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.