

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

01

[풀이]

행렬의 합의 정의에서

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$$

행렬 $A+B$ 의 모든 성분의 합은 $6+a$ 이므로

$$6+a=10$$

$$\therefore a=4$$

답 ④

02

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^5 = e^5$$

답 ⑤

03

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \cos x - 4$$

$$\therefore f'(0) = -3$$

답 ③

04

[풀이]

정적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_0^1 2e^{2x} dx = [e^{2x}]_0^1 = e^2 - 1$$

답 ①

05

[풀이]

내적의 연산 법칙에 의하여

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 2a = 0$$

$$\therefore a=2$$

답 ②

06

[풀이]

양수 x^2+1 로 양변을 나누면

$$\frac{x+2}{x-1} \leq 0$$

양변에 $(x-1)^2$ 을 곱하면

$$(x+2)(x-1) \leq 0, x \neq 1$$

이차부등식을 풀면

$$-2 \leq x < 1$$

$$\therefore x = -2, -1, 0$$

답 ③

07

[풀이]

$\angle BOA = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형 BOA의 빗

변의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{OA} = 1$$

점 A의 좌표는

$$A(1, 0)$$

마찬가지의 방법으로 점 H의 좌표를 구하면

$$H(0, -2)$$

합성변환 $g \circ f$ 를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

주어진 조건에서

$$\begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

행렬의 상등에서

$$\therefore k=2$$

답 ⑤

08

[풀이]

삼각함수의 배각의 공식에서

$$\sin x = 2\sin x \cos x$$

주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{에서 } x = 0, \pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{에서 } x = \frac{\pi}{3}$$

따라서 구하는 값은 $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

답 ④

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

09

[풀이]

주어진 등식에서

$$P(A) = \frac{3}{2} P(A \cap B)$$

$$P(B) = \frac{5}{2} P(A \cap B)$$

확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 3P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$\therefore \frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = 3$$

답 ①

10

[풀이]

$$V = 2C, t = \frac{7}{2}t_0 \text{을 주어진 등식에 대입하면}$$

$$\log\left(\frac{7}{2} - 1\right) = k + 4\log 2$$

로그의 성질에 의하여

$$k = \log \frac{10}{4} - 4\log 2 = 1 - 6\log 2$$

답 ④

11

[풀이]

포물선의 방정식은

$$y^2 = 4a_n x$$

접선의 방정식은

$$y = nx + \frac{a_n}{n}$$

주어진 조건에서

$$\frac{a_n}{n} = n + 1$$

일반항 a_n 은

$$a_n = n^2 + n (n \geq 1)$$

자연수의 거듭제곱의 합의 공식에서

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^5 a_n &= \sum_{n=1}^5 (n^2 + n) \\ &= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} = 70 \end{aligned}$$

답 ①

12

[풀이]

주어진 식 (*)에 의하여

$$\frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (n \geq 2) \quad \dots \textcircled{1}$$

이다. (*)에서 $\textcircled{1}$ 을 빼서 정리하면

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^2}{n} (n \geq 2)$$

이다. $\textcircled{1}$ 으로부터

$$\frac{S_2}{2} = S_1 = a_1 = 1 \text{ 이므로 } S_2 = 2 \text{ 이고,}$$

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \dots \times \frac{S_3}{S_2} \times S_2$$

$$= \frac{n^2}{n-1} \times \frac{(n-1)^2}{n-2} \times \dots \times \frac{3^2}{2} \times 2$$

$$= n^2 \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 (n \geq 3)$$

이므로

$$S_n = n! \times \frac{n}{2} (n \geq 3)$$

이다.

수열의 합과 일반항의 관계에서

$$a_2 = S_2 - S_1 = 1$$

$$a_3 = 7$$

$$(\because \textcircled{1} \text{으로부터 } \frac{S_3}{3} = S_1 + S_2 = 3)$$

$$\text{즉, } S_3 = 9 \text{ 이므로 } a_3 = 9 - a_1 - a_2$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{n^2 - n + 1}{2} \times (n-1)! (n \geq 4)$$

그러므로 a_n 은

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1, 2) \\ \frac{n^2 - n + 1}{2} \times (n-1)! & (n \geq 3) \end{cases}$$

이다.

$$f(n) = (n+1)^2, g(n) = \frac{n}{2}$$

$$\therefore f(4) \times g(20) = 250$$

답 ②

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

13

[풀이]

n 이하의 자연수 k 에 대하여

$$\angle OP_{n-k}P_{n+k} = \frac{\pi k}{2n}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에서

$$S_k = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi k}{2n}$$

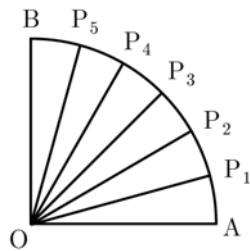
정적분의 정의와 기본 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} x dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

답 ①

14

[풀이]



위의 그림에서 6개의 서로 다른 부채꼴의 중심각은 $\frac{\pi}{12}$ 로 같으므로, 6개의 부채꼴의 넓이는

각각 $\frac{\pi}{24}$ 이다.

점 P가 P_1 또는 P_5 이면 두 부채꼴 OPA, OPB의 넓이의 차는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

점 P가 P_2 또는 P_4 이면 두 부채꼴 OPA, OPB의 넓이의 차는 $\frac{\pi}{12}$ 이다.

점 P가 P_3 이면 두 부채꼴 OPA, OPB의 넓이의 차는 0이다.

확률변수 X 의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

확률변수의 평균에 대한 공식에서

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{\pi}{12} \times \frac{2}{5} + \frac{\pi}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{\pi}{10}$$

답 ②

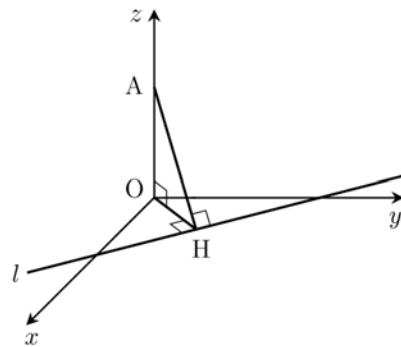
15

[풀이]

점 $(a, 0, 0)$ 을 A라고 하자.

z 축 위의 점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발은 O이다.

점 A에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{OA} \perp (xy\text{평면}), \overline{AH} \perp l$

삼수선의 정리에서

$\overline{OH} \perp l$

직각삼각형 AOH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{AO}^2} = 3$$

즉, 원점 O와 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{6} = 1$ 사이의 거리는 3이다.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$\frac{|6a|}{\sqrt{6^2 + a^2}} = 3$$

무리방정식을 풀면

$$\therefore a^2 = 12$$

답 ⑤

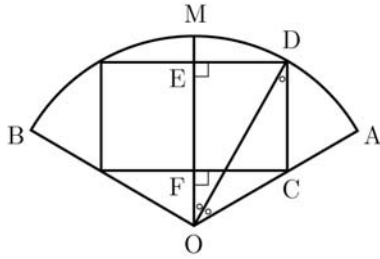
16

[풀이]

그림 R_1 에서 그려지는 직사각형의 네 꼭짓점에서 두 점을 아래 그림과 같이 각각 C, D라고 하자. 그리고 선분 OM이 직사각형과 만나는 두 점을 아래 그림과 같이 각각 E, F라고

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

하자.



점 M이 호 AB를 이등분하므로

$$\angle MOA = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

점 D가 호 AM을 이등분하므로

$$\angle MOD = \angle DOA$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi \quad \dots \textcircled{1}$$

두 직선 OM, CD가 서로 평행하므로

$$\angle MOD = \angle CDO \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\angle CDO = \angle DOC$$

직각삼각형 ODE에서

$$\overline{DE} = \overline{OD} \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

직각삼각형 OCF에서

$$\overline{OC} = \overline{CF} \times \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(\because \overline{CF} = \overline{DE})$$

삼각형 OCD에서

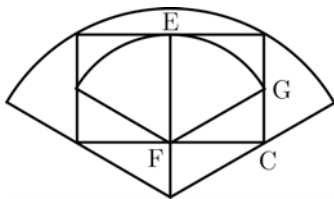
$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \overline{CD}$$

그림 R_1 에서 그려지는 부채꼴과 직사각형의 넓

이는 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$S_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그림 R_2 에서 새롭게 그려지는 부채꼴이 그림 R_1 에서 그려지는 직사각형과 만나는 네 점 중에서 한 점을 아래 그림과 같이 G라고 하자.



$$\angle GFC = \frac{\pi}{2} - \angle EFG = \frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 GFC에서

$$\overline{GF} = \overline{FC} \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그림 R_1 에서 그려지는 부채꼴과 R_2 에서 새롭게 그려지는 부채꼴의 반지름의 길이의 비가

$1 : \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 그림 R_1 에서 색칠되는 부분의 넓이와 그림 R_2 에서 새롭게 색칠되는 부분의 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{3}$ 이다.

수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고, 공비가

$\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 무한급수이다.

등비수열의 합의 공식에서

$$S_n = \frac{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$$

답 ④

17

[풀이]

선택된 두 점의 y 좌표가 1로 같을 확률은

$$\frac{{}_7C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{1}{5}$$

선택된 두 점의 y 좌표가 2로 같을 확률은

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{2}{21}$$

선택된 두 점의 y 좌표가 3으로 같을 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{1}{35}$$

따라서 구하는 확률을 p 라고 하자.

조건부확률의 정의에서

$$p = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{1}{5} + \frac{2}{21} + \frac{1}{35}} = \frac{5}{17}$$

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

답 ②

18

[풀이]

ㄱ. (참)

문제에서 주어진 왼쪽 등식에서

$$AB + A + B + E = 3E$$

행렬의 곱셈에 대한 성질에 의하여

$$(A + E)(B + E) = 3E$$

행렬의 실수배의 성질에 의하여

$$(A + E)\left(\frac{1}{3}B + \frac{1}{3}E\right) = E$$

역행렬의 정의에서

$$(A + E)^{-1} = \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}E$$

ㄴ. (참)

역행렬의 정의에서

$$\left(\frac{1}{3}B + \frac{1}{3}E\right)(A + E) = E$$

전개하여 정리하면

$$BA + A + B = 2E$$

이를 문제에서 주어진 왼쪽 등식에서 변변히 빼서 정리하면

$$AB = BA$$

ㄷ. (거짓)

문제에서 주어진 오른쪽 등식에서

$$(A + E)(A^2 - A + E) = O$$

양변의 왼쪽에 $(A + E)^{-1}$ 을 곱하면

$$A^2 - A + E = O$$

행렬의 곱셈에 대한 성질에 의하여

$$(A + E)^2 = 3A$$

양변의 오른쪽에 $(A + E)^{-1}$ 을 곱하면

$$(A + E) = A(B + E)$$

정리하면

$$AB = E$$

이를 문제에서 주어진 왼쪽 등식에 대입하면

$$A + B = E$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

19

[풀이]

이 학교 3학년 학생의 A 과목 시험 점수를 X

라고 하면, 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$

을 따른다. 여기서 $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ 이라고 하면 Z

는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80 - m}{\sigma}\right) = 0.09$$

그런데 주어진 조건에서

$$P(Z \geq 1.34) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.34) = 0.09$$

이므로

$$\frac{80 - m}{\sigma} = 1.34 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이 학교 3학년 학생의 B 과목 시험 점수를 Y

라고 하면, 확률변수 Y 는 정규분포 N

$(m + 3, \sigma^2)$ 을 따른다. 여기서 $Z = \frac{Y - m}{\sigma}$ 이

라고 하면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(Y \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{77 - m}{\sigma}\right) = 0.15$$

그런데 주어진 조건에서

$$P(Z \geq 1.04) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.04) = 0.15$$

이므로

$$\frac{77 - m}{\sigma} = 1.04 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 연립방정식을 풀면

$$\therefore m = 66.6, \sigma = 10$$

따라서 구하는 값은 76.6이다.

답 ⑤

20

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = (n - x)x^{n-1}e^{-x}$$

함수 $f(x)$ 의 이계도함수는

$$f''(x) = (x^2 - 2nx + n^2 - n)x^{n-2}e^{-x}$$

ㄱ. (참)

지수법칙에 의하여

$$f\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} = f'\left(\frac{n}{2}\right)$$

ㄴ. (참)

$$f'(n) = 0$$

$$f''(n) = -n^{n-1}e^{-n} < 0$$

함수 $f(x)$ 는 $x = n$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. (거짓)

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

n 이 3 이상의 홀수일 때, $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호는 음에서 양으로 변한다. 이때, 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

n 이 4 이상의 짝수일 때, $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호는 양에서 양으로 변함이 없다. 이때, 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 아니다.

이상에서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

답 ③

21

[풀이]

가수의 정의에서

$$0 \leq g(t) < 1$$

다음과 같이 부등식을 변형하자.

$$-\frac{1}{3} \leq g(t) - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$$

$$0 \leq \left\{ g(t) - \frac{1}{3} \right\}^2 < \frac{4}{9}$$

$$-n \leq 9n \left\{ g(t) - \frac{1}{3} \right\}^2 - n < 3n$$

주어진 등식에 의하여

$$-n \leq f(t) < 3n$$

지표 $f(t)$ 가 가질 수 있는 값은

$$-n, -n+1, -n+2, \dots, 3n-1$$

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$a_n = \frac{-n+3n-1}{2} \times 4n = 4n^2 - 2n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{2}{n} \right) = 4$$

답 ①

22

[풀이]

일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 2^{n-1} (n \geq 1)$$

주어진 등식에서

$$a_1 + a_2 + a_4 = a_1 + 2a_1 + 8a_1 = 11a_1 = 55$$

일차방정식을 풀면

$$a_1 = 5$$

등비수열의 정의에서

$$\therefore a_3 = 4a_1 = 20$$

답 20

23

[풀이]

진수의 조건에서 $x-7 > 0$

$$\text{즉, } x > 7 \quad \dots (*)$$

주어진 부등식에서

$$\log_8 x = \frac{1}{3} + \log_8 (x-7)$$

$$\text{그런데 } \frac{1}{3} = \log_8 2 \text{ 이므로}$$

$$\log_8 x = \log_8 2 + \log_8 (x-7)$$

로그의 성질에 의하여

$$\log_8 x = \log_8 2(x-7)$$

$$x = 2(x-7)$$

$$\therefore x = 14 (\because (*))$$

답 14

24

[풀이]

직선의 방향벡터를 \vec{u} 라고 하면

$$\vec{u} = (2, a, 4)$$

평면의 법선벡터를 \vec{n} 이라고 하면

$$\vec{n} = (2, 5, b)$$

두 벡터 \vec{u}, \vec{n} 은 서로 평행하므로

$$\vec{n} = k\vec{u} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수)}$$

$$(2, 5, b) = k(2, a, 4)$$

$$2 = 2k, 5 = ka, b = 4k$$

$$k = 1, a = 5, b = 4$$

평면의 방정식은

$$2x + 5y + 4z + c = 0$$

평면이 점 $(1, 1, -2)$ 를 지나므로

$$2 + 5 - 8 + c = 0, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 10$$

답 10

25

[풀이]

$a > 1$ 이므로 타원의 두 초점은 y 축 위에 있다.

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

타원의 두 초점은

$$(0, \sqrt{a^2-1}), (0, -\sqrt{a^2-1})$$

쌍곡선의 두 초점은

$$(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$$

사각형의 넓이를 S 라고 하면

$$S = 2\sqrt{2a^2-2} = 12$$

무리방정식을 풀면

$$\therefore a^2 = 19$$

답 19

26

[풀이]

주어진 등식에서 a, b, c 는 각각 양의 짝수이다.

$a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$ 에서 $abc \geq 2^3$ 이므로

n 은 3 이상의 자연수이다.

이제 자연수 x, y, z 에 대하여 다음과 같이 두자.

$$a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z$$

지수법칙에서

$$2^x 2^y 2^z = 2^{x+y+z} = 2^n$$

지수방정식을 풀면

$$x + y + z = n$$

(단, $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$)

이제 $x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1$ 로 두면

$$x' + y' + z' = n - 3$$

(단, $x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0$)

중복조합의 수에서

$$\begin{aligned} {}_3H_{n-3} &= {}_{n-1}C_{n-3} = {}_{n-1}C_2 \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 28 \end{aligned}$$

$$(n-9)(n+6) = 0$$

n 은 3 이상의 자연수이므로

$$\therefore n = 9$$

답 9

27

[풀이]

이차함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^2 + 4x$$

이제 다음의 이차방정식을 풀자.

$$f(t) = f(1)$$

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$(t+5)(t-1) = 0$$

$$t = -5 \text{ 또는 } t = 1$$

(1) $\sqrt{x+1} - x = -5$ 인 경우

$$\sqrt{x+1} = x-5 \text{ (단, } x \geq 5)$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$(x-3)(x-8) = 0$$

$$x = 3 < 5 \text{ 이므로 } x = 8$$

(2) $\sqrt{x+1} - x = 1$ 인 경우

$$\sqrt{x+1} = x+1 \text{ (단, } x \geq -1)$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x = 0, -1$$

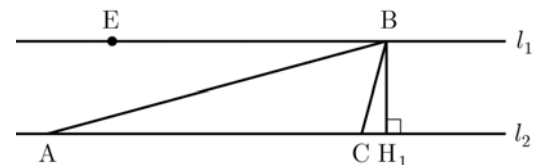
(1), (2)에서 구하는 값은 7이다.

답 7

28

[풀이1]

점 B에서 직선 l_2 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하자. 그리고 직선 l_1 위에 아래 그림과 같이 점 E가 놓여 있다고 하자.



직각삼각형 AH_1B 에서

$$\overline{AH_1} = \frac{1}{\tan \theta}$$

두 직선 l_1 과 l_2 가 서로 평행하므로

$$\angle ABE = \angle BAC = \theta$$

$$\angle BCH_1 = \angle CBE = 5\theta$$

직각삼각형 CH_1B 에서

$$\overline{CH_1} = \frac{1}{\tan 5\theta}$$

$$\overline{AC} = \overline{AH_1} - \overline{CH_1} = \frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{\tan 5\theta}$$

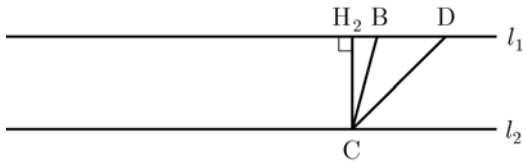
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$T_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{\tan 5\theta} \right)$$

점 C에서 직선 l_1 에 내린 수선의 발을 H_2 라 하자.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설



마찬가지의 방법으로

$$\overline{BD} = \frac{1}{\tan 3\theta} - \frac{1}{\tan 5\theta}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$T_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan 3\theta} - \frac{1}{\tan 5\theta} \right)$$

함수의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{T_1}{T_2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta} - \frac{1}{\tan 5\theta} \right)}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan 3\theta} - \frac{1}{\tan 5\theta} \right)}$$

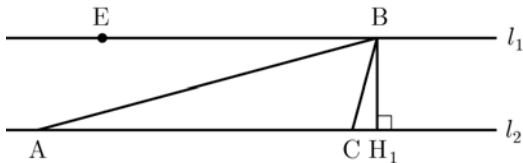
$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 5\theta}{\sin 5\theta} \times 5}{\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\cos 5\theta}{\sin 5\theta} \times 5}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} = 6$$

답 6

[풀이2]

점 B에서 직선 l_2 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하자. 그리고 직선 l_1 위에 아래 그림과 같이 점 E가 놓여 있다고 하자.



직각삼각형 AH_1B 에서

$$\overline{BA} = \frac{1}{\sin \theta}$$

두 직선 l_1 과 l_2 가 서로 평행하므로

$$\angle ABE = \angle BAC = \theta$$

$$\angle BCH_1 = \angle CBE = 5\theta$$

직각삼각형 CH_1B 에서

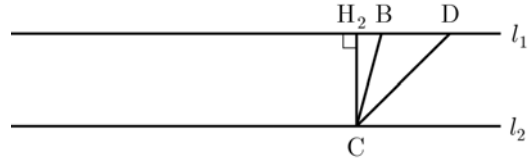
$$\overline{BC} = \frac{1}{\sin 5\theta}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$T_1 = \frac{1}{2} \overline{BA} \overline{BC} \sin(\angle CBA)$$

$$= \frac{\sin 4\theta}{2 \sin \theta \sin 5\theta}$$

점 C에서 직선 l_1 에 내린 수선의 발을 H_2 라 하자.



마찬가지의 방법으로

$$\overline{CB} = \frac{1}{\sin 5\theta}, \quad \overline{CD} = \frac{1}{\sin 3\theta}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$T_2 = \frac{1}{2} \overline{CB} \overline{CD} \sin(\angle BCD)$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{2 \sin 5\theta \sin 3\theta}$$

함수의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{T_1}{T_2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{\sin 4\theta}{2 \sin \theta \sin 5\theta}}{\frac{\sin 2\theta}{2 \sin 5\theta \sin 3\theta}}$$

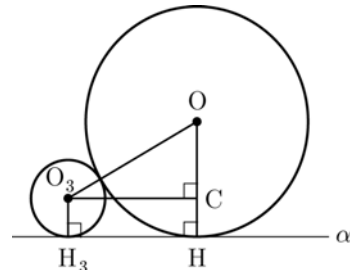
$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{3 \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta} \times 4 \times \frac{\sin 4\theta}{4\theta}}{\frac{\sin \theta}{\theta} \times 2 \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta}} = \frac{3 \times 4}{1 \times 2} = 6$$

답 6

29

[풀이]

구 S 의 중심을 O 라고 하자. 두 점 O, O_3 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 H, H_3 이라 하고, 점 O_3 에서 선분 OH 에 내린 수선의 발을 C 라고 하자.



직각삼각형 OO_3C 에서 피타고라스의 정리에 의

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

하여

$$\overline{OO_3}^2 = \overline{O_3C}^2 + \overline{CO}^2$$

대입하면

$$(1+3)^2 = \overline{O_3C}^2 + (3-1)^2$$

계산하면

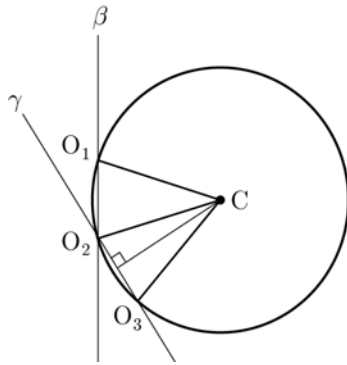
$$\overline{O_3C} = 2\sqrt{3}$$

마찬가지의 방법으로

$$\overline{O_1C} = \overline{O_2C} = 2\sqrt{3}$$

원의 정의에서 세 점 O_1, O_2, O_3 은 점 C 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 원 위에 있다.

두 점 O_2, O_3 을 지나고 평면 α 에 수직인 평면을 γ , 두 평면 β, γ 가 이루는 예각을 θ 라고 하자.



두 이등변삼각형 CO_1O_2, CO_2O_3 가 서로 합동이므로

$$\angle CO_2O_3 = \angle CO_1O_2C = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

점 C 에서 선분 O_2O_3 에 내린 수선의 발을 A 라고 하자.

직각삼각형 CO_2A 에서

$$\cos(\angle CO_2A) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{즉,} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

삼각함수의 배각공식에 의하여

$$\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{5}{6}$$

단면 D 는 반지름의 길이가 1인 원이므로 단원 D 의 넓이는 π 이다.

정사영의 넓이를 구하는 공식에서

$$\frac{q}{p}\pi = \pi \times \cos \theta = \frac{5}{6}\pi$$

답 11

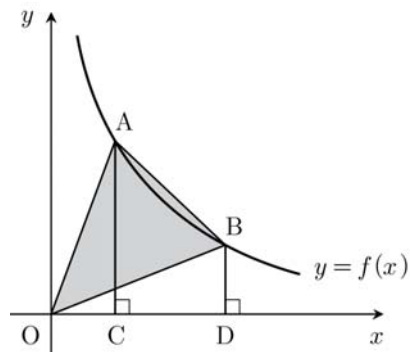
30

[풀이]

두 점 $(t, f(t)), (t+1, f(t+1))$ 을 각각 A, B , 두 점 A, B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D 라고 하자.

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다. 이때, 조건 (나)에서

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{t+1}{t} = \infty \text{ 이므로 } \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \infty$$



($\triangle AOB$ 의 넓이)

$$= (\triangle AOC \text{의 넓이}) + (\square ACDB \text{의 넓이}) - (\triangle BOD \text{의 넓이})$$

조건 (나)에서

$$\frac{t+1}{t} = \frac{tf(t)}{2} + \frac{f(t)+f(t+1)}{2} - \frac{(t+1)f(t+1)}{2}$$

정리하면

$$\frac{2}{t^2} = \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1}$$

이제 $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ 로 두자.

조건 (다)에서

$$\int_1^2 g(t)dt = 2, \quad g(t) - g(t+1) = \frac{2}{t^2}$$

이제 함수 $\int_x^{x+1} g(t)dt$ 의 방정식을 구하기 위

하여 다음과 같이 계산을 하자.

$$\int_1^x g(t)dt - \int_1^x g(t+1)dt = \int_1^x \frac{2}{t^2}dt$$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_1^x g(t)dt - \int_2^{x+1} g(t)dt = \int_1^x \frac{2}{t^2}dt$$

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 B형 해설

정적분의 성질과 기본 정리에 의하여

$$\int_1^2 g(t)dt - \int_x^{x+1} g(t)dt = \left[-\frac{2}{t} \right]_1^x$$

정리하면

$$\int_x^{x+1} g(t)dt = \frac{2}{x} \quad (x > 0)$$

정적분의 성질에 의하여

$$\therefore \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

$$= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{4}{9} = \frac{64}{63}$$

답 127