

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설

01

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$4^{\frac{3}{2}} \times 2 = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times 2 = 2^{2 \times \frac{3}{2} + 1} = 2^4 = 16$$

답 ④

02

[풀이]

행렬의 실수배의 정의에서

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

행렬 $3A$ 의 모든 성분의 합은 12이다.

답 ①

03

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 1}{n^3 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n^3}} = \frac{5 + 0}{1 + 0} = 5$$

답 ⑤

04

[풀이]

주어진 그래프의 서로 다른 꼭짓점의 개수는 5

이므로 이 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬은 5×5 정사각행렬이다. 주어진 그래프의 서로 다른 변의 개수는 4이므로 이 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중에서 1의 개수는

$8 (= 2 \times 4)$, 0의 개수는 $17 (= 5^2 - 8)$ 이다.

따라서 구하는 값은

$$1 \times 8 + 0 \times 17 = 8$$

답 ②

05

[풀이1]

등비수열의 정의에서

$$a_5 = a_3 \times 2^2 = 48$$

답 ③

[풀이2]

일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 \times 2^{n-1} (n \geq 1)$$

이므로

$$a_3 = a_1 \times 2^2 = 12 \text{에서 } a_1 = 3$$

$$\therefore a_5 = 3 \times 2^4 = 48$$

답 ③

06

[풀이]

정적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1$$

답 ①

07

[풀이]

주어진 등식에서

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로

$$P(A \cap B) = 0$$

확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + \frac{1}{4} - 0 = 1$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{4}$$

답 ⑤

08

[풀이]

$x \rightarrow -0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 수렴하므로

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 2$$

$x \rightarrow 1+0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 2보다 큰 값을 가지면서 2에 수렴하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$$

$x \rightarrow 1-0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 수렴하므로

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$$

함수의 극한의 정의에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

답 ④

09

[풀이]

이 작업 체험 행사에 참가한 300명의 A 고등학교 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 2학년 일 사건을 A, 여학생일 사건을 B라고 하자. 조건부확률의 정의에서

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{70}{300}}{\frac{130}{300}} = \frac{7}{13}$$

답 ②

10

[풀이]

$V = 2C$, $t = \frac{7}{2}t_0$ 을 주어진 등식에 대입하면

$$\log\left(\frac{7}{2} - 1\right) = k + 4\log 2$$

로그의 성질에 의하여

$$k = \log \frac{10}{4} - 4\log 2 = 1 - 6\log 2$$

답 ④

11

[풀이]

$x = 0$ 을 곡선 $y = 3^{x+1} - 2$ 의 방정식에 대입하면

$$y = 1 \text{ 즉, } A(0, 1)$$

$y = 1$ 을 곡선 $y = \log_2(x+1) - 1$ 의 방정식에 대입하면

$$1 = \log_2(x+1) - 1$$

로그방정식을 풀면

$$x = 3 \text{ 즉, } C(3, 1)$$

$x = 0$ 을 곡선 $y = \log_2(x+1) - 1$ 의 방정식에 대입하면

$$y = -1 \text{ 즉, } B(0, -1)$$

$y = -1$ 을 곡선 $y = 3^{x+1} - 2$ 의 방정식에 대입하면

$$-1 = 3^{x+1} - 2$$

지수방정식을 풀면

$$x = -1 \text{ 즉, } D(-1, -1)$$

구하는 넓이를 S라고 하자.

사다리꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 = 4$$

답 ⑤

12

[풀이]

$3^n \cdot 5^{n+1}$ 의 서로 다른 양의 약수의 개수는 $(n+1)(n+2)$

일반항 a_n 은

$$a_n = (n+1)(n+2) (n \geq 1)$$

시그마의 기본 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

답 ①

13

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = kx(x-3) \text{ (단, } k < 0 \text{)}$$

m 이 6 이하의 자연수일 때,

$$f(m) > 0 \text{의 해집합은 } \{1, 2\}$$

사건 A가 일어날 확률은

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

이항분포의 평균을 구하는 공식에서

$$\therefore E(X) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

답 ⑤

14

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = kx(x-3) \quad (\text{단, } k < 0)$$

정적분의 정의와 기본 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\ = \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{3} kx^3 - \frac{3}{2} kx^2 \right]_0^1 \\ = -\frac{7}{6} k = \frac{7}{6} \quad \text{즉, } k = -1 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = -2x + 3$$

$$\therefore f'(0) = 3$$

답 ②

15

[풀이]

1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택할 경우의 수는 중복조합의 수에서

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

이때, 선택된 세 수의 곱의 최댓값은 2^9 이므로 세 수의 곱이 100 보다 큰 경우는 다음과 같다.

세 수의 곱이 2^7 인 경우

$$2, 8, 8 \text{ 또는 } 4, 4, 8$$

세 수의 곱이 2^8 인 경우

$$4, 8, 8$$

세 수의 곱이 2^9 인 경우

$$8, 8, 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 - 4 = 16$$

답 ③

16

[풀이]

주어진 식 (*)에 의하여

$$\frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \quad \dots \textcircled{1}$$

이다. (*)에서 $\textcircled{1}$ 을 빼서 정리하면

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^2}{n} \quad (n \geq 2)$$

이다. $\textcircled{1}$ 으로부터

$$\frac{S_2}{2} = S_1 = a_1 = 1 \text{ 이므로 } S_2 = 2 \text{ 이고,}$$

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \dots \times \frac{S_3}{S_2} \times S_2$$

$$= \frac{n^2}{n-1} \times \frac{(n-1)^2}{n-2} \times \dots \times \frac{3^2}{2} \times 2$$

$$= n^2 \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \quad (n \geq 3)$$

이므로

$$S_n = n! \times \frac{n}{2} \quad (n \geq 3)$$

이다.

수열의 합과 일반항의 관계에서

$$a_2 = S_2 - S_1 = 1$$

$$a_3 = 7$$

$$(\because \textcircled{1} \text{으로부터 } \frac{S_3}{3} = S_1 + S_2 = 3)$$

$$\text{즉, } S_3 = 9 \text{ 이므로 } a_3 = 9 - a_1 - a_2$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{n^2 - n + 1}{2} \times (n-1)! \quad (n \geq 4)$$

그러므로 a_n 은

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1, 2) \\ \frac{n^2 - n + 1}{2} \times (n-1)! & (n \geq 3) \end{cases}$$

이다.

$$f(n) = (n+1)^2, \quad g(n) = \frac{n}{2}$$

$$\therefore f(4) \times g(20) = 250$$

답 ②

17

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 도함수는

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$f'(x) = 3x(x-2) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$
 $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

$x=2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

주어진 조건에서

$$f(0)f(2) = a(a-4) = -4$$

정리하면

$$(a-2)^2 = 0$$

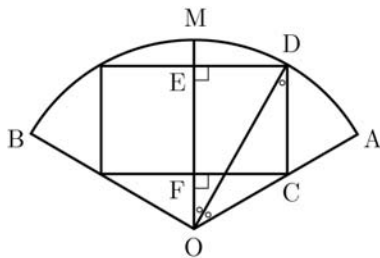
$$\therefore a = 2$$

답 ①

18

[풀이]

그림 R_1 에서 그려지는 직사각형의 네 꼭짓점 중에서 두 점을 아래 그림과 같이 각각 C, D라고 하자. 그리고 선분 OM이 직사각형과 만나는 두 점을 아래 그림과 같이 각각 E, F라고 하자.



점 M이 호 AB를 이등분하므로

$$\angle MOA = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

점 D가 호 AM을 이등분하므로

$$\angle MOD = \angle DOA$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi \quad \dots \textcircled{㉑}$$

두 직선 OM, CD가 서로 평행하므로

$$\angle MOD = \angle CDO \quad \dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒에서

$$\angle CDO = \angle DOC$$

직각삼각형 ODE에서

$$\overline{DE} = \overline{OD} \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

직각삼각형 OCF에서

$$\overline{OC} = \overline{CF} \times \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(\because \overline{CF} = \overline{DE})$$

삼각형 OCD에서

$$\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \overline{CD}$$

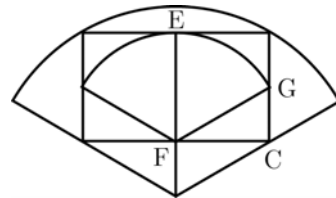
그림 R_1 에서 그려지는 부채꼴과 직사각형의 넓

이는 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$S_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그림 R_2 에서 새롭게 그려지는 부채꼴이 그림

R_1 에서 그려지는 직사각형과 만나는 네 점 중에서 한 점을 아래 그림과 같이 G라고 하자.



$$\angle GFC = \frac{\pi}{2} - \angle EFG = \frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 GFC에서

$$\overline{GF} = \overline{FC} \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그림 R_1 에서 그려지는 부채꼴과 R_2 에서 새롭게 그려지는 부채꼴의 반지름의 길이의 비가

$1 : \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 그림 R_1 에서 색칠되는 부분의

넓이와 그림 R_2 에서 새롭게 색칠되는 부분의

넓이의 비는 $1 : \frac{1}{3}$ 이다.

수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고, 공비가

$\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 무한급수이다.

등비수열의 합의 공식에서

$$S_n = \frac{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$$

답 ④

19

[풀이]

ㄱ. (참)

문제에서 주어진 왼쪽 등식에서

$$AB + A + B + E = 3E$$

행렬의 곱셈에 대한 성질에 의하여

$$(A + E)(B + E) = 3E$$

행렬의 실수배의 성질에 의하여

$$(A + E)\left(\frac{1}{3}B + \frac{1}{3}E\right) = E$$

역행렬의 정의에서

$$(A + E)^{-1} = \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}E$$

ㄴ. (참)

역행렬의 정의에서

$$\left(\frac{1}{3}B + \frac{1}{3}E\right)(A + E) = E$$

전개하여 정리하면

$$BA + A + B = 2E$$

이를 문제에서 주어진 왼쪽 등식에서 변변히 빼서 정리하면

$$AB = BA$$

ㄷ. (거짓)

문제에서 주어진 오른쪽 등식에서

$$(A + E)(A^2 - A + E) = O$$

양변의 왼쪽에 $(A + E)^{-1}$ 을 곱하면

$$A^2 - A + E = O$$

행렬의 곱셈에 대한 성질에 의하여

$$(A + E)^2 = 3A$$

양변의 오른쪽에 $(A + E)^{-1}$ 을 곱하면

$$(A + E) = A(B + E)$$

정리하면

$$AB = E$$

이를 문제에서 주어진 왼쪽 등식에 대입하면

$$A + B = E$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

20

[풀이]

이 나라에서 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리를 X 라고 하자.

확률변수 X 의 표준편차를 σ 라고 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma)$ 를 따른다.

(주의: $n < 30$ 이므로 표본표준편차 S 로 σ 를 대신할 수 없다.)

$n = 16$ 이므로 표본평균 \bar{X} 에 대하여

$$E(\bar{X}) = m, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{16}$$

모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{4}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{4} \right]$$

$$\text{즉, } c = 1.96 \times \frac{\sigma}{4} \quad \dots (*)$$

$Z = \frac{X - m}{\sigma}$ 으로 두면, 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(X \leq m + c) = P\left(Z \leq \frac{c}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z \leq 0.49) (\because (*))$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.49)$$

$$= 0.5 + 0.1879 = 0.6879$$

답 ③

21

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6x - 6) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 2) = 0$$

조건 (나)에서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

연속함수의 정의에서

$$f(1) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$0 < x < 1$ 일 때, 조건 (나)의 부등식의 각 변을 $x - 1$ 로 나누면

$$\frac{2x^3 - 2}{x - 1} \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq \frac{6x - 6}{x - 1}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x^3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2(x^2 + x + 1) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{6x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} 6 = 6$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x)}{x - 1} = 6$$

$x > 1$ 일 때, 마찬가지로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x)}{x - 1} = 6$$

함수의 극한의 정의에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 6 \quad \dots \textcircled{㉑}$$

미분계수의 정의에서

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 6 (\because \textcircled{㉑}, \textcircled{㉒})$$

$$\text{즉, } f'(1) = 6 \quad \dots \textcircled{㉓}$$

이제 $f(x)$ 가 일차식이라고 가정하자.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x - 3$$

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 1$$

$f'(1) = 1$ 은 $\textcircled{㉓}$ 을 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

$f(x)$ 가 이차식이라고 가정하자.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^2 + ax - 3$$

$$f(1) = a - 2 = 0 \text{에서 } a = 2 (\because \textcircled{㉑})$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 2x + 2$$

$f'(1) = 4$ 는 $\textcircled{㉓}$ 을 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

$f(x)$ 가 삼차식이라고 가정하자.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 3$$

$$f(1) = b + c - 2 = 0 (\because \textcircled{㉑}) \quad \dots \textcircled{㉔}$$

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$f'(1) = 3 + 2b + c = 6 (\because \textcircled{㉓}) \quad \dots \textcircled{㉕}$$

$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉕}$ 의 연립방정식을 풀면

$$b = 1, c = 1$$

함수 $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$$

$$\therefore f(3) = 36$$

답 ①

22

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3}{x - 2} = \frac{27}{1} = 27$$

답 27

23

[풀이]

해를 주어진 연립방정식에 대입하면

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$$

행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$\begin{pmatrix} -a + 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$$

행렬의 상등에서

$$-a + 2 = -2 \text{ 즉, } a = 4$$

$$b = 4$$

$$\therefore a + b = 8$$

답 8

24

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 하면

일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 + (n - 1)d (n \geq 1)$$

주어진 조건에서

$$a_1 + a_{10} = 2a_1 + 9d = 22$$

등차수열의 합의 공식에서

$$\therefore \sum_{k=2}^9 a_k = \frac{a_2 + a_9}{2} \times 8 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \times 8 = 88$$

답 88

25

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 연속이다.

이 해설지에 관한 저작권은 이동훈에게 있습니다.

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설

$x=3$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x+2)(x-3)}{x-3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3x+2) = 11$$

$x=3$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 함수값은

$$f(3) = a$$

함수의 연속의 정의에서

$$\therefore a = 11$$

답 11

26

[풀이]

적분과 미분의 관계에서

$$f(x) = 3x^2 + 4$$

$$\therefore f(10) = 304$$

답 304

27

[풀이1]

점 $P\left(x, \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3}\right) (x > 0)$ 에서 주어진 직선

까지의 거리를 $f(x)$ 라고 하자.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$f(x) = \frac{\left|\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{41}{3}\right|}{\sqrt{2}} \quad (x > 0)$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{41}{3} \quad (x > 0) \text{로 두자.}$$

함수 $g(x)$ 의 도함수는

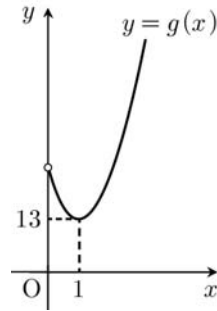
$$g'(x) = x^2 - 1$$

$$g'(x) = (x+1)(x-1) = 0 \text{에서}$$

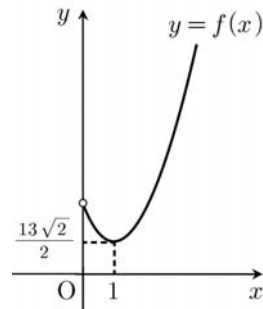
$$x = 1 \quad (\because x > 0)$$

$x=1$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 $g(1) = 13$ 이다.

함수 $g(x)$ 의 그래프는



함수 $f(x)$ 의 그래프는



함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값을 갖는다.

이때, 점 P의 좌표는 (1, 4)이다.

$$\therefore a + b = 5$$

답 5

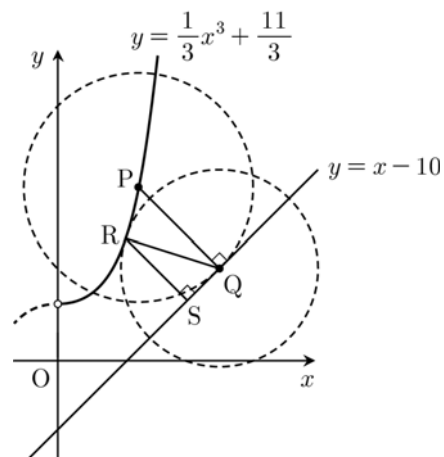
[풀이2]

점 P에서 주어진 직선에 내린 수선의 발을 Q,

점 Q를 중심으로 하고 주어진 곡선에 접하는

원 위의 접점을 R, 점 R에서 주어진 직선에 내

린 수선의 발을 S라고 하자.

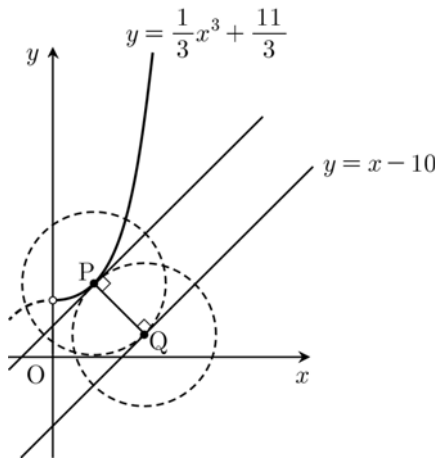


위의 그림에서

$$\overline{RS} \leq \overline{QR} \leq \overline{PQ}$$

단, 등호는 두 점 P, R이 일치할 때 성립한다.

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설



위의 그림처럼 점 P에서의 접선의 기울기가 주어진 직선의 기울기와 같으면 두 점 P, R이 일치한다.

주어진 곡선의 방정식을 미분하면

$$y' = x^2$$

$$y' = 1 \text{에서 } x = 1 (\because x > 0)$$

점 P의 좌표는 (1, 4)이다.

$$\therefore a + b = 5$$

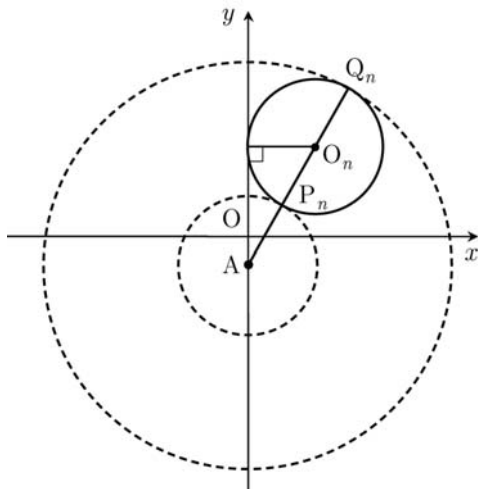
답 5

28

[풀이]

점 (0, -1)을 A라고 하자.

직선 AO_n 이 원 O_n 과 만나는 두 점 중에서 점 A에 거리가 가까운 점을 P_n , 거리가 먼 점을 Q_n 이라고 하자.



원의 반지름의 길이가 $3n$ 이므로

$$a_n = \overline{AO_n} + \overline{O_nQ_n}$$

$$= \sqrt{(3n)^2 + (4n+1)^2} + 3n$$

$$b_n = \overline{AO_n} - \overline{O_nP_n}$$

$$= \sqrt{(3n)^2 + (4n+1)^2} - 3n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(3n)^2 + (4n+1)^2} + 3n}{\sqrt{(3n)^2 + (4n+1)^2} - 3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25n^2 + 8n + 1} + 3n}{\sqrt{25n^2 + 8n + 1} - 3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}} + 3}{\sqrt{25 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}} - 3} = \frac{5+3}{5-3} = 4$$

답 4

29

[풀이]

확률밀도함수의 성질에서

$$P(0 \leq X \leq 3) = 3a = 1 \text{ 즉, } a = \frac{1}{3}$$

이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$P(x \leq X \leq 3) = 1 - \frac{1}{3}x$$

확률밀도함수의 성질에서

$$P\left(0 \leq X < \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 3\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

답 10

30

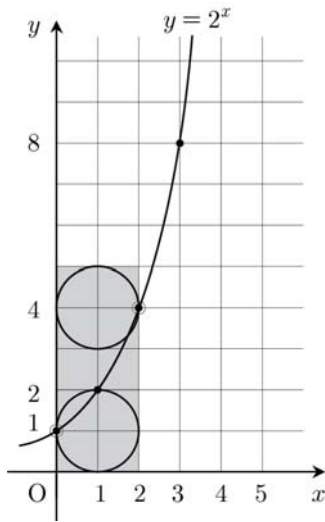
[풀이]

원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행 이동시킨 후에 y 축에 방향으로 b 만큼 평행이동시키면 조건 (나)에서 주어진 원과 일치한다. 이를 원 C_1 이라고 하자.

원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행 이동시킨 후에 y 축에 방향으로 b 만큼 평행이동시키면 조건 (다)에서 주어진 원과 일치한다. 이를 원 C_2 라고 하자.

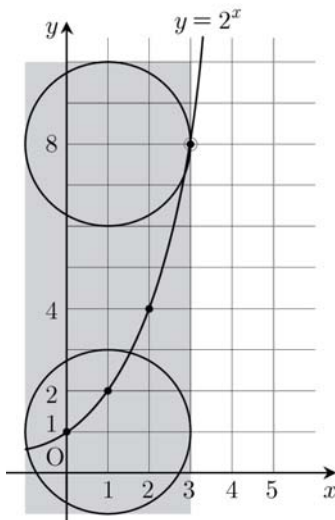
$a = 1$ 인 경우

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설



원 C_1 이 곡선 $y = 2^x$ 와 만날 때 b 의 범위는
 $2^0 \leq b \leq 2^2$

원 C_1 이 곡선 $y = 2^x$ 와 만나지 않을 때 b 의 범위는
 $2^2 < b \leq 100$

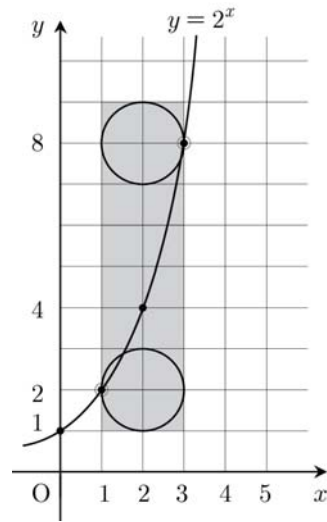


원 C_2 가 곡선 $y = 2^x$ 와 만날 때 b 의 범위는
 $2^0 \leq b \leq 2^3$

$a = 1$ 일 때, 조건 (나), (다)를 만족시키는 b 의 범위는

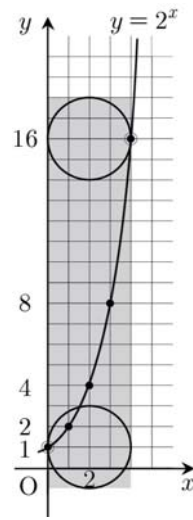
$$2^2 < b \leq 2^3$$

$a = 2$ 인 경우



원 C_1 이 곡선 $y = 2^x$ 와 만날 때 b 의 범위는
 $2^1 \leq b \leq 2^3$

원 C_1 이 곡선 $y = 2^x$ 와 만나지 않을 때 b 의 범위는
 $2^0 \leq b < 2^1$ 또는 $2^3 < b \leq 100$



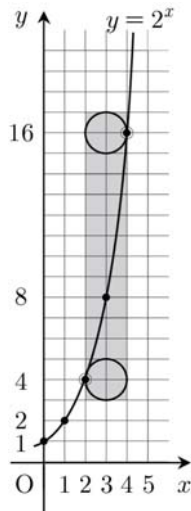
원 C_2 가 곡선 $y = 2^x$ 와 만날 때 b 의 범위는
 $2^0 \leq b \leq 2^4$

$a = 2$ 일 때, 조건 (나), (다)를 만족시키는 b 의 범위는

$$2^0 \leq b < 2^1 \text{ 또는 } 2^3 < b \leq 2^4$$

$a = 3$ 인 경우

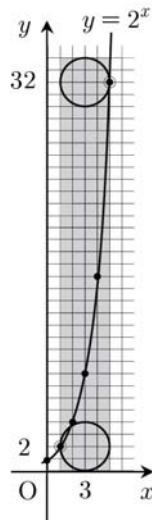
2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설



원 C_1 이 곡선 $y = 2^x$ 와 만날 때 b 의 범위는 $2^2 \leq b \leq 2^4$

원 C_1 이 곡선 $y = 2^x$ 와 만나지 않을 때 b 의 범위는

$$2^0 \leq b < 2^2 \text{ 또는 } 2^4 < b \leq 100$$



원 C_2 가 곡선 $y = 2^x$ 와 만날 때 b 의 범위는 $2^1 \leq b \leq 2^5$

$a = 3$ 일 때, 조건 (나), (다)를 만족시키는 b 의 범위는

$$2^1 \leq b < 2^2 \text{ 또는 } 2^4 < b \leq 2^5$$

이상에서 다음과 같이 추론할 수 있다.

a	b 의 범위
1	$2^2 < b \leq 2^3$
2	$2^0 \leq b < 2^1$ 또는 $2^3 < b \leq 2^4$
3	$2^1 \leq b < 2^2$ 또는 $2^4 < b \leq 2^5$
4	$2^2 \leq b < 2^3$ 또는 $2^5 < b \leq 2^6$
5	$2^3 \leq b < 2^4$ 또는 $2^6 < b \leq 100$
6	$2^4 \leq b < 2^5$
7	$2^5 \leq b < 2^6$
8	$2^6 \leq b \leq 100$
9	만족시키는 값이 없다.
10	만족시키는 값이 없다.

순서쌍의 개수를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= 2^2 + (2^0 + 2^3) + (2^1 + 2^4) + (2^2 + 2^5) \\ &\quad + (2^3 + 36) + 2^4 + 2^5 + 37 \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \\ &\quad + (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + 36 + 37 \end{aligned}$$

등비수열의 합의 공식에서

$$S = \frac{2^0(2^6 - 1)}{2 - 1} + \frac{2^2(2^4 - 1)}{2 - 1} + 73 = 196$$

답 196

[참고]

수학적 귀납법에서 다음의 명제가 참임을 증명하였다.

$h \geq -1$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여

$$(1+h)^n \geq 1+nh \quad \dots (*)$$

(*)에 $h = 1$ 을 대입하면

모든 자연수 n 에 대하여

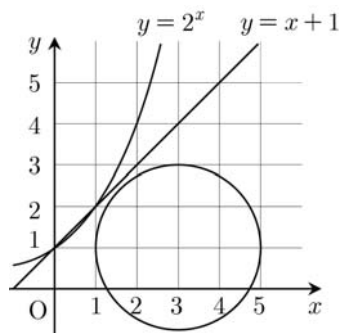
$$2^n \geq 1+n$$

일반적으로 다음의 부등식이 성립한다.

$$x \geq 1 \text{이면 } 2^x \geq 1+x$$

(단, 등호는 $x = 1$ 일 때 성립한다.)

2015학년도 9월 모의평가 수학영역 A형 해설



점 $(3, 1)$ 에서 직선 $y = x + 1$ 까지의 거리 2보다 크므로 원 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 는 부등식의 영역 $y < x + 1$ 에 속한다.

따라서 원 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 는 곡선 $y = 2^x$ 과 만나지 않는다.