Bin의 수학영역

수학 영역 A형 (9월 모평 분석&학습자료.)

제 2 교시 | 성명 | | 수험번호 | 3 | *1*

안녕하세요. Bin 입니다.

일단, 모두들 고생하셨습니다.ㅎㅎ

당장 수시원서 쓰시느라 바쁠테지만,

항상 얘기하듯이, 이번 모평을 통해서 여러분들이 해야할 것은,

“ 100분 ” 을 정말 제대로 활용했는지, 그 과정중에

잘못한 행동은 없는지 (가령 한문제 잡고 늘어지다가 시간 다 날리고 검토해야 하는데 괜히 미련남아서 한문제 파다가 푼문제에서 실수로 틀리고 해서 점수 완전 바닥 찍는.) 등을 점검하여,

다음 시험에선 그런 실수를 하지 않기 위한 공부방향을 설계 + 계획 해야합니다.

수능 본사람 마냥 멘붕와 있으면 안된다 이겁니다.

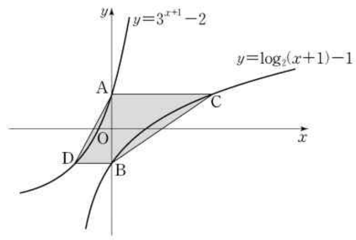
잘봐도 마찬가지. 이성적으로 어디가나.. 하고 있으면 안되요.

지금쓰는 칼럼은, 9평 A형 분석 과. 그에 따른 학습대책이 담긴 칼럼 입니다. 이거 읽으면서는 문제오답을 하는거고. 방금 말했다시피 문제 오답과 더불어 공부방향 설계도 꼭 하셔야 합니다.

시작할게요.

참고로, 아시다시피 전문항을 다루진 않습니다.

그림과 같이 두 곡선 $y=3^{x+1}-2$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x+1}-2$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이는? [3점]



① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

11번 문항입니다.

지수, 로그함수에서의 도형은, 보통 두가지 해결법이 있다했죠?

1. 좌표같음.

2. 길이차이

A 와 C의 y좌표가 같으니 그걸로 길이차이를 구하고,

A와 B의 x 좌표가 같으니 그걸로 길이차이 구하고,

D와 B의 y좌표가 같으니 그걸로 길이차이 구하면 됩니다.

간단한 문항이었구요.

자연수 n에 대하여 $3^n \cdot 5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

12번 문항입니다.

이건 개념몰라서 틀렸을텐데,

3^n • 5^{n+1}의 약수의 개수는 (n+1)(n+2) 입니다.

공식을 몰랐다치더라도, 시험 시간에는 n에 1넣고, 2넣고 해서라도

유도를 했었어야 합니다.

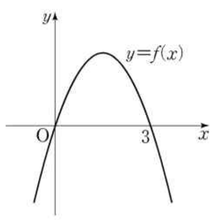
수업 때 했듯이, 시그마 가 등장했기 때문에

결국은 , 등차,등비,계차 혹은 자연수 거듭제곱합, 또는 부분분수

꼴이 나올게 뻔하기 때문에 그 일반항 자체를 직접 구했어야 합니다.

물론 여기선 부분분수네요. 풀면 됩니다.

[13~14] 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, $f(0)=f(3)=0$이다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{7}{6}$일 때, $f'(0)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

수업 때 했지만.. 너무 쉽게나왔죠? k/n 을 x라 취급하고, 1/n 을 dx 라 하고 정적분 해주면 됩니다.

네 개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택할 때, 세 수의 곱이 100 이하가 되도록 선택하는 경우의 수는? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

15번 문항입니다.

항상 말하지만,

상황이 복잡하면, 여사건

기억하죠 ?

제가 그토록 수업 때 얘기했는데, 이걸 지금에서야 “ 아 맞다 ”

하면 체화가 정말 덜된겁니다. 그러면 안되요.

남은 두달동안 다시 공부하세요. 체화.

시험 시간엔 여러분의 바닥상태가 나와요

어정쩡하게 배운 개념은 절대 안튀어나옵니다.

암튼, 전체사건에서, 100 초과가 되는 경우를 빼주면 됩니다

ㅎㅎ 쉽네요.

다음문항은 다음장에서 보죠.

16. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}S_k \quad (n\ge 1) \cdots\cdots (*)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식 (*)에 의하여

$$\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k \quad (n\ge 2) \cdots\cdots ㉠$$

이다. (*)에서 ㉠을 빼서 정리하면

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\boxed{(가)}}{n} \quad (n\ge 2)$$

이다. ㉠으로부터 $S_2=2$이고,

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2 \quad (n\ge 3)$$

이므로

$$S_n=n!\times\boxed{(나)} \quad (n\ge 3)$$

이다. 그러므로 a_n은

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1,\ 2)\\ \dfrac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)! & (n\ge 3)\end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(4)\times g(20)$의 값은? [4점]

① 225 ② 250 ③ 275 ④ 300 ⑤ 325

빈칸완성 문항은 지겹도록 했었죠?

(가) 는 하란대로 하면 나옵니다. $(n+1)^2$ 이네요.

(나)가 문제였을텐데,

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2 \quad (n\ge 3)$$

이므로

$$S_n=n!\times\boxed{(나)} \quad (n\ge 3)$$

이 부분. 갑자기 Sn 에 관한 식주더니,

Sn 에 일반항 구하라 하죠?

그럼 어떻게 해야죠?

앞뒤비교.

어떻게 일반항이 나왔나? 주어진 식을 직접해보면 됩니다.

직접해보면,

$$\frac{n^2}{n-1}\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times\frac{(n-2)^2}{n-3}\cdots\cdots$$

$=n^2\times(n-1)\times(n-2)$

.....

가 되지요.

그런데 그게 n! * (나) 로 설명되므로,

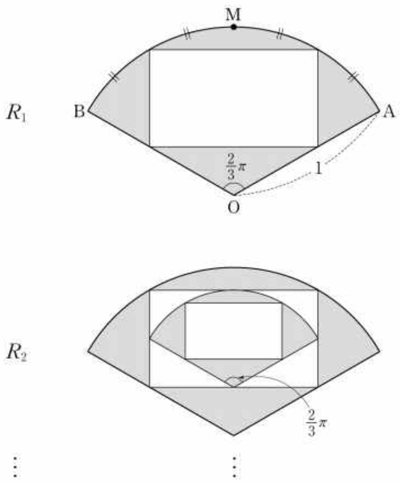
(나) 는 n/2 가 됩니다.

항상 앞뒤 비교만 하면됩니다.

이 문항은 빈칸완성 중에서 쉬운편에 속합니다.

다음문항도 다음장에서.

18. 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

무한등비급수는, 두가지로 접근합니다.

1. 무조건 간단한 길이비를 찾으려 애쓴다.

2. 길이비가 안보이면, 길이비를 쉽게 구할 수 있는 부분을

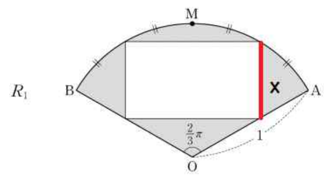
" 미지수 " 로 둔다.

다 했었던 거고, 칼럼에서도 다뤘던 겁니다.

1번으로 풀리나요?

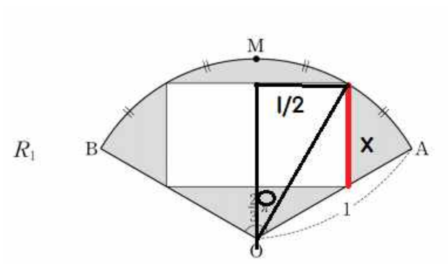
아니죠?

그럼 그 즉시, 2번. 즉 미지수를 둡니다.



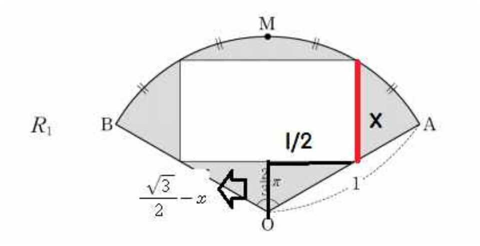
그 후에, x 값을 구할 수 있게끔 행동을 취해야 하죠?

그 방법으로, 접점과 중심을 이용해라. 등의 얘기를 수업 때 했었죠.



접점을 잇고, O 가 30도 이므로, 1/2라 표시한 길이가 나옵니다.

다음장에서 보면,



이렇게 됩니다.

여기서 삼각비를 쓰면 되겠군요.

$\frac{\sqrt{3}}{2}-x$: $\frac{1}{2}$= 1 : $\sqrt{3}$. 쉽네요 ㅎㅎ

x 구하면, 길이비가 1 : x 이므로,

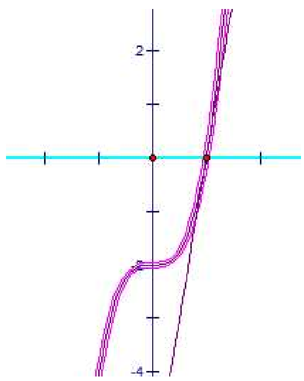
넓이비는 1 : x^2 이 됩니다.

21. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

> (가) $f(0)=-3$
> (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36　② 38　③ 40　④ 42　⑤ 44

그래프를 한번 그려볼까요?



6x-6 과 $2x^3-2$ 의 그래프입니다.

x 가양수일 때 저 사이에 있어야 한단거군요.

그러면 x= 1 을 무조건 지남을 알 수 있고,

또한, x = 1 에서의 기울기가 6임을 알 수 있습니다.

주어진 조건 자체로 식을 세우면,

f(x) = (x-1)(x^n + ...+3) 임을 알 수 있습니다.

사실 엄밀하게 가려면, 여기서 몇가지더 확인해야 하지만,

제가 시험장에 있었으면, 이차부터 시작해서 하나씩

확인해보겠습니다.

이차라 치면,

f(x) = (x-1)(x+3) 인데, 이건 f'(1) =6 을 만족 안하네요.

삼차라 하면,

f(x) = (x-1)(x^2+2x+3) 라 해야 f'(1) = 6 이 나오네요.
아. f(3) 은, 36 .

24. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_{10}=22$일 때, $\sum_{k=2}^{9} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

등차중항 했었죠 ??

22 * 4입니다. 이해안가면 칼럼참고.

27. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$ $(x>0)$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리를 최소가 되게 하는 곡선 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

.. 공식만 알면 됩니다.

P(a , 1/3a^3 + 11/3) 이므로,

점과 직선사이의 거리 공식쓰면,

$$\frac{a-\frac{1}{3}a^3-\frac{11}{3}-10}{\sqrt{2}}$$, 이게 최소여야 하네요. (절대값 씌워야죠)

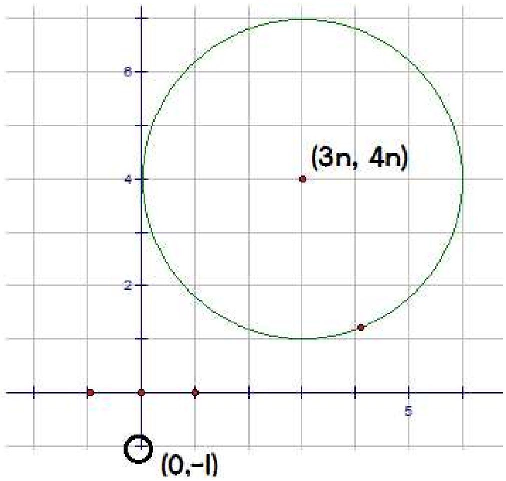
분모야 상수니깐, 분자만 미분하면,

$|1-a^2|$ 가 되고, a > 0 이니 a = 1 이겠네요.

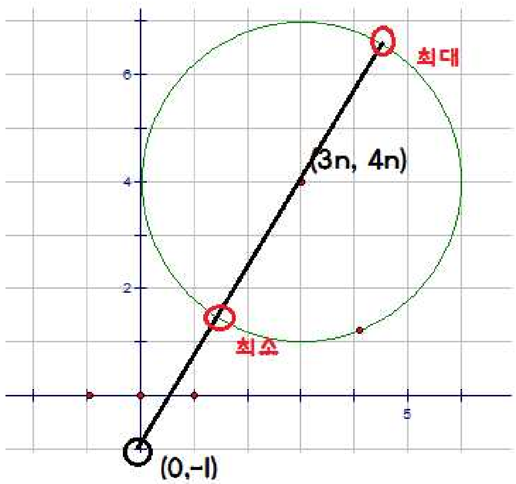
즉, P (1, 4) 이므로, 답은 5 입니다.

28. 자연수 n에 대하여 점 $(3n, 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n이 있다. 원 O_n 위를 움직이는 점과 점 $(0, -1)$ 사이의 거리의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오. [4점]

그림을 그려보면,



y축에 접하니 반지름은 3n 이겠죠?



아하 ㅇㅇ 쉽네요. 문제집에 흔한 유형이긴 합니다만,

몰랐어도, 중심까지의 거리는 일정하니, 그 뒤에 사고과정을 통해

도출해냈어야 합니다.

29. 구간 $[0, 3]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(x \le X \le 3) = a(3-x)\ \ (0 \le x \le 3)$$

이 성립할 때, $\mathrm{P}(0 \le X < a) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

흠 이 문제 적분시간에 했었죠?

이과 문제였다만, 통계 + 적분이라 하면서 소개했었습니다.

16. 닫힌 구간 $[0, a]$에서 정의된 확률변수 X의 확률밀도함수가 연속이다. 확률변수 X가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은? [4점]

(가) $0 \le x \le a$인 모든 x에 대하여 $\mathrm{P}(0 \le X \le x) = kx^2$이다.
(나) $\mathrm{E}(X) = 1$

① $\frac{9}{16}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

기억하시죠? ㅎㅎ 14수능 16번 문항.

아주 똑같이 나왔네요.

x= 0 이면, a3 = 1 이므로, a 가 1/3 이고, P (0 부터 1/3 까지)는,

1- P (1/3 부터 3까지) 해주면 됩니다. 간단하네요.

3기 분들은 마지막시간에 했으니 더 기억이 잘났을 겁니다.

30. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $1 \le a \le 10,\ 1 \le b \le 100$
(나) 곡선 $y = 2^x$이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$과 <u>만나지 않는다</u>.
(다) 곡선 $y = 2^x$이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$와 적어도 한 점에서 만난다.

복잡했어요. 복잡했는데, 제가 수업 때 분명 말했을 겁니다.

복잡한 이유는 ? 상황이 여러 가지라서.

그럼 역으로, 문제 풀 땐 반드시 어때야 한다구요?

“ 무조건 ” 여러 상황을 나눠야 합니다.

여기선 어떻게 나눌 수 있을까요?

1. a,b 가 2^x 보다 아래 있을 때.

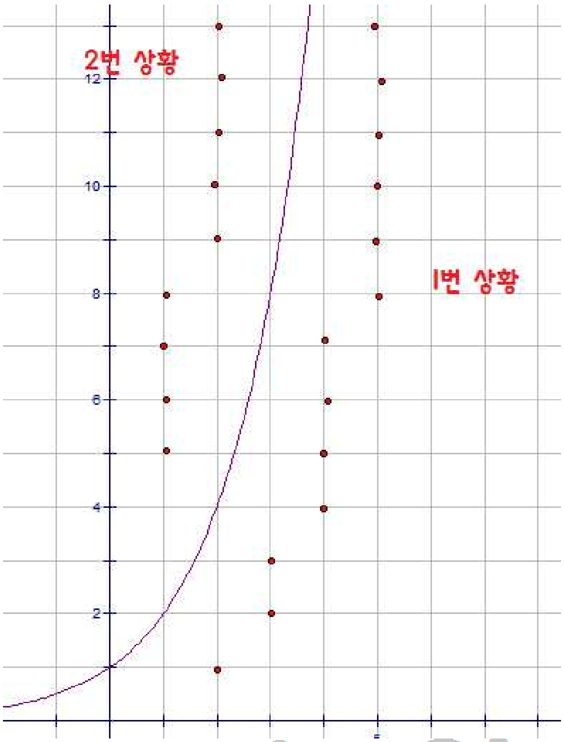
2. a,b 가 2^x 보다 위에 있을 때.

그쵸 ?

각각 상황 나누고 숫자 세주기만 하면 됩니다.

둘 다 한번 그려볼까요?

다음 페이지 보죠.



x = 5 일 때 까지 그려봤습니다.

아하, 등비수열이네요 .

1, 2, 4, 8 ....

1번 상황일 땐, 1부터 시작해서, x= 10 일땐 256 까지 가겠지만,

b가 100보다 작으므로, 점 다 더하면 100개 입니다

(...) 그쵸? 1개 다음에 한칸올라가서 2개, 그 다음에 또 한칸 올라가서 4개,

즉, y 좌표에 하나씩 무조건 존재하니, 그냥 100개 입니다.

어이고? 2번 상황도 마찬가지죠 ?

다만 2번 상황은 y=5 부터 시작하므로, 100개 에서 4개가 빠지군요.

답은 100+ 100 - 4 = 196. 입니다.

자, 여기까지가 9월 모평이었고,

다음장에서 제가 하고자 하는 얘기를 해보죠.

4. 난이도

이번 모의평가에서는 수학 A형과 수학 B형 모두 2014학년도 수능 보다 쉽게 출제하여 적정한 난이도를 이루도록 노력하였다. 이를 위하여 기본적인 수학적 사고력을 측정하기 위한 쉬운 문항과 중간 정도 난이도를 가진 문항들을 주축으로 시험을 구성하되, 상위권 변별을 위하여 고차적인 사고력을 필요로 하는 문항도 출제하였다.

- 사실 이게 수능의 목적이긴 합니다. 그래서 절대 얕게 공부하면 안되요.

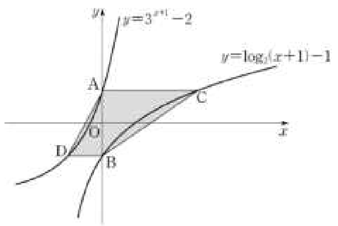
상황을 나눠라 ! 를 알자마자 30번 다 맞출까요?

아뇨. 그걸로 30번 문항 다시 다 공부하면서, 상황을 나누는 것에대한 사고력을 키워놔야 합니다.

< 연계 문항 >

【예시 문항 1】 수학 A형 11번

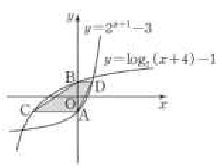
11. 그림과 같이 두 곡선 $y=3^{x+1}-2$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x+1}-2$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이는? [3점]



① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

EBS 교재 「수능완성 - 수학 I -A형」 58쪽 10번

함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프와 y축이 만나는 점을 A라 하고, 함수 $y=\log_2(x+4)-1$의 그래프와 y축이 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_2(x+4)-1$의 그래프와 만나는 점을 C라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프와 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ADBC의 넓이는?



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[예시 문항 2] 수학 A형 17번

17. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 모든 극값의 곱이 -4일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

EBS 교재「수능특강 - 미적분과 통계 기본」47쪽 8번

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+a$의 모든 극값의 곱이 0일 때, 모든 극값의 합을 구하시오.

흠 ?

제가 항상 말하지만,

결국 29, 30 을 맞추는건 이런 EBS 학습이 아니라,

기출을 가지고, 개념 외에도 " 이런 행동을 요구하는구나 " (가령, 상황분류) 를 공부해야 한단겁니다.

물론, 기출을 그렇게 공부하고, EBS 도 " 똑같이 " 공부하면 됩니다. 그냥 문제만 냅다 풀면 안되구요.

제가 수능완성 150 제 드렸죠? 얼마나 연계느끼셨는지요 ? Tip 들도 드렸죠. 절대적인 도움이 되더이까?

안됐을 겁니다.

21, 29, 30 그 어떠한 문항도 절대적인 도움이 안됐을 거예요 .

그게 제가 따로 ebs 대비 특강 을 안여는 이유입니다.

기출 부족하면, 기출 다시하세요.

여섯째, 고등학교 교육의 정상화 및 타당도 높은 문항 출제를 위해 이미 출제된 내용이라 하더라도 교육과정에서 다루는 핵심적이고 기본적인 내용은 문항의 형태, 발상, 접근 방식 등을 다소 수정하여 출제할 수 있도록 하였다.

ㅇㅇ. 알겠죠?

출처 : 한국교육과정평가원 , 2015학년도 9월 모의평가 출제방향 보도자료.