2015년 9월 평가원 모의고사 수학 B형 4점 해설

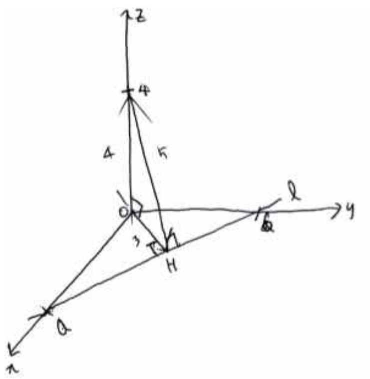
14. [이산확률분포]

각각의 넓이의 차에 대하여,
$(P_1,P_4),(P_2,P_5)$는 대칭적이다. 이 사실을 이용하여, 확률분포표를 만들면 아래와 같다.

X	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{12}$	계
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

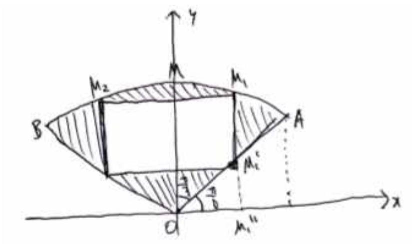
따라서, $E(X)=\frac{\pi}{10}$

15. [공간도형과 공간좌표] -삼수선의 정리



위 그림에서 삼수선 정리에 의해 $\overline{OH}=3$
따라서, $6a=3\sqrt{a^2+36}$ 이 성립한다.
a^2을 구하면, $a^2=12$

16. [수열의 극한] -무한등비급수와 도형



이런 식으로 좌표축을 도입하면 의외로 문제를 쉽게 풀 수 있으니 알아두도록 하자.

(풀이) $S_1=\frac{\pi}{3}-\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_1'}$ 에서

$\overline{M_1M_1'}=\overline{M_1M_1''}-\overline{M_1'M_1''}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

또, $\overline{M_1M_2}=1$이므로 $S_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

공비는 $1:\left(\overline{M_1M_1'}\right)^2=1:\frac{1}{3}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

17. [조건부확률]

확률을 p라고 하면,

$$p=\frac{{}_5C_2}{{}_3C_2+{}_5C_2+{}_7C_2}=\frac{5}{17}$$

18. [행렬의 합답형 문제]

ㄱ. $AB+A+B=2E$에서
$(A+E)(B+E)=3E$이므로
$(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$가 성립한다. **(참)**

ㄴ. (ㄱ)에 의해 성립한다. **(참)**

ㄷ. $A^3+E=O$에서 $(A+E)(A^2-A+E)=O$
양변에 $(A+E)^{-1}$을 곱하면,
$A^2-A+E=O$
$(A+E)(A-2E)=-3E$이므로,
$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$
$\frac{1}{3}(B+E)=-\frac{1}{3}(A-2E)$
$A+B=E$ **(거짓)**

정답은 ㄱ,ㄴ

19. [연속확률분포 - 정규분포]

확률밀도함수(정규분포)의 정의를 이용하면 쉽게 문제를 풀 수 있다.

$\begin{cases}77-m=1.04\sigma \\ 80-m=1.34\sigma\end{cases}$를 풀면, $m=66.6,\sigma=10$

$\therefore m+\sigma=76.6$

20. [미분법- 합답형 문제]

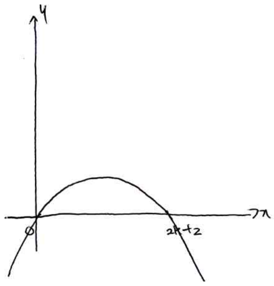
ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$, $f'(x)$를 구하면,

$f'(x)=e^{-x}(nx^{n-1}-x^n)$에 $x=\frac{n}{2}$ 대입

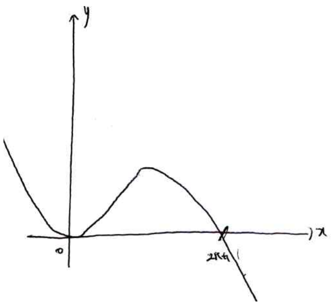
$f'\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}=f\left(\frac{n}{2}\right)$ **(참)**

ㄴ,ㄷ. $f'(x)$의 그래프를 그리면 된다.
여기서 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우를 나눠서 그래프를 그리는 것이 중요하다. 또, e^{-x}가 실수 전체에서 0보다 크기 때문에, $g(x)=nx^{n-1}-x^n$만 그려서, 도함수의 부호를 조사하는 것도 좋은 방법이다.

ⅰ) $n=2k+2(k=1,2,3,\cdots)$

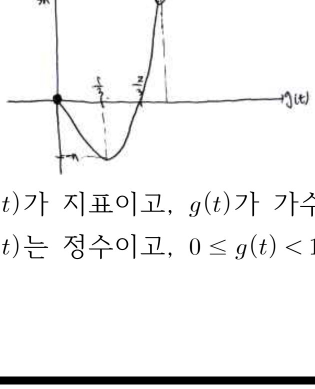


ⅱ) $n=2k+1(k=1,2,3,\cdots)$



그래프를 보면, ㄴ은 n이 홀수이어도 성립하고, 짝수여도 성립함을 알 수 있다. 반면 ㄷ의 경우, $n=2k+2$인 경우에 성립하지 않음을 알 수 있다.
따라서 ㄴ은 **참**이고 ㄷ은 **거짓**이다.
정답은 ㄱ,ㄴ

21. [로그- 지표와 가수]



$f(t)$가 지표이고, $g(t)$가 가수이므로, $f(t)$는 정수이고, $0 \le g(t) < 1$이다.
$f(t)=9ng(t)^2-6ng(t)$
그래프에서 가능한 $f(t)$의 범위는 $-n \le f(t) < 3n$인 정수이다. 따라서 a_n을 구하면, $a_n=\sum_{k=-n}^{3n-1} k = 4n^2-2n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=4$

26. [중복조합]

a,b,c가 자연수이기 때문에, a,b,c는 모두 2^n의 약수이다. 즉, $a=2^p$, $b=2^q$, $c=2^r$의 형태로 나타낼 수 있다.
$abc=2^{p+q+r}=2^n$에서 $p+q+r=n$이다.
p,q,r의 범위를 생각하면 $p\ge 1, q\ge 1, r\ge 1$이다. $\begin{cases} p=p'+1 \\ q=q'+1 \\ r=r'+1 \end{cases}$로 치환한다. 단, $p'\ge 0, q'\ge 0, r'\ge 0$이다. 따라서, $p'+q'+r'=n-3$이 성립한다. p',q',r'은 각각 음이 아닌 정수이므로, 이 방정식을 만족하는 순서쌍 (p',q',r')의 개수는 ${}_3H_{n-3}={}_{n-1}C_{n-3}={}_{n-1}C_2=28$에서 $n=9$

27. [방정식과 부등식]

$\sqrt{x+1}-x=t$로 치환한다. 즉, $f(t)=f(1)$을 풀어주면 된다. $t=-5,1$
다시 환원해서 풀어주면, $x=8,-1,0$
모든 실근의 합은 $8-1+0=7$

28. [삼각함수의 극한 - 도형]

$T_1=\frac{1}{2}\overline{AC}$, $T_2=\frac{1}{2}\overline{BD}$로 나타낼 수 있다

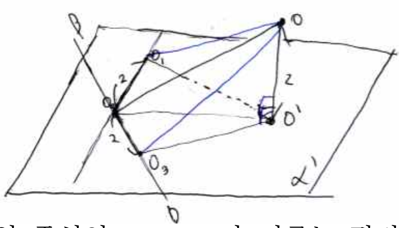
사인법칙에 의해, $\begin{cases} \frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{BC}}{\sin 3\theta} \\ \frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin 4\theta} \end{cases}$

따라서, $\lim_{\theta\to+0}\frac{T_1}{T_2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}=6$

29. [공간도형과 공간좌표] - 이면각

단면 D의 넓이를 구하면, D를 포함하는 평면은 S_3의 지름을 지나므로 $D=\pi$
이제 공간적인 상황을 그림으로 표현해

보자.



구의 중심인 O_1, O_2, O_3가 이루는 평면은 평면 α와 평행하다. 이 평면을 α'이라 하자. 그리고 구 S의 중심을 O라 하고, 이것을 평면 α'에 정사영시킨 점을 O'이라 하자. $\overline{OO'}=2$, $\overline{OO_1}=\overline{OO_2}=\overline{OO_3}=4$

$\overline{OO'}$는 α'에 수직이므로 $\overline{O_1O'}, \overline{O_2O'}, \overline{O_3O'}$와 모두 수직이다.

따라서, $\overline{O_1O'}, \overline{O_2O'}, \overline{O_3O'}$의 길이는 모두 $2\sqrt{3}$으로 일정함을 알 수 있다. β와 D를 포함하는 평면의 이면각 θ를 구하면,

$\cos\theta = |\cos 2\theta'|$(단, $\theta' = \angle O'O_2O_3$)

<u>*절댓값 기호를 씌우는 이유는 $2\theta'$이 예각인지 모르기 때문이다. 평면과 평면이 이루는 각은 언제나 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다.</u>

$\cos\theta' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$이므로, $\cos 2\theta' = -\frac{5}{6}$

따라서 $\cos\theta = \frac{5}{6}$

단면 D의 평면 β위로의 정사영의 넓이를 D'라 하고 이를 구하면,

$D' = D\cos\theta = \frac{5}{6}\pi$

$\therefore p+q=11$

30. [적분법]

세 점 $(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$로 이루어지는 삼각형의 넓이 S를 구하면,

$S = \frac{1}{2}\{(t+1)f(t) - tf(t+1)\} = \frac{t+1}{t}$이다.

$t>0$이므로, 양변을 $\frac{1}{2}t(t+1)$로 나누면,

$\frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1} = \frac{2}{t^2}$, $g(t) = \frac{f(t)}{t}$라 하자.

$g(t) - g(t+1) = \frac{2}{t^2}$이다. 이 식은 다시,

$\int_{t+1}^{t} g(t)dt = -\frac{2}{t} + C$ (C는 적분상수)로 나타낼 수 있다. 식을 변형하면,

$\int_{t}^{t+1} g(t)dt = \frac{2}{t} + C$에서 $t=1$을 대입하면,

$C=0$이다. 따라서, $\int_{t}^{t+1} g(t)dt = \frac{2}{t}$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(t)}{t}dt &= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(t)dt \\ &= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(t)dt + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(t)dt \\ &= \frac{4}{7} + \frac{4}{9} = \frac{64}{63}\end{aligned}$$

$\therefore p+q=127$