제 2 교시

2015학년도 대학수학능력시험 문제지

# 수학 영역(A 형)

**홀수형**

| 성명 | |
|---|---|

| 수험번호 | | | | | – | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 자신이 선택한 유형('A' 형/'B' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

꾸준히 활동하면 사람들이 알아줄거야 흑흑

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

**※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.**

2015학년도 9월 직전 J&S 모의고사 문제지

제 2 교시

# 수학 영역(A 형)

홀수형

**5지선다형**

1. $27^{\log_3 \sqrt{2}} \times 4^{\frac{1}{4}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2A+AB$의 모든 성분의 합은? [2점]

① $-10$ ② $-8$ ③ $-6$ ④ $-4$ ⑤ $-2$

3. $\lim_{x \to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

4. $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x+1}dx - \int_{1}^{-1} \frac{1}{y+1}dy$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{6}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

5. 4지선다의 객관식 문제 3개를 푼다고 할 때, 두 문제 이상 맞출 확률은? (단, 문제 하나당 답은 하나이다.) [3점]

① $\frac{5}{32}$ ② $\frac{6}{32}$ ③ $\frac{7}{32}$ ④ $\frac{8}{32}$ ⑤ $\frac{9}{32}$

6. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+8ax-1$의 역함수가 존재하도록 하는 모든 자연수 $a$의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

7. $a_1=10$인 등차수열 $\{a_n\}$이 $\left|\frac{a_2a_6}{2}\right|=|a_4+a_8|$을 만족할 때, 가능한 모든 $a_3$의 값의 합은? [3점]

① $-20$ ② $-18$ ③ $-16$ ④ $-14$ ⑤ $-12$

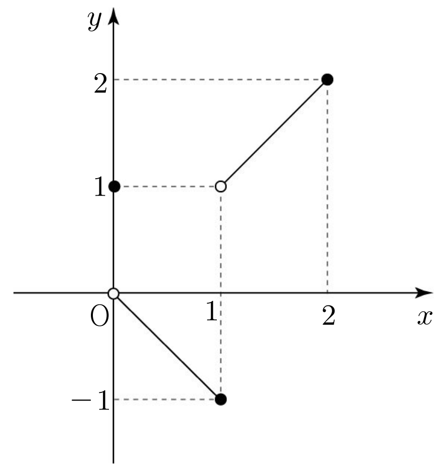
**8.** 남학생 수와 여학생 수의 비가 $4:3$인 어느 학급의 35명을 대상으로 세 이벤트 A, B, C를 실시하였다. 이 학급의 모든 학생은 이벤트 A, B, C중 하나만 참여한다고 한다. 이벤트 A를 참여한 11명의 학생 중 남학생이 5명이었고, 여학생의 40%가 이벤트 B를 참여했다. 남학생들은 이벤트 A 또는 이벤트 C만 참여했다고 한다. 이 학급의 학생 중에서 임의로 선택한 학생이 이벤트 C를 참여한 학생이었을 때, 이 학생이 여학생일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

**9.** 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합 $S_n$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-3n^2}{S_n}=\frac{1}{2}$일 때, $a_5$의 값은? [3점]

① 25 ② 37 ③ 49 ④ 61 ⑤ 73

**10.** 정의역이 $\{x\,|\,-2\le x\le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0,\,2]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.




함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to-1-0}f(x)+\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=-1$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 구간 $(-2,\,2)$에서 불연속인 점은 3개이다.

ㄷ. 함수 $|f(x)|\{f(x)-1\}$은 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

**11.** 어떤 용액의 농도를 높이는 실험장치를 이용하여 처음 농도가 $10(\%)$인 용액의 농도를 $x(\%)$ $(x \ge 10)$로 만드는 데 걸린 시간을 $T$(분)라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$T = p\log\frac{5x}{60-x} \text{ (단, } p\text{는 양의 상수이다.)}$$

이 장치를 이용하여 농도가 $10(\%)$인 용액 $A$의 농도를 $40(\%)$으로 만드는 데 걸린 시간이 $2$(분)일 때, 농도가 $10(\%)$인 용액 $A$의 농도를 $30(\%)$로 만드는데 걸린 시간은 몇 분인가?

(단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 0.7 ② 1.4 ③ 2.1 ④ 2.8 ⑤ 3.5

**12.** 수열 $\{a_n\}$은

$$a_n = \frac{2n+3}{n+2}(n+3)! \ (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (2n+5)(n+1)! + 26 \quad \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=40$, (우변)$=7\times 2!+26=40$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = (2m+5)(m+1)! + 26$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = a_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k$$
$$= \boxed{(가)} + (2m+5)(m+1)! + 26$$
$$= \boxed{(가)} + (m+2)! + \boxed{(나)} + 26$$
$$= (2m+7)(m+2)! + 26$$

가 성립한다.

따라서 $n=m+1$일 때, $(*)$이 성립한다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(1)-g(3)$의 값은? [3점]

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

**[13 ~ 14] 함수 $f(x)=-x+t$ $(t \geq 1)$, $g(x)=2^{x-1}$에 대하여 <u>13번과 14번의</u> 두 물음에 답하시오.**

**13.** 함수 $h(t)$를 함수 $y=f(x)$가 두 함수 $y=g(x)$, $y=g^{-1}(x)$와 만나는 교점의 개수라 할 때, 함수 $y=h(t)(t^2+at+b)$가 $t \geq 1$에서 항상 연속이다. 이 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

**14.** 두 함수 $f(x)$, $g(x+1)$가 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점에서만 만난다고 할 때, 가능한 $t$의 값을 작은 것부터 순서대로 $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $\cdots$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값은? [4점]

① 546 ② 548 ③ 550 ④ 552 ⑤ 554

**15.** 표준편차가 $\sigma$인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간을 $[a,\ b]$, 크기가 $n$인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간을 $[c,\ d]$라 하자. 부등식 $b-a \leq d-c$가 성립하도록 하는 자연수 $n$의 최댓값은? (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 $Z$에 대하여, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2) = 0.475$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 3) = 0.495$이다.) [4점]

① 110 ② 111 ③ 112 ④ 113 ⑤ 114

**16.** 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,dt = x^3 - x^2 - x$

(나) $f(0) + g(0) = g(1) = 0$

좌표평면 위에서 함수 $y = f(x)$와 함수 $y = \{g(x)\}^2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{125}{6}$ ② $\frac{125}{5}$ ③ $\frac{125}{4}$ ④ $\frac{125}{3}$ ⑤ $\frac{125}{2}$

**17.** 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)=-f(x)$
> (나) 모든 실수 $x$에서 연속인 함수
> $$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge k) \\ -x+1 & (x < k) \end{cases}$$
> 의 극솟값은 0이다. (단, $k$는 상수이다.)

$[-2,\ 2]$에서 정의된 연속확률변수 $X$의 확률밀도함수를 $|f(x)|$라 할 때, $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{5}{20}$ ④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

**18.** 두 이차정사각행렬 $A$, $B$가

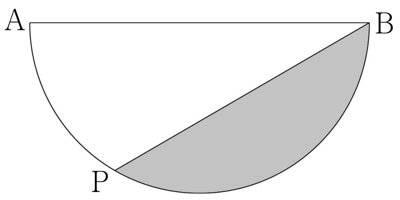
$$A+BAB=E,\quad A^2+B^2=4E$$

를 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $E$는 단위행렬이다.) [4점]

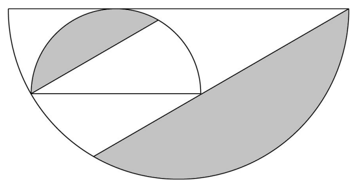
> <보 기>
> ㄱ. $A^2B=BA^2$
> ㄴ. $B$의 역행렬이 존재한다.
> ㄷ. $A^{-1}=2E-B^2A$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

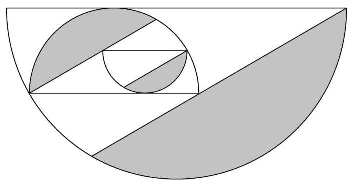
**19.** 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB와 이루는 각도가 $30°$이고 점 B와 호 AB 위의 한 점 P를 끝점으로 하는 선분을 긋고, 선분 BP, 호 BP로 둘러싸인 도형에 색칠하여 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.
지름이 선분 AB 위에 있지 않도록 선분 AB와 평행하고 선분 AB, 선분 BP, 호 AP로 둘러싸인 도형에 내접하는 반원을 그리고, 그림 $R_1$을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 도형에 색칠하여 얻은 그림을 $R_2$라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



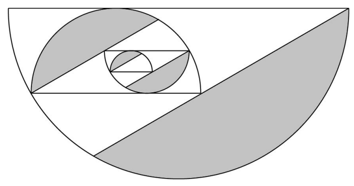

$R_1$



$R_2$



$R_3$



$R_4$

⋮

① $\frac{2}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{4}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**20.** $10 \le n < 1000$인 자연수 $n$에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$라 하자. $h(n)$을

$$h(n)=\begin{cases}10^{g(n)+\log f(n)} & (n\text{이 짝수})\\ 10^{g(n)+2\log f(n)} & (n\text{이 홀수})\end{cases}$$

이라 할 때, $h(n)$이 정수가 되기 위한 모든 $n$의 개수는? [4점]

① 36 ② 45 ③ 54 ④ 63 ⑤ 72

**21.** 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)=ax(x-1)(x-b)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$라고 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(5)=5$
>
> (나) $\displaystyle\int_n^{n+1} g(x)\,dx=0$을 만족시키는 자연수 $n$의 최솟값은 4이다.

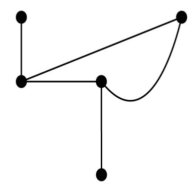
$20(a+b)$의 값은? [4점]

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

**단답형**

**22.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)(2n+5)}{n^2-9}$의 값을 구하시오. [3점]

**23.** 꼭짓점이 5개인 그래프와 이 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬이 다음과 같다.



$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬의 모든 성분의 합을 $c$라고 할 때, $(10a+5b)c$의 값을 구하시오. [3점]

**24.** 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 1\}$인 지수함수 $y = a \times \left(\frac{4}{a}\right)^{x}$의 최댓값이 32일 때, $a$의 값을 구하시오. (단, $a$는 상수이다.) [3점]

**25.** 이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} -4 & a \\ -a & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A - E$의 역행렬이 존재하고 $A^3 = E$일 때, $A^2$의 모든 성분의 합을 $k$라 하자. $15k^2$의 값을 구하시오. (단, $a$, $k$는 상수이다.) [3점]

**26.** 어떤 PC방의 컴퓨터 이용 시간은 평균이 200분, 표준편차가 $\sigma$분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 PC방을 이용하는 손님들을 대상으로 25명을 임의추출하여 조사한 컴퓨터 이용 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(5\sigma - 8 \le \overline{X} \le 204) = 0.5328$일 때, $\sigma$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

| $z$ | $\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.1915 |
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |

**27.** 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 항상 같은 방향으로 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (0 \le t \le 4)$에서의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)=\frac{1}{2}t$, $v_{\mathrm{Q}}(t)=at^3+bt^2+ct$라 하자. 두 점 P, Q는 $t=2$, $t=4$일 때 속도가 같고, 점 P가 출발한 후 $t=2$까지 움직인 거리가 점 Q가 출발한 후 $t=2$까지 움직인 거리의 절반이라고 할 때, $t=1$에서 점 Q의 가속도를 $d$라 하자. $100d$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$, $c$, $d$는 상수이다.) [4점]

**28.** 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $w$에 대하여 방정식 $|x-2|+y+z+w=6$를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수를 구하시오. (단, $x \le 4$이다.) [4점]

**29.** 함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3-nx^2+2nx & (x<1)\\ -\frac{n}{2}x^2+(\frac{3}{2}n-7)x+\frac{15}{2} & (x\geq 1)\end{cases}$$

가 $x=1$에서 극값을 갖도록 하는 모든 자연수 $n$의 값의 합은? [4점]

**30.** 자연수 $n$에 대하여 지수함수 $y=3\times\left(\frac{n}{n+20}\right)^x$과 좌표축, $x=2$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점들 중 임의로 두 점으로 직선을 만들 때, 기울기가 1인 직선이 오직 하나가 되도록 하는 모든 $n$의 값의 합을 구하시오. (단, $1.7<\sqrt{3}<1.8$이다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.