제 2 교시

수학 영역 [B형]

5 지 선 다 형

1. 두 이차정사각행렬 A, B가 $AB^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$를 만족할 때, 행렬 BA^{-1}의 모든 성분의 합을 구하시오. [2점]

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

2. $10 < 2^x < 100$ 를 만족하는 자연수 x의 개수를 구하시오. [2점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

3. 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_4=8$, $a_7=28$을 만족할 때, a_{10}의 값을 구하시오. [2점]

① 90　② 92　③ 94　④ 96　⑤ 98

4. $2\sin 45^\circ \cos 15^\circ$ 의 값은? [2점]

① $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　② $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

5. 무리방정식 $6x-4x^2=\sqrt{2x^2-3x+5}$ 의 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

6. 야구경기에서 타자가 타석에 들어서서 안타를 쳐서 출루한 회수를 타석에 들어선 회수로 나눈 값을 타율, 출루한 회수를 타석에 들어선 회수로 나눈 값을 출루율이라 한다. 통산 타율과 통산 출루율이 각각 0.330, 0.420인 타자가 타석에 들어서 출루했을 때, 안타를 치지 못했을 확률을 구하면? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

7. 이산확률변수 X의 확률분포표가 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p	q	r	1

p, q, r이 이 순서대로 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이룰 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

8. 어떤 건물의 위층과 아래층 사이의 벽의 두께 d (m)라 하면 위층에서 발생한 소리의 세기 I (dB)와 아래층에서 느끼는 소리의 세기 J (dB)가 다음 등식을 만족시킨다.

$$\log_2\frac{J}{I}=-kd \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

세기가 100 (dB)인 소리가 건물의 위층에서 발생했을 때, 아래층에서 느낀 소리의 세기가 50 (dB)이었다. 위층과 아래층 사이의 벽의 두께를 두 배로 한 후 세기가 100 (dB)인 소리를 건물의 위층에서 냈을 때, 아래층에서 느끼는 소리의 세기를 구하시오. [3점]

① 15 (dB) ② 20 (dB) ③ 25 (dB)
④ 30 (dB) ⑤ 35 (dB)

9. 공간에 주어진 두 점 $\mathrm{A}(1, 2, 0)$, $\mathrm{B}(k, 0, 8)$에 대하여 두 점 A, B를 잇는 직선이 직선 $2x+y=2$, $z=3$과 수직할 때, k의 값은? [3점]

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

10. 모든 이차정사각행렬들의 집합을 정의역과 공역으로 가지는 함수 f가 다음과 같이 정의되어 있다.

> 임의의 이차정사각행렬 X에 대하여 X의 (i, j)성분 x_{ij}와 $f(X)$의 (i, j)성분 y_{ij}가 다음 등식을 만족한다.
>
> $$y_{ij} = \sum_{k=1}^{2} x_{ik}x_{kj}$$

이차정사각행렬 A가 $f(A)=2E$를 만족할 때, 행렬 A^{10}의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

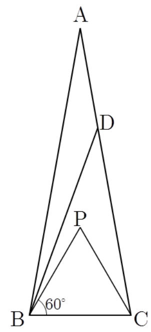
① 32　② 64　③ 128　④ 256　⑤ 1024

11. 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$에서의 포물선의 접선을 l이라 하고 P를 지나며 l에 수직한 직선을 m이라 하자. l, m이 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, A, B를 초점으로 가지며 P를 지나는 쌍곡선이 $(-3,b)$를 지난다. a^2+b^2의 값을 구하면? [3점]

① 170 ② 177 ③ 183
④ 189 ⑤ 192

12. 다음은 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$, $\angle\mathrm{BAC}=20^\circ$인 이등변삼각형 $\triangle\mathrm{ABC}$의 변 AC 위의 점 D가 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$를 만족할 때, $\angle\mathrm{ABD}$의 크기를 구하는 과정이다.

오른쪽 그림과 같이 점 C를 점 B를 중심으로 60° 회전한 점 P에 대해서 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle\mathrm{PBC}=60^\circ$이므로 $\triangle\mathrm{PBC}$는 정삼각형이다.



$\angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{ABC}-\angle\mathrm{PBC}$

$=\boxed{(가)}-60^\circ=\angle\mathrm{BAC}$

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}$

이므로 사각형 DABP는 등변사다리꼴이다.
등변사다리꼴의 두 대각선 AP, BD가 선분 AB와 이루는 각도가 같으므로

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{BAP}$ ⋯ (1)

$\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{PBC}$는 모두 이등변삼각형이므로 선분 BC의 수직이등분선은 직선 AP와 같고 따라서

$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CAP}$ ⋯ (2)

$\angle\mathrm{BAC}=20^\circ$, (1), (2)에 의하여 $\angle\mathrm{ABD}=\boxed{(나)}$

(가)와 (나)에 알맞은 값을 각각 α,β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면? [3점]

① 65° ② 70° ③ 75°
④ 80° ⑤ 85°

[13~14] 임의의 실수 t에 대하여 $g(t+1)=g(t)+1$이 성립하는 연속함수 $g(t)$가 $0<x<\frac{\pi}{4}$인 임의의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_0^{\tan^2 x} g(t)\,dt+\int_{\sec^2 x}^{2} g(t)\,dt=10-\sec^2 x$$

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

13. $\int_0^1 g(t)\,dt$ 의 값을 구하시오. [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

14. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\int_0^n g(t)\,dt$로 정의할 때, $a_{12}-a_{11}$의 값을 구하시오. [4점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

15. 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 등식을 만족한다.

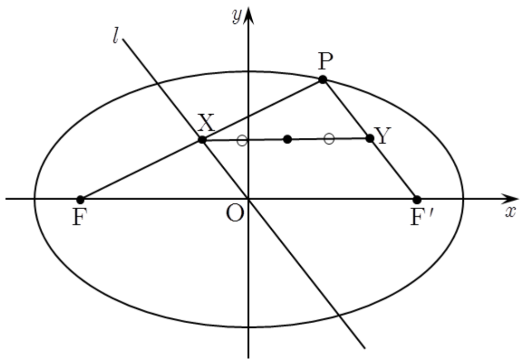
$$A^4+A^2+E=O,\ AB+E=A+B$$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.) [3점]

ㄱ. $A-E$는 역행렬을 가진다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $A^n=B^n$을 만족하는 행렬 A, B가 존재하기 위한 자연수 n의 최소값은 6이다.

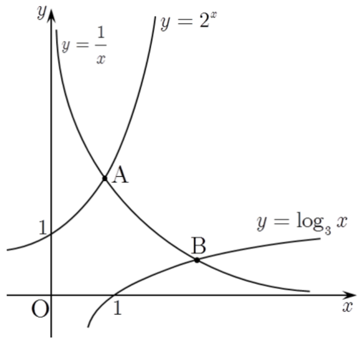
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$의 두 초점을 F, F′라 하자. 타원 위의 임의의 점 P가 x축 위에 있지 않을 때, 선분 PF′와 평행하고 원점을 지나는 직선 l이 선분 PF와 만나는 점을 X라 하자. 두 점 P, F′의 중점 Y에 대하여 X, Y의 중점의 자취는 타원의 일부다. 이 타원의 두 초점사이의 거리를 구하시오. [4점]



① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

17. 좌표평면에서 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_3 x$가 만나는 점을 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 할 때, 옳은 것만을 다음 중에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



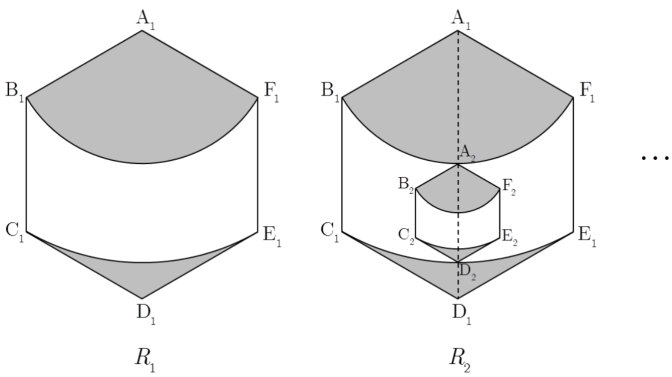
ㄱ. $x_1 > y_2$

ㄴ. $x_1x_2 + y_1y_2 < x_1y_1 + x_2y_2$

ㄷ. $x_1x_2 - y_1y_2 > x_1 - y_2$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 한 변의 길이가 3인 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$가 있다. 그림과 같이 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$인 부채꼴을 정육각형의 내부에 그리고 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1C_1}$인 부채꼴을 정육각형의 내부에 그린 후 부채꼴 $A_1B_1F_1$의 내부와 부채꼴 $A_1C_1E_1$의 외부 중 정육각형의 내부인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 부채꼴 $A_1B_1F_1$의 호 B_1F_1과 부채꼴 $A_1C_1E_1$의 호 C_1E_1이 선분 A_1D_1과 만나는 점을 각각 A_2, D_2라 하자. 선분 A_2D_2을 가장 긴 대각선으로 가지는 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$를 그리고, 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $15-\frac{1}{\sqrt{3}}\pi$ ② $15-\sqrt{3}\pi$ ③ $15+\sqrt{3}\pi$
④ $18-\frac{1}{\sqrt{3}}\pi$ ⑤ $18-\sqrt{3}\pi$

19. 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{f'(x)}=\infty \ , \quad \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4x}=-4$$

이 때, $f(3)-f(1)$의 값을 구하시오.[4점]

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

20. 좌표평면에 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}_1(3,0)$, $\mathrm{B}_1(3,3\sqrt{3})$가 주어져 있고 $-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$이 나타내는 일차변환 f에 대하여 $\mathrm{A}_{n+1}=f(\mathrm{A}_n)$, $\mathrm{B}_{n+1}=f(\mathrm{B}_n)$이다.($n=1,2,3,\cdots$)

다음 시행을 무한히 한다고 할 때, 좌표평면에 색칠 되는 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

[시행 1] 삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$와 $\mathrm{OA_2B_2}$의 내부를 색칠한 후 삼각형 $\mathrm{OA_3B_3}$와 $\mathrm{OA_4B_4}$의 내부에 색칠 된 부분을 지운다.

[시행 2] 삼각형 $\mathrm{OA_5B_5}$와 $\mathrm{OA_6B_6}$의 내부를 색칠한 후 삼각형 $\mathrm{OA_7B_7}$와 $\mathrm{OA_8B_8}$의 내부에 색칠 된 부분을 지운다.

⋮

[시행 k] 삼각형 $\mathrm{OA}_{4k+1}\mathrm{B}_{4k+1}$와 $\mathrm{OA}_{4k+2}\mathrm{B}_{4k+2}$의 내부를 색칠한 후 삼각형 $\mathrm{OA}_{4k+3}\mathrm{B}_{4k+3}$와 $\mathrm{OA}_{4k+4}\mathrm{B}_{4k+4}$ 의 내부에 색칠 된 부분을 지운다.

⋮

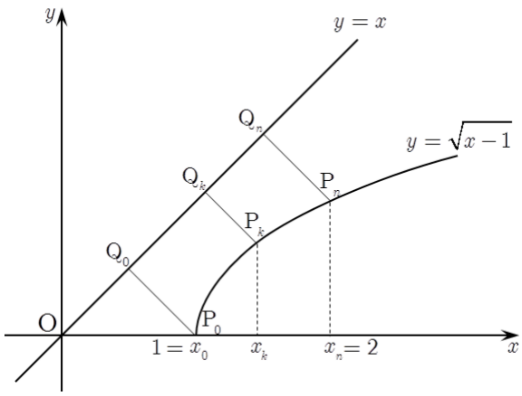
① $6\sqrt{3}$ ② $\frac{45\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{90\sqrt{3}}{17}$

④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

21. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$1 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = 2$$

라 하자. 함수 $f(x) = \sqrt{x-1}$ 위의 점 $\mathrm{P}_k\left(x_k,\ f(x_k)\right)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$에서 직선 $y = x$로 내린 수선의 발을 Q_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}\cdot\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)\right\}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

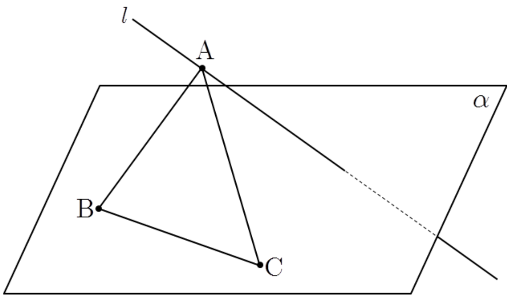
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{12}$

단 답 형

22. 정적분 $\int_{e}^{e^3}\frac{1}{x}\ln x\,dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

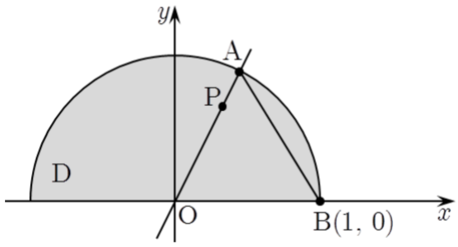
23. 다섯 개의 알파벳 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}$를 모두 한 번씩만 사용하여 문자를 만들 때, A, E가 서로 이웃하지 않는 문자의 개수를 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에 직선 $l : \frac{x-1}{2} = 4-y = z+4$ 과 평면 $\alpha : x+2y+3z=0$ 가 있다. 직선 l 위의 점 A와 평면 α 위의 점 B, C에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{3}$ 이고 $\triangle\mathrm{ABC}$가 α와 60° 의 각도를 이루는 정삼각형일 때 $\overline{\mathrm{OA}}^2$를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]

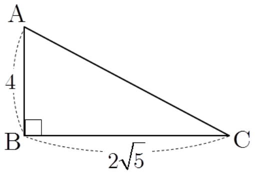


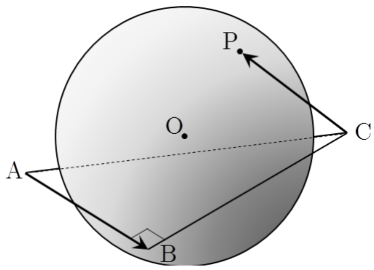
25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 정의하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 100$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$의 초항 a_1의 값을 구하시오. [3점]

26. 연립 부등식 $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$을 만족하는 영역 D에 대해서 기원이가 영역 D에 임의의 한 점 P를 찍을 때, P와 원점 O을 잇는 직선이 영역 D의 경계와 만나는 원점이 아닌 점을 A라 하자. 점 B$(1, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = X$인 확률변수 X의 기댓값이 $\frac{a}{\pi}$일 때, a의 값을 구하시오. [4점]



27. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$, $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형에 대하여 이 직각삼각형의 세 변에 모두 접하며 중심이 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$가 이루는 평면 위에 있지 않은 구의 중심을 O라 하자. 구 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}}$의 최대값이 100일 때, 구의 반지름은 $p+\sqrt{q}$이다. 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. [4점]





28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$, $f(1)=2$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $1 \leqq f'(x) \leqq 3$이다.

이러한 조건을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $a<\int_0^1 f(x)\,dx<b$가 항상 성립할 때, $4(b-a)$의 최솟값을 구하시오. [4점]

29. 함수 $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+a^2}$ $(a>0)$와 양의 실수 b가 다음 조건을 만족할 때, a^2+b^2의 최솟값을 구하시오. [4점]

(가) $0<k<b$인 실수 k에 대하여 y축 위의 점 $(0,\,k)$를 지나며 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선의 개수는 2개다.
(나) $k \geq b$인 실수 k에 대하여 y축 위의 점 $(0,\,k)$를 지나는 직선은 $y=f(x)$의 그래프에 접할 수 없다.
(다) $0<k<b$인 실수 k에 대하여 y축 위의 점 $(0,\,k)$를 지나며 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 두 직선이 이루는 예각을 θ라 하면 $\sin\theta<\dfrac{3}{5}$이다.

30. 반지름의 길이가 서로 같은 두 개의 구 C_1, C_2가 서로 외접하며 평면 α 위에 놓여있다. 두 개의 구 C_1, C_2가 평면 α와 만나는 점을 각각 A, B라 하고 A, B를 $1:2$로 외분하는 점을 O라 하자. O를 지나는 평면 β에 대하여 α와 β의 교선이 직선 OB와 30°의 각을 이루고 β와 C_1, C_2가 만나서 생기는 두 원의 반지름이 서로 같을 때, α와 β가 이루는 각 θ에 대하여 $100\cot\theta$의 값을 구하면? [4점]