포카칩 모의평가 주요문항 Hint 및 해설 by 물량공급 2014.08.21.
08.24 2차수정

출제의도와 다르게 풀었을 가능성도 있습니다.

오르비학원 테스트 버전에서는 21번이 쉬운버전으로, 28번이 어려운 버전으로 출제되었습니다. 초기 버전에서는 출제자(포카칩) 은 88점에서 92점을 예상하였고, 검토를 했던 저도 88점을 1등급 커트라인으로 예상하였습니다. 사전테스트에서 18번의 무한급수 문제를 제대로 해결하지 못하였고 28번의 정답률이 0%를 기록하는 등 문제가 다소 어렵다고 판단되어 28번의 난이도를 낮추고 다시 한번 1컷 92을 희망하고 계십니다.

개인적으로는 88점 이상이면 실제 수능에서도 1등급의 성취도를 보일것이라고 판단됩니다.

1 ~ 4번 생략

6번
양변에 상용로그를 취합니다.
$(\log 2)(\log x) = (2\log 2)(\log 3)$
$\log x = \log 9$

7번 해설
그래프를 행렬로 나타낼 때, 행의 성분 중 0의 개수가 2인 행은 , 특정한 점을 기준으로 한 개의 점을 제외한 나머지 점과는 연결되어있어야 합니다. 즉 3개의 선분으로 이루어진 점은 2개이므로 답은 2번입니다.
행렬로 바꾸어 풀려고 했다면, 답을 고르는데 조금 좀 더 오래 걸렸을 것입니다.

8번 Tip
ㄷ번 폐구간 에서 양 끝점에서 연속은, 한쪽의 극한값과 같습니다. 잘 모르겠다면 교과서를 참고하시기 바랍니다.

오르비학원 사전TEST에서 정답률이 75%정도 나왔습니다.

12번 해설
(농구 1장, 야구 2장),
(농구2장, 야구1장)
$P(\text{농구}1) = 2/9$, $P(\text{농구}2) = 3/9$
$P(\text{야구}1) = 3/9$, $P(\text{야구}2) = 5/9$
농구 표를 구매 하는 것과 야구 표를 구매 하는 것은 독립임이 자명합니다.

$\dfrac{P(\text{농구}2 \cap \text{야구}1)}{P(\text{농구}1 \cap \text{야구}2) + P(\text{농구}2 \cap \text{야구}1)}$ 을 계산하시면 됩니다.

13번 해설
A의 역행렬은 A^{-1}이므로
$f_{A^{-1}}(x) = 8x - 1$임을 알 수 있습니다.

14번 해설
주어진 정적분을 계산하면
$0 - (a + d + ad - bc) = 1$
로 $a + d + ad - bc = -1$ 입니다.
$A - kE$의 판별식을 계산해보면
$k^2 - (a+d)k + (ad - bc)$인데 이 값이 0이 되어야합니다..
즉 $k^2 - (a+d)k + (ad-bc) = 0$
$a + d + ad - bc = -1$ 을 대입하여 인수분해하면 $(k+1)(k-(a+d+1)) = 0$ 인데, $k = -1$이면 a,b,c,d에 상관없이 판별식이 0이 되므로 $A + E$는 역행렬을 갖지 않습니다.

15번 Tip
사전 테스트에서 정답률 50%를 기록하였습니다. 확률변수 X에 대하여 X가 0일 때, 1일 때, 2일 때의 확률을 구하여 기대 값 을 차분히 계산해보시면 쉽게 답이 나옵니다. 표를 그려서 계산해보세요

16번 Hint

행렬 A의 1행과 2행을 나열하여 구해보면 규칙을 발견할 수 있습니다. 어렵지 않으니 차분히 잘 계산해보시기 바랍니다.

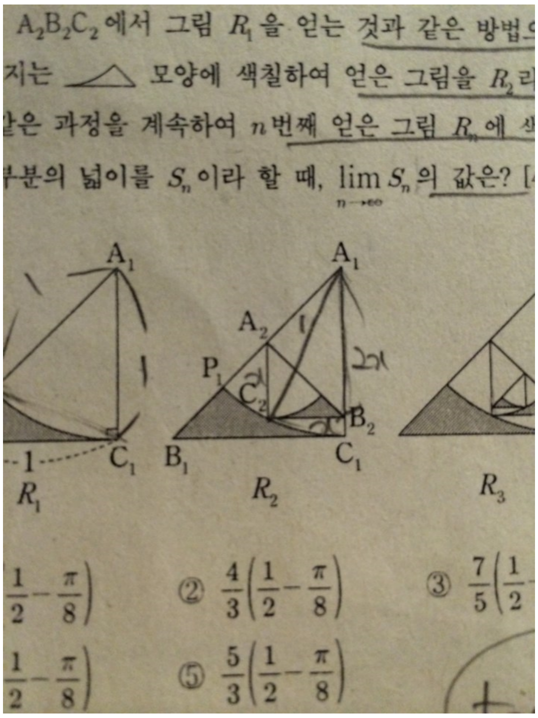
17번 Hint

(나)를 구할 때, 식을 변형하여 일반항을 찾으려고 하면 잘 안 됩니다.

부분분수의 무한 합을 구하는 방법을 응용해보면 (나)를 쉽게 구할 수 있습니다.

18번 Hint

접근방법1) $\overline{A_1C_2}$를 그려 봅시다



$A_2B_2C_2$ 에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으

지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라

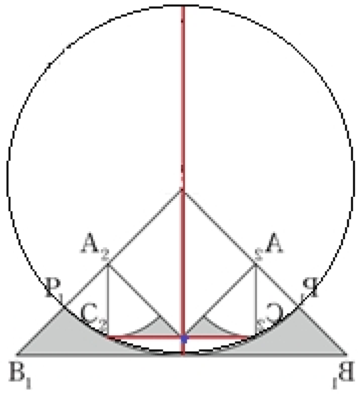
같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색

부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\Big)$ ② $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$ ③ $\frac{7}{5}\Big(\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\Big)$ ⑤ $\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

접근방법2) $\overline{A_1C_2}$를 축으로 대칭 시키고, 원을 완성시킵니다. 중학교 때 원에서 할선정리(방멱정리)를 적용해보면 쉽게 답이 구해집니다.



참고로 출제자는 접근방법1을 권장하였습니다.

19번 Hint

$f(0)=f(1)$이어야만 합니다.

21번 일부해설

원래 21번의 문제는 $f(x)$값도 증감표로 주어진 지금 문제보다 쉬운 형태의 문제였습니다. 하지만 검토 과정, 오르비학원 테스트 과정에서 학생들이 4차함수 개형을 외워서 푼다는 문제점을 발견하였고, 그래서 $f(x)$의 값은 주어지지 않는 것으로 바꾸었습니다. 바뀐 버전의 문제는 4차함수의 개형을 외워서 푼다면 더 오래 걸릴 것 입니다.

21. 사차함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<k$	$\cdots$	$x=1$
$f(x)$		0		$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$\cdots$	5

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 $0<x<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

위 문항의 해설은 다음 장 에서 제공됩니다.

한번 위 문제를 먼저 풀어보세요

0을 기준으로 도함수의 부호가 변하지 않았습니다. 즉 3차함수인 도함수가 $x=0$에서 중근을 갖는 것을 알 수 있습니다. $x<k$에서 도함수의 부호가 음수였는데 $x=1$에서 양수이므로 도함수가 $x=0$에서 삼중근 을 갖는 것이 아니라 두개의 중근을 갖습니다.

$$f'(x) = x^2(ax+(5-a)).$$
$$= ax^3-(a-5)x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4}ax^4 - \frac{(a-5)x^3}{3}$$

($f(0)=0$이므로 상수항은 0이다.)

$f(1) = \dfrac{a}{4} - \dfrac{(a-5)}{3} = 0$ 이므로 $a=20$

$$f(x) = 5x^4-5x^3$$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{4}$ 이므로 넓이는 $\dfrac{1}{4}$

실제 21번의 풀이도 위와 유사하니 한번 다시 차분히 풀어보시기 바랍니다.

27번 Tip

$AB=BA$를 논리적으로 보이셔야 합니다.

$AB=BA$를 보이지 않고 $(AB)^4 = A^4B^4$ 을 가정하고 답을 구하였다면 귀하의 풀이에 중대한 문제가 있습니다.

$$B^2 = A+E$$
$$(B-E)(B+E) = A$$

위와 같이 변형하여 $AB=BA$로 변형 할 수 있습니다.

참고

행렬A의 모든 성분의 합을 $S(A)$ 라고 할 때 실수 x 에 대하여 $S(xA) = xS(A)$가 성립합니다. 또한 행렬 A, B에 대하여 A, B가 덧셈연산이 가능할 때 $S(A+B) = S(A)+S(B)$가 성립합니다.

28번 Tip

28번의 원래 문제는 다음과 같습니다.

28. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 등차수열이다.
(나) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^3+1}-a_n\right)=5$

a_1+a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

정답률이 0%를 기록 하였습니다.

$a_{n+1}-a_n = (a_2-a_1)+d(n-1)$를 변형하여 a_n을 구한다면 계산이 과도하게 복잡해집니다. 이 때 계수를 적절히 A, B, C로 두면 조금 쉽게 풀 수 있는데 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 의 공식을 이용하면, a_n이 n에관한 이차식 형태임을 알 수 있습니다.

즉, $a_n = An^2+Bn+C$ 형태의 이차식으로, 계수를 새롭게 설정 합니다 이러한 방법은 미분방정식의 일반해를 구하는 테크닉 인것 같기도 하고, 아마 A형 응시자가 떠올리기 어려울 것으로 판단하여 문항을 쉽게 수정하였다고 합니다.

쉽게 수정된 버전

28. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 등차수열이다.
(나) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-n)=5$

a_2-a_1의 값을 구하시오. [4점]

$a_n = n^2+10n+c$ 의 형태로 $a_n - a_{n-1} = 2n+9$로 2을 대입하면 13이 쉽게 구해집니다.

29번 Tip

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = a-1$$
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = (a-2)^2$$
$$\lim_{x \to a+1} f(x) = (a-1)^2$$

30번 Hint

전년도 수능 30번 문항의 변형문제 인데, http://kyu7002.tk/222 의 풀이법을 참고하면 될 것 같습니다.

$x=0$을 기준으로 y축 왼쪽 과 오른쪽의 세는 방법이 다릅니다. 아 그리고 $n=1,2,3,4$에서는 a_n 값이 같습니다.

읽느라 수고하셨습니다!