2015 사관학교 1차 시험 (수학 A) 4점 해설

[객관식]

14. (나) 조건에 의해, $P(X \le 18)+P\left(x \ge \frac{36}{a}\right)=1$

$a=2$, 따라서 $Y=2X$가 성립한다.

(나), (다) 조건에 의해 $P(X \le 14)=P(X \ge 28)$

$E(X)=\frac{14+28}{2}=21$

$\therefore E(Y)=E(2X)=42$

15. $A_n(a_n,b_n)$이라 하자. $(a_1=1, b_1=2)$

$B_n(b_n+1,a_n)$, $A_{n+1}(a_{n+1},b_{n+1})=(a_n+1,b_n+2)$

점화식을 풀면, $A_n(n,2n)$, $B_n(2n,n+1)$

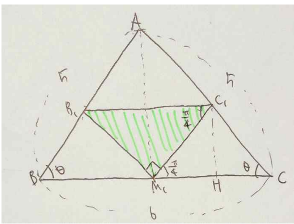
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_nB_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n}=\sqrt{2}$

16. 함수 $y=f(x)$와 $y=f(x-2)$는 $x=3$에 대하여 대칭이다. 즉, $S_1=S_3$이다.

$S_1+S_2=\frac{32}{3}$, $S_2=2\int_3^4 f(x)dx=\frac{10}{3}$

$\therefore \frac{S_2}{S_1+S_3}=\frac{S_2}{2S_1}=\frac{5}{22}$

17.



그림에서 직각삼각형 $B_nM_nC_n$은 대칭성에 의해 직각이등변삼각형이다. C_1에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 그 길이를 k라 하자. $\angle ACB=\theta$라 하면 $\overline{CH}=k\cot\theta=\frac{3}{4}k$

$\angle B_1C_1M_1=\frac{\pi}{4}$이므로, $\angle C_1M_1C=\frac{\pi}{4}$이다.

$\overline{M_1H}=\overline{C_1H}=3-\frac{3}{4}k$이므로, $k=3-\frac{3}{4}k$

$k=\frac{12}{7}$, $S_1=\frac{144}{49}$이다. 공비 r을 구하면,

$r=\left(\frac{\frac{12}{7}}{3}\right)^2=\frac{16}{49}$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{144}{49}}{1-\frac{16}{49}}=\frac{48}{11}$

18. $P\left(a, \frac{1}{3}a^3-a\right)$, $R\left(0, \frac{1}{3}a^3-a\right)$ Q는 P에서 함수 $y=\frac{1}{3}x^3-x$에 그은 접선의 y절편이다.

접선의 방정식을 구하면,

$y=(a^2-1)(x-a)+\frac{1}{3}a^3-a$에서 $Q\left(0,-\frac{2}{3}a^3\right)$

$\overline{OQ}$: $\overline{OR}=3:1$을 만족하는 a값을 찾는다.

(이 때, P가 제 1사분면 위의 점이므로 $a>0$임에 유의한다.)

$\frac{2}{3}a^3 : \frac{1}{3}a^3-a=3:1$에서 $a^3-9a=0$

$a=-3,0,3$에서 $a>0$이므로 $a=3$

$\therefore P(3,6)$, $a=3, b=6$이므로 $ab=18$

19. ㄱ. $(A+2B)(2A-B)=(2A-B)(A+2B)=E$에서 $AB=BA$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의해, 조건식은 $2A^2-2B^2=E$로 변형된다. 또 ㄱ에 의해 식을 변형하면, $2(A-B)(A+B)=E$이므로, $(A+B)$의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $A^2-B^2=\frac{1}{2}E$이므로, $A^2=\frac{1}{2}E$, $B^2=O$

$AB=BA=O$에서, A^{-1}를 곱해주면, $B=O$ (참)

정답은 ㄱ,ㄴ,ㄷ

20. $\overline{OB_n}=a_n\sqrt{1+b_n^2}$이므로 $p=1$

$\sqrt{1+b_n^2}=\frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$a_{n+1}=a_n+2r_n=(n+1)a_n$이다.

따라서, $f(n)=n+1$

$\therefore a_n=2\times n!$

따라서, $g(n)=2\times n!$

$p+f(4)+g(4)=1+5+48=54$

21. $C_1(1,1)$, $C_2(-2,1)$, $C_3(-2,-4)$, $C_4(-5,4)$

$C_5(5,5)$, $C_6(-6,5)$, $C_7(-6,-8)$, $C_8(9,-8)$, $\cdots$

에서 $C_{4n}(4n+1,-4n)$임을 알 수 있다.

(C_n을 4로 나누었을 때 나머지로 분류하면, 중심의 x좌표, y좌표가 등차수열을 이룬다.)

C_{40}의 방정식을 구하면, C_{40}은 중심이 $(41,-40)$이고, 반지름이 40인 원이므로

$$(x-41)^2+(y+40)^2=1600$$

그러므로, C_{40}의 내부를 나타내는 식은

2015 사관학교 1차 시험 (수학 A) 4점 해설

$(x-41)^2+(y+40)^2 \le 1600 \cdots ①$

①에 $(4n+1,-4n)$을 대입하면,

$10-5\sqrt{2} \le n \le 10+5\sqrt{2}$이고, $n \ge 1$이므로

$1 \le n \le 10+5\sqrt{2}$를 만족하는 자연수 n의 개수를 구하면 된다. $n=1,2,3,4,\cdots,17$

n의 개수는 17개다.

[주관식]

26. (가)에서, $AB=BA \cdots ①$

①을 이용하여 (나)를 변형하면, $X_n=A+B$

$\therefore X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{10}=10(A+B) \cdots ②$

A,B의 성분의 합이 각각 1,8이므로 ②식의 모든 성분의 합은 90이다.

27. 원하는 상황이 나오려면, A에서 2번, B에서 2번 공을 꺼내면서, A에서는 흰 구슬을 2번 꺼내고, B에서는 검은 구슬을 2번 꺼내야한다. 확률값을 P라 하자.

$P={}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\right)^2=\frac{8}{243}$

$p=243,q=8$이므로 $p+q=251$

28. 직사각형의 넓이를 S라 하면, $S=\overline{AB}\times\overline{AC}$

$$S=\frac{1}{2}t^2\left(-\frac{1}{2}t^2-t+10\right)\cdots ①$$

S의 최댓값을 $S_{\max}$라 하자. $S_{\max}$를 구하기 위해 ①을 미분하면, $S'=-t^3-\frac{3}{2}t^2+10t$, $S'=0$을 만족하는 t는 $t=-4,0,\frac{5}{2}$이다. 조건에 맞는 t는 $t=\frac{5}{2}$이다. $\therefore 10t=25$

29. $A_k=\frac{1}{2}x_kf(x_k)$이다. 또, $\Delta x_k=\frac{2}{n}$이다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}\frac{1}{2}x_kf(x_k)$

무한급수를 정적분으로 표현하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}\frac{1}{2}x_kf(x_k)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_kf(x_k)\Delta x_k\\&=\int_1^3 xf(x)dx\\&=88\end{aligned}$$

30. A_1,A_k,A_m이 한 직선 위에 있기 위해서는 각각의 x좌표와 y좌표가 등차수열을 이루어야한다. 즉, A_k의 x좌표는 1이고, A_m의 x좌표는 2이다. 지표와 가수 조건에 의해 $A_k(1,\log k-1)$, $A_m(2,\log m-2)$

$A_1(0,0)$이므로, 공차는 $\log k-1$이다.

즉, $2\log k-2=\log m-2$이고, $k^2=m$의 식을 얻는다.

$10<k<100$, $100\le m<1000$에서,

$m=k^2$을 대입하면, $10<k<10\sqrt{10}$이고, 이를 만족하는 자연수 k의 최대값은 31이다. 그렇다면 $m=31^2=961$

$\therefore m+k$의 최대값은 992이다.